PACS: 02.10.Ud, 02.10.Yn, 02.40.–k

В.В. Шелест, Д.А. Червинский

СРАВНЕНИЕ ФОРМАЛИЗМА ИСЧИСЛЕНИЯ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ С МЕТОДОМ ЯКОБИАНОВ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина

Статья поступила в редакцию 30 июня 2020 года

Продемонстрированы особенности исчисления внешних дифференциальных форм. Проведено сравнение указанной дисциплины с методом якобианов.

Ключевые слова: внешние дифференциальные формы, якобианы

Введение

В настоящее время ввиду развития экспериментальных и теоретических исследований конденсированного состояния вещества возрос интерес к работам, которые позволяют с нетрадиционной точки зрения взглянуть на уже известные физические закономерности [1–6]. В этой связи данная статья представляется весьма актуальной, поскольку базируется на более фундаментальном, чем общепринятый, подходе.

1. Простая схема использования символики внешних дифференциальных форм для демонстрации свойств якобианов

Рассмотрим ситуацию, когда осуществляется переход от одних переменных к другим: $(u,v)\leftrightarrow(x,y)$. В случае прямого перехода $(u,v)\rightarrow(x,y)$ в терминологии внешних дифференциальных форм имеем

$$\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v = J\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y \equiv \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y\,. \qquad (1.1)$$

Формальным образом уравнение (1.1) можем переписать в виде

$$J = \frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}\,. \qquad (1.2)$$

Докажем соотношение (1.2), т.е. продемонстрируем возможность работать с формальными «отношениями» 2-форм как с обычными дробями (что подразумевает эквивалентность такого метода методу якобианов).

По смыслу уравнение (1.1) содержит якобиан (условно) прямого перехода от одних переменных (u,v) к другим (x,y). Поэтому за 0-формы примем функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$. В данном контексте независимые переменные (x, y) – это тоже 0-формы. Далее строим внешние дифференциалы 0-форм (функций):

$$\tilde{\mathrm{d}}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \tilde{\mathrm{d}}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \tilde{\mathrm{d}}y,$$
$$\tilde{\mathrm{d}}v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \tilde{\mathrm{d}}x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x \tilde{\mathrm{d}}y. \quad (1.3)$$

Заметим, что с тем же успехом мы могли бы рассмотреть и ситуацию с противоположным переходом $(x, y) \to (u, v)$. В этом случае независимыми переменными были бы (u, v), а функциями – $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$, что и будет означать условность понятий прямого и обратного переходов.

Из 1-форм (1.3) конструируем соответствующие 2-формы и производим вычисления по известным правилам [1–6]:

$$\tilde{\mathrm{d}}u \Lambda \tilde{\mathrm{d}}v = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \tilde{\mathrm{d}}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \tilde{\mathrm{d}}y\right\} \Lambda \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \tilde{\mathrm{d}}x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x \tilde{\mathrm{d}}y\right\} =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}x + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \tilde{\mathrm{d}}y \Lambda \tilde{\mathrm{d}}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x \tilde{\mathrm{d}}y \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y =$$
$$= 0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y + 0 =$$
$$= \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y\right\} \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y. \quad (1.4)$$

Разделим первый и последний члены в (1.4) на $\tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y$ и получим доказательство соотношения (1.2).

Частным случаем равенства (1.2) будет являться ситуация, при которой одна из функций u, v будет совпадать с одной из независимых переменных x, y. Например, если $v = y$, то согласно вышеизложенному имеем

$$J = \frac{\tilde{\mathrm{d}}u \Lambda \tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}u \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y}{\tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y} = \frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y. \quad (1.5)$$

Наконец, если положить одновременно $u = x$, $v = y$, то по определению получаем

$$J = \frac{\tilde{\mathrm{d}}u \Lambda \tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y}{\tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = 1. \quad (1.6)$$

Таким образом, оба формализма (внешних и прямых дифференциальных форм) допускают использование «условных единиц».

Следовательно (см. и [7,8]), методология якобианов позволяет производить такие математические вычисления:

$$J\cdot 1=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(z,t)}{\partial(z,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,t)}\cdot\frac{\partial(z,t)}{\partial(x,y)}=J_1\cdot J_2\,. \tag{1.7}$$

Итак, якобиан может быть разложен на произведение двух сомножителей. Ничто не запрещает провести подобное разложение и на три множителя.

Аналогичное преобразование можно провести и с «дробями», составленными из 2-форм:

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}\cdot 1=\frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}\cdot\frac{\tilde{\mathrm{d}}z\Lambda\tilde{\mathrm{d}}t}{\tilde{\mathrm{d}}z\Lambda\tilde{\mathrm{d}}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}z\Lambda\tilde{\mathrm{d}}t}\cdot\frac{\tilde{\mathrm{d}}z\Lambda\tilde{\mathrm{d}}t}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}\,. \tag{1.8}$$

Согласно вышеизложенному равенства (1.7) и (1.8) эквивалентны.

Данный формализм допускает (аналогично сказанному выше) использование более чем одной «условной единицы».

2. Тождество Якоби в схеме внешних дифференциальных форм

Тождество Якоби, записанное в форме якобианов, имеет вид

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(z,y)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,z)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)}-\frac{\partial(u,z)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(v,y)}{\partial(x,y)}=0\,. \tag{2.1}$$

Традиционно оно доказывается прямым перемножением якобианов и приведением подобных слагаемых в левой части.

Запишем тождество Якоби с использованием внешних дифференциальных форм

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}\cdot\frac{\tilde{\mathrm{d}}z\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}+\frac{\tilde{\mathrm{d}}v\Lambda\tilde{\mathrm{d}}z}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}\cdot\frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}-\frac{\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}z}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}\cdot\frac{\tilde{\mathrm{d}}v\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}{\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y}=0 \tag{2.2}$$

и докажем, что равенства (2.1) и (2.2) эквивалентны.

В числителях соответствующих «дробей» представим 1-формы в развернутом виде. Тогда каждая из 2-форм примет вид

$$\tilde{\mathrm{d}}u\Lambda\tilde{\mathrm{d}}v=\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y\tilde{\mathrm{d}}x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x\tilde{\mathrm{d}}y\right\}\Lambda\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y\tilde{\mathrm{d}}x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x\tilde{\mathrm{d}}y\right\}=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y \tag{2.3}$$

и аналогично для следующих форм:

$$\tilde{\mathrm{d}}z\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y=\frac{\partial(z,y)}{\partial(x,y)}\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y\,,$$

$$\tilde{\mathrm{d}}v\Lambda\tilde{\mathrm{d}}z=\frac{\partial(v,z)}{\partial(x,y)}\tilde{\mathrm{d}}x\Lambda\tilde{\mathrm{d}}y\,,$$

$$\tilde{\mathrm{d}}u \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y = \frac{\partial(u,y)}{\partial(x,y)} \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y\,, \tag{2.4}$$

$$\tilde{\mathrm{d}}u \Lambda \tilde{\mathrm{d}}z = \frac{\partial(u,z)}{\partial(x,y)} \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y\,,$$

$$\tilde{\mathrm{d}}v \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y = \frac{\partial(v,y)}{\partial(x,y)} \tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y\,.$$

Подставляем выражения (2.3), (2.4) в (2.2), сокращаем на 2-формы $\tilde{\mathrm{d}}x \Lambda \tilde{\mathrm{d}}y$ и приходим к уже доказанной формуле (2.1).

Замечание. Подчеркнем, что исчисление внешних дифференциальных форм дополняет и расширяет исчисление прямых форм и в совокупности с последним имеет глубокий фундаментальный смысл [1–6].

Выводы

Продемонстрирована адекватность исчисления внешних дифференциальных форм в отношении метода якобианов. Показаны эффективность такого математического аппарата и возможность его применения к системам с большим числом степеней свободы, что подчеркивалось нами в более ранних работах [2–6].

1. *Б. Шутц*, Геометрические методы математической физики, Мир, Москва (1984).
2. *V. Shelest, A. Hristov, D. Chervinskii, V. Rumyantsev*, Journal of Photonic Materials and Technology **3**, 6 (2017).
3. *В.В. Шелест, Д.А. Червинский*, ФТВД **28**, № 4, 83 (2018).
4. *В.В. Шелест, Д.А. Червинский*, ФТВД **29**, № 1, 5 (2019).
5. *В.В. Шелест, Д.А. Червинский*, ФТВД **29**, № 3, 47 (2019).
6. *В.В. Шелест, Д.А. Червинский*, ФТВД **30**, № 2, 5 (2020).
7. *И.П. Базаров*, Термодинамика, Высшая школа, Москва (1991).
8. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Статистическая физика, Наука, Москва (1964).

V.V. Shelest, D.A. Chervinskii

COMPARISON OF THE FORMALISM OF EXTERNAL DIFFERENTIAL FORMS CALCULUS AND THE METHOD OF JACOBIANS

The specific features of the calculus of external differential forms have been demonstrated. The mentioned branch of science is compared with the Jacobian method.

Keywords: external differential forms, Jacobians