УДК 539.3: 622.831

А.А.Левшин[1], П.М.Величко[2], В.Н.Ревва[3]

ИССЛЕДОВАНИЕ НОРМАЛЬНОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ АНИЗОТРОПНОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД

[1] Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
340114, г.Донецк, ул.Р.Люксембург, 74

[2] Донецкий государственный университет,
340055, г.Донецк, ул.Университетская, 24

[3] Донецкий физико-технический институт НАН Украины,
340114, г.Донецк, ул.Р.Люксембург, 72

Статья поступила в редакцию 19 октября 1995 года

В рамках плоской деформации исследовано напряженно-деформированное состояние анизотропного массива горных пород в случае разработки пласта твердого полезного ископаемого при произвольной ориентации главных напряжений естественного поля относительно осей выработанного пространства.

В работе [1] при изучении закономерностей перераспределения напряжений в массивах горных пород с развивающимся выработанным пространством отмечено следующее. Если оси трехмерной ориентации выработанного пространства совпадают с главными осями естественного поля напряжений массива, то вокруг выработки при ведении очистных работ устанавливается возмущенное поле напряжений конечных размеров, геометрически полностью определяемое линейным размером свободного выработанного пространства. В противном случае, т.е. при несовпадении осей, при развитии фронта очистных работ имеет место процесс наложения нормального, поперечного и продольного сдвижения в массиве. В этом случае поля возмущений напряжений геометрически обусловлены всей протяженностью отработанной части пласта, ясно также, что претерпевает изменение распределение напряжений в массиве относительно варианта совпадения осей. Общая картина деформирования усложняется возникающим трением между взаимодействующими породами кровли и почвы, которое препятствует поперечному и продольному сдвижению.

В данной статье в рамках плоской деформации исследовано напряженно-деформированное состояние анизотропного массива горных пород при разработке

пласта твердого полезного ископаемого при произвольной ориентации главных напряжений естественного поля относительно осей выработанного пространства. В этом случае в самом процессе деформирования массива можно выделить нормальное и поперечное сдвижение. Вначале рассмотрим две вспомогательные задачи теории упругости для анизотропного пространства, моделирующие соответственно нормальное и поперечное деформирование массива.

Пусть анизотропная среда с одной плоскостью упругой симметрии занимает верхнее полупространство и находится в условиях плоской деформации. Выберем прямоугольную систему координат xOy, направив ось x вдоль границы L полуплоскости G^*, а ось y – вертикально вверх. Пусть комплексная переменная $z = x + iy$ принадлежит верхней полуплоскости. На действительной оси расположены непересекающиеся конечные отрезки (a_k, b_k), $k = 1,...,n$, совокупность которых обозначим через L_1. Совокупность (b_k, a_{k+1}) обозначим через L_2, причем полагаем $a_{n+1} = a_1$. При этом выполняется условие $a_1<b_1...<a_n<b_n$. На границе заданы следующие условия:

$$\sigma_y = P(t),\ t \in L_1;\ v = w(t),\ t \in L_2;\ \tau_{xy} = 0,\ t \in L\ . \tag{1}$$

Здесь $w(t)$ – функция, дифференцируемая на L_2; $P(t)$ и $w'(t)$ – функции, удовлетворяющие условию Гельдера [2] на L_1 и L_2 соответственно, включая бесконечно удаленную точку, где $w'(\infty) = 0$; t – аффикс контура. Более общая постановка задачи (1) рассматривалась в [3,4].

Компоненты тензора напряжений и производной вектора перемещения выражаются через две аналитические функции $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ усложненных комплексных переменных [5]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\,\Phi(z_1) + \mu_2^2\,\Psi(z_2)\right],\\
&\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\left[\Phi(z_1) + \Psi(z_2)\right],\\
&\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\,\Phi(z_1) + \mu_2\,\Psi(z_2)\right],\\
&\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,\mathrm{Re}\left[p_1\,\Phi(z_1) + p_2\,\Psi(z_2)\right],\\
&\frac{\partial v}{\partial x} = 2\,\mathrm{Re}\left[q_1\,\Phi(z_1) + q_2\,\Psi(z_2)\right],\\
&z_j = x + \mu_j\,y, \quad j = 1,2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора напряжений; u и v – перемещения в направлении осей x и y соответственно; z_j $(j = 1,2)$ – усложненные комплексные переменные; $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ – корни характеристического уравнения, порождаемого дифференциальным оператором четвертого порядка; p_j, q_j – известные постоянные [5].

Предположим, что главный вектор внешних усилий, действующих на границе полуплоскости, конечен, комплексные потенциалы исчезают на бесконечности $\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0$.

Общее решение граничной задачи (1), сингулярное во всех точках раздела граничных условий и исчезающее на бесконечности, найдем с помощью формул работы [3]. Для рассматриваемого частного случая имеем

$$F(z) = \left[\pi \mathrm{i}\, \mathrm{X}(z)\right]^{-1} \int_L \mathrm{X}^+(t) h_0(t)(t-z)^{-1} \mathrm{d}t + \Phi_0(z),$$

$$\Phi_0(z) = \left(c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_n\right) \Big/ \mathrm{X}(z),$$

$$\mathrm{X}(z) = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{(z-a_k)(z-b_k)},$$

$$h_0(t) = \begin{cases} P(t)/2, \; t \in L_1, \\ -iw'(t)/\beta, \; t \in L_2, \end{cases} \tag{3}$$

$$\beta = \frac{\beta_{22}}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\overline{\mu}_1} + \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\overline{\mu}_2} \right),$$

$$\Phi(z_1) = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} F(z_1), \qquad \Psi(z_2) = -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} F(z_2),$$

где $c_1,\ldots,c_n$ – произвольные вещественные постоянные; β_{22} – приведенная упругая постоянная [5].

Вещественные постоянные c_i определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$w(b_k) - w(a_k) = -2 \int_{a_k}^{b_k} \beta \operatorname{Im} F(t) \mathrm{d}t, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

После нахождения решения системы (4) комплексные потенциалы (3) становятся полностью определенными и являются единственным решением граничной задачи (1).

Исследуем поперечное деформирование анизотропного массива. Естественное напряженное состояние в массиве определяется действием силы тяжести и стесненными условиями деформирования составляющих его горных пород. Предположим, что существует произвольным образом ориентированная плоская поверхность, составляющая некоторый угол с главными направлениями естественного поля напряжений, на которой отсутствуют (частично отсутствуют) касательные напряжения. Такие поверхности могут существовать в массиве в связи с процессами его образования (сброс, надвиг и т.д.), формируя аномальное поле напряжений, либо создаются искусственно соответствующей технологией выемки полезного ископаемого. Особенностью поверхности скольжения является налегание

и взаимодействие берегов. С механической точки зрения при переходе через такие поверхности сохраняются непрерывными нормальное перемещение, нормальная и касательная компоненты напряжения, допускается разрыв тангенциального перемещения (напряжения). При взаимодействии берегов поверхности скольжения возникают процессы трения, препятствующие сдвижению, т.е. в общем случае при постановке задачи механики необходимо учитывать нелинейную зависимость между касательной и нормальной компонентами напряжения на границе.

Рассмотрим анизотропную среду, занимающую плоскость G, разрезанную вдоль n участков $L_k^0 = \left(a_k^0, b_k^0\right)$, $k = 1,...,n$ по действительной оси Ox. Выберем систему координат xOy таким образом, чтобы ее оси совпали с главными направлениями упругости. Совокупность отрезков L_k^0 обозначим через L^0. По структуре L^0 аналогична L_1, но не совпадает с L_1 в общем случае.

Напряжения в рассматриваемой среде представим в виде суммы естественных и дополнительных

$$\sigma_x^e = \sigma_x^0 + \sigma_x, \quad \sigma_y^e = \sigma_y^0 + \sigma_y, \quad \tau_{xy}^e = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}, \tag{5}$$

где $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ – естественные напряжения; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – дополнительные напряжения.

Связь компонент тензора напряжения и вектора перемещения с аналитическими функциями усложненных комплексных переменных выбираем в виде формул (2), функции $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ предполагаем исчезающими на бесконечности.

Рассмотрим следующую постановку задачи теории упругости для анизотропной плоскости, находящейся в условиях плоской деформации, с разрезами вдоль действительной оси. На границе L^0 скачки нормального смещения, нормального и касательного напряжения равны нулю:

$$[v] = \left[\sigma_y^e\right] = \left[\tau_{xy}^e\right] = 0, \quad t \in L^0. \tag{6}$$

Силовое взаимодействие берегов поверхности скольжения описывается зависимостью

$$\tau_{xy}^{e\pm} = F^e\left(\sigma_y^{e\pm}\right), \quad t \in L^0, \tag{7}$$

где F^e – произвольная функция, удовлетворяющая условию Гельдера; квадратной скобкой обозначен скачок ($[f] = f^+ - f^-$) стоящей внутри нее величины при переходе через границу L^0. Знаки "+" и "–" отвечают верхнему и нижнему берегам разреза.

Впервые задача (6), (7) была поставлена и решена для изотропной среды Г.П.Черепановым [6].

Если F^e – линейная функция, представимая, например, в виде сухого кулонова трения со сцеплением

$$\tau_{xy}^{e\pm} = -k_c^{\pm} + \sigma_y^{e\pm} \operatorname{tg}\rho \quad ,$$

(где k_c – коэффициент сцепления, ρ – угол внутреннего трения), то общее решение задачи (6), (7) запишем с помощью [7] в виде

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)\,X(z_1)} \int_{L0} \frac{(s^+ + s^-)\,X^+(t)}{t - z_1}\,dt +$$

$$+ \frac{P_{n-1}(z_1)}{(\mu_1 - \mu_2)\,X(z_1)}, \tag{8}$$

$$\Psi(z_2) = -\Phi(z_2).$$

Здесь $s^{\pm}(t) = \frac{1}{2}\left(k - \sigma_y^0 \operatorname{tg}\rho + \tau_{xy}^0\right)$, $\mu_j = i\beta_j$, $j = 1,2$, $X(z_1)$ – функция, заданная формулой (3), $P_{n-1}(z_1) = i\left(c_1^0 z^{n-1} + \ldots + c_n^0\right)$; $c_1^0, \ldots, c_n^0$ – вещественные постоянные.

Формулы (8) содержат чисто мнимые постоянные $i\,c_1^0, \ldots, i\,c_n^0$. Следует подчеркнуть, что решение (8) построено в соответствии с производной скачка нормального смещения, поэтому переход непосредственно к скачку смещения с учетом граничного условия (6) позволяет построить систему n однородных линейных алгебраических уравнений для определения указанных постоянных:

$$\int_{a_k^0}^{b_k^0} \left(q_1^* \operatorname{Im}[\Phi] + q_2^* \operatorname{Im}[\Psi]\right) dt = 0, \quad k = 1, \ldots, n\ ,$$

$$q_j^* = \operatorname{Im} q_j, \quad j = 1, 2\,. \tag{9}$$

С помощью предложенного подхода изучим напряженно-деформированное состояние анизотропного массива горных пород при отработке пластообразной залежи мощности $2h$. Пусть ориентация главных направлений естественного поля напряжений произвольна относительно системы координат $x0y$, связанной с выработанным пространством (рис.1). Из рис.1 следует, что рассматривается достаточно длительная стадия отработки пласта твердого полезного ископаемого. При отработке пласта в выработанном пространстве происходит процесс деформирования пород кровли и почвы, в результате чего имеет место сближение обнаженных поверхностей с последующим их контактом и силовым взаимодействием. На рис.1 область контакта обозначена $(-a,a)$, границы выработанного пространства – $(-x_*,x_*)$. Здесь следует отметить, что в общем случае наблюдается процесс поперечного сдвижения горных пород кровли и почвы, более того, в области контакта $(-a,a)$ указанному сдвижению препятствует трение. Последнее формируется за счет восстанавливающегося горного давления в области контакта. Компоненты тензора напряжений в массиве ищем в виде суммы естественных

и дополнительных, обусловленных нормальным и поперечным деформированием, в виде

$$\sigma_x^e = \sigma_x^0 + \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)},$$
$$\sigma_y^e = \sigma_y^0 + \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}, \qquad (10)$$
$$\tau_{xy}^e = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}.$$

Компоненты с индексом 1 отнесены к нормальному, с индексом 2 – к поперечному деформированию.

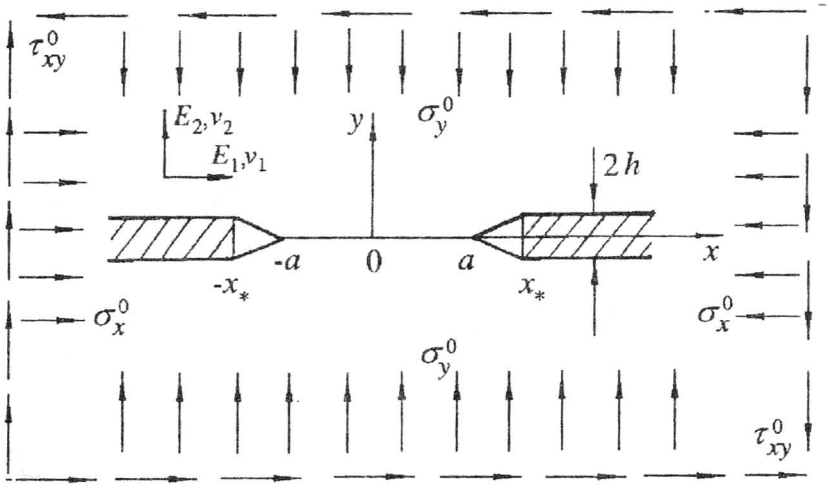

Рис.1. Схема нагружения анизотропного массива горных пород

Физическая постановка задачи позволяет сформулировать граничные условия смешанной задачи упругости для анизотропной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси, в следующем виде

$$v^{\pm} = \pm h + \varepsilon(x), \qquad |x| > x_*,$$
$$u^{\pm} = 0, \qquad |x| > x_*,$$
$$\sigma_y^e = \tau_{xy}^e = 0, \qquad a < |x| < x_*, \qquad (11)$$
$$v^{\pm} = \varepsilon(x), \qquad |x| < a,$$
$$\tau_{xy}^{e\pm} = k_c^{\pm} + \sigma_y^e \operatorname{tg}\rho, \qquad |x| < a.$$

Здесь функция искривления границы $\varepsilon(x)$ и величина a заранее не известны и подлежат определению в ходе решения задачи, причем $\varepsilon(\infty) = 0$.

Компоненты с индексом 1 из формул (10) определим из следующей группы смешанных граничных условий:

$$
\begin{aligned}
&v^{(1)} = h, && |x| > x_*;\\
&v^{(1)} = 0, && |x| < a;\\
&\sigma_y^{(1)} = -\sigma_y^{(0)}, && a < |x| < x_*;\\
&\tau_{xy}^{(1)} = 0, && |x| < \infty.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Условия (12) отражают наличие пласта мощности $2h$, области смыкания пород кровли и почвы протяженности $2a$, отсутствие полной нормальной и касательной компоненты напряжения в зоне свободного состояния кровли и почвы.

Решение смешанной задачи (12) восстанавливаем с помощью (1)–(4) в виде

$$
\Phi^{(1)}(z_1) = -\frac{\sigma_y^0}{2}\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left(1-\sqrt{\frac{z_1^2-a^2}{z_1^2-x_*}}\right),
$$

$$
\Psi^{(1)}(z_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2}\Phi(z_2)\ . \tag{13}
$$

Решение (13) исчезает на бесконечности, ограничено в точках смыкания $-a,a$, не ограничено в точках $-x_*,x_*$.

Воспользуемся связью (2) нормального перемещения с потенциалами (13) и найдем представление для $v(x)$ при $a < |x| < x_*$:

$$
v(x) = \left[-\sigma_y^0\beta_{22}(\beta_2+\beta_1)/\beta_1\beta_2\right]\int_a^x \sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2-x_*^2}}\,\mathrm{d}x.
$$

После интегрирования с учетом граничных условий для перемещений (12) находим трансцендентное уравнение относительно неизвестной величины $2a$

$$
E(k_0)-\left(\frac{a}{x_*}\right)K(k_0) = -\frac{h\beta_1\beta_2}{\sigma_y^0\beta_{22}(\beta_2+\beta_1)x_*}\ . \tag{14}
$$

Здесь

$$
k_0 = \sqrt{1-(a/x_*)^2},
$$

$$
K(k_0) = \int_0^{\pi/2}\left(1-k_0^2\sin^2\xi\right)^{-1/2}\mathrm{d}\xi,
$$

$$
E(k_0) = \int_0^{\pi/2}\left(1-k_0^2\sin^2\xi\right)^{1/2}\mathrm{d}\xi,
$$

последние, соответственно, эллиптические интегралы первого и второго рода.

Соотношение (14) запишем в виде

$$x_* c = a_* \ , \tag{15}$$

где $c = \int\limits_{a_0}^{1} \sqrt{\left(t^2 - a_0^2\right)/\left(1 - t^2\right)}\, \mathrm{d}t$, $a_0 = a/x_*$. Здесь a_* совпадает с правой частью (14).

Численное решение трансцендентного уравнения (15) по определению a/x_* в зависимости от x_*/a_* представлено на рис.2. Решение (14) в совокупности с потенциалами (13) является решением задачи (12).

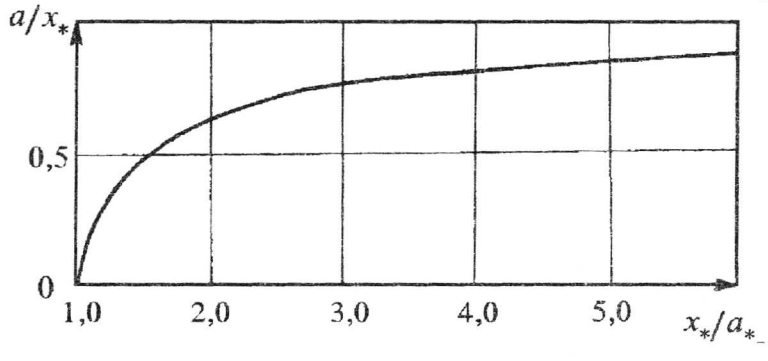

Рис.2. Результаты решения трансцендентного уравнения (15)

Компоненты тензора напряжений с индексом 2 в формулах (10) при развитии фронта очистных работ с расширяющейся зоной контакта пород кровли и почвы (см. рис.1) определим из граничной задачи о поперечном деформировании

$$\begin{aligned} &\left[v^{(2)}\right] = \left[\sigma_y^{(2)}\right] = \left[\tau_{xy}^{(2)}\right] = 0, && |x| < x_*, \\ &\tau_{xy}^{(2)\pm} = -\tau_{xy}^{0}, && a < |x| < x_*, \\ &\tau_{xy}^{(2)\pm} = -\tau_{xy}^{0} - T\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{x_*^2 - x^2}}, && |x| < a, \end{aligned} \tag{16}$$

где $T = -\sigma_y^0 \operatorname{tg}\rho$.

Связность задачи о нормальном и поперечном деформировании обусловлена видом граничного условия (16) для касательных напряжений при $|x| < a$, где трение определено горным давлением в области контакта пород кровли и почвы. С другой стороны, в силу первого условия (16) изменений граничных условий в задаче о нормальном деформировании (12) нет.

Граничная задача (16) допускает точное решение, которое с помощью формул (2), (8) и (9) запишем в виде

$$\Phi^{(2)}(z_1) = \frac{\tau_{xy}^0}{2(\mu_1 - \mu_2)}\left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - x_*^2}}\right) + \frac{T}{2(\mu_1 - \mu_2)}\left(\sqrt{\frac{z_1^2 - a^2}{z_1^2 - x_*^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - x_*^2}}\right),$$

$$\Psi^{(2)}(z_2) = -\Phi^{(2)}(z_2) \tag{17}$$

С помощью (17) легко получить компоненту напряжения $\sigma_x^{(2)}$ на контуре и перемещение $u(x)$ в виде

$$\sigma_x^{(2)} = (\beta_1 + \beta_2)\left(-\tau_{xy}^0 - T\right)\frac{x}{\sqrt{x_*^2 - x^2}}, \quad 0 < x < a;$$

$$\sigma_x^{(2)} = (\beta_1 + \beta_2)\left[-\tau_{xy}^0 \frac{x}{\sqrt{x_*^2 - x^2}} - T\left(-\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x_*^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{x_*^2 - x^2}}\right)\right], \quad a < x < x_*;$$

$$\frac{u}{a_*} = \beta_{11}(\beta_1 + \beta_2)\left[\left(\tau_{xy}^0 + T\right)\sqrt{x_*^2 - x^2} - T\int_x^{x_*}\sqrt{\frac{t^2 - a^2}{x_*^2 - t^2}}\,\mathrm{d}t\right], \quad a < x < x_*; \tag{18}$$

$$\frac{u}{a_*} = \beta_{11}(\beta_1 + \beta_2)\left[\left(\tau_{xy}^0 + T\right)\sqrt{x_*^2 - x^2} - c\right], \quad 0 < x < a,$$

где

$$c = T\int_a^{x_*}\sqrt{\frac{t^2 - a^2}{x_*^2 - t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Здесь необходимо отметить, что условиями корректности граничной задачи (16) и решения (17) являются очевидные ограничения

$$[u] < 0, \quad \frac{\mathrm{d}(-u(0))}{\mathrm{d}x_*} \geq 0. \tag{19}$$

Из формул (18) для перемещений следует, что максимальное значение этой величины достигается в точке $x = 0$. Из расчета видно, что если величина T лежит в диапазоне от 0 до $-\tau_{xy}^0$, то в процессе развития фронта очистных работ величина $-u(0)$ нарастает.

В случае, если $|\tau_{xy}^0| = |T|$, при росте параметра x_* сами тангенциальные пе-

ремещения не растут, сохраняя значение тангенциальных перемещений пород кровли и почвы, имевших место при первичной посадке кровли.

1. *С.В.Кузнецов*, Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых N 6, 18 (1988).
2. *Н.И.Мусхелишвили*. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.
3. *А.С.Космодамианский, А.А.Левшин*. Доклады АН УССР N 9, 34 (1986).
4. *А.А.Левшин*, Известия АН СССР. Механика твердого тела N 5, 180 (1981).
5. *С.Г.Лехницкий*. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. *Г.П.Черепанов*, Прикладная математика и механика 30, вып. 1, 82 (1966).
7. *А.А.Левшин*. Теоретическая и прикладная механика. – Киев–Донецк: Вища школа, вып. 17, 45 (1986).

A.A.Levshin, P.M.Velichko, V.N.Revva

INVESTIGATION OF THE NORMAL AND TRANSVERSE DEFORMATION OF THE ROCK ANISOTROPIC MASS

Within the framework of plane deformation the stressed-strained state of the anisotropic mass of rock has been investigated for the case when a solid seam is developed at an arbitrary orientation of the natural-field principal stresses relative to the axes of goaf.

Fig.1. Schematic showing of loading the rock anisotropic mass

Fig.2. Results of solution of transcedental equation (15)