PACS: 02.50.Ga, 02.50.Pz

И.Б. Краснюк, Т.Н. Мельник, В.М. Юрченко

НЕСТАНДАРТНАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ РОМАНЕНКО–ШАРКОВСКОГО ДЛЯ ПРОСТОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина

Статья поступила в редакцию 17 февраля 2020 года

Получена предельная лемма о поведении семейства траекторий $\mu_\lambda S(t)$ динамической системы с начальным распределением μ_λ при $t \to \infty$, где $S(t)$ при $t \geq 0$ – марковская полугруппа детерминированного одномерного отображения, для которого предположительно при $\lambda \in \Lambda \subset R^1$ существует инвариантная перемешивающая мера Якобсона. Результат является обобщением стохастического упорядочения вероятностных мер для унимодального отображения, однако допускает «расширение» на более общий класс случайных процессов (на семейство мартингальных и, в частности, феллеровских процессов) и формально является простым следствием существования так называемой фильтрации системы множеств (аналога обычной Σ-алгебры) фазового пространства случайных траекторий по соответствующей системе μ_λ-мер. Для доказательства применяются простые результаты современного нестандартного анализа.

Ключевые слова: мартингал, фильтрация, расширенный универсум, цикл интервалов, считающая мера, борелевская алгебра

Введение

Из известного результата Якобсона [1] следует, что вероятностные меры существуют при некоторых значениях параметра $\lambda \in \Lambda \neq \phi$, где ϕ – пустое множество. В [2] показано, что такие меры порождаются стационарными марковскими процессами в узком смысле и для них существует аналог известного порядка Шарковского [3] по параметру λ.

Цель данной работы состоит в том, чтобы доказать аналог теоремы Романенко–Шарковского (RSh) [4] об упорядочении вероятностных мер μ_λ для гладкого отображения $f_1 : I \to I$, преобразующего некоторый открытый ограниченный интервал I в себя.

Ниже мы покажем, что аналогичный результат имеет место для логистического отображения

$$X_{t+1} = \lambda X_t \left(1 - X_t\right), \quad t > 0, \quad 0 < \lambda < 4. \tag{1}$$

В нестандартном смысле фазовое пространство случайных траекторий, порождаемых отображением (1), можно значительно расширить. Как следует из [2], при $\lambda = 4$ траектории, порождаемые итерациями некоторых точек функционального пространства $x\left[0,1\right) \in X$, определяют стационарный марковский процесс с распределением μ_λ, инвариантным относительно сдвига. Метрическое пространство X выбирается некоторым специальным образом (см., напр., [2,5]), поскольку классические пространства траекторий обычно не являются компактными.

1. Порядок Шарковского на пространстве цилиндрических случайных функций

Докажем существование порядка Шарковского на пространстве обычных цилиндрических случайных функций, порождающих классическую σ-алгебру событий на некотором нестандартном пространстве, заданном на гиперконечной оси времени $T = \{t_0, t_1, ..., t_i\}$, где $T = t_0 < t_1 < ... < t_\xi = 1$ и $t_{i+1} - t_i \approx 0$ для всех i. Здесь отношение «≈» понимается в смысле, подробно определенном в [5].

Дадим лишь краткое пояснение нестандартного универсума гипердействительных чисел. Пусть N – множество натуральных чисел. Рассмотрим ультрафильтр на N, который определяется на семействе F подмножеств N, обладающих свойствами

$$\begin{gathered} N \in F, \;\; \phi \notin F, \\ A_1, ..., A_n \in F \Rightarrow A_1 \cap ... A_n \in F, \\ A \in F, \;\; A \subset B \Rightarrow B \in F. \end{gathered} \tag{2}$$

Образование (2) называется фильтром, а из теоремы 1.1.1 [5] следует, что существуют так называемые свободные ультрафильтры U на N, которые являются расширением фильтра конфинитных множеств $E \subset N$ вида

$$E = N - \{m_1, ..., m_k\}. \tag{3}$$

Мартингальный аналог теоремы Романенко–Шарковского. Идея доказательства состоит в следующем. Будем рассматривать вместо траекторий X_t, порождаемых отображением (1), траектории, заданные отображением $X \to \int_0^1 X\mathrm{d}N$, где N является L^2-мартингалом. По L^2-мартингалу N определим меру γ_n на σ-алгебре предсказуемых множеств соотношением

$$\gamma_N\left[A \times (s,t)\right] = E\left\{I_A\left[N(t) - N(s)\right]^2\right\} \tag{4}$$

для всех предсказуемых прямоугольников, причем

$$\gamma_N\left(A \times \{0\}\right) = 0. \tag{5}$$

Здесь E – математическое ожидание, а I_A – индикатор множества A. Тогда γ_N называется мерой Долеан, связанной с мартингалом N [6, с. 173].

Отображение $X \to \int_0^1 X\mathrm{d}N$ является изометрией из $L^2(\gamma_N)$ в $L^2(P)$. Поскольку простые функции

$$X = \sum_{i=1}^{N} a_i I_{A_i} x(s_i, t_i), \tag{6}$$

где $A_i \in F_{s_i}$, а интеграл дается формулой

$$\left(\int_0^1 X\mathrm{d}N\right)(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(\omega)\big(N(\omega, t_i) - N(\omega, s_i)\big), \tag{7}$$

плотны в $L^2(\gamma_N)$, то данное отображение продолжается до изометрии всего пространства $L^2(\gamma_N)$ в $L^2(P)$. Напомним, что L^2-мартингал относительно стохастической фильтрации $\left(\Omega, \{F_t\}_{t\in[0,1]}, P\right)$ – это просто такой мартингал $N : \Omega \times [0,1] \to R$, что $E\left(N_t^2\right) < \infty$.

Напомним также, что функция $f : \Omega \to R$ измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда она имеет поднятие $F : T \to {}^*R$, где T – гиперконечная ось времени. Здесь ${}^*R = R^N/U$ – нестандартное расширение, состоящее из гипердействительных чисел.

Будем называть мартингал λ^2-мартингалом, если его траектории квадратично интегрируемы. Более точно гиперконечный мартингал M называется λ^2-мартингалом, если ${}^0E\left(M_t^2\right) < \infty$ для всех $t \in T$, где ${}^0E$ – стандартная часть (обычное число на R). Гиперконечный процесс X принадлежит классу $SL^2(M)$, если он является неупреждающим и квадратично интегрируемым относительно меры γ^M.

Тогда имеет место следующая условная лемма.

Лемма 1. Пусть вложение $X_t \to \int\limits_0^1 X_t \mathrm{d}M_t$ для λ^2-мартингала M_t непрерывно в $SL^2(M)$, X принадлежит классу $SL^2(M)$. Выберем $\lambda \in \Lambda$ такое, что отображение f_λ из (1) допускает свойство автостохастичности, т.е. существует *стационарный в узком смысле* марковский процесс такой, что для него существует вероятностная мера μ_λ на R. Тогда существует SL^2-непрерывное продолжение инвариантной меры μ_λ в R для траекторий отображения f_λ на меру γ^M, которую можно построить на основе того мартингала, по которому проводится интегрирование. Эта мера γ^M принадлежит расширенному универсуму ${}^*R$.

Из леммы 1 будет немедленно следовать аналог теоремы Романенко–Шарковского, коль скоро вложение $X_t \to \int_0^1 X_t \mathrm{d}M_t$, по предположению, непрерывно. Класс мартингалов M_t, для которых это так, достаточно широк, поэтому продолжение RSh-теоремы [4] на расширенный универсум $^*R$ охватывает *более широкое семейство случайных процессов*, а потому аналогичная теорема в $^*R$ содержательна.

Доказательство. Вся трудность, конечно, состоит в том, чтобы построить соответствующую фильтрацию, которая продолжала бы некий аналог фильтрации на R для обычных одномерных отображений. Пусть для определенности $f_1 : I \to I$ – любое унимодальное отображение («перевернутая» парабола с одним экстремумом; определение см. в [5]). Обозначим, как обычно, через $A_n = A_n(f)$ множество циклов интервалов периода n отображения f, содержащих точку экстремума c такую, что $A_n(f) \neq \phi$. Известно [5, с. 75], что множество A_n содержит максимальный по вложению элемент, т.е. индексированное множество $A_n^{(\alpha)}$ ограничено сверху циклом интервалов $A_n^{(\beta)}$, если $J_i^{(\alpha)} \subset J_i^{(\beta)}$ при всех $i = 0,1,\ldots,n-1$. Следовательно, множество $F = \left\{A_n^{(\alpha)},\ \alpha \in \wp\right\}$ вполне упорядочено в указанном смысле ($F \subset A_n$), и элементы F ограничены сверху циклом интервалов $A_n = \left\{\overline{\bigcup_{\alpha\in\wp} J_0^{\alpha}}, \ldots, \overline{\bigcup_{\alpha\in\wp} J_{n-1}^{\alpha}}\right\}$, где «черта» означает замыкание множества. Тогда (по лемме Цорна о выборе, см. [5]) частично упорядоченное множество A_n содержит максимальный элемент $A_n^* = \left\{J_{n,0}^*, \ldots, J_{k,k-1}^*\right\}$, и можно считать, что $c \in J_{n,0}^*$ и, следовательно, *цикл интервалов A_n^* определяется однозначно.*

Пусть $\{p_m\}_{m=1}^{m^*}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $A_{p_m}(f) \neq 0,\ m^* < \infty$. Положим $\Phi_m^* = \left\{x \in J : J \in A_{p_m}^*\right\}$. Тогда $f\left(\Phi_m^*\right) \subset \Phi_m^*$, и последовательность замкнутых множеств $\left\{\Phi_m^*\right\}_{m=1}^{m^*}$ образует нечто подобное фильтрации (см. [5, с. 76]), с помощью которой удается разбить множество всех траекторий отображения на конечное или счетное число естественных классов и изучить детально некоторые вопросы динамики одномерных отображений [4].

Положим далее, что T – гиперконечная ось времени и $\{\Omega, A, P\}$ – гиперконечное вероятностное пространство. Внутренней фильтрацией на Ω, параметризованной множеством T, называется набор $\left(\Omega, \{A_t\}_{t\in T}, P\right)$, где $\{A_t\}_{t\in T}$ – возрастающая внутренняя последовательность внутренних алгебр в Ω. Стохастическая фильтрация – это набор $\left(\Omega, \{B_t\}_{t\in[0,1]}, Q\right)$, где $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ – возрастающее семейство σ-алгебр на Ω, а Q – вероятностная мера на B_1.

Пусть $\left(\Omega, \{A_t\}_{t\in T}, P\right)$ – внутренняя фильтрация (она определена выше). Тогда стохастическая фильтрация, порожденная внутренней фильтрацией, состоит из множества Ω, меры Леба $L(P)$ и семейства σ-алгебр:

$$B_t = \sigma\left(\bigcup_{st} L\left(A_s\right) \cup N\right), \tag{8}$$

где N состоит из принадлежащих $L\left(A_1\right)$ множеств нулевой $L(P)$-меры.

Согласно лемме 4.3.1 из [6], если $\left(\Omega, \{B_t\}_{t\in[0,1]}, L(P)\right)$ – стохастическая фильтрация $\left(\Omega, \{A_t\}_{t\in T}, P\right)$, то для всех $t\in[0,1]$

$$B_t = \bigcup_{st} \sigma\left(L\left(A_s\right) \cup N\right). \tag{9}$$

Теперь заметим, что в условиях теоремы 6.6 из [5] в стандартной версии имеет место вложение $C_{\infty}^{(0)} \subset \bigcap_{m>1} \Phi_m^*$ (для «псевдофильтрации», см. выше), которое показывает, что «плохие» траектории не уходят далеко от цикла интервалов. Здесь $\Phi_m^* = \bigcup_{i=0}^{p_m-1} J_m^{(j)}$, а интервалы $J_m^{(0)}, \ldots, J_m^{p_m-1}$ образуют цикл интервалов периода $p_m = 2^m$.

Как показал Мизуревич [7], каждому из таких интервалов приписывается мера, равная 2^{-m}, а этой *считающей* мере, очевидно, соответствует некоторая λ-нормированная считающая мера (например, для андерсоновского случайного блуждания) на гиперконечном интервале (см. [6] и текст ниже). Данной λ-нормированной считающей мере, в свою очередь, как следует из [6], можно поставить в соответствие меру Леба.

Напомним конструкцию, представленную в [6, с. 84]. Рассмотрим пространство с мерой $\left(2^N, B, \mu\right)$, определяемое следующим образом: на каждом сомножителе $2 = \{0,1\}$ берутся σ-алгебра всех подмножеств и «считающая» мера, приписывающая одинаковый вес каждой точке пространства (ср. с мерой, определяемой Мизуревичем [7] в теореме 6.6 из [5]). Тогда B – это обычная σ-алгебра в произведении измеримых пространств, а μ – обычная «product»-мера, являющаяся произведением мер на сомножителях.

Нестандартный метод моделирования этого же явления состоит в выборе некоторого $\eta \in {}^*N - N$ и рассмотрении пространства $\Omega = \{0,1\}^n$ всех «внутренних» последовательностей нулей и единиц длины η. В этом случае пусть

A – алгебра всех внутренних подмножеств Ω и P – соответствующая считающая мера. Тогда для любого $A \subset A$

$$P(A) = \frac{|A|}{2^{\eta}}, \tag{10}$$

где $|A|$ – внутренняя мощность внутреннего множества $A \in \Omega$ (т.е. число элементов в A), а $2^{\eta} = |\Omega|$.

2. Нестандартный анализ стохастического упорядочения вероятностных мер

Как связано с этой конструкцией пространство $\left(2^N, B, \mu\right)$? Пусть $st_{\eta} : \Omega \to 2^N$ есть отображение ограничения. Тогда для любого $A \subset B$

$$\mu(A) = L(P)\left(st_{\eta}^{-1}(A)\right), \tag{11}$$

где $L(P)$ – мера Леба, т.е. отображение st_{η} сохраняет меру. Как отмечено в [7], это утверждение *почти верно*: необходимо только аккуратно *согласовать соответствующие σ-алгебры*. Но в силу вложения $C_{\infty}^{(0)} \subset \bigcap_{m>0} \Phi_m^*$, показывающего, что «плохие» траектории не уходят далеко от цикла интервалов и свойств отображения $st_{\eta}(\cdot)$, всегда можно выполнить взятие стандартной части (во всяком случае, с некоторой точностью) и всегда с согласованием порядка соответствующей «псевдофильтрации» $\left\{Q_m^*\right\}_{m=1}^{m^*}$ и стохастической фильтрации $\left(\Omega, \{\beta_t\}_{t\in[0,1]}, Q\right)$, где вероятностная мера $Q = \mu$ порождена внутренней мерой γ на $(\Omega \times T)$ так, что

$$\mu = L(\gamma) \circ (\mathrm{id} \times st)^{-1} \tag{12}$$

(см. [6, с. 161]), где id – тождественное отображение на Ω. Причем подразумевается, что $\gamma = \gamma_M$, где γ_M – мера, полученная из маргинала M по формуле $\gamma_M(\Omega \times T) = E([M](1))$, где $[M]$ – вариация мартингала (см. [6, с. 150]). В частности, для андерсоновского случайного блуждания имеем $\gamma_B = P \times \lambda$, где P – вероятностная мера, а λ – мера на T, т.е. $\lambda(\{t_i\}) = t_{i+1} - t_i$. Именно по мере γ_M процесс X принадлежит классу $SL^2(M)$ и квадратично S-интегрируем относительно меры γ_M. Это свойство [6, с. 150] и обусловило требования в лемме 1.

Положим, что мера λ соответствует просто псевдофильтрации, а меру P выберем такую, существование которой доказано Якобсоном в [1]. Заметим, что P абсолютно непрерывна относительно меры Лебега для унимодального отображения f_λ. Тогда из леммы 4.3.5 из [6] следует, что мера γ абсолютно непрерывна относительно P, а значит, и относительно меры Лебега. Отсюда следуют возможность согласования фильтрацией и автоматическое выполнение упорядочения мер (по Шарковскому) для меры P. Заметим, что мы доказали возможность согласования соответствующих σ-алгебр (фильтраций) σ_{st} и σ_{nst} в стандартной и нестандартной версиях *не обязательно для считающей меры P*, хотя, по-видимому, «мера Якобсона» всегда считающая.

Остается сказать, что отображение $X \to \int_0^1 X\,\mathrm{d}b$, рассматриваемое как отображение из $L^2\left(L(P)\times m\right)$ в $L^2\left(L(P)\right)$ (где m – мера Лебега), сохраняет норму

$$E\left(\int_0^1 X(\omega,s),\mathrm{d}b(\omega,s)\right)^2 = E\left(\int_0^1 x(t)^2,\mathrm{d}t\right), \tag{13}$$

и для ясности изложения грубо пояснить смысл основного утверждения RSh-теоремы. Пусть, например, $\varphi_\lambda = \lambda f(x)$, где $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$; $f(c)=1$, где c – точка экстремума функции φ_λ. Тогда для ω-предельных случайных траекторий имеет место упорядочение по мерам

$$\mu_{\lambda_1}[1] \prec \mu_{\lambda_2}[2] \prec \ldots \prec \mu_{\lambda_{5.2}}[5.2] \prec \ldots \prec \mu_{\lambda_5}[5] \prec \mu_{\lambda_3}[3] \tag{14}$$

или более подробно [11]:

$$1 \prec 2 \prec 2 \prec 2^2 \prec \ldots \prec 5\cdot 2^2 \prec 3\cdot 2^2 \prec \ldots \prec 5\cdot 2 \prec 3\cdot 2 \prec \ldots \prec 9 \prec 5 \prec 3, \tag{15}$$

где $\mu(k)$ – значение меры, для которой отображение f_{λ_k} имеет цикл периода k и $\lambda(n) < \lambda(n')$ при $n < n'$.

Замечание 1. Утверждение RSh-теоремы следует в основном из возможности построения псевдофильтрации интервалов (см. выше). Из *возможности согласования нестандартной и стандартной фильтраций* возможность нестандартного аналога RSh-теоремы становится почти тривиальной. Действительно, мера Лебега – это равномерная мера на [0,1] (т.е. континуальный аналог считающей меры), мера Якобсона [1] абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а соответствующая мера Леба является считающей мерой на гиперконечной аппроксимации T отрезка [0,1]. Поэтому все уже было бы ясно, если бы не тот факт, что *вопрос касается также и σ-алгебр*.

Возможность обобщения RSh-теоремы на нестандартную ситуацию в общем следует из простых приложений техники, разработанной для этой ситуации в [6], и существования псевдофильтрации в смысле [5]. Так что самого доказательства RSh-теоремы мы даже не касались.

Заметим, что RSh-теорема формулируется для стационарных марковских процессов *в узком смысле*, т.е. лишь для таких процессов строятся соответствующие меры. Нестандартное обобщение позволяет применить эту теорему для *более широкого класса случайных процессов*, что важно для задач статистической физики, поскольку отображение f_λ описывает динамику частиц с «δ-массами» Дирака. Как отмечается в [6, с. 186], «специалисты в теории вероятностей обычно не заботятся о том, на каком вероятностном пространстве они работают – лишь бы оно было достаточно «богатым», чтобы на нем могли быть построены все изучаемые явления». Как показывают примеры существования случайных аттракторов для динамических систем [8], соответствующие вероятностные пространства являются некомпактными, и вопрос построения меры, по которой соответствующая метрика была бы содержательной, является фундаментальным для задач статистической физики.

Другая важная проблема статистической физики – введение подходящей топологии на X [2]. Пусть $D[0,\infty)$ – совокупность функций η на $[0,\infty)$ со значением в X, непрерывных справа и имеющих пределы слева. Это каноническое пространство траекторий для марковского процесса с пространством состояний X. Как отмечено в [9, с. 69], теорема 4.5 из [8] утверждает, что борелевская σ-алгебра, задаваемая этой топологией, совпадает с обычной σ-алгеброй F.

Вопрос о возможности «поднятия» нестандартной фильтрации в указанном выше смысле на соответствующую топологию не исследован, не ясна даже корректность его постановки. Тем не менее последние достижения теории одномерных динамических систем (см., напр., [5]) в стандартном смысле позволяют надеяться на дальнейшее продвижение (возможно, с помощью методов нестандартного анализа [6]) в этом направлении.

Приложение

Рассмотрена система двух независимых квантовых уравнений с символами-полиномами порядка $n = 0,1\ldots$. Решения уравнений удовлетворяют функциональным граничным условиям, порождаемым отображением $\Phi : I \mapsto I$, которое (в приложении к задачам нелинейной оптики) играет роль оптического преобразователя с обратной связью на границе двухмодового одномерного резонатора. Задан также специальный класс начальных условий, описывающих «квазичастицы» [13–16].

Показано, что существуют множество символов-полиномов и множество начальных условий таких, что структура аттрактора начально-краевой задачи определяется в основном топологической структурой множества неблуждающих (в частности, неподвижных) точек граничного отображения $\Phi : I \mapsto I$, где I – открытый ограниченный интервал. Например: 1) если Φ линейно, то либо не существует аттрактора задачи, либо он состоит из единственной притягивающей точки $(u_1, u_2) = (0,0)$; 2) если Φ нелинейно и монотонно, то аттрактор содержит семейство 2^N-периодических кусочно-постоянных функций с конечным множеством точек разрыва $\Gamma < \infty$ на периоде, где N – наименьшее общее кратное периодов притягивающих циклов отображения Ф (в этом случае мы говорим о колебаниях релаксационного типа; 3) если отображение Ф многозначно, то структура аттрактора зависит от того, как устроено множество прообразов D отталкивающей неподвижной точки отображения Ф на интервале I. Если D конечно, то Г конечно. Если D бесконечно, то Г бесконечно: счетно или несчетно (гомеоморфно множеству Кантора). В первом случае мы говорим о предельных колебаниях предтурбулентного типа, а во втором – о стохастических колебаниях или колебаниях турбулентного типа; 4) аттрактор задачи состоит из периодических кусочно-постоянных функций со счетным множеством Г, которое имеет единственную или несколько точек сгущения с бесконечным множеством колебаний в каждой из их окрестностей; 5) аттрактор задачи состоит из периодических кусочно-постоянных функций с несчетным множеством Г, т.е. из случайных функций, распределение которых задается инвариантной мерой μ.

В статье мы применяем результаты нестандартного анализа [6] для конструкции аттракторов в одномерных динамических системах, которые порождаются разностными уравнениями. Если соответствующее отображение имеет цикл периода 2, то при изменении управляющего параметра возникают бифуркации удвоения периода, и далее – знаменитый порядок Шарковского. С открытием унимодальных отображений (с одной критической точкой $f'(c)=0$) появились решения, которые при вычислениях порождают «ступеньку». Предельное решение есть кусочно-постоянная функция периода p или $p/2$. Точки разрыва называются разделителем Г. Эти точки t на периоде появляются как прообразы итераций отображения $u \to f(u)$ при итерациях f^{-n}.

Если $t \in \Gamma$, то предельный образ точки t есть вертикальный интервал. Например, если f – монотонное отображение, то $I=(a,b)$, где a, b – притягивающие неподвижные точки, а $a<c<b$ – отталкивающая. На каждом шаге итераций возникает ошибка округления, поэтому, чтобы найти предел, мы должны посчитать образ точки при $t=\infty$. По существу здесь надо работать с кардинальными числами, что невозможно. Поэтому Романенко использовала подходящее вероятностное пространство. Надо знать меру μ, которая должна быть гладкой и инвариантной. Процесс f^p является вероятностным перемешивающим на каждом из интервалов $E_0,...,E_{p-1}$ так, что

$$\mu(B_1)\cap f^{-p}(B_2)\to p\mu(B_1)\odot\mu(B_2), \qquad (1)$$

где μ – период циклов.

Случайные функции будем понимать как семейства всех их конечномерных распределений. Будем отождествлять случайные функции с одинаковыми конечномерными распределениями. Такие функции называют стохастически эквивалентными в широком смысле [10].

Будем говорить, что $\zeta_1(t)$ равняется $\zeta_2(t)$, и писать $\zeta_1(t) = \zeta_2(t)$, если это равенство в смысле конечномерных функций распределения выполняется при всех $r \in N$, $z \in \mathrm{T}^r$ и почти всех $t \in \mathfrak{I}^r$. Будем писать, что $\zeta_2(t) \doteq \zeta_1(t)$, и говорить, что эти функции абсолютно равны, если это равенство выполняется при всех $t \in \mathfrak{I}^r$.

Далее рассмотрим пространство $C^\#$ – пополнение в метрике $\rho^\#$ пространства C_{ns} – несингулярных функций из $\Re\left(\left[0,1\right], I\right)$. Определение метрики $\rho^\#$ можно найти в [11]. Тогда асимптотическая динамика траекторий $S^n(\varphi]$ и соответственно структура $f^n(\varphi]$ становятся непредсказуемыми с ростом n. В результате предельная функция $f^\#$ образует случайный процесс с независимыми значениями, заданными распределением

$$F_{f^\#}(B, y) = p\mu(B\,E_i), \tag{2}$$

где E_i – компоненты носителя меры μ, $y \in E_i = \bigcup_{j\ge 0}\int f^{-jp}E_i$ – область притяжения E_i, $E_f(\mu) = \bigcup_{i=1}{}^{p-1}E_i$ – бассейн меры μ, функция распределения которого принимает вид

$$F_{f^\#}(z, y) = \mu(B_z), \quad y \in E_f(\mu), \quad B_z = (-\infty, z]\bigcup I, \tag{3}$$

и $F_{f^\#}(z, y) = 0$ вне множества $E_f(\mu)$.

Оказывается, ω – предельное множество $\omega_\#[\varphi]$ есть неподвижная точка #-расширенной системы $S: \zeta \to f \circ \zeta$, где $f^\#$ есть резольвентный процесс, на котором расположены носители меры (см. [12]).

Ограничимся одномерной функцией распределения

$$F_{f^n\circ\varphi}(z, t) = \frac{1}{\mathrm{mes}V_\varepsilon(t)}\int\limits_{V_\varepsilon(t)} \chi(B_z)\Big(\big(f^n \circ \varphi\big)(\theta)\Big)\mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

где в силу перемешивания левая часть (4) распадается на произведение сомножителей $\prod\limits_{j=1}^{r} F_{f^n\circ\varphi}(z_j, t_j)$.

Фундаментальная проблема состоит в усреднении функции (4) (в нестандартном анализе такой проблемы не возникает). Из [11, лемма 2.4] вытекает, что имеет место сходимость $\mu_n^{\varepsilon,t}(B) \to \mu(B)$ при $n \to +\infty$. Заметим, что, по определению, $F^{\varepsilon}_{f^n\circ\varphi}(z, t) = \mu_n^{\varepsilon,t}(B_z)$. Функция множества $\mu_0^{\varepsilon,t}(\cdot)$ является мерой на σ-алгебре $B(I)$. Тогда $\mu_0^{\varepsilon,t}(\cdot)$ – это просто сдвиг меры под действием *f*.

Бесконечно малые числа

Как отметили Албеверио и др.: «Если вы твердо убеждены в том, что бесконечно малые и, следовательно, обратные к ним бесконечно большие числа существуют, вам не обязательно читать этот параграф» [6]. Пусть задано рациональное число Q. Добавим к Q новые точки, представляющие пределы сходящихся последовательностей рациональных чисел. Если будем обращать внимание на скорость сходимости и их асимптотические свойства, то мы отождествим меньше последовательностей и, следовательно, получим более богатое множество точек на прямой. Это множество и называется нестандартным расширением $\wedge * \mathbb{R}$.

Стационарный случайный процесс – это отображение $x : E \times [0,1] \to \mathbb{R}$, где (E, B, μ) – некоторое вероятностное пространство. В качестве пространства значений процесса здесь выбрано $\mathbb{R}$. Но могло бы быть, например, подходящее сепарабельное метрическое пространство.

Гиперконечный случайный процесс – это внутреннее отображение X: $\Omega \times T \to \mathbb{R}$, где T – гиперконечная ось времени, а $\Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ (A, P) – некоторое гиперконечное вероятностное пространство.

Мы хотим получить из X стандартный процесс x, взяв «стандартную часть». И наоборот, если исходным является внешний объект, стандартный процесс $x : E \times [0,1] \to \mathbb{R}$ на вероятностном пространстве $(\Omega, L(A), L(P))$, то можно ли приблизить такой процесс гиперконечным процессом X: $\Omega \times T \to \mathbb{R}$? Процессы суть функции двух переменных. Поэтому нужно уметь приближать внешние объекты внутренними на каждом сомножителе. Это приводит нас к определению: *пусть даны функции* f: $\Omega \to R$ *и* F: $\Omega \to \mathbb{R}$. *Тогда мы называем* F *поднятием* f, *если* F *– внутренняя, и пишем* $\wedge \circ F(\omega) = f(\omega)$ *для почти всех* $\omega \in \Omega$ *по мере Леба* $L(P)$ *на* Ω.

Авторы [6] пишут о гиперконечной оси времени, хотя более естественно называть T гиперконечным отрезком и говорить о других гиперконечных отрезках и интервалах, в том числе бесконечных. Теперь, работая с гиперинтервалами так же, как со стандартными интервалами в классическом анализе разностных уравнений, мы получим периодические (или квазипериодические) предельные распределения вероятностей в подходящем гипервероятностном пространстве. При этом (в любом смысле!) порядок Шарковского сохраняется.

Авторы выражают глубокую благодарность канд. физ.-мат. наук Е.Ю. Романенко (Институт математики НАНУ, Киев) за плодотворную дискуссию и просмотр рукописи в процессе работы над данной статьей.

1. *M.N. Jacobson*, Commun. Math. Soc. **81**, 39 (1981).
2. *А.Н. Шарковский, Е.Ю. Романенко*, Доповіді НАН України № 10, 33 (1992).
3. *А.Н. Шарковский*, Укр. мат. журн. **17**, № 3, 104 (1965).

4. *A.N. Sharkovsky, E.Yu. Romanenko*, Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. **2**, 31 (1992).
5. *А.Н. Шарковский, С.Ф. Коляда, А.Г. Спивак, В.В. Федоренко*, Динамика одномерных отображений, Наукова думка, Киев (1989).
6. *С. Альбеверио, Й. Фенстад, Р. Хеэг-Крон, Т. Линдстрем*, Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике, Мир, Москва (1990).
7. *M. Misiurewicz*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **53**, 17 (1981).
8. *П. Биллингсли*, Сходимость вероятностных мер, Наука, Москва (1977).
9. *Т. Лиггетт*, Марковские процессы с локальным взаимодействием, Мир, Москва (1989).
10. *Г. Крамер, М. Лидбеттер*, Стационарные случайные процессы, Мир, Москва (1969).
11. *E. Romanenko*, Разностные уравнения с непрерывным аргументом, Институт математики НАН Украины, Киев (2014).
12. *A.S. Mishchenko, V.E. Shatalov, B. Sternin*, Lagrangian Manifolds and the Maslov Operator, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (1990).
13. *I.B. Krasnyuk*, Spatial-Temporal Oscillations in Boundary Problems of Quantum Mechanics, viXra.org > Mathematical Physics > viXra: 2004.0272.
14. *I.B. Krasnyuk, A.E. Zabolotin*, Spatial-Temporal Julia Type Structures in Quantum Boundary Problems, viXra.org > Mathematical Physics > viXra:2004.0337.
15. *I.B. Krasnyuk*, Quantum Phys. Lett. **6**, 13 (2017).
16. *I.B. Krasnyuk, T.N. Melnik, V.M. Yurchenko*, ФТВД **27**, № 2, 51 (2017).

I.B. Krasnyuk, T.N. Melnik, V.M. Yurchenko

NON-STANDARD VERSION OF ROMANENKO–SHARKOVSKY THEOREM FOR A SIMPLE LOGISTIC MAPPING

A limitary lemma is derived for the behavior of the family of $\mu_\lambda S(t)$ trajectories of a dynamical system characterized by the initial distribution μ_λ at $t \to \infty$, where $S(t)$, $t \geq 0$ is a Markov semi-group of the determined one-dimensional mapping with a probably existing invariant mixing measure by Jacobson at $\lambda \in \Lambda \subset R^1$. The result is a generalization of stochastic ordering of probability measures for a unimodal mapping, with expansion to a wider class of random processes (the family of martingal and Feller's processes, in particular) allowed. Formally, it is a simple consequence of the existence of so-called filtration of the set system of the phase space of random trajectories by the related system of μ_λ-measures (an analogue of conventional Σ-algebra). The proof addresses to simple results of modern non-standard analysis.

Keywords: martingal, filtration, expanded universum, interval cycle, counting measure, Borelean algebra