

PACS: 47.35.+i, 43.28.Bj

Д.А. Тукмаков

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Обособленное структурное подразделение ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2019 года

Численно смоделирован процесс распространения ударной волны большой интенсивности из чистого газа в неоднородную среду. Математическое моделирование осуществлено на основе численного решения системы уравнений динамики многофазной среды с неоднородным составом несущей компоненты. В математической модели несущая среда рассмотрена как вязкий сжимаемый теплопроводный газ. В модели учтены межкомпонентные силовое взаимодействие и теплообмен. Исследован процесс прохождения ударной волны из чистого газа (водорода) в запыленную среду, несущей компонентой которой является воздух. Проведено сопоставление численного решения с известным из литературы аналитическим решением для идеального газа.

Ключевые слова: запыленная среда, гетерогенные смеси, ударные волны, численное моделирование, межфазное взаимодействие, краевая задача Коши

Механика сложных сред является разделом современной механики сплошных сред и отличается от классической аэро- и гидродинамики [1–15]. Неоднородные среды могут быть представлены гомогенными смесями газов или жидкостей [1,4–8] либо гетерогенными средами, содержащими компоненты, имеющие различные агрегатные состояния. Интерес к динамике ударных волн в гомогенных смесях газов во многом связан с развитием водородной энергетики.

Ударно-волновой динамике гетерогенных сред посвящен ряд монографий и работ в периодических изданиях с широким охватом задач и разнообразными математическими моделями, описывающими динамику взвесей с твердыми включениями, в том числе в высокоскоростных потоках [1–3,9–16]. В современной литературе большое внимание уделяется обратному влиянию дисперсной фазы на неравновесные течения в многофазных средах и созданию математических моделей, описывающих такого рода потоки неоднородных сред [2,3,9].

В данной работе предложена математическая модель динамики гетерогенной среды – газозвеси с несущей средой, неоднородной по своему составу. Цель статьи – определение закономерностей движения и отражения ударных волн большой интенсивности в запыленных средах.

Математическая модель

В работе используется модель движения двухскоростной двухтемпературной монодисперсной газовой смеси с двухкомпонентной смесью в качестве несущей среды [1,7,8]. Система уравнений движения двухкомпонентной смеси вязких теплопроводных газов имеет вид

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_a u)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_b u)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau) = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F, \quad (3)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left([e + p - \tau]u - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = Q - |F|(u - u_1) + \alpha \frac{\partial(up)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$p = \rho_a R_a T + \rho_b R_b T, \quad (5)$$

$$e = \rho_a c_{V_a} T + \rho_b c_{V_b} T + \rho(u^2)/2, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{\rho_a}{\rho_a + \rho_b} \mu_a + \frac{\rho_b}{\rho_a + \rho_b} \mu_b, \quad \lambda = \frac{\rho_a}{\rho_a + \rho_b} \lambda_a + \frac{\rho_b}{\rho_a + \rho_b} \lambda_b, \quad (7)$$

$$\tau = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8)$$

Приведенная система включает уравнения: непрерывности плотностей компонент смеси (1)–(2); сохранения импульса несущей среды (3) и сохранения полной энергии смеси (4); состояния для давления (5) и полной энергии смеси (6); а также соотношения для вязкости и теплопроводности смеси (7). Функция вязких напряжений смеси задана уравнением (8). Для несущей фазы введены индексы: a – для газа в камере высокого давления (КВД), b – для газа в камере низкого давления (КНД).

В системе уравнений (1)–(8) приняты следующие обозначения величин: ρ – плотность, u – скорость газовой смеси, t, x – соответственно временная и пространственная координаты [8–10], p – давление смеси, τ – вязкие напряжения, α – объемное содержание дисперсной фазы, e – удельная полная энергия несущей фазы, λ – теплопроводность, T – температура газовой смеси, R – газовая постоянная, c_V – теплоемкость при постоянном объеме, μ – вязкость. Индексы a и b обозначают физические величины для первой и второй компонент газовой составляющей смеси, индекс 1 относится к дисперсной компоненте неоднородной среды. Величины без индекса являются физическими характеристиками всей смеси в целом. Функции силового взаимодействия F и теплообмена Q определяются законами межфазного трения и теплообмена [1,2].

Движение дисперсной фазы выражается следующей системой уравнений [2,13–16]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2) = F - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_1 u_1) = \text{Nu}_1 \frac{6\alpha}{(2r)^2} \lambda (T - T_1), \quad (11)$$

$$\rho_1 = \alpha \rho_{10}, \quad e_1 = \rho_1 c_1 T_1. \quad (12)$$

Уравнение (9) описывает непрерывность «средней плотности» дисперсной компоненты; уравнения (10) и (11) являются уравнениями сохранения соответственно импульса и энергии дисперсной фазы. Замыкают систему уравнений соотношения (12) для «средней плотности» и тепловой энергии дисперсной компоненты. Здесь ρ_1 , ρ_{10} – соответственно «средняя» и истинная (физическая) плотности дисперсной фазы; c_1 , T_1 , e_1 – соответственно теплоемкость вещества, температура и удельная внутренняя энергия дисперсной фазы. Сила межфазного взаимодействия включает в себя силу аэродинамического сопротивления, силу Архимеда и силу присоединенных масс [2]:

$$F = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho \sqrt{(u - u_1)^2} (u - u_1) + \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right).$$

Здесь $C_d = C_d^0 \psi(M_1) \varphi(\alpha)$, где $C_d^0 = \frac{24}{\text{Re}_1} + \frac{4}{\text{Re}_1^{0.5}} + 0.4$, $\psi(M_1) = 1 + \exp\left(-\frac{0.427}{M_1^{0.63}}\right)$, $\varphi(\alpha) = (1 - \alpha)^{-2.5}$, $\text{Re}_{12} = r|u_1 - u_2|2r/m$, $M_1 = |u_1 - u_2|/c$, $\text{Pr}_1 = \gamma c_2 \mu / \lambda$, $\text{Nu}_1 = 2 \exp(-M_1) + 0.459 \text{Re}_1^{0.55} \text{Pr}_1^{0.33}$, $0 \leq M_1 \leq 2$, $0 \leq \text{Re}_1 < 2 \cdot 10^5$.

В уравнение энергии (4) для несущей фазы входит тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей: $Q = 4n\alpha^T \pi r^2 (T - T_1) = 6\alpha \text{Nu}_1 \lambda (T - T_1) / (2r)^2$, где n – концентрация частиц, α^T – коэффициент теплообмена, r – радиус частиц, $\text{Nu}_1 = 2r\alpha^T / \lambda$ – число Нуссельта. Температура несущей среды $T = (e - 0.5\rho u_1^2) / (\rho_a R_a + \rho_b R_b)$. В качестве дисперсной фазы использовался кварцевый песок с истинной (физической) плотностью $\rho_2^0 = 2500 \text{ kg/m}^3$.

Система уравнений (1)–(12) может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{E}_x = \mathbf{H}; \quad (13)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho_a \\ \rho_b \\ \rho u \\ e \\ \rho_1 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_1 u_1^2 \\ e_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho_a u \\ \rho_b u \\ \rho u^2 + p - \tau \\ (e + p - \tau)u + \lambda \partial T / \partial x \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_1 u_1^2 \\ e_2 u_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F + \alpha \partial p / \partial x \\ -Q - |F|(u - u_1) + \alpha \partial(\rho u) / \partial x \\ 0 \\ F - \alpha \partial p / \partial x \\ Q \end{bmatrix}.$$

Алгоритм явной схемы Мак-Кормака [17] для системы уравнений (13) включает в себя последовательно выполняемые шаги:

предиктор

$$\mathbf{q}_j^* = \mathbf{q}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n) + \Delta t \mathbf{H}_j^n \quad (14)$$

и корректор

$$\mathbf{q}_j^{n+1} = 0.5(\mathbf{q}_j^n + \mathbf{q}_j^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{E}_j^n - \mathbf{E}_j^*) + 0.5 \Delta t \mathbf{H}_j^n. \quad (15)$$

Полученную систему дифференциальных уравнений решали явным конечно-разностным методом Мак-Кормака с расщеплением по пространственным направлениям и схемой нелинейной коррекции [18].

Систему уравнений дополняли соответствующими начальными и граничными условиями. На границах расчетной области задавали граничные условия Дирихле для составляющих скорости несущей и дисперсной фаз, а также граничные условия Неймана для остальных функций [13–17]. Расчеты проводили на равномерной сетке с количеством узлов, равным 1000. Шаг по времени вычисляли из условия типа Куранта–Фридрихса–Леви [17].

Результаты расчетов

Проведены численные расчеты ударно-волновой динамики неоднородной среды, находящейся в ударной трубе, которая состоит из КВД и КНД, заполненных различными газами. Кроме того, в КВД присутствует неоднородная среда – взвешенные в газе твердые частицы. Сопоставление результатов численных расчетов ударно-волновой динамики запыленных сред [13] с данными физического эксперимента [20] показало отличие величин параметров газа в ударной волне при наличии в нем дисперсных примесей от известных из литературы аналитических результатов для невязкого газа.

В расчетах предполагали, что в КВД давление газа $p_2 = 1078$ кПа, а в КНД $p_1 = 98$ кПа.

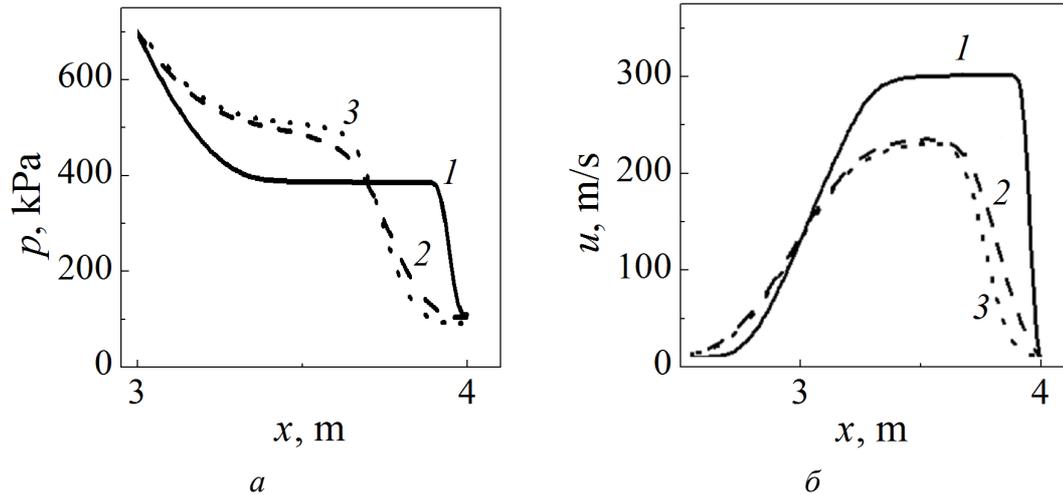


Рис. 1. Пространственные распределения давления (а) и скорости движения газа (б) при перемещении ударной волны по КНД, заполненной: 1 – однородным газом; 2, 3 – запыленными средами с диаметрами частиц соответственно 20 и 2 μm

Рассмотрим процессы движения прямого скачка уплотнения из чистого газа в запыленную среду в случае, когда камеры высокого и низкого давления заполнены одним газом.

На рис. 1 представлены результаты численных расчетов параметров газа при движении ударной волны по КНД, заполненной однородным газом и запыленными средами с диаметрами частиц $d = 20$ и $2 \mu\text{m}$. Численное моделирование показывает, что скорость движения ударной волны в чистом газе выше. Уменьшение линейного размера дисперсных частиц приводит к замедлению скорости движения возмущения и увеличению давления на переднем крае волны сжатия. При этом наблюдается снижение скорости спутного потока газа.

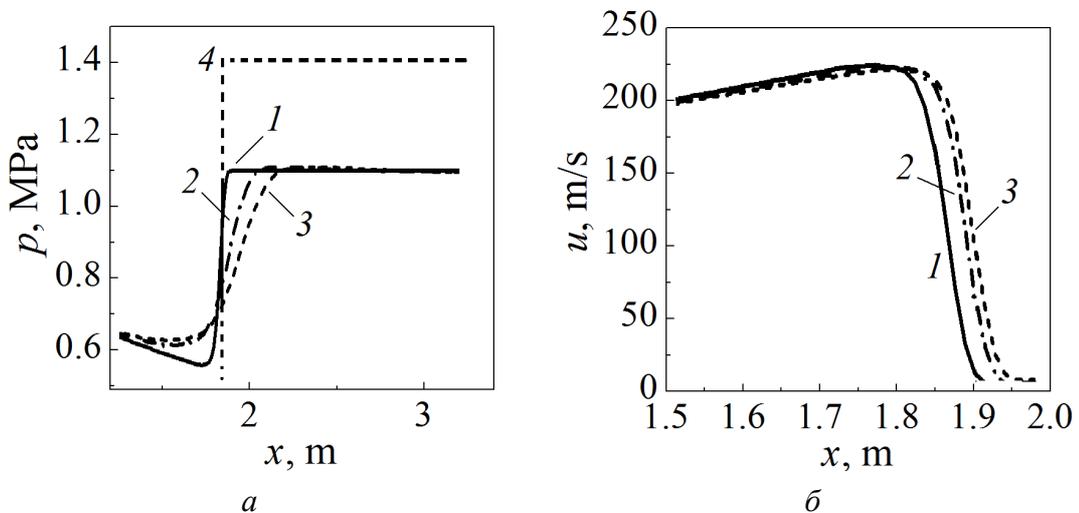


Рис. 2. Пространственные распределения давления (а) и скорости движения газа (б) при отражении ударной волны: 1 – численные решения для однородного газа; 2, 3 – для газозвеси с дисперсностью частиц d соответственно 20 и 2 μm . Кривая 4 – аналитическое решение [20]

Распределения давления и скорости движения газа при отражении ударной волны от твердой поверхности в чистом газе и в монодисперсных газозвесьях с различной дисперсностью твердых частиц изображены на рис. 2.

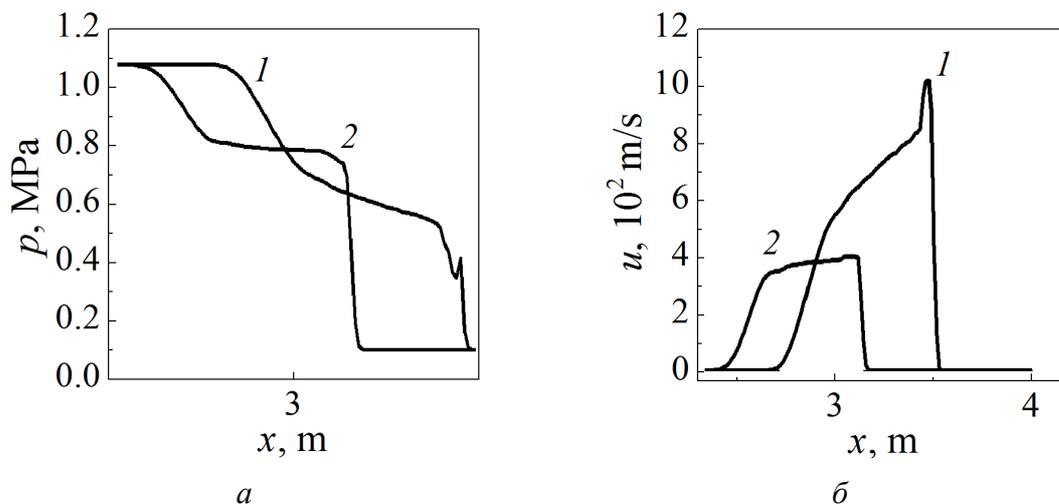


Рис. 3. Пространственное распределение физических параметров газовой смеси при распространении ударной волны из водорода в воздух

Для отраженной ударной волны наблюдаются закономерности, аналогичные закономерностям, выявленным в процессе движения прямого скачка уплотнения по запыленной среде. Обнаруженные особенности движения и отражения ударной волны в запыленных средах можно объяснить тем, что наличие дисперсной фазы приводит к замедлению течения газа, следствием чего является переход кинетической энергии несущей среды в потенциальную, а именно увеличение давления в отраженной ударной волне.

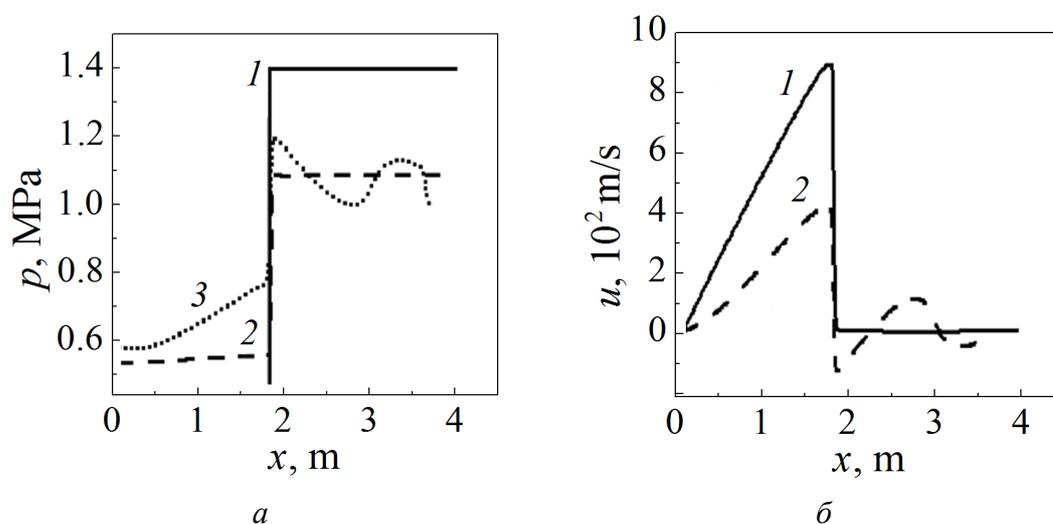


Рис. 4. Распределение давления (а) и скорости несущей среды (б) в отраженной ударной волне из водорода в воздух

В данной математической модели частицы имеют сферическую форму, т.е. при одинаковом объемном содержании уменьшение размера частиц вызывает сокращение площади соприкосновения одиночной частицы с газом в квадратичной пропорции и увеличение количества частиц в кубической пропорции. Иными словами, уменьшение размера частиц приводит к кратному увеличению площади соприкосновения несущей и дисперсной фаз, а следовательно, к интенсификации межфазного взаимодействия и замедлению скорости движения газа.

Пространственные распределения давления и скорости несущей среды при распространении ударной волны из КВД, заполненной чистым газом (водородом), в КНД, заполненную газозвесью, представлены на рис. 3. Ударная волна, движущаяся из водорода в запыленный воздух, имеет меньшую скорость и большую интенсивность давления на переднем крае волны сжатия (рис. 3,а). Скорость спутного потока в гомогенной водородно-воздушной смеси выше, чем при движении ударной волны в однородном воздухе: соответственно $u = 1051$ и 327 m/s. Связано это с тем, что скорость звука в водороде существенно больше скорости звука в чистом газе. Наличие дисперсной компоненты в воздухе приводит к значительному уменьшению скорости спутного потока (рис. 3,б). Различие давлений в отраженной ударной волне между гомогенной смесью с дисперсной примесью и гомогенной смесью газов без дисперсной примеси $\Delta p = 108$ kPa (рис. 4,а). Различие скоростей спутных потоков в отраженной ударной волне для запыленной и однородной водородно-воздушных смесей более существенно, чем отличие скоростей в однородной и запыленной средах с воздухом в качестве несущей газовой компоненты (рис. 4,б и 2,б).

Выводы

1. Наличие дисперсной фазы в КНД приводит к формированию ударной волны с большей интенсивностью давления на переднем крае и меньшей скоростью распространения.
2. Интенсивность давления на переднем крае ударной волны возрастает, а скорость движения возмущения давления падает с уменьшением дисперсности твердой фазы запыленной среды.
3. Интенсивность отраженной ударной волны в запыленной среде выше, чем в однородном газе, при этом уменьшение линейного размера частиц газозвеси приводит к росту интенсивности в отраженной ударной волне.
4. Численное моделирование показывает, что при одинаковой начальной интенсивности разрыва давлений при распространении ударной волны из водорода в воздух наличие взвешенных в воздухе частиц приводит к отраженной волне большей интенсивности, чем в случае, когда ударная волна распространяется из воздуха.

1. *Р.И. Нигматулин*, Динамика многофазных сред. Ч. 1, Наука, Москва (1987).
2. *А.Г. Кутушев*, Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах, Недра, СПб (2003).

3. *А.В. Федоров, В.М. Фомин, Т.А. Хмель*, Волновые процессы в газозвесах частиц металлов, Параллель, Новосибирск (2015).
4. *В.Е. Козлов, А.Б. Лебедев, А.Н. Секундов, К.Я. Якубовский*, Теплофизика высоких температур **47**, 946 (2009).
5. *И.И. Рыжков, И.В. Степанова*, Прикладная механика и техническая физика **52**, № 4, 72 (2011).
6. *I.E. Zabelinskii, L.V. Ibragimova, O.P. Shatalov, Yu.V. Tunik*, в сб.: Progress in Flight Physics. Сер. «EUCASS book series advances in aerospace sciences», ООО «ТОРУС ПРЕСС» Москва (2011), с. 231–242.
7. *В.В. Голуб, Т.В. Баженова, Д.И. Бакланов, К.В. Иванов, М.С. Кривокорытов*, Теплофизика высоких температур **51**, 147 (2013).
8. *Д.А. Губайдуллин, Д.А. Тукмаков*, Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики № 3–4, 38 (2014).
9. *Д.В. Садин*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **56**, 2098 (2016).
10. *А.Ю. Вараксин, М.В. Протасов, В.П. Яценко*, Теплофизика высоких температур **51**, 738 (2013).
11. *А.А. Глазунов, Н.Н. Дьяченко, Л.И. Дьяченко*, Теплофизика и аэромеханика **20**, 81 (2013).
12. *A. Zhuoqing, Z. Jesse*, Powder Technol. **345**, 346 (2019).
13. *Р.И. Нигматуллин, Д.А. Губайдуллин, Д.А. Тукмаков*, Доклады Академии наук **466**, 418 (2016).
14. *Д.А. Губайдуллин, Д.А. Тукмаков*, Известия вузов. Авиационная техника № 3, 128 (2017).
15. *А.Л. Тукмаков, Н.Ф. Кашипов, Д.А. Тукмаков, М.Г. Фазлыяхматов*, Теплофизика высоких температур **56**, 498 (2018).
16. *D.A. Tuktakov*, Journal of Mathematics **40**, 824 (2019).
17. *S.A. Fletcher*, Computational Techniques for Fluid Dynamics, Springer-Verlang, Berlin (1988).
18. *И.Ф. Музафаров, С.В. Утюжников*, Математическое моделирование **5**, № 3, 74 (1993).
19. *Б.Е. Гельфанд, А.В. Губанов, Е.И. Медведев, Е.И. Тимофеев, С.А. Цыганов*, Докл. АН СССР **281**, 1113 (1985).
20. *Л.В. Овсянников*, Лекции по основам газовой динамики, Ин-т компьютер. иссл., Москва (2003).

D.A. Tuktakov

NUMERICAL MODELING OF THE MOTION AND REFLECTION OF HIGH-INTENSITY SHOCK WAVES IN A HETEROGENEOUS MEDIUM

The process of propagation of a direct shock wave of high intensity from a pure gas into an inhomogeneous medium is numerically simulated. Mathematical modeling is based on the numerical solution of the system of equations of the dynamics of a multiphase medium characterized by heterogeneous composition of the carrier component. In the mathematical model, the carrier medium is considered as a viscous compressible heat-conducting gas. In addition, the mathematical model takes into account the inter-component force interaction and heat transfer. The process of the passage of a shock

wave from pure gas (hydrogen) into a dusty medium (air is the carrier component) is investigated. A comparison of the numerical solution with the known analytical solution for an ideal gas is carried out.

Keywords: dusty environment, heterogeneous mixtures, shock waves, numerical simulation, interphase interaction, Cauchy boundary value problem

Fig. 1. Spatial distributions of pressure (a) and the rate of gas motion (\bar{v}) under motion of a shock wave along the low pressure chamber filled by: 1 – homogeneous gas; 2, 3 – dusty medium characterized by the particle size of 20 and 2 μm , respectively

Fig. 2. Spatial distributions of pressure (a) and the rate of gas motion (\bar{v}) under reflection of a shock wave: 1 – numerical solutions for a homogeneous gas; 2, 3 – gas-and-dust suspension characterized by the particle dispersion d of 20 and 2 μm , respectively. Curve 4 is the analytical solution [20]

Fig. 3. Spatial distribution of physical parameters of gas mixture under the shock wave propagation from hydrogen to air

Fig. 4. Distribution of pressure (a) and the rate of carrier medium (\bar{v}) in the reflected shock wave from hydrogen to air