

Министерство образования и науки  
Донецкой Народной Республики  
Государственное учреждение «Донецкий физико-технический институт  
им. А.А. Галкина»

На правах рукописи



Метлов Константин Леонидович

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ В МАГНИТНЫХ  
НАНОСТРУКТУРАХ**

01.04.07 – физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

*Идентичность  
всех экземпляров  
диссертации  
заверяю*

*Ученый секретарь  
диссертационного  
совета А 01.016.01*

*Тарасенко / И. И. Тарасенко /*



Донецк – 2019

## Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Основы теории магнитных текстур</b> . . . . .	17
1.1. Прецессия магнитного момента . . . . .	18
1.2. Микромагнитный лагранжиан . . . . .	22
1.2.1. Обменная энергия . . . . .	22
1.2.2. Магнитостатическая энергия . . . . .	26
1.2.3. Энергия локальной магнитной анизотропии . . . . .	31
1.2.4. Анизотропный и антисимметричный обмен . . . . .	34
1.3. Механика Лагранжа и диссипация энергии магнетиком . . . . .	37
1.4. Теория магнитных доменов . . . . .	39
1.5. Блоховские и неелевские доменные границы . . . . .	42
1.6. Метастабильные состояния двумерного ферромагнетика . . . . .	50
1.7. Малоугловое рассеяние нейтронов на магнитных текстурах . . . . .	58
1.7.1. Сечение рассеяния . . . . .	60
1.7.2. Ядерное сечение рассеяния . . . . .	65
1.7.3. Магнитное сечение рассеяния . . . . .	67
Выводы к Главе 1 . . . . .	72
<b>Глава 2. Микромагнетизм и малоугловое рассеяние нейтронов</b> . . . . .	74
2.1. Введение . . . . .	74
2.2. Уравнения для магнитной текстуры слабонеоднородного образца . . . . .	75
2.3. Теория возмущений для магнитной текстуры . . . . .	80
2.4. Усреднение по неоднородностям . . . . .	84
2.5. Сечения малоуглового рассеяния нейтронов во втором порядке . . . . .	87

2.6.	Эффект третьего порядка в сечении рассеяния нейтронов . . . . .	92
2.7.	Рассеяние в присутствии антисимметричного обмена . . . . .	94
2.8.	Рассеяние нейтронов магнитным вихрем . . . . .	108
	Выводы к Главе 2 . . . . .	117
	Приложение 2.1 . . . . .	118
	Приложение 2.2 . . . . .	119
	Приложение 2.3 . . . . .	120
<b>Глава 3.</b>	<b>Микромагнетизм в комплексных переменных . . . . .</b>	<b>123</b>
3.1.	Введение . . . . .	123
3.2.	Постановка задачи . . . . .	125
3.3.	Последовательная минимизация . . . . .	127
3.4.	Иерархия взаимодействий в наномагните . . . . .	131
3.5.	Топологические солитоны в ограниченной геометрии . . . . .	134
3.6.	Магнитный вихрь в цилиндрах различной формы . . . . .	137
3.6.1.	Магнитный вихрь в круговом цилиндре . . . . .	139
3.6.2.	Магнитный вихрь в треугольном цилиндре . . . . .	140
3.6.3.	Магнитный вихрь в прямоугольном цилиндре . . . . .	141
3.7.	Многовихревые состояния . . . . .	144
3.8.	Доменная граница с перетяжками . . . . .	146
	Выводы к Главе 3 . . . . .	154
	Приложение 3.1 . . . . .	154
<b>Глава 4.</b>	<b>Магнитные состояния кругового наноцилиндра . . . . .</b>	<b>156</b>
4.1.	Введение . . . . .	156
4.2.	Обменная энергия в комплексных переменных . . . . .	157
4.3.	Энергия и радиус магнитного вихря в круговом цилиндре . . . . .	161
4.4.	Вихри большого радиуса . . . . .	165
4.5.	Коллапс магнитного вихря внешним полем . . . . .	175

4.6.	Квазиоднородные состояния намагниченности цилиндра . . . . .	182
4.7.	Анизотропия в квадратном массиве круговых цилиндров . . . . .	188
4.8.	Метастабильные состояния кругового наноцилиндра . . . . .	199
	Выводы к Главе 4 . . . . .	205
	Приложение 4.1 . . . . .	206
<b>Глава 5.</b>	<b>Динамика солитонов в ограниченной геометрии . . . . .</b>	<b>208</b>
5.1.	Введение . . . . .	208
5.2.	Уравнения динамики в коллективных переменных . . . . .	211
5.3.	Частота прецессии вихря . . . . .	217
5.4.	Феноменологическая диссипация . . . . .	220
5.5.	Нелинейная прецессия и амплитудно-частотный коэффициент . . . . .	221
	Выводы к Главе 5 . . . . .	229
	Приложение 5.1 . . . . .	230
	Приложение 5.2 . . . . .	232
<b>Глава 6.</b>	<b>Магнитные солитоны в многосвязных областях . . . . .</b>	<b>234</b>
6.1.	Введение . . . . .	234
6.2.	Магнитные состояния многосвязных планарных наноэлементов . . . . .	235
6.3.	Топологические ограничения в кольце . . . . .	247
6.4.	Топологические ограничения в периодических текстурах . . . . .	252
	Выводы к Главе 6 . . . . .	260
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>261</b>
	<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>	<b>264</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>273</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Прогресс электроники в последнее время привёл к развитию методов контролируемого создания наноструктур, в том числе и магнитных. В то время как магнитные текстуры (равновесные, метастабильные и промежуточные распределения магнитного момента внутри материала) объёмных магнетиков [1] и тонких плёнок [2] достаточно хорошо изучены в рамках теории микромагнетизма [3] — в наноструктурах с характерными размерами, близкими к обменной длине (один из параметров магнитного материала, порядка 5–15 нм), текстуры сильно отличаются. Наиболее интересны с этой точки зрения планарные наноструктуры из-за их совместимости с современными технологическими процессами, используемыми в микроэлектронике. В сочетании со свойствами материала, форма и размеры планарных nanoостровков оказывают непосредственное влияние на их магнитную текстуру и переходы между её различными состояниями под действием приложенных полей или токов. Как и в других магнитных системах, разные состояния могут быть стабильными в одних и тех же островках независимо от состояний других островков, что открывает перспективы использования их для магнитной записи информации. Таким образом, теория магнитных состояний наноструктур имеет важное практическое значение.

С фундаментальной точки зрения, магнитные состояния реализуют концепцию топологических солитонов, возникшую в теории поля благодаря работам Т. Скирма [4–6], а затем перенесенную в магнетизм А.А. Белавиным и А.М. Поляковым [7] для случая бесконечного двумерного ферромагнетика. В рамках этой концепции, все двумерные магнитные текстуры можно разбить на классы, пронумерованные целыми числами. Текстуры внутри каждого класса (соответствующего некоторому целому числу, топологическому заряду) гомотопически

эквивалентны, а между текстурами разных классов существует (теоретически бесконечный) энергетический барьер. Обусловленное этим барьером сохранение топологического заряда делает статику и динамику магнитных текстур подобной статике и динамике механических систем с сохраняющимся числом частиц. Солитоны (аналогично частицам) движутся, взаимодействуют и способны образовывать сложные конденсированные состояния. Здесь важно подчеркнуть, что в тонких плёнках солитоны Белавина-Полякова практически никогда не реализуются (за, возможно единственным, исключением, доменной границы с перетяжками, которая также рассмотрена в этой работе), но они часто встречаются в планарных наноструктурах [8–10]. При этом характерные размеры систем и наличие у них границ играют ключевую роль.

В этой связи возникает необходимость развить теорию двумерных топологических солитонов на случай конечных систем. Причём так, чтобы она покрывала наиболее широкий круг конфигураций границ — разной формы, размеров и связности. Именно это и является главной целью данной работы.

Кроме планарных ферромагнитных элементов, другим типом наноструктур являются объёмные магнетики с наноразмерными дефектами. Их магнитные текстуры также рассмотрены здесь и подчиняются топологическим законам, установленным при изучении солитонов в ограниченной геометрии.

Отправной точкой данной работы является микромагнитный лагранжиан, учитывающий обменное, магнитостатическое и некоторые другие взаимодействия. Это позволяет непосредственно вычислять измеримые величины и сравнивать теорию с экспериментом, получая во многих случаях количественное совпадение.

Топологические солитоны наблюдаются в планарных магнитных наноструктурах, которые стали доступны экспериментально совсем недавно. Разрабатываемые основе магнитных наноструктур перспективные нанотехнологии (магнитная запись и обработка информации, магнитные фотонные кристаллы) так

или иначе базируются на магнитных состояниях различных топологических классов в планарных и объёмных наноструктурах. Вместе, это означает, что построенная здесь теория топологических солитонов в ограниченной геометрии актуальна как с научной, так и с практической точки зрения.

**Степень разработанности темы исследования.** Теория микромагнетизма, являющаяся основой данного исследования, сформировалась в работах Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица, В. Дёринга, Т. Л. Гильберта, Л. Нееля, Ф. Блоха, В. Ф. Брауна, Г. Кронмюллера, А. Хуберта, В. Г. Барьяхтара, Б. А. Иванова, Я. Кацера, В. Камберского. Основным методом аналитического решения микромагнитных задач является метод В. Ритца. Магнитные солитоны в неограниченных тонких плёнках (двумерных и квазидвумерных магнетиках) исследовались аналитически в работах А. А. Белавина, А. М. Полякова, Г. Ву, Д. Гросса, А. М. Косевича, Б. А. Иванова, У. К. Рёсслера, А. Н. Богданова, А. С. Ковалёва, А. Б. Борисова, В. В. Киселёва. В планарных наноструктурах с ограниченной геометрией, при том, что существует ряд аналитических результатов для удачно выбранных пробных функций (А. Ахарони, Н. А. Усов, С. Е. Песчаный, Б. А. Иванов, Е. В. Тартаковская), основным инструментом исследований являются численные методы (В. Ф. Браун, Л. ЛаБонте, Д. В. Берков, М. Донахью, Н. А. Усов, С. Е. Песчаный). Аналитическая (пусть и приближённая) общая теория магнитных солитонов в ограниченной геометрии для планарных наноэлементов произвольной формы отсутствует. Для её разработки использовались математические методы, развитые в работах Б. Римана, Д. Гильберта, Ф. Шоттки, Ф. Клейна, Н. И. Ахиезера, Д. Крауди, А. Б. Богатырёва. Ключевые независимые эксперименты, результаты которых использовались для проверки теории, были проведены Г. Губбиотти, Г. Карлотти, Ф. Низзоли, Р. П. Коубёрном, Т. Похилом, К. Росс, К. Маттьё, С. О. Демокритовым, Б. Хиллебрандсом, С. Д. Бадером, П. Е. Вигеном, Г. Н. Каказеем и другими. Теория спиновых волн на фоне пространственно неоднородной намагниченности (в том числе, нелиней-

ная) развивалась в работах В. Г. Барьяхтара, Б. А. Калиникоса, Б. А. Иванова, А. Н. Славина, А. Г. Гуревича, В. Г. Шаврова и других. Динамика намагниченности в планарных наноэлементах исследовалась со спин-волновых позиций А. Н. Славиным, Б. А. Ивановым, Г. А. Мелковым, С. Е. Заспелем, методом пространственного усреднения динамического уравнения Н. А. Усовым и Л. Г. Куркиной, и на основе уравнения А. А. Тиля для трансляции магнитных текстур Ф.Г. Мертенсом, А. Р. Бишопом, К. Ю. Гуслиенко. Лагранжев подход для описания динамики (сложных) доменных границ в бесконечной плёнке использовался А. К. Звездиным. Спин-волновой подход годится лишь для малых отклонений солитонов от их положений равновесия. Усреднение уравнения Ландау-Лифшица нарушает сохранение модуля параметра порядка и приводит к результатам, далёким от натурального и численного экспериментов. Теория на базе уравнения А. А. Тиля, способна дать хорошее согласие с экспериментом, но при этом кинетическая и потенциальная части лагранжиана оказываются вычислены с использованием разных пробных функций. Непротиворечивая теория линейной прецессии магнитного вихря и теория его нелинейной прецессии отсутствуют. Теория магнитной нейтронографии, которая расширена здесь для анализа объёмных наноструктур, основывается на работах О. Хальперна, М. Джонсона, С. В. Малеева, М. Блюме, В. Г. Барьяхтара, А. Зигера, Х. Кронмюллера, Дж. Вейсмюллера, С. В. Григорьева, И. А. Зобкало и А. Мичелса, а лежащая в основе вычислений равновесной магнитной текстуры слабонеоднородных материалов, теория приближения к насыщению была в основном построена в работах Л. Нееля и Э. Шлёмана. Микромагнитная теория сечений рассеяния высоких порядков по степени малых неоднородностей материала, теория рассеяния нейтронов магнитным солитоном в ограниченной геометрии, общая (не предполагающая конкретный вид магнитной текстуры) теория рассеяния нейтронов ферромагнетиком с хиральным взаимодействием отсутствуют.

**Предмет, объект, цели и задачи диссертационной работы:**

Предметом диссертационной работы являются наноструктуры, выполненные из различных (по структуре и свойствам) магнитных материалов в конденсированном состоянии.

Объектом проведенных исследований являются физические свойства наноструктур, обусловленные их магнитной текстурой и структурой материалов — равновесным, метастабильным или динамическим распределением магнитных моментов в них. А также изменение этих свойств под влиянием внешнего магнитного поля.

Данная работа преследует следующие цели: 1) построение теории магнитных состояний (топологических солитонов) в ограниченной геометрии (планарных наноструктурах различной формы и связности); 2) поиск новых закономерностей в свойствах объёмных наноструктур, представляющих собой системы малых случайных или регулярных неоднородностей в объёме материала.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Решена микромагнитная задача по определению магнитной текстуры слабонеоднородного объёмного магнетика до второго порядка теории возмущений по амплитудам неоднородностей.
2. Вычислены, с усреднением по реализациям случайных неоднородностей и ориентации образца, сечения малоуглового рассеяния объёмным слабонеоднородным магнетиком вплоть до второго и разность этих сечений вдоль некоторых направлений детектора вплоть до третьего порядка теории возмущений.
3. Вычислены сечения рассеяния нейтронов хиральными магнитными текстурами: такими, которые формируются в образце под действием хиральных взаимодействий и такими, которые формируются в силу спонтанного нарушения хиральной симметрии.
4. Построена аналитическая теория магнитных состояний в односвязных планарных наноэлементах произвольной формы в терминах функций ком-

- плексной переменной.
5. Решена задача о равновесной энергии доменной границы с перетяжками.
  6. Получены приближённые явные выражения для равновесных энергии и радиуса магнитного вихря в круговом цилиндре.
  7. Решена задача об основных квазиоднородных состояниях намагниченности кругового наноцилиндра и анизотропии в квадратном массиве взаимодействующих круговых наноцилиндров.
  8. Построена магнитная фазовая диаграмма основных состояний круговых наноцилиндров.
  9. Исследована стабильность квазиоднородных состояний намагниченности типа “лист” и “С”. Результат нанесен на магнитную фазовую диаграмму кругового наноцилиндра.
  10. На базе введённого здесь семейства пробных функций, построена непротиворечивая теория линейной и нелинейной динамики намагниченности в планарных наноэлементах.
  11. Решена задача о малоамплитудной прецессии магнитного вихря в круговом цилиндре. Вычислена частота этой прецессии как функция геометрических размеров цилиндра и магнитных параметров материала.
  12. Решена задача о слабонелинейной прецессии магнитного вихря в круговом цилиндре, вычислен амплитудно-частотный коэффициент этой прецессии.
  13. Выполнено обобщение теории магнитных состояний на случай многосвязных планарных наноэлементов.
  14. Получены топологические ограничения на положения магнитных солитонов в явном виде для кольца и в периодических магнитных текстурах.

**Научная новизна** Большинство результатов, полученных в диссертационной работе, являются оригинальными и новыми. В частности:

- Разработана приближённая аналитическая теория магнитных состояний в планарных наноэлементах произвольной формы и связности, позволяю-

щая построить семейство пробных функций для распределений намагниченности в них.

- Предложена новая модель для доменной границы с перетяжками в тонкой магнитной пленке, из которой, при точном расчёте магнитной энергии, следует, что доменная граница с перетяжками является состоянием с минимальной энергией, если толщина плёнки находится в определённом интервале.
- Теоретически предсказано новое магнитное состояние кругового наноцилиндра — большой магнитный вихрь, исследованы области его стабильности и равновесия на магнитной фазовой диаграмме.
- Предложена новая модель квазиоднородных состояний намагниченности типа “лист” и типа “С” в круговом наноцилиндре, определены области метастабильности этих состояний в терминах геометрических размеров цилиндра.
- Разработана новая теория анизотропии четвёртого порядка при вращении внешнего магнитного поля в плоскости квадратного массива круговых наноцилиндров, которая количественно воспроизводит как геометрическую, так и полевую зависимость константы анизотропии.
- Впервые с использованием одинаковых пробных функций для кинетического и потенциального членов в лагранжиане вычислена частота прецессии магнитного вихря в круговом цилиндре.
- Впервые теоретически исследована нелинейная прецессия магнитного вихря в круговом цилиндре и вычислен амплитудно-частотный коэффициент этой прецессии.
- Впервые теоретически предсказано существование топологических ограничений на положения магнитных солитонов в многосвязных планарных наноэлементах. Выполнение этих ограничений в концентрическом кольце проверено на основе независимого эксперимента.

- Предсказан новый эффект третьего порядка в сечениях малоуглового рассеяния нейтронов поликристаллическим наноструктурированным ферромагнетиком, суть которого сводится к тому, что определённая комбинация значений сечения рассеяния вдоль некоторых направлений волнового вектора не равна нулю в третьем порядке теории возмущений, но равна нулю во втором.
- Впервые вычислены сечения рассеяния нейтронов магнитным вихрем в круговом наноцилиндре.

### **Научная и практическая значимость.**

Построенные фазовые диаграммы магнитных состояний нано-элементов имеют прямую практическую ценность. В частности, при проектировании спинтронных устройств магнитной записи информации с произвольным доступом (Magnetic Random Access Memory, MRAM) они позволяют заранее планировать размеры элементов, исходя из предполагаемых магнитных состояний, в которых эти элементы будут работать.

Новые магнитные состояния типа “больших магнитных вихрей” определяют один из пределов миниатюризации таких устройств. Они открывают возможность хранить информацию в состояниях с практически замкнутым магнитным потоком (что снижает взаимодействие между соседними битами — важный фактор, ограничивающий плотность информации в магнитных устройствах) с возможностью (за счёт топологической эквивалентности большого и классического вихря) быстрых переключений без образования блоховских точек и значительной генерации спиновых волн.

Построенные модели состояний наномангнитов и их динамики, позволяют моделировать наномасштабные генераторы микроволн, оценивать и контролировать, исходя из амплитудно-частотного коэффициента, стабильность генерируемых ими частот. Либо наоборот, как требуется для приложений в области машинного обучения, выбирать геометрические параметры так, чтобы частота

была наиболее чувствительной к амплитуде колебаний.

Усовершенствованная в данной работе теория малоуглового рассеяния нейтронов поликристаллическим наноструктурированным ферромагнетиком может стать одной из основ для методики измерения магнитных свойств, заведомо превосходящей традиционную магнитометрию по количеству потенциально извлекаемой информации. Причём в отличие от сканирующей микроскопии, которая близка по этой характеристике, малоугловое рассеяние нейтронов допускает изучение объёмных свойств материала.

Топологические ограничения на положения магнитных солитонов в многосвязных областях открывают принципиально новую возможность построения массивно-параллельных вычислительных систем, базирующихся, в силу глобальности топологических ограничений, на одновременном взаимодействии всех обрабатываемых бит информации со всеми.

**Методология и методы исследования.** В работе широко используются аналитические методы комплексного и действительного анализа, отдельные результаты проверены численными методами (методом конечных элементов с использованием быстрого мультипольного метода при расчёте магнитостатической энергии).

**Положения, выносимые на защиту:**

- Эффект третьего порядка при рассеянии нейтронов слабонеоднородным наноструктурированным ферромагнетиком в перпендикулярной геометрии рассеяния, заключающийся в том, что разница между магнитным сечением рассеяния в плоскости детектора вдоль направления приложенного к образцу магнитного поля и удвоенным сечением рассеяния в перпендикулярном к полю направлении равна нулю во втором порядке теории возмущений по амплитуде неоднородностей материала и отлична от нуля в третьем порядке.
- Теория метастабильных состояний в планарных наноэлементах из магни-

томягкого материала произвольной формы и связности, представляющая семейство пробных функций для распределений намагниченности в них при помощи функций комплексной переменной.

- Аналитическая модель для доменной границы с перетяжками в виде функции комплексной переменной.
- Теория анизотропии свойств квадратных массивов круговых наноцилиндров (различного периода и с разными размерами цилиндра) из магнитомягкого материала при вращении внешнего магнитного поля (различной амплитуды) в плоскости массива.
- Подход к описанию низкоэнергетической линейной и нелинейной динамики магнитных текстур, в коллективных координатах, определённых посредством функций комплексной переменной.
- Существование топологических ограничений на положения вихрей и антивихрей в двусвязных планарных наноэлементах и периодических магнитных текстурах.

**Степень достоверности.** Достоверность полученных в диссертации теоретических результатов обусловлена корректным применением достоверных математических методов и использованием достоверных физических законов и принципов в качестве основы для исследований. Верификация результатов, полученных в работе, проводилась серией предельных переходов к известным ранее результатам. Корректность использованных приближений подтверждается согласием полученных с их помощью результатов с теоретическими, экспериментальными и численными результатами, полученными в других работах.

**Апробация результатов.** Результаты, представленные в диссертационной работе, прошли апробацию на 12-ти международных научных конференциях среди широкого круга ученых, специалистов по вопросам физики конденсированного состояния. Результаты работы докладывались на следующих конференциях: InterMag 2002 в г. Амстердам, Голландия, 28 апреля - 2 мая

2002; NATO ARW “Vortex Dynamics in High-Temperature Superconductors”, Ташкент, Узбекистан, 17-22 мая 2002; Moscow International Symposium on Magnetism (MISM), Москва, Россия, 20-24 июня 2002; International Conference on Magnetism (ICM) Рим, Италия, 27 июля - 1 августа 2003; International conference on Semiconductor Spintronics and Quantum Information Technology (SPINTECH II), Брюгге, Бельгия, 4-6 августа, 2003; NATO ARW “Vortex dynamics in superconductors and other complex systems”, Ялта, Крым, 13-17 сентября 2004; The 5<sup>th</sup> International Conference on Advanced Materials and Devices (ICAMD 2007), 12-14 декабря 2007, остров Чеджу, Южная Корея; III International Workshop Dzyaloshinskii-Moriya Interaction and Exotic Spin Structures, Псков, Россия, 26-30 июня 2015; 50-я Школа ПИЯФ по Физике Конденсированного Состояния, Санкт-Петербург, Россия, 14-19 марта 2016; 51-ая Зимняя Школа по физике конденсированного состояния, Санкт-Петербург, Россия, 11-16 марта 2017; IV International Workshop Dzyaloshinskii-Moriya Interaction and Exotic Spin Structures, Петергоф, Россия, 23-26 мая 2017; XXII симпозиум «Нанофизика и нанoeлектроника», 12-15 марта 2018, Нижний Новгород, Россия. А также на учёном совете Института Теоретической Физики им. Л. Д. Ландау, Черногловка, Россия, 16 июня 2017. Регулярно докладывались с 2006 по 2018 на семинарах ДонФТИ.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 21 статье в рецензируемых научных журналах [11–31] и в виде тезисов [32–40].

**Личный вклад автора.** Личный вклад соискателя отображен в содержании диссертационной работы и научных публикациях, вошедших в диссертацию.

По теме диссертации опубликована 21 статья. 10 из них [15–19, 23, 25–28] выполнены без соавторов.

В 4-х работах по рассеянию нейтронов [11–14] автору принадлежат микромагнитные расчёты, результаты которых стали основополагающими для прове-

дения исследований по данному направлению и которые вошли в диссертацию.

В 3-х работах по статическим свойствам кругового наноцилиндра [20–22], выполненных в соавторстве с К. Ю. Гуслиенко, автором получены пробные функции, положенные в основу вычислений. Параллельно с соавтором проведены расчёты магнитостатической энергии. В процессе расчетов результаты сравнивались между собой для проверки.

В работе по построению карты метастабильных состояний [24], выполненной с соавтором YoungPak Lee, автор внес определяющий вклад в постановку задачи, конкретные расчёты и формулировку выводов.

В 3-х работах по микромагнитным задачам в многосвязных областях [29–31], выполненных в соавторстве с А.Б. Богатырёвым, автором поставлены краевые задачи теории функции комплексного переменного. Математическое решение этих задач было выполнено совместно с соавтором, при этом вклад соавтора был ключевым. Лично автору принадлежат представления решений в многосвязных наноэлементах при помощи функций Шоттки-Клейна и формулировка физических выводов из полученных решений.

Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 6-ти глав, заключения и библиографии. Первая глава представляет собой обзор литературы. Общий объём диссертации 300 страниц, включая 55 рисунков и 3 таблицы. Библиография включает 269 наименований.

## Глава 1. Основы теории магнитных текстур

Начиная с изобретения компаса, магнитные материалы нашли своё применение во многих полезных устройствах и инструментах. В большой электромагнитной картине мира, описываемой уравнениями Максвелла, их свойства представлены в виде “материальных соотношений”, связывающих напряжённости полей (электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$ ) с соответствующими индукциями (электрической  $\mathbf{D}$  и магнитной  $\mathbf{B}$ ). Конкретно, связь  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  скрывает за собой магнитные свойства среды.

Более формально, следуя Ахарони [3], представим связь магнитных поля и индукции в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \gamma_{\text{В}}\mathbf{M}), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{M}$  — намагниченность среды (магнитный дипольный момент на единицу объёма),  $\mu_0$  — восприимчивость вакуума, а  $\gamma_{\text{В}}$  — константа. Удобство такой записи заключается в том, что, подставляя различные значения констант  $\mu_0$  и  $\gamma_{\text{В}}$ , можно получить представления результатов, соответствующие всем распространённым системам магнитных единиц измерения. Например, в системе СИ  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн м}^{-1}$  и  $\gamma_{\text{В}} = 1$  в то время как в системе СГС  $\mu_0 = 1$  и  $\gamma_{\text{В}} = 4\pi$ . Задание материальных соотношений, таким образом, сводится к определению зависимости  $\mathbf{M}$  от  $\mathbf{H}$ . Эта зависимость в общем случае не является даже математической функцией. На текущее значение  $\mathbf{M}$  влияет не только текущее значения магнитного поля  $\mathbf{H}$ , но и вся совокупность его значений в прошлом с учётом того, как быстро происходили эти изменения. Способность магнитных материалов запоминать историю изменения внешних условий имеет огромное практическое значение: как положительное — используемое в различных элементах компьютерной памяти (от накопителей на жёстких магнитных

дисках до магнитной памяти с прямым/произвольным доступом), постоянных магнитах; так и отрицательное — повышающее потери энергии на нагревание при работе трансформаторов и электрических двигателей. Вследствие того, что (как подробно разбирается далее) эволюция состояния магнетика описывается дифференциальными уравнениями первого порядка по времени — память о его текущем состоянии и его истории целиком и полностью содержится в текущем пространственном распределении намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , то есть магнитной текстуре. Отсюда вытекает важность изучения свойств магнитных текстур для всех настоящих и будущих приложений магнетизма.

Многие из этих свойств и подходов к их описанию известны. Далее в этой Главе представлены важнейшие классические результаты, связанные с общей теорией магнитных текстур и современное состояние теории магнитных текстур в наноструктурах.

### 1.1. Прецессия магнитного момента

Историю теории микромагнетизма можно отсчитывать от классической работы Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [41]. В ней предложено феноменологическое уравнение для описания коллективного движения магнитных моментов в ферромагнетике, являющееся обобщением уравнения прецессии изолированного магнитного момента вокруг направления внешнего магнитного поля. Это уравнение (точнее, система связанных уравнений в частных производных) стало краеугольным камнем теории и получило общепринятое название — уравнение Ландау-Лифшица.

Отправной точкой в работе [41] является предположение, что ферромагнетик находится в локальном термодинамическом равновесии, а температура

достаточно низка, чтобы в каждом малом (но всё же макроскопическом) объёме сформировался локальный спонтанный магнитный момент. Причём величина этого спонтанного магнитного момента является функцией температуры (и других внешних условий), а магнитные взаимодействия считаются настолько слабыми, что их влиянием на величину спонтанного магнитного момента можно пренебречь. Это приближение ухудшается при приближении к температуре Кюри ферромагнетика, когда уравнение Ландау-Лифшица необходимо заменить модифицированным уравнением Ландау-Лифшица-Блоха [42, 43]. Здесь считается, что температура далека от температуры магнитного разупорядочения, а значит длина вектора локальной намагниченности (намагниченность насыщения)  $M_S$  зависит от температуры, давления, и координат в материале, но не от магнитного поля и времени. Температура, давление и другие внешние условия, если и меняются, то приводят к параметрическому изменению полученных здесь результатов через намагниченность насыщения  $M_S$ . Эффект термических флуктуаций обсуждается только в §4.5.

Вследствие ограничения на длину вектора локальной намагниченности, его изменение всегда перпендикулярно самому этому вектору. То есть это изменение можно представить в виде векторного произведения намагниченности  $\mathbf{M}$  на другой вектор. В случае прецессии намагниченности вокруг направления внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$ , изменение пропорционально  $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$ , см. левую часть рисунка 1.1. Если же присутствует диссипация энергии, то со временем амплитуда прецессии будет сокращаться, см. правую часть рисунка 1.1. Это можно представить в виде дополнительной силы, которая перпендикулярна и  $\mathbf{M}$ , и силе прецессии  $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$ , а значит пропорциональна  $\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ . Под действием этой силы, в конце концов, вектор  $\mathbf{M}$  станет параллельным  $\mathbf{H}$ .

Из аналогичных феноменологических соображений в работе Л.Д. Ландау

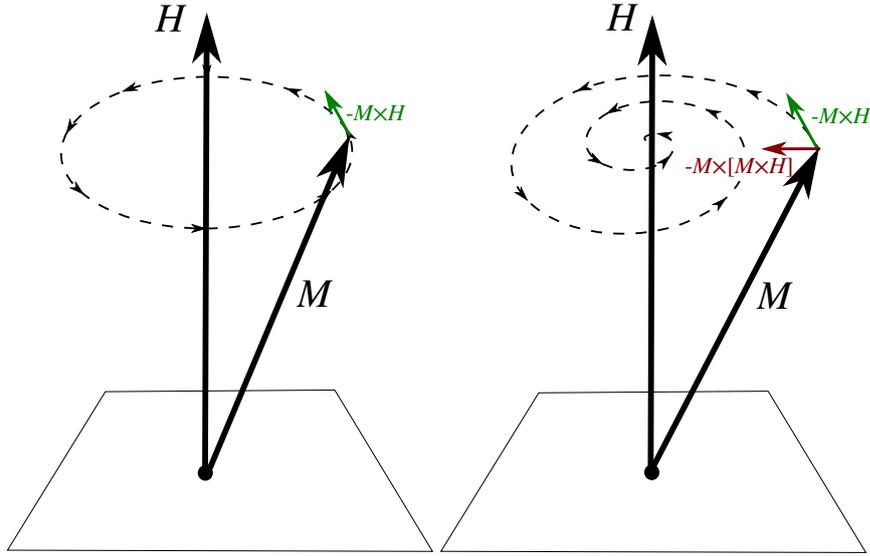


Рисунок 1.1. Прецессия вектора магнитного момента  $\mathbf{M}$  вокруг направления магнитного поля  $\mathbf{H}$ : бездиссипативная (слева) и с учётом диссипации (справа). Векторы, прикрепленные к концу вектора  $\mathbf{M}$ , соответствуют слагаемым в уравнении Ландау-Лифшица: прецессионному  $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$  и диссипативному  $\mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{H}]$

и Е. М. Лифшица [41] и было получено их знаменитое уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_p \mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}} - \lambda_{\text{LL}} \mathbf{M} \times [\mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}}], \quad (1.2)$$

где  $\gamma_p$  — гиромагнитное отношение, а  $\lambda_{\text{LL}}$  — феноменологический параметр диссипации. В металлических магнетиках, где магнетизм имеет электронную природу  $\gamma_p = \gamma_e = 1.760\,859\,644(11) \times 10^{11}$  рад с<sup>-1</sup> Тл<sup>-1</sup>. Значение параметра  $\lambda_{\text{LL}}$  обычно является подгоночным параметром и определяется из эксперимента. Вектор  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  представляет собой вектор локального эффективного магнитного поля в данной точке магнетика. Он включает в себя как внешнее магнитное поле, так и дополнительные эффективные поля, моделирующие взаимодействие локального магнитного момента с моментами в других точках магнетика. Для широкого класса различных магнитных взаимодействий полную энергию маг-

нетика  $E$  можно представить в виде интегрального функционала

$$E(\{\mathbf{M}(\mathbf{r})\}) = \iiint_V e(X, Y, Z, \mathbf{M}(X, Y, Z), \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial Y}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial Z}) d^3\mathbf{r}, \quad (1.3)$$

где  $e$  — объёмная плотность энергии,  $V$  — объём магнетика, и в явном виде используются декартовы координаты  $\mathbf{r} = \{X, Y, Z\}$ . Фигурные скобки в (1.3) обозначают функциональную зависимость от всего распределения  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  внутри магнетика, а не только от значения  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  в какой-то одной точке. Основные (метастабильные) состояния магнетика соответствуют глобальному (локальному) минимуму функционала (1.3) при условии, что длина вектора намагниченности фиксирована  $|\mathbf{M}| = \text{const}$ . Такие состояния можно найти разными способами, но для того, чтобы к ним сходилась вытекающая из (1.2) при наличии диссипации динамика намагниченности, вектор локального эффективного поля в этом уравнении нужно выразить [41, 44] через вариационную производную  $E$ :

$$\mathbf{H}^{\text{eff}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{M}} = -\frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial e}{\partial \mathbf{M}} - \sum_{\alpha=X,Y,Z} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial e}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha}} \right). \quad (1.4)$$

Диссипация приводит к тому, что прецессия в конце концов затухает и векторы  $\mathbf{M}$  приходят в стабильное равновесие. При этом, как следует из (1.2), они становятся сонаправлены с  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$ , что соответствует минимуму энергии Зеемана

$$e_Z = -\mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{\text{eff}}. \quad (1.5)$$

Если же прецессия бездиссипативная ( $\lambda_{\text{LL}} = 0$ ), то проекция намагниченности  $\mathbf{M}$  на направление  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  сохраняется.

В случае изолированного магнитного момента (или для динамики однородной намагниченности изотропной сферы) эффективное поле состоит только из внешнего поля  $\mathbf{H}$ , но в более общих случаях оно содержит и другие слагаемые, часто нелинейные или нелокальные, которые обсуждаются в следующем параграфе.

## 1.2. Микромагнитный лагранжиан

Уравнения Ландау-Лифшица описывают (затухающую) прецессию магнитного момента вокруг направления эффективного магнитного поля  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$ , которое выражается через вариационную производную энергии магнетика (1.4). Аналогично вариационной механике Лагранжа и Гамильтона, уравнения Ландау-Лифшица это не дифференциальные уравнения, как таковые, но метод получения дифференциальных уравнений, описывающих ту или иную конкретную ситуацию. Более тесная их связь с механикой Лагранжа рассмотрена в §1.3, а пока перечислим самые распространённые (и самые важные) взаимодействия, которые можно учесть в рамках этого метода.

### 1.2.1. Обменная энергия

Обменное взаимодействие является важнейшим в ферромагнетике. Именно оно, если является достаточно сильным для подавления тепловых флуктуаций, приводит к возникновению спонтанного магнитного момента и, как следствие, к существованию ферромагнитной фазы как таковой. Название “обменное” не случайно, а связано с тем, что это взаимодействие имеет чисто квантовую электростатическую природу, связанную с разницей энергии конфигураций, когда участвующие в них идентичные элементарные частицы меняются местами.

Не будем здесь подробно разбирать квантовую природу обменного взаимодействия, это уже сделано в учебниках по физике твёрдого тела [45] и магнетиз-

му [3], а обсудим лишь конечную форму обменной энергии, выраженную через классические векторы локального магнитного момента. Квантовое рассмотрение необходимо для объяснения значения коэффициента перед этим энергетическим членом, который в чисто классическом мире был бы нулевым. Кроме того, в этом параграфе ограничимся рассмотрением лишь изотропного обменного взаимодействия, каким оно является, например, в кубических кристаллах. Более сложный случай анизотропного обмена рассмотрен в §1.2.4.

Плотность обменной энергии кубического магнетика вытекает из определения в терминах углов между соседними спинами [3]. Допуская пространственную дисперсию намагниченности насыщения и обменной константы, её можно записать в виде:

$$e_{\text{EX}} = \frac{C(\mathbf{r})}{2} \sum_{i=X,Y,Z} \left( \nabla \left[ \frac{M_i(\mathbf{r})}{M_S(\mathbf{r})} \right] \right)^2, \quad (1.6)$$

где  $C(\mathbf{r})$  — обменная жёсткость ( $[C] = \text{Дж м}^{-1}$ ), пропорциональная квантовомеханическому интегралу перекрытия волновых функций и определяющая силу обменного взаимодействия, а суммирование ведётся по индексам осей декартовой системы координат:  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . В некоторых работах обменную жёсткость описывают при помощи параметра  $A$ , который имеет ту же размерность и связан соотношением  $C = 2A$ . Хотя величину  $C$  можно рассчитать из первых принципов [46], для конкретного магнитного материала (с учётом деталей процедуры приготовления) её гораздо проще измерить (например, современным методом Шрейбера и Фрайта [47]). Для пермаллоя ( $\text{Pу} = \text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$ ) характерная величина  $C_{\text{Pу}} = 26 \text{ пДж м}^{-1} = 2.6 \times 10^{-11} \text{ Дж м}^{-1}$ , но измеренное значение макроскопической (усреднённой по объёму) обменной константы может меняться от образца к образцу в зависимости от вариаций процедуры приготовления и точного химического состава.

Плотность обменной энергии (1.6) зависит от относительной ориентации соседних магнитных моментов из-за чего вектор  $\mathbf{M}$  входит в неё нормированным

на намагниченность насыщения  $M_S$ . Пользуясь правилами векторной алгебры и уравнением  $|\mathbf{M}(\mathbf{r})| = M_S(\mathbf{r})$ , градиенты в (1.6) можно раскрыть и привести это выражение к виду:

$$e_{\text{EX}} = \frac{\mu_0 \gamma_B L_E^2(\mathbf{r})}{2} \left( -[\nabla M_S(\mathbf{r})]^2 + \sum_{i=X,Y,Z} [\nabla M_i(\mathbf{r})]^2 \right), \quad (1.7)$$

где введена обменная длина

$$L_E(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{C(\mathbf{r})}{\mu_0 \gamma_B M_S^2(\mathbf{r})}}. \quad (1.8)$$

Параметр  $L_E$  задаёт характерный масштаб неоднородностей магнитной текстуры. Примерно таким (единицы-десятки обменных длин) и является характерный масштаб объектов (магнитных и материальных), которые рассматриваются в данной работе.

Величины обменной жёсткости  $C$  и намагниченности насыщения  $M_S$  в ферромагнитном состоянии определяются обменным взаимодействием и выражаются через квантовомеханические обменные интегралы. При температурах значительно ниже температуры Кюри (выше которой ферромагнитный порядок разрушается и материал становится парамагнитным) вариabельность  $L_E$  в различных магнитных материалах обычно невелика. Её величина составляет обычно десятки нанометров.

Здесь нужно отметить, что в литературе встречаются разные определения  $L_E$ . Во многих работах  $\gamma_B$  не используется, вследствие чего как сама обменная длина, так и содержащие её формулы начинают зависеть от используемой системы единиц. Например, в системе единиц СГС долгое время общепринятым было следующее определение (используется в работах [15, 16, 20–22] и многих других)

$$L_E^{\text{CGS,Py}} = \sqrt{\frac{C}{M_S^2}} = \frac{\sqrt{2.6 \times 10^{-6} \text{ эрг см}^{-1}}}{800 \text{ эме см}^{-3}} = 2.0 \times 10^{-6} \text{ см} \approx 20 \text{ нм}, \quad (1.9)$$

где подставлены значения обменной жёсткости и намагниченности насыщения для пермаллоя, используемые по умолчанию в программе микромагнитных расчётов OOMMF [48] (экспериментально измеренные величины  $C$  и  $M_S$  могут меняться от образца к образцу вследствие различных условий их приготовления, примесей и небольших вариаций состава; они так же зависят от температуры). Выражая значения этих параметров в системе СИ  $C = 2.6 \times 10^{-11}$  Дж м<sup>-1</sup> и  $M_S = 8 \times 10^5$  А м<sup>-1</sup>, получим

$$L_E^{\text{SI,Py}} = \sqrt{\frac{C}{\mu_0 M_S^2}} = \frac{\sqrt{2.6 \times 10^{-11} \text{ Дж м}^{-1}}}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн м}^{-1} 8 \times 10^5 \text{ А м}^{-1}}} \approx 5.7 \text{ нм.} \quad (1.10)$$

Такое определение используется в [14, 17, 18, 23, 27, 28] и многих современных работах. Величины обменной длины, вычисленные по этим формулам, связаны соотношением  $L_E^{\text{CGS,Py}} = \sqrt{4\pi} L_E^{\text{SI,Py}}$ . Оба этих определения правильные, в том смысле, что подстановка их в формулы, полученные с использованием соответствующего определения обменной длины, даёт не зависящий от системы единиц результат. Удобство определения (1.9) при изучении магнитных вихрей состоит в том, что размер ядра вихря [8] получается примерно равным  $L_E^{\text{CGS}}$ . Поэтому в работе [24] была сделана попытка ввести универсальное независимое от системы единиц определение, приводящее к величине обменной длины такой же, как в системе единиц СГС

$$L_E^{\text{CGS,Py}} = \sqrt{\frac{4\pi C}{\mu_0 M_S^2}} = \frac{\sqrt{4\pi 2.6 \times 10^{-11} \text{ Дж м}^{-1}}}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн м}^{-1} 8 \times 10^5 \text{ А м}^{-1}}} \approx 20 \text{ нм.} \quad (1.11)$$

Тем не менее, в последующих работах автора [12, 25, 26], как и в этой работе, использовалось универсальное определение (1.8), соответствующее (во всех системах магнитных единиц) определению, принятому в СИ. Приведенные здесь результаты работ [14–18, 20–24, 27, 28] были перемасштабированы, чтобы соответствовать этому определению. При сравнении с результатами других авторов нужно обязательно обращать внимание на принятое ими определение  $L_E$ .

### 1.2.2. Магнитоэлектростатическая энергия

Присутствующие в ферромагнитном материале локальные дипольные магнитные моменты (с объёмной плотностью  $M_S$ ) неизбежно взаимодействуют между собой. Это взаимодействие присутствует в любом ферромагнетике и описывается системой уравнений Максвелла (см. учебники [3, 45]). В стационарном случае (который, в основном, и рассматривается в данной работе), когда нет макроскопических электрических зарядов и токов, магнитная подсистема этих уравнений упрощается до

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.12)$$

$$[\nabla \times \mathbf{H}] = 0. \quad (1.13)$$

Отметим, что аналогичными уравнениями часто пользуются и в нестационарном случае. Например, при рассмотрении спиновых волн [44, 49]. Это работает потому что групповая скорость коллективных спиновых возбуждений значительно меньше скорости света (с которой распространяются взаимодействия между отдельными локальными магнитными моментами). С точки зрения взаимодействия между магнитными диполями, магнитная динамика в большинстве практически интересных случаев является квазистатической, а само взаимодействие называется поэтому магнитоэлектростатическим.

Из уравнения (1.13) следует возможность представить вектор магнитного поля  $\mathbf{H}$  при помощи скалярного потенциала  $u(\mathbf{r})$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla u(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

после чего уравнение (1.13) удовлетворяется тождественно, а из (1.12) с использованием (1.1) получается уравнение Пуассона для скалярного потенциала

$$\Delta u(\mathbf{r}) = -\gamma_V \varrho, \quad (1.15)$$

где

$$\varrho = \nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (1.16)$$

Уравнение (1.15) формально эквивалентно уравнению для электростатического потенциала, созданного распределением зарядов  $\varrho$ . Поэтому величина  $\varrho$  называется объёмной плотностью магнитных зарядов, а этот метод расчёта порождённого распределением намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  магнитного поля — методом магнитных зарядов.

Как известно, магнитные монополи отсутствуют (не наблюдаются), а значит общий магнитный заряд конечных образцов всегда равен нулю (положительные и отрицательные магнитные заряды скомпенсированы). Поэтому магнитостатическая энергия обусловлена взаимодействием магнитных диполей. Её можно выразить в виде энергии взаимодействия всех пар магнитных диполей или как энергию каждого диполя в поле, созданном всеми диполями

$$E_{\text{MS}} = -\frac{1}{2}\mu_0 \iiint (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{\text{D}}) d^3\mathbf{r}, \quad (1.17)$$

где интегрирование ведётся по всему пространству, знак минус и  $\mu_0$  являются частью выражения (1.5) энергии магнитного момента во внешнем поле (энергии Зеемана), множитель  $1/2$  появляется из-за того, что при таком интегрировании энергия каждой пары диполей учитывается дважды, а поле  $\mathbf{H}$ , созданное распределением намагниченности  $\mathbf{M}$ , переобозначено как размагничивающее поле  $\mathbf{H}_{\text{D}} = \mathbf{H} = \nabla u(\mathbf{r})$ .

Уравнение (1.15) является линейным уравнением в частных производных эллиптического типа, его решения известны и, при наличии достаточного количества граничных условий, единственны. Конкретно, для конечных магнитных тел (когда намагниченность не равна нулю в ограниченной области пространства) устранить расходимость скалярного потенциала и его градиента на беско-

нечности можно при помощи следующих условий

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} |\mathbf{r}| u(\mathbf{r}) &< \infty, \\ \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} |\mathbf{r}|^2 |\nabla u(\mathbf{r})| &< \infty, \end{aligned} \quad (1.18)$$

которых достаточно для единственности решения  $u(\mathbf{r})$  во всём пространстве.

Для вычисления магнитостатической энергии по формуле (1.17) необходимо знать только поле внутри магнетика (там, где  $|\mathbf{M}| > 0$ ). Его можно получить напрямую из (1.17) используя метод интегрирования по частям (с учётом того, что получившийся таким образом поверхностный интеграл равен нулю для конечного распределения намагниченности)

$$E_{\text{MS}} = \frac{1}{2} \mu_0 \iiint (\nabla \cdot \mathbf{M}) u \, d^3 \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mu_0 \iiint \varrho u \, d^3 \mathbf{r} \quad (1.19)$$

и воспользовавшись известным выражением функции Грина для уравнения Пуассона, которая определяет потенциал, созданный точечным (магнитным, в рассматриваемом случае) единичным зарядом, расположенным в начале координат

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{\gamma_{\text{B}}}{4\pi |\mathbf{r}|}. \quad (1.20)$$

Тогда в силу линейности (1.15), энергию диполей (1.17) можно представить в эквивалентном виде как энергию взаимодействующих магнитных зарядов

$$E_{\text{MS}} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\gamma_{\text{B}}}{4\pi} \iiint d^3 \mathbf{r}_1 \iiint d^3 \mathbf{r}_2 \frac{\varrho(\mathbf{r}_1) \varrho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (1.21)$$

С другой стороны, из (1.19)

$$\begin{aligned} E_{\text{MS}} &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\gamma_{\text{B}}} \iiint (\Delta u) u \, d^3 \mathbf{r} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\gamma_{\text{B}}} \iint u \nabla u \cdot d^2 \mathbf{r} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\gamma_{\text{B}}} \iiint |\nabla u|^2 \, d^3 \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где используется векторное тождество  $\nabla \cdot (u \nabla u) = u \Delta u - |\nabla u|^2$  и теорема о дивергенции. Первое слагаемое во второй строке представляет собой скаляр,

вследствие того, что элемент площади  $d^2\mathbf{r}$  — вектор. В силу граничных условий (1.18), интеграл во второй строке по (бесконечно удалённой) поверхности равен нулю. Отсюда сразу видно, что магнитостатическая энергия для ограниченного распределения намагниченности всегда положительна. Её минимальное значение  $E_{\text{MS}} = 0$  достигается только при  $\mathbf{H}_D = 0$ , что возможно только при отсутствии самих магнитных зарядов (т.е. при равенстве нулю дивергенции намагниченности). Обратное утверждение известно как принцип избежания магнитных зарядов [3], который сводится к тому, что в процессе уравнивания (минимизации своей энергии) магнитная текстура стремится к конфигурации с наименьшим количеством локальных магнитных зарядов. Этот принцип слишком прост, чтобы охватить всё многообразие форм, которые принимает магнитная текстура под влиянием магнитостатической энергии, но он может помочь исключить из рассмотрения заведомо энергетически невыгодные распределения магнитных моментов.

Из положительности магнитостатической энергии  $E_{\text{MS}}$ , очевидной при записи её в виде (1.21), сравнивая с выражением (1.17), увидим, что в среднем поле  $\mathbf{H}_D$  направлено против направления намагниченности (условие положительности скалярного произведения со знаком минус). Из-за этого поле  $\mathbf{H}_D$ , созданное распределением намагниченности, часто называют размагничивающим. Это ещё один простой принцип, который может помочь в определении эффекта дипольного взаимодействия на формирование магнитных текстур.

Конечные магнетики часто (хоть и не всегда) представляют собой тела с резкими границами. В этом случае удобно ввести поверхностную плотность магнитных зарядов. Для этого воспользуемся обобщенными функциями и представим границу, умножив плавно меняющийся внутри магнитного материала

вектор намагниченности на произведение  $\theta$ -функций Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

так, что аргумент  $x = 0$  соответствует точкам, лежащим на границе. Тогда при вычислении дивергенции  $\theta$ -функции превратятся в  $\delta$ -функции Дирака, локализованные на границе, которые выделяют поверхностную плотность магнитных зарядов

$$\sigma(\mathbf{r}) = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{M})|_{\mathbf{r} \in \partial V}, \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — внешняя нормаль к границе магнетика, а  $\mathbf{r} \in \partial V$  означает, что  $\mathbf{r}$  лежит на границе магнетика, занимающего объём  $V$ . То есть поверхностные магнитные заряды определяются своей плотностью, которая пропорциональна нормальной компоненте намагниченности на границе магнетика. Внутри объёма  $V$  при этом могут существовать объёмные магнитные заряды с плотностью, пропорциональной дивергенции  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ .

При всём подобии, важно понимать разницу между магнитными зарядами (их ещё называют магнитными полюсами) и магнитными монополями. С одной стороны, они неразличимы и, при одинаковом своём пространственном распределении, создают идентичные внешние поля. Разница заключается только в одном: магнитные заряды (полюса) всегда сбалансированы (количество отрицательных магнитных зарядов в точности равно количеству положительных магнитных зарядов), а магнитные монополи — нет. Это свойство магнитных зарядов очевидным образом следует, в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса, из их определения в виде дивергенции некоторого векторного поля (1.16), которое обращается в нуль на бесконечности (из-за конечности объёма магнетика). Только лишь в умозрительном случае бесконечного магнетика (который невозможен в природе) разница между магнитными зарядами и магнит-

ными монополями отсутствует.

### 1.2.3. Энергия локальной магнитной анизотропии

Обменное и магнитостатическое (дипольное) взаимодействие в бесконечном (или сферическом) магнетике инвариантны относительно общего поворота всех магнитных моментов. Если ограничиться только ими, то поворот всех моментов на произвольный угол не изменит его энергии. В случае несферической формы магнетика дипольное взаимодействие нарушает эту симметрию и приводит (за счёт взаимодействия с поверхностью) к появлению выделенных (предпочтительных) направлений для локального магнитного момента. Этот эффект возникает естественным образом при точном учёте формы магнетика.

Но и для сферических (а так же бесконечных) магнетиков направления локального магнитного момента эквивалентны не всегда. Как минимум, такая неэквивалентность может возникать вследствие симметрии кристаллической структуры, которая выделяет определённые (эквивалентные между собой) направления в пространстве. Она может возникнуть и как результат некоторой нетривиальной обработки материала, формирующей упорядоченные, ориентированные в пространстве, дефектные структуры, приводящие к локальным механическим напряжениям.

Учёт возможности возникновения локальной магнитной анизотропии осуществляется путём добавления в энергию магнетика члена, зависящего от направления магнитного момента:

$$e_A = \mathcal{A}(m), \quad (1.25)$$

где  $\mathcal{A}$  — произвольная функция двух направляющих углов единичного вектора

нормированной намагниченности  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_S$ . Этого представления достаточно для рассмотрения малых отклонений намагниченности от некоторой известной магнитной текстуры (например, однородной). В этом случае разложение функции  $\mathcal{A}$  в ряд Тейлора можно представить при помощи матрицы анизотропии. Вид этой матрицы определяется физической структурой изучаемого объекта и, как минимум, соответствует его симметрии и симметрии пространства-времени.

В частности, из-за изменения знака  $\mathbf{M}$  при обращении времени в то время как энергия анизотропии является свойством материала и от направления течения времени не зависит, можно утверждать, что разложение энергии анизотропии по степеням  $\mathbf{m}$  может содержать лишь чётные степени и начинаться с членов второго порядка [50]

$$e_A = \mathcal{A}_{ij}^{(2)} m_i m_j + \mathcal{A}_{ijkl}^{(4)} m_i m_j m_k m_l + \dots, \quad (1.26)$$

где тензоры  $\mathcal{A}_{ij}^{(2)}$  и  $\mathcal{A}_{ijkl}^{(4)}$  абсолютно симметричные (инвариантные относительно перестановки любой пары своих индексов), а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Кроме ограничений, налагаемых симметрией, из сумм нужно ещё исключить группы вида  $m_X^2 + m_Y^2 + m_Z^2$ , которые являются инвариантами, равными 1. В конечном итоге оказывается, что для одноосных кристаллов во всей матрице  $\mathcal{A}_{ij}^{(2)}$  остаётся лишь один независимый параметр, а энергия анизотропии (в системе координат, где ось OZ параллельна кристаллической оси) имеет вид

$$e_A^U = K(m_X^2 + m_Y^2) = K \sin^2 \theta \doteq -K m_Z^2 = -K \cos^2 \theta, \quad (1.27)$$

где  $\theta$  угол между направлением намагниченности и лёгкой осью, а равенство  $\doteq$  понимается с точностью до несущественной в определении энергии константы. При положительном значении параметра анизотропии  $K > 0$  вклад  $e_A$  в полную энергию минимален, если вектор  $\mathbf{M}$  направлен параллельно кристаллической

оси (в этом случае говорят об анизотропии типа “лёгкая ось”). Если  $K < 0$ , то анизотропия стремится уложить вектор намагниченности в плоскость, перпендикулярную кристаллической оси (тогда её называют анизотропией типа “лёгкая плоскость”). При учёте членов разложения второго порядка все направления в лёгкой плоскости эквивалентны, но члены более высоких порядков могут нарушить эту симметрию (например, в тетрагональных и гексагональных кристаллах). Кубические кристаллы во втором порядке по направляющим косинусам  $\mathbf{m}$  изотропны

$$e_A^C = K_1(m_X^2 m_Y^2 + m_X^2 m_Z^2 + m_Y^2 m_Z^2) + K_2 m_X^2 m_Y^2 m_Z^2, \quad (1.28)$$

но (как часто бывает на практике) их тонкие плёнки могут приобрести одноосную анизотропию (1.27) за счёт рассогласования параметров кристаллической решётки плёнки и подложки. Рассогласование приводит к неоднородной деформации кристаллических решёток, спадающей при удалении от интерфейса. Зависимость энергии от направления вектора намагниченности даже в простейших случаях (одноосного и кубического кристаллов) может быть достаточно сложной, см. рисунок 1.2.

Множество работ посвящено изучению магнитной анизотропии кристаллов [51] (обзор и ссылки там) в связи с их структурой и химическим составом. Коэрцитивная сила доменных границ, как правило, пропорциональна константе анизотропии [52] (см. литературные источники в этом обзоре). Поэтому в магнитомягких материалах (которые, в основном, здесь рассматриваются) кристаллическая анизотропия обычно пренебрежимо мала. В остальных случаях здесь учтена только одноосная анизотропия (1.27).

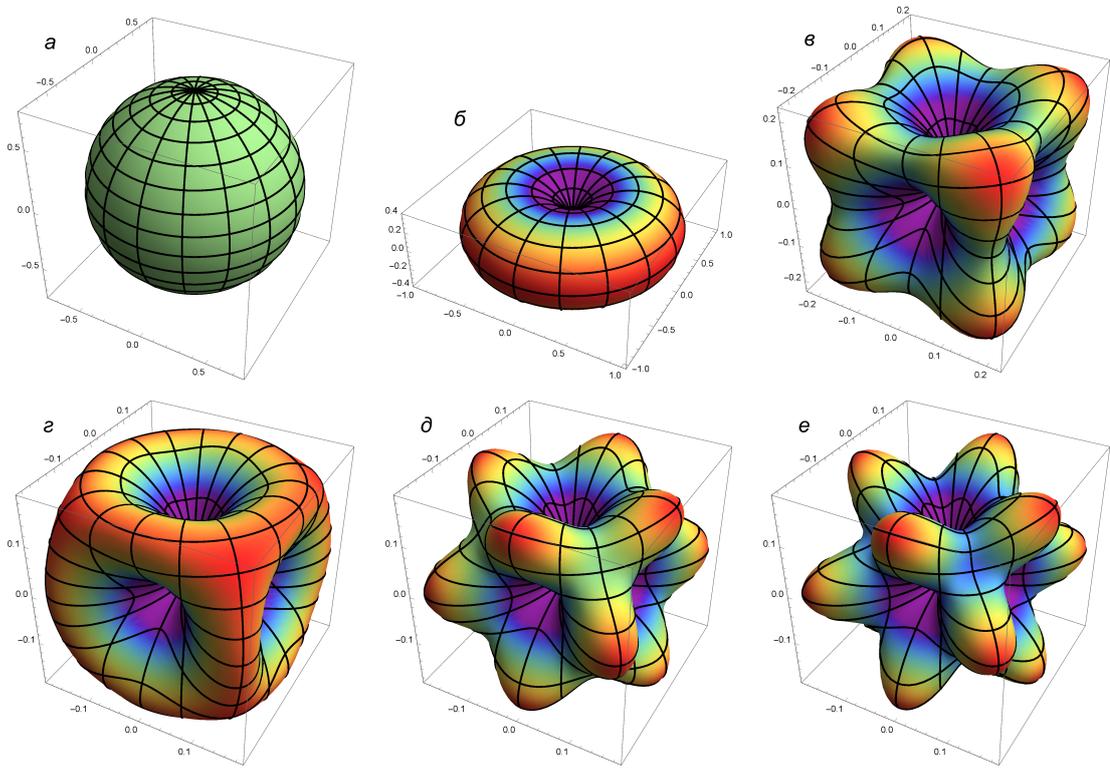


Рисунок 1.2. Зависимость энергии анизотропии (1.27) и (1.28) от направления вектора намагниченности в сферических координатах: *a* — изотропный случай ( $K = 0, K_1 = 0, K_2 = 0$ ); *b* — одноосная анизотропия ( $K = 1, K_1 = 0, K_2 = 0$ ); *c* — кубическая анизотропия в низшем (4-м) порядке ( $K = 0, K_1 = 1, K_2 = 0$ ). Нижняя строка иллюстрирует подмешивание кубической анизотропии 6-го порядка для  $K = 0, K_1 = 1$  и различных значений  $K_2$ : *г* —  $K_2 = -2$ ; *д* —  $K_2 = -4$ ; *е* —  $K_2 = -5$

#### 1.2.4. Анизотропный и антисимметричный обмен

Изотропный обмен, который обсуждался в §1.2.1, как правило, является доминирующим. Но в общем случае обменное взаимодействие является чувствительным к структуре кристаллической решётки магнетика. Эта связь рассмотрена ниже и представлена в виде выражений для энергии анизотропного и ан-

тисимметричного обмена. Последний также часто называют взаимодействием Дзялошинского-Мория.

Из феноменологических соображений представим энергию обменного взаимодействия двух соседних по решётке магнитных моментов в самом общем виде [53]

$$E_{12} = m_i^{(1)} A_{ij} m_j^{(2)}, \quad (1.29)$$

где  $\hat{\mathbf{A}} = \{A_{ij}\}$  — тензор обменных констант, связывающих разные компоненты магнитных моментов  $\mathbf{m}^{(1)}$  и  $\mathbf{m}^{(2)}$ , а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В континуальном приближении, если распределение намагниченности описывается гладким векторным полем  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , то величины  $m_i^{(1)}$  и  $m_i^{(2)}$ , представляющие векторы намагниченности в близко расположенных (соседних) точках кристалла, можно представить при помощи разложения векторного поля  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  в ряд Тейлора:  $m_i^{(1)} = m_i$ ,

$$m_i^{(2)} = m_i + u_x \frac{\partial m_i}{\partial X} + u_y \frac{\partial m_i}{\partial Y} + u_z \frac{\partial m_i}{\partial Z} + \dots, \quad (1.30)$$

где вектор  $\mathbf{u}$  связывает положение соседних атомов в решетке.

Любой тензор второго ранга  $\hat{\mathbf{A}}$  можно совершенно формально разделить на симметричную и антисимметричную части. Если вдобавок симметричную часть разбить на диагональную и симметричную, но бесследовую матрицы — получим

$$\hat{\mathbf{A}} = A\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{A}}^S + \hat{\mathbf{A}}^A, \quad (1.31)$$

где  $A = (1/3) \text{Tr } \hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}^S = \hat{\mathbf{A}}^{S\tau}$ ,  $\text{Tr } \hat{\mathbf{A}}^S = 0$ ,  $\hat{\mathbf{A}}^A = -\hat{\mathbf{A}}^{A\tau}$ ,

$$\hat{\mathbf{A}}^S = \frac{\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}^\tau}{2} - A\hat{\mathbf{I}}, \quad (1.32)$$

$$\hat{\mathbf{A}}^A = \frac{\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}^\tau}{2}, \quad (1.33)$$

а  $\hat{\mathbf{A}}^\tau$  обозначает транспонированную матрицу  $\hat{\mathbf{A}}$ . Физическое содержание этой процедуры, её связь с кристаллической решёткой магнетика проявляется в том,

что тензор  $A$  должен соответствовать симметрии этой решётки. В частности, в кристаллах, симметричных относительно пространственной инверсии, антисимметричные компоненты тензора запрещены [54, 55]. В нецентросимметричных же кристаллах (как и в различных дефектных структурах [56, 57] или при наличии интерфейсов [58]) антисимметричные члены  $\hat{\mathbf{A}}^A \neq 0$  могут проявиться.

Обменную энергию магнетика (1.29) с полностью антисимметричным тензором  $\hat{\mathbf{A}}$  в континуальном приближении (учитывая (1.30)) можно представить в виде суммы антисимметричных по  $i, j$  комбинаций вида

$$L_{ij}^k = m_i \frac{\partial m_j}{\partial k} - m_j \frac{\partial m_i}{\partial k}, \quad (1.34)$$

где  $i, j, k$  пробегает значения  $X, Y, Z$ . Эти величины называют также инвариантами Лифшица (в дискретном случае возникают аналогичные по форме комбинации локальных векторов ферромагнетизма и антиферромагнетизма [54]). В простейшем случае кубического кристалла инварианты Лифшица для всех циклических перестановок координат  $X, Y$  и  $Z$  должны войти с равными весами. Это дает известное выражение для объёмной плотности энергии взаимодействия Дзялошинского-Мория в кубическом кристалле [59, 60]

$$e_{\text{DM}} = D (L_{ZY}^{(X)} + L_{XZ}^{(Y)} + L_{YX}^{(Z)}) = D \mathbf{m} \cdot [\nabla \times \mathbf{m}], \quad (1.35)$$

где  $D$  — константа взаимодействия ( $[D] = \text{Дж м}^{-2}$ ).

Взаимодействие Дзялошинского-Мория делает параллельную ориентацию соседних магнитных моментов менее энергетически выгодной, а значит стабилизирует неколлинеарные магнитные текстуры (например, спирали или конусы [61]), в которых соседние векторы намагниченности находятся под углом друг к другу. Небольшое по величине взаимодействие Дзялошинского-Мория может, не изменяя тип магнитной текстуры, существенно уменьшить размер магнитных доменов (однородно намагниченных областей) в ней [62]. Знак константы  $D$  выбирает одно из двух направлений закрутки спиралей. Поэтому

оно приводит к магнитным текстурам с выраженной хиральностью [58, 63–78], нарушая симметрию между правым и левым, что проявляется в рассеянии спин-поляризованных нейтронов [79].

Взаимодействие Дзялошинского-Мория рассматривается в Главе 2, посвященной рассеянию нейтронов на ферромагнетике.

### 1.3. Механика Лагранжа и диссипация энергии магнетиком

Как и во многих других разделах физики, рассмотрение диссипативных процессов кажется простым, если смотреть с феноменологических позиций, но оказывается невероятно сложным, если попытаться понять эти процессы из первых принципов. Многие диссипативные процессы протекают одновременно в широчайшем диапазоне масштабов (от макроскопического до атомного, как, например, в каскаде Колмогорова при диссипации энергии турбулентным течением) для которых не существует единой (и поддающейся в то же время трактовке) физической модели. Если же руководствоваться феноменологическими соображениями, то во-первых, довольно просто сформулировать конкретную модель для диссипации энергии, а во-вторых, таких простых моделей существует множество и их предсказания могут (значительно или нет) различаться.

Такая ситуация сложилась и при описании магнитной диссипации. Ландау и Лифшиц предложили (см. §1.1) диссипативный член, который заставляет с течением времени вектор намагниченности выравниваться относительно направления эффективного поля. И, хоть направление этой диссипативной силы сложно оспорить (см. рисунок 1.1), её величина может быть разной, феноменология не подсказывает ответа на этот счёт.

Альтернативой феноменологии Ландау-Лифшица является феноменоло-

гия Релея, который предложил универсальный механизм диссипации для (изначально бездиссипативных) уравнений Лагранжа. Этот метод основывается на введении диссипативных функций (Релея) и описан в учебниках по классической механике [80]. Путь к описанию диссипации на общих с остальной теоретической физикой началах оказался плодотворным сам по себе. Дёрингом было получено выражение кинетической части лагранжиана [81]

$$\tau = -\frac{M_S}{\gamma_p} (\cos \theta - \cos \theta_0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1.36)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы магнитного момента  $\mathbf{M}$  в сферической системе координат,  $t$  — время,  $\gamma_p$  — гиромагнитное отношение, а  $\theta_0$  — константа. Использование сферической системы координат здесь позволяет автоматически учесть, что  $|\mathbf{M}| = M_S$ . Если вычесть из этого выражения потенциальную энергию магнетика (составленную, например, из различных членов, описанных в §1.2), а затем проварьировать и приравнять полученную первую вариацию нулю, то получатся в точности уравнения Ландау-Лифшица (1.2), но без диссипации. Если же дополнительно ввести диссипативную функцию (приводящую к появлению в уравнении движения членов с производной первого порядка по времени), как сделал Гильберт — получится уравнение Ландау-Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [82]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma_p \left( \mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}} - \lambda_G \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right), \quad (1.37)$$

где  $\lambda_G$  — параметр диссипации Гильберта. Если подставить в правую часть этого уравнения само уравнение, то его можно свести к уравнению Ландау-Лифшица (1.2), но уже с другим значением параметра  $\gamma_p = \gamma_p'$ , который зависит теперь от диссипации:

$$\gamma_p' = \frac{\gamma_p}{1 + \gamma_p^2 \lambda_G^2 M_S^2}, \quad (1.38)$$

$$\lambda_{LL} = \frac{\gamma_p^2 \lambda_G}{1 + \gamma_p^2 \lambda_G^2 M_S^2}. \quad (1.39)$$

Как видим, конкретные предсказания этих двух феноменологических подходов могут отличаться.

Для рассмотрения динамики намагниченности в дальнейшем используется кинетический лагранжиан Дёринга (1.36) и, вследствие использования формализма Лагранжа, форма Гильберта для диссипативного члена.

#### 1.4. Теория магнитных доменов

Как известно, в не очень сильных магнитных полях локальная намагниченность внутри ферромагнетика (практически любой формы и достаточно больших, но конечных размеров) не является пространственно однородной. Эта неоднородность является следствием конечности магнетика. Если бы он был бесконечным (и изотропным), то однородное распределение намагниченности, направленное параллельно внешнему полю, точно соответствовало бы:

- 1) абсолютному минимуму (нулю) обменной энергии (1.6);
- 2) абсолютному минимуму (нулю) магнитостатической энергии (1.21) из-за отсутствия в этом случае магнитных зарядов (полюсов);
- 3) абсолютному минимуму (максимальному по абсолютной величине отрицательному значению) энергии Зеемана (1.5) во внешнем магнитном поле.

А значит абсолютному минимуму суммы этих энергий.

Если же магнетик конечный, то однородное распределение намагниченности вблизи его границы (если только намагниченность ей не параллельна, что невозможно во всех точках границы) порождает магнитные полюса, пропорциональные нормальной компоненте намагниченности (рисунок 1.3а). Достаточно большое внешнее поле заставит намагниченность сформировать именно такую, сонаправленную с полем однодоменную структуру. При меньших зна-

чениях поля может оказаться более выгодным уменьшить магнитостатическую энергию за счёт повышения энергии Зеемана. Достичь этого можно либо в форме полосовой доменной структуры (рисунок 1.3б), в которой магнитные полюса чередуются на поверхности (заменяя положительную собственную энергию одноимённых поверхностных магнитных зарядов отрицательной энергией взаимодействия разноимённых). Либо в форме структуры из замыкающих доменов (рисунок 1.3в), в которой магнитный поток полностью замыкается внутри образца, а поверхностные заряды отсутствуют (взамен появляются объёмные магнитные заряды). Какой из вариантов осуществится, зависит от дополнительных факторов: размеров образца, наличия анизотропии. Одноосная анизотропия, например, стабилизирует полосовые домены.

В отсутствии поля энергии различных конфигураций доменов тонких плёнок были проанализированы Киттелем [83]. В частности им показано, что в достаточно тонкой плёнке с перпендикулярной её поверхности одноосной анизотропией, однородное (однодоменное) состояние с намагниченностью, лежащей в плоскости плёнки (рисунок 1.3г), является наиболее энергетически выгодным. Но даже в сверхтонких плёнках доменные структуры могут формироваться как метастабильные состояния.

Устройство границ между доменами тоже было предметом дискуссий. Блох первым показал [84], что за счёт обменной энергии толщина доменных границ не нулевая и они представляют собой плавный поворот вектора намагниченности от направления в одном домене к направлению в другом. Полный угол поворота может быть практически любым. Особенно если на стенку воздействует магнитное поле или другие внешние факторы. В материалах с одноосной анизотропией чаще встречаются  $180^\circ$  доменные границы (все границы на рисунке 1.3б), но если константа анизотропии не так велика, то могут сформироваться и  $90^\circ$  доменные границы (на рисунке 1.3в вертикальные границы  $180$ -ти градусные, а наклонные —  $90$ -градусные).

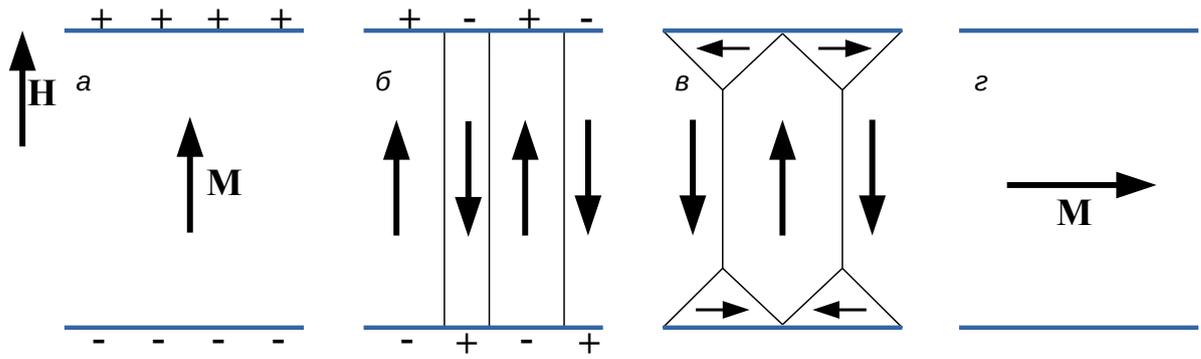


Рисунок 1.3. Возможные доменные структуры ферромагнитной плёнки в магнитном поле  $\mathbf{H}$ :  $a$  — однородно намагниченное перпендикулярно плоскости состояние;  $b$  — полосовые магнитные домены;  $c$  — замыкающие магнитные домены;  $d$  — однородно намагниченное в плоскости состояние

Основное предположение теории магнитных доменов заключается в возможности разделить описание магнитной текстуры на описание геометрии доменов и описание структуры доменных границ, решая эти две задачи независимо. Каждый тип доменной границы при этом характеризуется соответствующей равновесной плотностью энергии (на единицу поверхности границы). При решении задачи о геометрии доменов, границы между ними считаются бесконечно тонкими, но к потенциальной энергии добавляется член, представляющий собой площадь доменных границ, умноженную на их равновесную плотность энергии. Иногда включаются и градиентные члены, позволяющие моделировать кривизну границ. Такая факторизация позволила решить множество практических задач о доменных структурах [1, 2, 85–87] вплоть до создания на их базе вычислительных устройств [88, 89].

В настоящей работе эти темы практически не затрагиваются, а наоборот рассмотрены случаи, когда используемое в теории доменных структур разбиение магнитной текстуры на домены и доменные границы невозможно — либо в силу приложенного внешнего поля, препятствующего формированию доменов, либо в случае, когда геометрические размеры магнетика настолько малы, что

полноценная доменная структура не может в нем сформироваться. Для этого режима характерен масштаб неоднородностей намагниченности в текстурах порядка обменной длины (1.8), то есть десятка(ов) нанометров. Поэтому их описание можно назвать теорией “наномагнетизма”. Большая часть данной работы посвящена наномагнетизму.

### 1.5. Блоховские и неелевские доменные границы

Рассмотрим теперь разворот вектора намагниченности в доменной границе детально. Кроме рассмотренного Блохом [84] варианта с разворотом вектора намагниченности в плоскости доменной границы (см. рисунок 1.4 сверху справа), возможен также разворот намагниченности без выхода из плоскости, определённой намагниченностью доменов (см. рисунок 1.4 в центре), который был впервые рассмотрен Неелем [90]. Границы первого типа называются блоховскими, а границы второго, соответственно, неелевскими.

В плёнках с пренебрежимо малой кристаллической анизотропией намагниченность доменов лежит в плоскости плёнки. Неелевская граница тогда соответствует конфигурации с нулевыми поверхностными магнитными зарядами и ненулевыми объёмными, а в блоховской наоборот присутствуют поверхностные магнитные заряды, а плотность объёмных зарядов тождественно равна нулю. Уже из качественных соображений можно сказать, что из-за доминирования поверхностных эффектов над объёмными в тонких плёнках, при малой толщине проигрыш в энергии объёмных зарядов не так существен по сравнению с проигрышем в поверхностных, а значит энергетически выгодными являются стенки Нееля. В толстых плёнках, наоборот, выигрыш в энергии объёмных зарядов существеннее, чем проигрыш в энергии поверхностных, а значит стенки Блоха, в

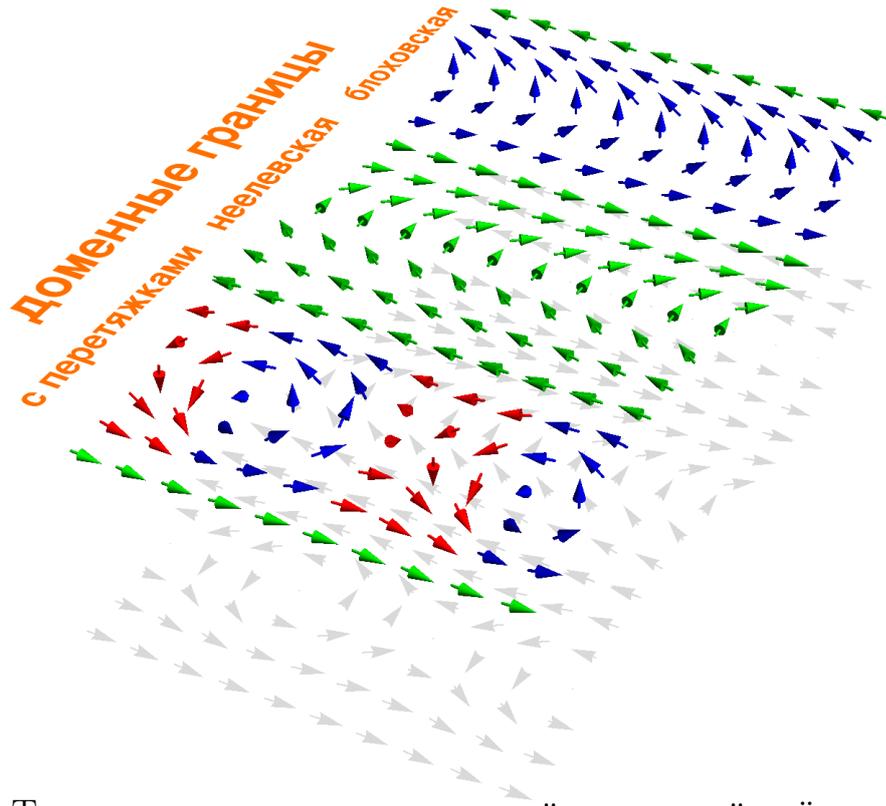


Рисунок 1.4. Типы доменных границ в тонкой магнитной плёнке с пренебрежимо малой кристаллической анизотропией. Вверху локальные векторы намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  изображены в трёх измерениях (синие векторы соответствуют  $m_z > 0$ , красные  $m_z < 0$ , зелёные  $m_z \approx 0$ ), снизу серым изображена их проекция на плоскость плёнки

которых объёмные заряды отсутствуют вообще, являются более энергетически выгодными.

Рассмотрим теперь эту проблему более конкретно (заодно и как пример решения задач микромагнетизма методом Ритца). Выберем декартову систему координат так, что её плоскость  $XOY$ , как обычно, лежит в плоскости магнитной плёнки толщиной  $L$ , которая занимает пространство  $-L/2 \leq Z \leq L/2$ . Предположим также, что центр доменной границы расположен в начале координат, а сама она параллельна оси  $OX$  так, что безразмерная намагниченность  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_S$  удовлетворяет условиям  $m_X(Y \rightarrow \infty) = -1$  и  $m_X(Y \rightarrow -\infty) = 1$ . Разворот магнитного момента происходит при движении вдоль оси  $OY$ , в на-

правлениях  $OX$  и  $OZ$  намагниченность однородна. Два типа магнитных текстур, соответствующих блоховским и неелевским доменным границам можно представить как

$$\mathbf{m}^B(\mathbf{r}) = \{\sin \beta(Y), 0, \cos \beta(Y)\}(\theta[1/2 + Z/L] + \theta[1/2 - Z/L] - 1), \quad (1.40)$$

$$\mathbf{m}^N(\mathbf{r}) = \{\sin \beta(Y), \cos \beta(Y), 0\}(\theta[1/2 + Z/L] + \theta[1/2 - Z/L] - 1), \quad (1.41)$$

где множитель с  $\theta$ -функциями Хевисайда справа, одинаковый для обоих типов доменных границ, ограничивает распределение намагниченности по толщине плёнки, а функция  $\beta(Y)$ , о которой, кроме граничных условий  $\beta(Y \rightarrow \pm\infty) = \pm\pi/2$ , пока ничего не известно, задаёт профиль доменной границы. Несложно убедиться, что  $|\mathbf{m}^B| = |\mathbf{m}^N| = 1$  внутри плёнки ( $|Z| \leq L/2$ ). Из этих представлений сразу видно, что стенка Нееля не имеет нормальных к поверхности плёнки компонент (поверхностных магнитных зарядов)  $m_Z^N = 0$ , а в стенке Блоха отсутствуют объёмные заряды потому что  $\nabla \cdot \mathbf{m}^B = 0$ .

Теперь осталось определить вид функции  $\beta(Y)$ . Как и в большинстве реальных задач микромагнетизма, найти точное решение для этой функции не удаётся. Казалось бы, задачу можно записать в вариационной постановке и представить  $\beta(Y)$  в виде решения соответствующего уравнения Эйлера-Лагранжа. Это так, но из-за магнитостатического взаимодействия (которым в реальных задачах микромагнетизма пренебрегать никак нельзя), уравнение для  $\beta(Y)$  получается интегро-дифференциальным с сингулярным ядром. Решить такое уравнение точно не представляется возможным.

В этой ситуации метод Ритца [91] является удобным (а в магнетизме основным) приближённым методом, позволяющим получать аналитические решения сложных задач. Суть его сводится к тому, чтобы предположить простой аналитический вид решения вариационной проблемы (в данном случае функции  $\beta(Y)$ ), зависящий от некоторого количества скалярных параметров — т.н. пробную функцию, и вычислить соответствующее значение минимизируемого функ-

ционала (в данном случае энергии) как функцию параметров пробной функции (вариационных параметров). Это позволяет заменить функциональную минимизацию поиском минимума функции нескольких скалярных переменных. Понятно, что результат такой процедуры настолько хорош, насколько выбранная пробная функция может быть (за счёт выбора значений параметров) приближена к точному решению (которое обычно неизвестно).

Несмотря на приближённый характер, строгость метода Ритца заключается в том, что полученные таким образом решения дают оценки энергии точного решения сверху. Разные пробные функции можно легко сравнивать по их значению энергии в минимуме, что позволяет выбрать функцию с наиболее низкой верхней оценкой. Кроме близости к решению, другим неформальным критерием при выборе пробных функций является их простота и возможность провести все необходимые выкладки аналитически в замкнутом виде.

Поиск пробных функций для доменных границ Нееля и Блоха продолжается до настоящего времени как с целью уточнения верхней оценки энергии, так и для учёта дополнительных слагаемых в магнитном лагранжиане. В случае изотропной тонкой плёнки (предполагая однородность магнитной текстуры по её толщине) две известные функции позволяют получить достаточно точную оценку энергии и при этом провести все выкладки аналитически. Это функция Дитце-Томаса [92]

$$\sin \beta^{DT}(Y) = \frac{Y\sqrt{2b^2 + Y^2}}{Y^2 + b^2}, \quad \cos \beta^{DT}(Y) = \frac{b^2}{Y^2 + b^2}; \quad (1.42)$$

и функция Ландау-Лифшица [41]

$$\sin \beta^{LL}(Y) = \tanh(2Y/c), \quad \cos \beta^{LL}(Y) = \frac{1}{\cosh(2Y/c)}, \quad (1.43)$$

где  $b$  и  $c$  — действительные вариационные параметры с размерностью длины, задающие масштаб (т.е. толщину доменной границы).

В силу того, что обменная энергия (1.7) не зависит от перестановки координат, при заданной вариационной модели  $\beta(Y)$  она одинакова для стенок типа

Блоха (1.40) и типа Нееля (1.41). Поверхностную (на единицу площади доменной границы) плотность обменной энергии несложно вычислить непосредственным интегрированием

$$\gamma_{\text{EX}} = \int_{-\infty}^{\infty} e_{\text{EX}} dY. \quad (1.44)$$

Для рассматриваемых моделей она равна

$$\gamma_{\text{EX}}^{DT} = \mu_0 \gamma_B M_S^2 L \lambda_E^2 \frac{L\pi(\sqrt{2}-1)}{b}, \quad (1.45)$$

$$\gamma_{\text{EX}}^{LL} = \mu_0 \gamma_B M_S^2 L \lambda_E^2 \frac{2L}{c}, \quad (1.46)$$

где  $\lambda_E = L_E/L$  — безразмерная обменная длина в единицах толщины плёнки. Различие между этими двумя формулами обусловлено лишь определением толщины доменной границы в терминах вариационного параметра ( $b$  или  $c$ ). Рассмотрение можно унифицировать, если ввести универсальный вариационный параметр (естественную параметризацию) для пробных функций  $\omega$  таким образом, чтобы выражение плотности обменной энергии в терминах этого параметра было одинаковым

$$\gamma_{\text{EX}} = \mu_0 \gamma_B M_S^2 L \frac{\lambda_E^2}{\omega}, \quad (1.47)$$

для всех рассматриваемых моделей. Конкретно для моделей Дитце-Томаса и Ландау-Лифшица параметры пробных функций выражаются через  $\omega$  следующим образом:  $b = L\omega\pi(\sqrt{2}-1)$  и  $c = 2L\omega$ . Минимизацию энергии удобно провести непосредственно в терминах параметра  $\omega$ .

Для вычисления магнитостатической энергии (1.17) воспользуемся методом магнитных зарядов, который адаптируем сейчас для случая периодических (в направлении  $OX$ ) конфигураций доменных границ. Магнитостатическую энергию можно эквивалентно (1.17) выразить через заряды и создаваемый ими потенциал (1.19)

$$E_{\text{MS}} = \frac{\mu_0}{2} \iiint \varrho(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (1.48)$$

где  $\rho$  — объёмная плотность магнитных зарядов, а  $u(\mathbf{r})$  — скалярный потенциал размагничивающего поля  $\mathbf{H}_D$ . Для учёта периодичности введём соответствующее преобразование Фурье

$$\tilde{A}_n(q_X, q_Z) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dZ A(X, Y, Z) e^{-2\pi i(nX/T + q_X Y + q_Z Z)} \quad (1.49)$$

$$A(X, Y, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_X \int_{-\infty}^{\infty} dq_Z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n(q_X, q_Z) e^{2\pi i(nX/T + q_X Y + q_Z Z)}, \quad (1.50)$$

где  $T$  — период структуры доменной границы вдоль направления  $OX$ . Если граница однородна по координате  $X$ , то в Фурье-образах остаются лишь члены с  $n = 0$ , а период из окончательных выражений выпадает. В Фурье-представлении уравнение Пуассона (1.15) для потенциала  $u$  легко решается

$$\tilde{u}_n(q_Y, q_Z) = -\frac{\gamma_B \tilde{\varrho}_n(q_Y, q_Z)}{4\pi^2((n/T)^2 + q_Y^2 + q_Z^2)}. \quad (1.51)$$

Подставляя его в (1.48) и используя тождество Фурье получим выражение для плотности магнитостатической энергии на единицу поверхности доменной границы

$$\gamma_M = \frac{E_{MS}}{TL} = \frac{\mu_0 \gamma_B M_S^2}{\pi^2 L} \int_0^{\infty} dq_Y \int_0^{\infty} dq_Z \left( \frac{1}{2} \frac{|\tilde{\varrho}_0(q_Y, q_Z)/M_S|^2}{q_Y^2 + q_Z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\tilde{\varrho}_n(q_Y, q_Z)/M_S|^2}{(n/T)^2 + q_Y^2 + q_Z^2} \right), \quad (1.52)$$

где для однородных по  $X$  границ в скобках присутствует только первый член.

Для стенки Блоха в модели Ландау-Лифшица, например, объёмная плотность зарядов имеет вид

$$\frac{\varrho^{LLB}}{M_S} = \nabla \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\cosh(2Y/c)} \left( \frac{2\delta(1 + 2Z/L)}{L} - \frac{2\delta(1 - 2Z/L)}{L} \right), \quad (1.53)$$

где  $\delta$ -функции Дирака удобно выражают тот факт, что в этом случае плотность зарядов поверхностная и сосредоточена на верхней и нижней стороне плёнки.

Преобразование Фурье этой плотности легко вычислить

$$\frac{\tilde{\varrho}_0^{LLB}(q_Y, q_Z)}{M_S} = i c \pi \frac{\sin(q_Z L \pi)}{\cosh(c q_Y \pi^2 / 2)}. \quad (1.54)$$

Переходя к естественной параметризации при помощи параметра  $\omega$  и подставляя эту плотность зарядов в выражение для магнитостатической энергии (1.52), получим её представление в виде  $\gamma_M = \mu_0 \gamma_B M_S^2 L f^{\text{LLB}}(\omega)$ , а для полной плотности энергии доменной границы

$$\gamma = \gamma_{\text{EX}} + \gamma_M = \mu_0 M_S^2 L \gamma_B \left( \frac{\lambda_E^2}{\omega} + f(\omega) \right), \quad (1.55)$$

где функция  $f = f^{\text{LLB}}(\omega)$  определена ниже. Для всех других рассмотренных здесь типов доменных границ выражение полной плотности энергии такое же, отличаются только магнитостатические функции  $f(\omega)$ . Четыре такие функции для доменных границ обоих типов в моделях Ландау-Лифшица и Дитце-Томаса имеют следующий вид

$$\begin{aligned} f^{\text{LLB}}(\omega) &= \frac{\pi\omega^2}{2} \int_0^\infty du \frac{1 - \exp(-2u)}{u \cosh^2(\omega\pi u)} \approx \\ &\approx \frac{\pi\omega^2}{2} \left[ \log \frac{1+\pi\omega}{\pi\omega} + \frac{1}{1+\pi\omega} + \frac{1}{16(1+\pi\omega)^2} + \dots \right], \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$f^{\text{LLN}}(\omega) = \omega - f^{\text{LLB}}(\omega), \quad (1.57)$$

$$f^{\text{DTB}}(\omega) = \pi(t^2/8) \log(1 + 1/t), \quad t = 2\pi(\sqrt{2} - 1)\omega, \quad (1.58)$$

$$f^{\text{DTN}}(\omega) = \pi^2(\sqrt{2} - 1)\omega/4 - f^{\text{DTB}}(\omega), \quad (1.59)$$

они построены на рисунке 1.5. Минимизируя полную энергию (1.55) по вариационному параметру  $\omega$ , получим равновесную энергию доменных границ разного типа, которая приведена как функция толщины плёнки на рисунке 1.6. Отсюда можно сделать вывод о том, что модель Ландау-Лифшица с резким экспоненциальным спаданием профиля доменной границы лучше подходит для описания доменной стенки Блоха, в то время как более плавно спадающий профиль модели Дитце-Томаса лучше описывает стенки Нееля. По этой причине говорят, что стенки Нееля имеют “длинные хвосты”.

Кроме того, можно сделать вывод, что в тонких плёнках доминируют стенки Нееля (хотя другие доменные границы тоже могут присутствовать как мета-

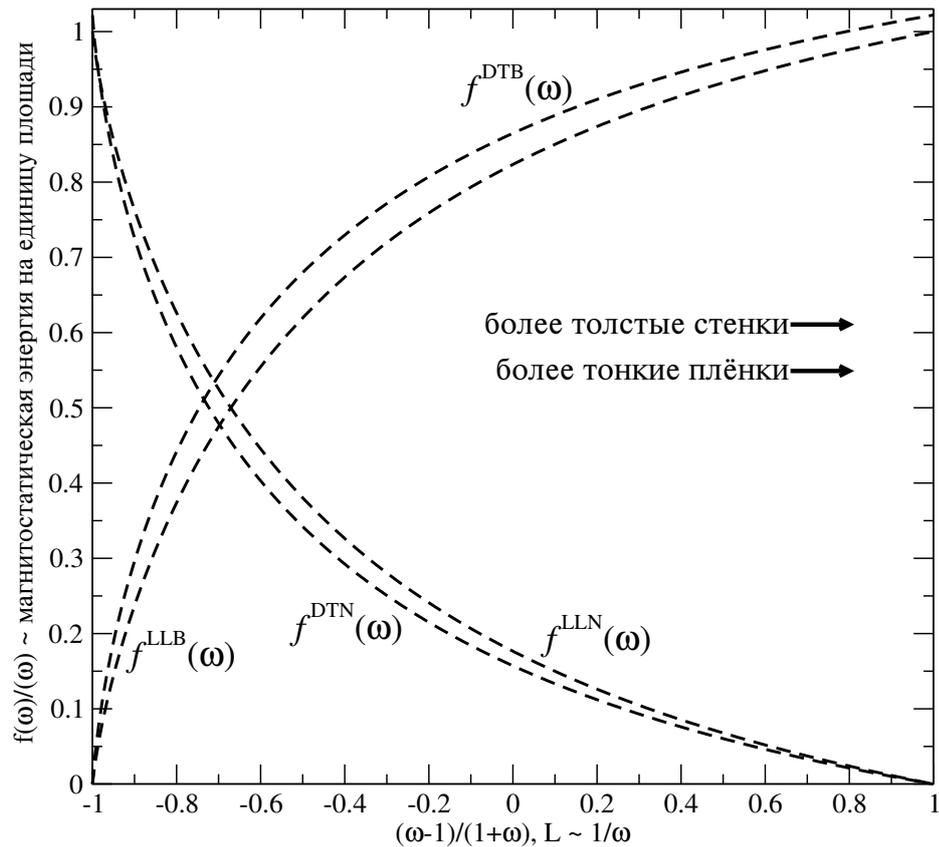


Рисунок 1.5. Магнитостатические функции(1.56)–(1.59) доменных границ блоховского/неелевского типа в моделях Дитце-Томаса и Ландау-Лифшица

стабильные состояния), а в толстых — стенки Блоха. Этот вывод соответствует экспериментальным наблюдениям, но предсказываемый теорией (см. рисунок 1.6) переход между стенками Блоха и Нееля (при толщинах  $L \cong 2.47L_E$ ) не имеет места ни в виде плавного перехода, ни в виде резкого. Вместо этого между этими двумя видами стенок вклинивается третья фаза, представляющая собой сложное двумерное промежуточное состояние — доменная граница с перетяжками [93–95], изображённая на рисунке 1.4 внизу слева. Используемые ранее вариационные модели [96–99] не воспроизводили наблюдаемой на эксперименте серии переходов (см. стр. 163 в Главе “Bloch and Néel walls” книги [3]). В §3.8 рассмотрена модель, которая их воспроизводит.

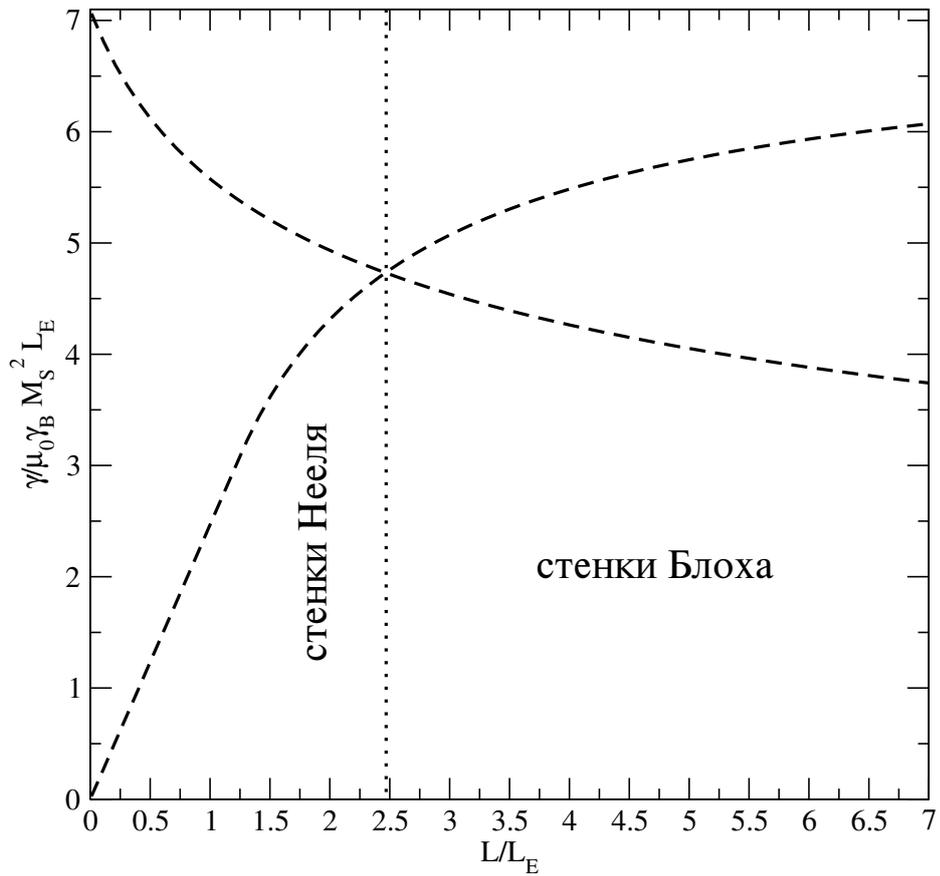


Рисунок 1.6. Равновесная нормированная энергия доменных границ блоховско-го/неелевского типа на единицу их площади в моделях Дитце-Томаса и Ландау-Лифшица как функция нормированной толщины плёнки

## 1.6. Метастабильные состояния двумерного ферромагнетика

Ещё в позапрошлом веке, когда материю и взаимодействия было принято представлять при помощи течения всепроникающей несжимаемой жидкости — эфира, лорд Кельвин обращал внимание на топологические аспекты таких течений [100]. Добавив к уравнению Лапласа (описывающему течение несжимаемой жидкости) дополнительное условие, требующее постоянства значения модуля поля (скоростей, если пользоваться гидродинамической аналогией) во всех точках пространства и времени, Т. Скирм предложил получившуюся модель для описания адронов [4–6]. Аналогичное условие для модуля векторного

поля пространственно распределённой намагниченности  $|\mathbf{M}(\mathbf{r})| = M_S$  возникает естественным образом в ферромагнетиках, поэтому идеи Скирма получили существенное развитие в магнетизме. В частности, А.А. Белавиным и А.Б. Поляковым (на основании связи между состояниями двумерного ферромагнетика и топологией отображений сферы на сферу) были получены явные многосолитонные решения модели Скирма в двумерном случае [7]. Разберём эти решения подробнее.

Как уже было сказано, состояние однородного ферромагнетика описывается пространственным распределением векторного поля намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ , модуль которого фиксирован:  $|\mathbf{M}(\mathbf{r})| = M_S$ . Перенормируем намагниченность на величину её модуля и введём безразмерное векторное поле  $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r})/M_S$  для которого  $|\mathbf{m}(\mathbf{r})| = 1$ . Рассмотрим двумерный ферромагнетик или достаточно тонкую плёнку, настолько тонкую, что намагниченность можно считать постоянной по всей её толщине. Выберем оси декартовой системы координат так, что ось  $Z$  направлена перпендикулярно поверхности плёнки, а оси  $OX$  и  $OY$  лежат в её плоскости. Тогда  $\partial\mathbf{m}/\partial Z = 0$ , а векторное поле намагниченности зависит от двух координат  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(X, Y)$ . Это позволяет (пока чисто формально) ввести комплексную координату  $z = X + iY$  на поверхности плёнки и записать  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(z)$ . Чтобы автоматически удовлетворить ограничение на модуль вектора намагниченности  $|\mathbf{m}| = 1$ , представим его в виде стереографической проекции

$$\begin{aligned} m_X + im_Y &= \frac{2w(z, \bar{z})}{1 + w(z, \bar{z})\bar{w}(z, \bar{z})}, \\ m_Z &= \frac{1 - w(z, \bar{z})\bar{w}(z, \bar{z})}{1 + w(z, \bar{z})\bar{w}(z, \bar{z})}, \end{aligned} \quad (1.60)$$

где введена комплексная функция  $w(z, \bar{z})$  комплексной переменной  $z$ . На данном этапе рассмотрения функция  $w$  не обязательно должна быть аналитической или даже непрерывной. Она просто задаёт связь между двумя координатами  $X$  и  $Y$  в плоскости магнетика, представленными комплексной координатой  $z$ ,

и двумя независимыми параметрами (значение комплексной функции), через которые однозначно выражается (1.60) вектор намагниченности  $\mathbf{m}$ .

Отправной точкой (как и в работе [7]) здесь станет функционал обменной энергии (1.3), (1.6), которую в терминах переменной  $\mathbf{m}$  для случая пространственно-однородного материала можно записать в виде

$$E_{\text{EX}} = \frac{\mu_0 \gamma_{\text{B}} M_{\text{S}}^2 L_{\text{E}}^2}{2} \iiint_V \left( \sum_{i=X,Y,Z} [\nabla m_i(\mathbf{r})]^2 \right) d^3 \mathbf{r}, \quad (1.61)$$

где  $i$  — индекс компоненты вектора  $\mathbf{m} = \{m_X, m_Y, m_Z\}$ . Следуя Гордону Ву [101], введём операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial X} - i \frac{\partial}{\partial Y} \right), \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial X} + i \frac{\partial}{\partial Y} \right) \quad (1.63)$$

и представим обезразмеренную обменную энергию в виде

$$\mathcal{E}_{\text{EX}} = \frac{2E_{\text{EX}}}{\mu_0 \gamma_{\text{B}} M_{\text{S}}^2 L_{\text{E}}^2 L} = \iint \frac{8}{(1 + w\bar{w})^2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) d^2 z, \quad (1.64)$$

где  $L$  — толщина пленки. Уравнения Эйлера-Лагранжа для экстремума этого функционала тогда выглядят так

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{2\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}. \quad (1.65)$$

Они представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Несмотря на отсутствие полной математической теории таких уравнений, легко увидеть, что любая мероморфная функция (аналитическая везде, за исключением множества полюсов в конечной части комплексной плоскости и, возможно, изолированной особой точки на бесконечности)

$$w_{\text{S}}(z, \bar{z}) = f(z), \quad (1.66)$$

для которой везде, кроме множества изолированных особых точек, выполняются условия Коши-Римана

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (1.67)$$

является решением уравнения (1.65). Состояния с (конечным числом особых точек и) граничным условием, заданным в бесконечно удалённой точке как  $m_Z(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) = -1$  описываются тогда рациональными функциями (частными двух многочленов)

$$f(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\sum_{i=0}^n b_i z^i}, \quad (1.68)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — произвольные комплексные числа, а для выполнения граничного условия достаточно, чтобы  $m$  было больше  $n$ . Нулям этих функций (нулям полинома в числителе) соответствуют вихри, а полюсам (нулям полинома в знаменателе) антивихри, см. рисунок 1.7. В теории поля эти состояния также называют “частицами” и “античастицами”, но здесь используется терминология, принятая в магнетизме. Эти решения были найдены Белавиным и Поляковым [7] и упоминаются различными авторами как “солитоны Белавина-Полякова”, или как “двумерные топологические солитоны”, или как “скирмионы” (потому что эквивалентная математическая модель была впервые сформулирована в теории поля Т. Скирма для адронов [4–6]). Здесь будем называть их просто “солитонами”.

Обратим внимание на то, что обменная энергия (1.61), (1.61) инвариантна относительно поворота всех магнитных моментов на некоторый произвольный угол (соответствующий сдвигу фазы комплексной функции  $w \rightarrow e^{i\varphi} w$ ). Поэтому, с точки зрения обменной энергии, состояния типа вихрь (рисунок 1.7а) и типа “ёж” (рисунок 1.7в) эквивалентны. На практике другие слагаемые магнитного лагранжиана снимают это вырождение. Магнитостатическое взаимодействие (см. §1.2.2), например, делает состояние типа “вихрь” более энергетически предпочтительным, в то время как взаимодействие Дзялошинского-Мория (см. §1.2.4) при определённых условиях способно стабилизировать состояние типа “ёж” [102, 103]. Роль дополнительных членов в магнитном лагранжиане обсудим позднее, а пока сосредоточимся на обменном взаимодействии, определяющем топологические характеристики магнитных текстур.

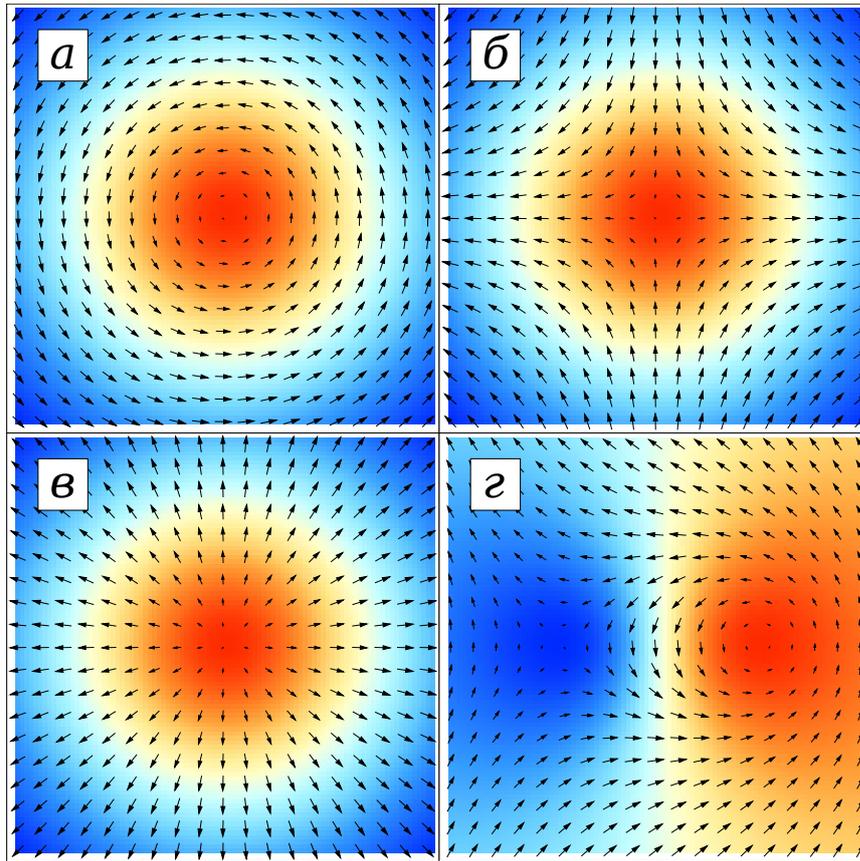


Рисунок 1.7. Различные конфигурации векторных полей, соответствующие: *a* — вихрю  $f(z) = iz$ ; *б* — антивихрю  $f(z) = 1/z$ ; *в* — состоянию типа “ёж”  $f(z) = z$ , которое топологически эквивалентно вихрю путём плавного поворота всех векторов на угол  $90^\circ$ ; *г* — паре вихрь/антивихрь  $f(z) = i(z-1/2)/(z+1/2)$ . Цветом показана перпендикулярная к плоскости картинки компонента вектора: от красного, соответствующего  $m_Z = +1$ , до синего, соответствующего  $m_Z = -1$

С точки зрения топологии различные состояния можно считать эквивалентными, если одно из них можно преобразовать в другое путём плавной (без разрывов и сингулярностей) деформации, называемой в математике гомотопией. Исходя из этого определения, всё множество состояний двумерного ферромагнетика разбивается на гомотопические классы. Состояния внутри одного класса гомотопически эквивалентны, состояния из разных классов — нет. В частности, вихрь и “ёж” принадлежат одному гомотопическому классу потому, что от одного к другому можно перейти путём плавного (без разрывов и

сингулярностей) поворота всех магнитных моментов на угол  $90^\circ$ . Такой поворот соответствует умножению комплексной функции  $f(z)$  на константу  $i$ . Не меняют гомотопический класс и конформные отображения.

Исходная расширенная комплексная плоскость  $z = X + iY$  с единственной бесконечно удалённой точкой эквивалентна сфере (сфере Римана). При этом конечные точки векторов  $\mathbf{m}$  в силу условия  $|\mathbf{m}| = 1$  тоже лежат на сфере. Значит различные двумерные магнитные текстуры соответствуют различным отображениям сферы на сферу. Если обозначить сферу с двумерной поверхностью в трёх измерениях как  $S^2$ , то отображениям  $S^2 \rightarrow S^2$ . Такие отображения разбиваются на гомотопические классы, которые можно пронумеровать целыми числами, соответствующими тому, сколько раз целевая сфера покрывается при отображении (или, другими словами, сколько прообразов существует у каждой точки на конечной сфере). В математике такое число называется “степенью отображения”, в физике его называют “топологический заряд” (или реже “число скирмионов”, “скирмионное число”). Для заданного двумерного векторного поля  $\mathbf{m}(X, Y)$  топологический заряд можно вычислить по любой из формул:

$$q = \frac{1}{8\pi} \iint \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu} m_\alpha \frac{\partial m_\beta}{\partial \mu} \frac{\partial m_\gamma}{\partial \nu} dX dY = \quad (1.69)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint \mathbf{m} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial X} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial Y} \right] dX dY = \quad (1.70)$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint \frac{1}{(1 + w\bar{w})^2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) dX dY, \quad (1.71)$$

где в первом равенстве [7] индексы  $\alpha, \beta, \gamma$  пробегает значения  $X, Y, Z$ , индексы  $\mu, \nu$  значения  $X, Y$  и по всем повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а  $\epsilon_{\mu\nu}$  и  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — двумерный и трёхмерный тензоры Леви-Чивиты (абсолютно антисимметричные тензоры) соответственно. В частности, для всех векторных полей, изображённых на рисунке 1.7, топологический заряд равен 1. Это потому, что все они на самом деле топологически эквивалентны и представляют собой пару вихрь/антивихрь: на рисунках 1.7a и 1.7b центр вих-

ря расположен в начале координат, а центр антивихря в бесконечно удалённой точке; на рисунке 1.7б наоборот — в нуле находится центр антивихря, а центр вихря на бесконечности; и, наконец, на рисунке 1.7г центры вихря и антивихря находятся рядом (в точках  $1/2$  и  $-1/2$ ).

Для рассмотренной Белавиным и Поляковым континуальной модели бесконечного двумерного ферромагнетика топологический заряд сохраняется [7] потому что переход магнитной текстуры из одного гомотопического класса в другой обязательно сопровождается образованием сингулярностей в векторном распределении намагниченности — блоховских точек, которые в континуальной модели имеют бесконечную энергию. Такие законы сохранения называются топологическими [104], им не соответствует никакая симметрия лагранжиана. В более реалистичной дискретной модели этот барьер становится конечным, а в квантовом случае возможно туннелирование между состояниями, принадлежащими разным гомотопическим классам [105].

Сравнивая (1.69) и (1.64) можно увидеть, что для солитонов, которые описываются мероморфными функциями (1.68), удовлетворяющими условиям Коши-Римана (1.67), обменная энергия связана с топологическим зарядом соотношением [7]

$$\mathcal{E}_{\text{EX}} = 8\pi q, \quad (1.72)$$

где  $q = m$  — наивысшая степень числителя рациональной функции (1.68).

Но не все решения системы уравнений (1.65) являются солитонами. Существует и другое семейство решений — сингулярные мероны, которое обнаружил в 1978-м году Дэвид Гросс [106]. Их можно представить в виде

$$w_{\text{M}}(z, \bar{z}) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{f(z)}{\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})}}, \quad (1.73)$$

где  $f(z)$  — произвольная мероморфная функция, а  $\overline{f(z)} = \bar{f}(\bar{z})$ , подчёркивая, что сопряжённая мероморфная функция является (в чём несложно убедиться на примере полиномов и рациональных функций) мероморфной функцией

сопряжённого аргумента, для которой выполняется  $\partial \bar{f}(\bar{z})/\partial z = 0$ . Вследствие того, что  $|w_M| = 1$ , векторы намагниченности (1.60) в мероне всегда лежат в плоскости плёнки  $m_z = 0$ . Прямой подстановкой в уравнение (1.65) можно убедиться, что (1.73) ему удовлетворяют везде, кроме некоторого набора изолированных точек. Эти точки соответствуют центрам вихрей и антивихрей — нулям и полюсам  $f(z)$ , где уравнение (1.73) приводит к сингулярности — неопределённому направлению вектора магнитного момента, а значит и бесконечной обменной энергии в континуальном приближении. Даже если исключить сингулярности, обменная энергия одиночного мерона ( $f(z) = \nu z$ ), заключенная в круге радиуса  $R$ , всё равно расходится логарифмически с увеличением  $R$ . Простая формула (1.72), как видим, для мерона не применима. Может показаться, что, вследствие своей бесконечной энергии, мероны не могут реализоваться в физических системах. Но это, как показано в Главах 3 и 4, не так. В конечных субмикронных магнетиках мероны наблюдать можно.

Солитонами и меронами спектр решений уравнения (1.65) не исчерпывается. Из-за отсутствия общей теории таких систем нелинейных уравнений в частных производных их решения можно только угадывать. Поэтому нельзя сказать точно — есть ли ещё “неугаданные” решения или нет. Несмотря на это Гордон Ву доказал [101], что, кроме солитонов Белавина-Полякова (1.68), все другие решения (даже ещё не найденные) имеют бесконечную обменную энергию в бесконечном двумерном ферромагнетике.

Магнитные солитоны (как динамические, так и топологические) встречаются в физике магнетизма повсеместно [107, 108]. Доменные границы Блоха и Нееля (см. §1.5), в частности, являются топологическими солитонами, но одномерными — кинками. Одномерные солитоны также можно выразить на языке функций комплексной переменной [109]. Более того, нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнения Ландау-Лифшица с одной пространственной переменной преобразованием Хироты сводятся к одному и тому же набору билинейных

форм с четырьмя зависимыми переменными [110], что позволяет легко находить их многосолитонные решения. В одной работе сложно охватить всё многообразие результатов по магнитным солитонам, полученных на протяжении прошлого века. Этим вопросам посвящён ряд ключевых монографий [107, 111, 112]. Скажем только, что практически все эти результаты в той или иной степени относились к бесконечным системам, одномерным системам и практически полностью игнорировали магнитостатическое взаимодействие, заменяя его эффективной анизотропией. В данной работе, наоборот, внимание сосредоточено на многомерных (с двумя и тремя пространственными измерениями) системах в ограниченной геометрии и все конкретные расчёты явно учитывают магнитостатическое взаимодействие, которое всегда присутствует в любом ферромагнетике.

### **1.7. Малоугловое рассеяние нейтронов на магнитных текстурах**

Практически сразу после открытия нейтронов стало ясно, что они обладают магнитным моментом, а значит их рассеяние на веществе определяется не только структурными (атомными), но и магнитными свойствами последнего [113, 114]. Первая замкнутая теория рассеяния нейтронов магнитной средой (с учётом их влияния на среду), которая позволила рассчитать как изменение поляризации падающего нейтронного пучка [113, 115], так и его отклонение за счёт магнитных взаимодействий, была построена Халперном и Джонсоном [116]. Эти первые работы были нацелены на изучение свойств самих нейтронов. Позже, когда были построены первые исследовательские реакторы, а формула рассеяния Халперна и Джонсона была верифицирована [117, 118], возникла новая волна интереса к магнитному рассеянию нейтронов, но уже с целью изучения

магнитных свойств конденсированных сред. Этот интерес продолжается и поныне.

Теория малоуглового нейтронного рассеяния (МУРН) к тому времени развивалась параллельно с теорией малоуглового рентгеновского рассеяния (МУРР) и хорошо зарекомендовала себя при изучении структуры твёрдого тела [119, 120]. Ранние работы по магнитному малоугловому рассеянию нейтронов основывались на моделировании наблюдаемых кривых рассеяния при помощи различных законов, проверенных при изучении структуры твёрдых тел: рассеяние на сферах, двойном слое, других видах случайно (и упорядоченно) расположенных локализованных дефектов.

Благодаря своему магнитному моменту, нейтроны чувствительны к полям рассеяния, создаваемым пространственным распределением намагниченности (магнитной текстурой). Это распределение хоть и зависит от пространственной структуры конденсированной среды, но не повторяет её. Связь между структурой и магнитной текстурой можно установить при помощи теории микромагнетизма (см. §1.1). Эту связь необходимо учитывать, чтобы объяснить форму сечения рассеяния и исключить артефакты при моделировании структуры твёрдых тел с использованием данных магнитной нейтронографии. Начало этого направления в исследованиях можно, наверное, отсчитывать от работы Кронмюллера, Зигера и Вилкенса [121], посвященной малоугловому рассеянию нейтронов, вызванному полем намагниченности уединённой дислокации. Дальнейшее развитие теории было связано с исследованием нанокристаллических материалов и неоднородностей намагниченности, вызванных неоднородной локальной анизотропией [122, 123]. Позднее, в рассмотрение были включены и малые неоднородности намагниченности насыщения  $M_S$  в образце [124], а потом и взаимодействие Дзялошинского-Мория [14].

Нужно отметить значительное пересечение микромагнитной теории малоуглового рассеяния и теории приближения к магнитному насыщению, развитой

в работах Нееля [125], Зигера и Кронмюллера [126,127], Шлёмана [128]. Разница между этими двумя теориями заключается всего лишь в том, что в случае приближения к насыщению, интерес представляет лишь пространственное среднее распределения намагниченности, её нулевая пространственная Фурье-гармоника — общая намагниченность образца, которая измеряется в эксперименте магнитометром. Для вычисления же сечения рассеяния нейтронов необходимы все Фурье-компоненты векторного поля намагниченности.

Детальный вывод формул для Фурье-компонент векторного поля намагниченности (решение микромагнитной задачи) с учётом слабых неоднородностей анизотропии, обмена, намагниченности насыщения и взаимодействия Дзялошинского-Мория приведен в Главе 2. Рассмотрим теперь кратко как именно сечение рассеяния связано с этими Фурье-компонентами.

### 1.7.1. Сечение рассеяния

Схема эксперимента по (магнитному) рассеянию нейтронов приведена на рисунке 1.8. Сначала тепловые нейтроны из ядерного реактора проходят селекцию по скоростям. Получившийся монохроматический поток низкоэнергетических нейтронов проходит поляризатор, пропускающий только нейтроны с определённым спином. Далее монохроматический поток поляризованных нейтронов рассеивается на образце и пройдя через анализатор попадает на массив детекторов, позволяющих сосчитать количество нейтронов, отклонённых в процессе рассеяния на определённый угол.

Поляризатор и анализатор, как правило, устанавливаются на пропускание нейтронов с одной и той же поляризацией. Для изучения рассеяния с переворотом спина используется пара флипперов. Если флиппер включен, то он пе-

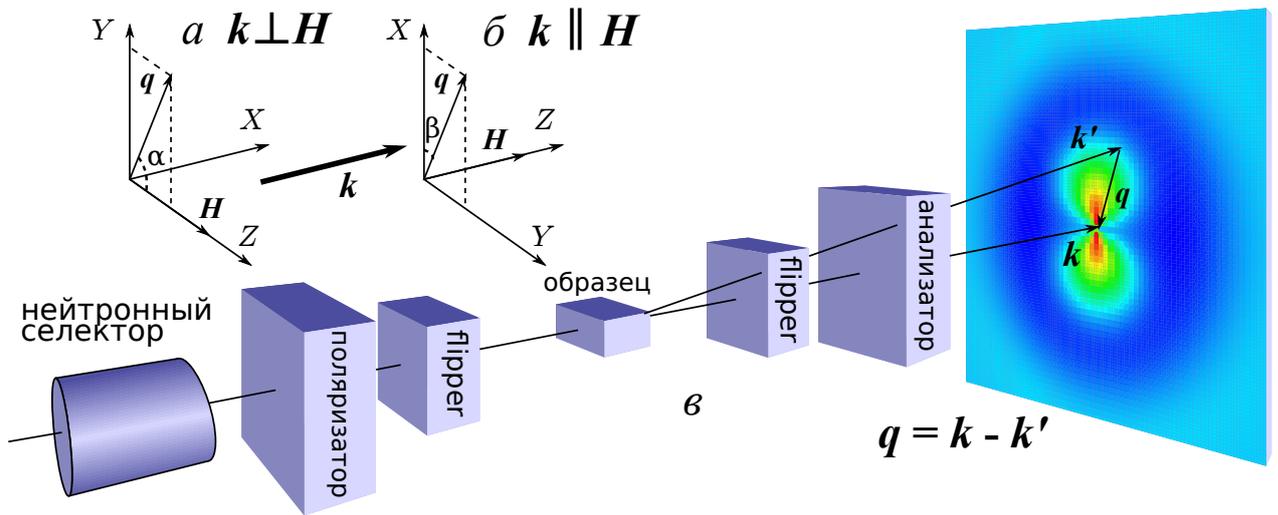


Рисунок 1.8. Схематическое изображение эксперимента по малоугловому магнитному рассеянию нейтронов  $\nu$  и используемые системы координат в случае:  $a$  — перпендикулярной геометрии и  $b$  — параллельной геометрии

реворачивает направление спинов пролетающих через него нейтронов на  $180^\circ$ . Включая и выключая флипперы можно исследовать рассеяние при всех возможных вариантах направления спинов нейтронов до и после рассеяния.

Описанный выше анализ поляризации доступен далеко не на всех установках по измерению рассеяния. В упрощённом варианте поляризаторы и флипперы отсутствуют. Такие установки измеряют рассеяние без учёта поляризации. Возможен и полуполяризованный вариант, когда падающий на образец пучок нейтронов поляризован, но анализ поляризации рассеянных нейтронов не производится.

Начнём с рассмотрения рассеяния без учёта поляризации. Система координат приведена на рисунке 1.9. Падающие нейтроны имеют волновой вектор  $\mathbf{k}$  и энергию  $E$ , они движутся параллельно оси  $OZ$ :  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_Z$ , где  $\mathbf{e}_i$  — единичный вектор (орт) в направлении оси координат  $Oi$ ,  $i = X, Y, Z$ . Образец, расположенный в начале системы координат, представляет собой  $N$  рассеивающих центров (атомов), сосредоточенных в объёме  $V$ . Здесь и далее считается, что размер образца много меньше, чем расстояние до детектора. После взаимодей-

ствия с образцом, рассеянный нейтрон характеризуется волновым вектором  $\mathbf{k}'$  и энергией  $E' = \hbar^2 k'^2 / (2m_n)$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка, а  $m_n$  — масса нейтрона. Изменение волнового вектора нейтрона определяет вектор переноса импульса (или вектор рассеяния):

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}' \quad (1.74)$$

По закону сохранения импульса в процессе рассеяния образец (центр рассеяния) приобретает дополнительный импульс  $\hbar\mathbf{q}$ . Изменение энергии нейтрона при этом

$$\Delta E = E - E' = \frac{\hbar^2}{2m_n} (k^2 - k'^2). \quad (1.75)$$

В случае упругого рассеяния, которое только здесь и рассматривается,  $\Delta E = 0$  и  $k' = k = 2\pi/\lambda_n$ , где  $\lambda_n$  — длина волны де Бройля нейтрона. Тогда длину вектора рассеяния можно выразить как

$$q = |\mathbf{q}| = 2k \sin \theta/2 \approx k\theta, \quad (1.76)$$

где последнее равенство справедливо в случае малоуглового рассеяния  $\theta \ll 1$ .

Двойное дифференциальное сечение рассеяния определено как

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega \partial E} = \frac{n_1}{\Phi \, d\Omega \, dE}, \quad (1.77)$$

где  $n_1$  — количество нейтронов, рассеянных за единицу времени в телесный угол  $d\Omega = \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$  с энергиями между  $E$  и  $E + dE$ , а  $\Phi$  — поток падающих нейтронов, то есть количество нейтронов, падающих за единицу времени на единицу площади образца. В силу того, что  $[n] = \text{с}^{-1}$  и  $[\Phi] = \text{м}^2 \text{с}^{-1}$ , единицей измерения двойного дифференциального сечения рассеяния является  $\text{м}^2 \text{Дж}^{-1} = \text{с}^2 \text{кг}^{-1}$ . Обычно двойное дифференциальное сечение рассеяния измеряют в бэВ $^{-1}$ , где барн —  $1\text{б} = 10^{-24} \text{см}^2$  и  $1\text{эВ} = 1.602 \times 10^{-19} \text{Дж}$ . Интегрируя по энергиям придём к дифференциальному сечению рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega \partial E} dE = \frac{n_2}{\Phi \, d\Omega}, \quad (1.78)$$

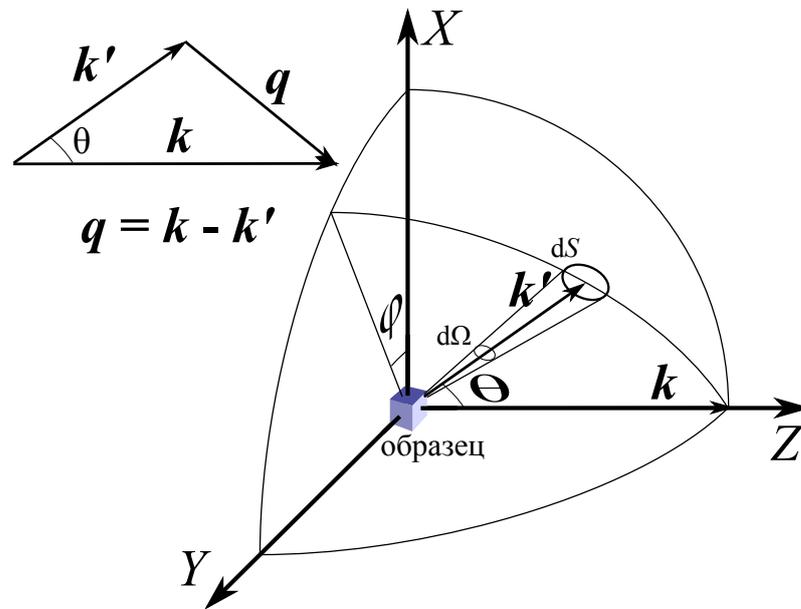


Рисунок 1.9. Система координат и обозначения, используемые при вычислении сечений рассеяния

где  $n_2$  — количество нейтронов, рассеянных за единицу времени в телесный угол  $d\Omega$  с любыми энергиями. Интегрируя ещё раз, получим полное сечение рассеяния

$$\sigma = \int_S \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{n_3}{\Phi}, \quad (1.79)$$

где  $n_3$  — количество нейтронов, рассеянных за единицу времени на любой угол и с любой энергией. Заметим, что количество рассеянных нейтронов не равно количеству падающих из-за поглощения части нейтронов веществом. Процесс поглощения можно тоже охарактеризовать сечением (захвата)  $\sigma_a$  и уже  $\sigma_{\text{tot}} = \sigma + \sigma_a$  в силу сохранения количества частиц подчиняется оптической теореме [129].

В этой работе рассеяние нейтронов (практически исключительно) характеризуется при помощи макроскопического дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \frac{N}{V} \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (1.80)$$

которое представляет собой микроскопическое дифференциальное сечение рас-

сеяния, умноженное на плотность рассеивающих центров.

В экспериментах по магнитному малоугловому рассеянию энергия рассеянных нейтронов, как правило, не анализируется. Измеряется проинтегрированное по энергиям дифференциальное сечение рассеяния. То есть учитываются как нейтроны рассеянные упруго, так и нейтроны, рассеянные неупруго. Основной вклад в процессы неупругого рассеяния даёт поглощение энергии фононами или магнонами. Можно показать [130, 131], что (для достаточно малых энергий нейтронов и углов рассеяния) этими процессами можно пренебречь и считать рассеяние упругим. Это предположение эквивалентно тому, что состояние образца не изменяется в процессе рассеяния (например, отсутствует нагрев образца).

В случае неполяризованного рассеяния, игнорируя спин нейтрона, упругое дифференциальное сечение можно вычислить путём суммирования по всем каналам рассеяния, в которых волновой вектор нейтрона изменяется от  $\mathbf{k}$  к  $\mathbf{k}'$

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \frac{1}{V\Phi} \sum_{\mathbf{k}' \in d\Omega} W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'}, \quad (1.81)$$

где  $W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'}$  — вероятность перехода за единицу времени из состояния с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в состояние с волновым вектором  $\mathbf{k}'$ , а суммирование включает в себя все волновые векторы  $\mathbf{k}'$ , попадающие в телесный угол  $d\Omega$ . Вероятность перехода можно вычислить, используя золотое правило Ферми, в первом порядке теории возмущений

$$\sum_{\mathbf{k}' \in d\Omega} W_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho_{\mathbf{k}'} |\langle \mathbf{k} | V_{\text{int}} | \mathbf{k}' \rangle|^2, \quad (1.82)$$

где  $\rho_{\mathbf{k}'}$  плотность состояний с волновым вектором  $\mathbf{k}'$ , а  $V_{\text{int}}$  — возмущающий потенциал взаимодействия между нейтроном и центром рассеяния, приводящий к переходу между состояниями с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . Вычислить матричный элемент (1.82) можно предполагая, что до и после рассеяния нейтроны движутся свободно и, соответственно, их волновые функции представляют со-

бой плоские волны:  $\phi_{\text{in}} \propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  и  $\phi_{\text{out}} \propto e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$ . В этом (борновском) приближении вероятность перехода пропорциональна квадрату модуля Фурье-образа потенциала взаимодействия между нейтроном и средой.

### 1.7.2. Ядерное сечение рассеяния

Короткодействующее и изотропное взаимодействие между (находящимся в начале координат) ядром и нейтроном можно задать в виде псевдопотенциала Ферми

$$V_{\text{int}}^{\text{nuc}}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m_n} b \delta(\mathbf{r}), \quad (1.83)$$

где  $b$  длина нейтронного рассеяния, а короткодействие выражено путём использования  $\delta$ -функции Дирака. Длина рассеяния тепловых нейтронов (вдали от резонанса), вообще говоря, является комплексной величиной  $b = b' + ib''$ . Её действительная часть может быть как положительной, так и отрицательной и имеет величину порядка нескольких фемтометров ( $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$ ), а мнимая часть всегда положительна и непосредственно связана с сечением захвата. Длины нейтронного рассеяния обычно измеряются экспериментально, их значения для разных изотопов можно найти, например, в [132]. Подставляя потенциал взаимодействия (1.83) в (1.82) и затем в (1.81) получим

$$\frac{d\sigma_{\text{nuc}}}{d\Omega}(\mathbf{q}) = \left| \sum_{m=1}^N b_m e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_m} \right|^2 = \sum_{m,n=1}^N b_m \bar{b}_n e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)}, \quad (1.84)$$

где  $\mathbf{r}_m$  — положения атомов,  $b_m$  их длины нейтронного рассеяния, а линия над переменной обозначает комплексное сопряжение.

Нужно понимать, что для малоуглового рассеяния дискретность атомной структуры вещества не имеет существенного значения. В экспериментах, как

правило, длина волны нейтронов в разы превышает расстояние между плоскостями, соответствующими разрешённым отражениям. Пространственное разрешение стандартного малоуглового рассеяния определяется длиной волны падающих нейтронов, объёмом когерентности, пространственным разрешением детектора, максимальным углом рассеяния и находится в диапазоне от нескольких до нескольких сотен нанометров [133]. Оно идеально подходит для исследования наноструктур [134]. На таких масштабах для описания можно использовать непрерывную модель вещества. В частности, для ядерного сечения рассеяния можно ввести плотность длины рассеяния  $N(\mathbf{r})$ , измеряемую в  $\text{м}^{-2}$ . Тогда переходя в (1.84) от суммирования к интегрированию, для макроскопического ядерного сечения рассеяния получим

$$\frac{d\Sigma_{\text{нuc}}}{d\Omega} = \frac{1}{V} \left| \int_V N(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \right|^2 = \frac{8\pi^3}{V} |\tilde{N}(\mathbf{q})|^2, \quad (1.85)$$

где непрерывное преобразование Фурье определено как

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \tilde{N}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{q}, \\ \tilde{N}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint N(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Не будем здесь более детально обсуждать рассеяние на ядрах, но учесть его необходимо для того, чтобы иметь возможность отделить от него магнитный вклад в рассеяние. Осталось только отметить, что рассеяние, связанное с ядерными спинами, даёт слабо зависящий от  $\mathbf{q}$  некогерентный вклад в сечение, но он пренебрежимо мал по сравнению с магнитным сечением рассеяния, рассмотренным далее.

### 1.7.3. Магнитное сечение рассеяния

Магнитное сечение рассеяния возникает за счёт взаимодействия спина нейтрона и магнитных полей, созданных спином и орбитальным движением электронов в материале. В отличие от взаимодействия с ядрами, магнитное взаимодействие существенно анизотропно. Его потенциал можно представить в виде [135]

$$V_{\text{int}}^{\text{mag}}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu}_n \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (1.87)$$

где

$$\boldsymbol{\mu}_n = \gamma_n \mu_N \boldsymbol{\sigma} \quad (1.88)$$

обозначает магнитный момент нейтрона,  $\gamma_n = 1.913$ ,  $\mu_N = e\hbar/(2m_p)$  ядерный магнетон,  $m_p$  — масса протона,  $\boldsymbol{\sigma}$  — набор матриц Паули, а  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  — магнитная индукция, созданная движением электронов в материале.

После работ Блоха [113,114], Швингера [115], Хальперна и Джонсона [116], теория рассеяния поляризованных тепловых нейтронов была разработана Блюме [79], Малеевым [136–138], и другими в начале 1960-х (см. также более полный современный обзор Малеева [139]). Кульминацией явились уравнения Блюме-Малеева, сформулированные в терминах дискретных атомных спинов. Для малоуглового рассеяния такая точность является избыточной, поэтому ниже приведены выражения для сечения рассеяния в (более удобном для аналитической работы) континуальном приближении.

Для неполяризованного пучка нейтронов макроскопическое магнитное сечение рассеяния системой  $N$  магнитных моментов  $\boldsymbol{\mu}_{a,i}$  с координатами  $\mathbf{r}_i$  на вектор  $\mathbf{q}$  даётся выражением [135, 140]

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega}(\mathbf{q}) = \frac{1}{V} \left| \sum_{i=1}^N b_{m,i} \mathbf{Q}_i e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_i} \right|^2 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{m,i} \overline{b_{m,j}} \mathbf{Q}_i \overline{\mathbf{Q}_j} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}, \quad (1.89)$$

где  $b_m$  — магнитная длина нейтронного рассеяния, а

$$\mathbf{Q}_i = \hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{m}}_i \times \hat{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{m}}_i - \hat{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_i), \quad (1.90)$$

где  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$  и  $\hat{\mathbf{m}}_i = \boldsymbol{\mu}_{a,i}/\mu_{a,i}$  — единичные векторы в направлении вектора рассеяния  $\mathbf{q}$  и вектора магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}_{a,i}$ . Вектор  $\mathbf{Q}_i$  называется вектором магнитного взаимодействия Хальперна-Джонсона и по-сути представляет собой выражение в Фурье-пространстве магнитостатического взаимодействия (1.87) между магнитным моментом нейтрона и полем  $\mathbf{B}$ , созданным магнитными диполями вещества  $\boldsymbol{\mu}_{a,i}$ . Подробный вывод выражения (1.89) можно найти в оригинальной работе [116].

Величину  $b_m$  можно выразить следующим образом [140, 141]:

$$b_m = \frac{\gamma_n e^2}{2m_e c^2} \frac{\mu_a}{\mu_B} f(\mathbf{q}) = \frac{\gamma_n r_e}{2} \frac{\mu_a}{\mu_B} f(\mathbf{q}) = (2.6954 \times 10^{-15} \text{ м}) \frac{\mu_a}{\mu_B} f(\mathbf{q}), \quad (1.91)$$

где  $r_e = e^2/(m_e c^2) = 2.81794 \times 10^{-15} \text{ м}$  — классический радиус электрона, а  $f(\mathbf{q})$  — нормированный магнитный форм-фактор рассеивающего центра (атома). Для малоуглового рассеяния  $f(\mathbf{q}) \cong 1$ , поэтому

$$b_m \cong b_H \mu_a, \quad (1.92)$$

где

$$b_H = 2.906 \times 10^8 \text{ А}^{-1} \text{ м}^{-1}. \quad (1.93)$$

Так же как и для ядерного сечения рассеяния, выражение (1.89) можно записать в континуальном приближении, выразив сечение рассеяния непосредственно через вектор намагниченности

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\Omega}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{V} b_H^2 \left| \iiint Q(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \right|^2 = \frac{8\pi^3}{V} b_H^2 |\tilde{Q}(\mathbf{q})|^2 = \\ &= \frac{8\pi^3}{V} b_H^2 |\hat{\mathbf{q}} \times [\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \times \hat{\mathbf{q}}]|^2 = \\ &= \frac{8\pi^3}{V} b_H^2 \sum_{i,j=X,Y,Z} (\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j) \tilde{M}_i \overline{\tilde{M}_j}, \end{aligned} \quad (1.94)$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта символ Кронекера,  $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{q}} \times [\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \times \hat{\mathbf{q}}]$  — континуальный аналог вектора Хальперна-Джонсона. Единицы измерения  $[\mathbf{M}(\mathbf{r})] = [\mathbf{Q}(\mathbf{r})] = \text{А м}^{-1}$ , в то время как Фурье-образы  $[\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})] = [\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})] = \text{А м}^2$ , макроскопическое сечение рассеяния при этом имеет размерность  $[\text{d}\Sigma/\text{d}\Omega] = \text{м}^{-1}$ .

В основном, эксперименты по малоугловому рассеянию проводятся в двух геометриях, изображённых в виде вставок слева вверху на рисунке 1.8:  $a$  — перпендикулярной, когда вектор приложенного магнитного поля  $\mathbf{H}$  (которому, в свою очередь, примерно следует вектор намагниченности  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ ) приложен перпендикулярно падающему пучку  $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$ ; либо  $b$  — параллельной, когда  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{k}$ . В этих случаях, пренебрегая (вследствие малости угла рассеяния) компонентой, нормальной к плоскости детектора:  $\mathbf{q}_\perp = q\{0, \sin \alpha, \cos \alpha\}$  и  $\mathbf{q}_\parallel = q\{\cos \beta, \sin \beta, 0\}$ . Подставляя эти волновые векторы в выражение (1.94) и раскрывая суммы, получим выражения для макроскопических неполяризованных сечений рассеяния через Фурье-образы компонент намагниченности

$$\frac{\text{d}\Sigma^\perp}{\text{d}\Omega} = \frac{8\pi^3}{V} b_{\text{H}}^2 \left[ \frac{|\tilde{N}|^2}{b_{\text{H}}^2} + |\tilde{M}_X|^2 + |\tilde{M}_Y|^2 \cos^2 \alpha + |\tilde{M}_Z|^2 \sin^2 \alpha - 2 \text{Re}(\overline{\tilde{M}_Y} \tilde{M}_Z) \sin \alpha \cos \alpha \right], \quad (1.95)$$

$$\frac{\text{d}\Sigma^\parallel}{\text{d}\Omega} = \frac{8\pi^3}{V} b_{\text{H}}^2 \left[ \frac{|\tilde{N}|^2}{b_{\text{H}}^2} + |\tilde{M}_X|^2 \sin^2 \beta + |\tilde{M}_Y|^2 \cos^2 \beta + |\tilde{M}_Z|^2 - 2 \text{Re}(\overline{\tilde{M}_Y} \tilde{M}_X) \sin \beta \cos \beta \right]. \quad (1.96)$$

Эти измеряемые в эксперименте сечения содержат вклады как ядерного, так и магнитного рассеяния  $\Sigma = \Sigma_{\text{res}} + \Sigma_{\text{M}}$ . Чтобы отделить один от другого, сначала проводят эксперимент в сильном насыщающем поле, в котором измеряют

$$\frac{\text{d}\Sigma_{\text{res}}^\perp}{\text{d}\Omega} = \frac{8\pi^3}{V} b_{\text{H}}^2 \left[ \frac{|\tilde{N}|^2}{b_{\text{H}}^2} + |\tilde{M}_S|^2 \sin^2 \alpha \right], \quad (1.97)$$

$$\frac{\text{d}\Sigma_{\text{res}}^\parallel}{\text{d}\Omega} = \frac{8\pi^3}{V} b_{\text{H}}^2 \left[ \frac{|\tilde{N}|^2}{b_{\text{H}}^2} + |\tilde{M}_S|^2 \right], \quad (1.98)$$

где  $\tilde{M}_S$  — Фурье-образ (возможно пространственно-неоднородной) намагничен-

ности насыщения образца. Вычитая это “остаточное” сечение из сечений, измеренных в меньших полях, получают магнитное сечение рассеяния

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_{\text{M}}^{\perp}}{d\Omega} &= \frac{8\pi^3}{V} b_{\text{H}}^2 \left[ |\widetilde{M}_{\text{X}}|^2 + |\widetilde{M}_{\text{Y}}|^2 \cos^2 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + (|\widetilde{M}_{\text{Z}}|^2 - |\widetilde{M}_{\text{S}}|^2) \sin^2 \alpha - \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{Re}(\overline{\widetilde{M}_{\text{Y}}} \widetilde{M}_{\text{Z}}) \sin \alpha \cos \alpha \right], \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_{\text{M}}^{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{8\pi^3}{V} b_{\text{H}}^2 \left[ |\widetilde{M}_{\text{X}}|^2 \sin^2 \beta + |\widetilde{M}_{\text{Y}}|^2 \cos^2 \beta + \right. \\ &\quad \left. + (|\widetilde{M}_{\text{Z}}|^2 - |\widetilde{M}_{\text{S}}|^2) - 2 \operatorname{Re}(\overline{\widetilde{M}_{\text{Y}}} \widetilde{M}_{\text{X}}) \sin \beta \cos \beta \right]. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Эти сечения рассеяния вычисляются и анализируются в Главе 2.

Здесь ещё кратко остановимся на рассеянии поляризованных нейтронов [142–147], которое используется при исследовании магнетиков с хиральным взаимодействием Дзялошинского-Мория. Для простоты, в вышеприведенном выводе поляризация нейтронов не отслеживалась. Но, как уже упоминалось, в эксперименте по малоугловому рассеянию (рисунок 1.8) могут присутствовать два поляризатора (поляризатор/анализатор) и два флиппера. Состояния флипперов обозначим знаками “+” и “-”, которые соответствуют тому, что соответствующий флиппер включен или выключен.

В зависимости от конфигурации флипперов, каждый эксперимент (на одном и том же образце, в одном и том же состоянии и внешнем поле) может давать четыре разных сечения рассеяния:  $d\Sigma^{++}/d\Omega$ ,  $d\Sigma^{+-}/d\Omega$ ,  $d\Sigma^{-+}/d\Omega$ ,  $d\Sigma^{--}/d\Omega$ . Например, полуполяризованные сечения рассеяния, когда падающий пучок поляризован, но поляризация рассеянного пучка не анализируется, можно представить в виде

$$\frac{d\Sigma^{+}}{d\Omega} = \frac{d\Sigma^{++}}{d\Omega} + \frac{d\Sigma^{+-}}{d\Omega}, \quad (1.101)$$

$$\frac{d\Sigma^{-}}{d\Omega} = \frac{d\Sigma^{-+}}{d\Omega} + \frac{d\Sigma^{--}}{d\Omega}, \quad (1.102)$$

а неполяризованные сечения, выражения для которых приводились ранее, как

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\Sigma^+}{d\Omega} + \frac{d\Sigma^-}{d\Omega} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\Sigma^{++}}{d\Omega} + \frac{d\Sigma^{+-}}{d\Omega} + \frac{d\Sigma^{-+}}{d\Omega} + \frac{d\Sigma^{--}}{d\Omega} \right). \quad (1.103)$$

Таким образом, измерение поляризованных сечений, которое позволяет разделить эти вклады, содержит ещё больше информации о магнитном состоянии образца. Выражения, аналогичные (1.99) и (1.100), для поляризованных сечений рассеяния приведены в обзоре [133]. Чтобы не загромождать текст, приведём здесь только выражения для поляризованных сечений в случае перпендикулярной геометрии рассеяния из [133] с явно выписанными хиральными членами из [79, 138]

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_{\text{M}}^{\perp \pm\pm}}{d\Omega} &= \frac{8\pi^3}{V} (|\tilde{N}|^2 + b_{\text{H}}^2 |\tilde{M}_{\text{Y}}|^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + b_{\text{H}}^2 |\tilde{M}_{\text{Z}}|^2 \sin^4 \alpha - \\ &\quad - b_{\text{H}}^2 (\tilde{M}_{\text{Y}} \overline{\tilde{M}_{\text{Z}}} + \overline{\tilde{M}_{\text{Y}}} \tilde{M}_{\text{Z}}) \sin^3 \alpha \cos \alpha \mp \\ &\quad \mp b_{\text{H}}^2 (\tilde{N} \overline{\tilde{M}_{\text{Z}}} + \overline{\tilde{N}} \tilde{M}_{\text{Z}}) \sin^2 \alpha \pm \\ &\quad \pm b_{\text{H}}^2 (\tilde{N} \overline{\tilde{M}_{\text{Y}}} + \overline{\tilde{N}} \tilde{M}_{\text{Y}}) \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_{\text{M}}^{\perp \pm\mp}}{d\Omega} &= \frac{8\pi^3}{V} b_{\text{H}}^2 (|\tilde{M}_{\text{X}}|^2 + |\tilde{M}_{\text{Y}}|^2 \cos^4 \alpha + |\tilde{M}_{\text{Z}}|^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\ &\quad - (\tilde{M}_{\text{Y}} \overline{\tilde{M}_{\text{Z}}} + \overline{\tilde{M}_{\text{Y}}} \tilde{M}_{\text{Z}}) \sin \alpha \cos^3 \alpha \pm \\ &\quad \pm i (\tilde{M}_{\text{Y}} \overline{\tilde{M}_{\text{X}}} - \overline{\tilde{M}_{\text{Y}}} \tilde{M}_{\text{X}}) \cos^2 \alpha \pm \\ &\quad \pm i (\tilde{M}_{\text{X}} \overline{\tilde{M}_{\text{Z}}} - \overline{\tilde{M}_{\text{X}}} \tilde{M}_{\text{Z}}) \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned} \quad (1.105)$$

Легко проверить, что их подстановка в (1.103) даёт неполяризованное перпендикулярное сечение (1.99). Эти выражения понадобятся в §2.7.

Магнитное малоугловое сечение рассеяния нейтронов является чувствительным инструментом для исследования магнитных свойств материалов на наномасштабах. Можно сказать, что это некоторая более мощная форма магнитометрии, которая даёт возможность измерить не только средние значения намагниченности, но и её Фурье-гармоники, включая их фазу. В силу того, что нейтроны характеризуют магнитные свойства объёмного образца “на просвет”,

малоугловое нейтронное рассеяние отлично дополняет такие чувствительные к поверхностной намагниченности методы как лоренцевская [148] и керровская [1] микроскопия, магнитная силовая микроскопия [149, 150], сканирующая электронная микроскопия с анализом поляризации [151], фотоэмиссионная рентгеновская микроскопия, использующая линейный и круговой дихроизм [152], сканирующая холловская микроскопия [153], сканирующая СКВИД-микроскопия [154], спин-поляризованная сканирующая туннельная микроскопия [155], магнитная обменная силовая микроскопия [156] и другие.

Сейчас малоугловое рассеяние нейтронов (особенно с анализом поляризации) уже является незаменимым инструментом для исследования как технологически значимых, так и фундаментальных проблем: изучение интерфейсных эффектов в наномасштабных гетероструктурах [157], индуцированной электрическим полем намагниченности мультиферроиков [143], магнитострикции сплавов Fe-Ga [144], вихревых структур в сверхпроводниках, основанных на железе [158], скирмионов [159], спинового разупорядочения в ансамблях наночастиц [142, 160] и в массивах магнитных наностержней [161]. Дальнейшее развитие техники нейтронного рассеяния ведёт к новым техникам накопления данных с временным разрешением, которые откроют возможности непосредственного изучения динамики магнитных материалов в микросекундном временном диапазоне [162–164].

## **Выводы к Главе 1**

Теория микромагнетизма активно развивалась в XX веке, на протяжении которого было решено множество конкретных задач статики и динамики магнитных текстур объёмных макроскопических образцов и тонких магнитных

плёнок. Случай конечных наномасштабных ферромагнетиков, хоть и рассматривался в отдельных работах при помощи удачно подобранных пробных функций, является значительно менее исследованным. Тем не менее, наномасштабные магнитные текстуры значительно отличаются от макро- и даже микромагнитных текстур, представимых как набор магнитных доменов, разделённых доменными границами. Магнитные состояния наноструктур, значит, требуют дальнейших исследований.

До конца не решённой оказалась и задача о доменной границе с перетяжками. Она тоже будет рассмотрена здесь в дальнейшем. При современном интересе к теории магнитных топологических солитонов (скирмионов) удивительно, что этот объект, который можно представить в виде точного решения модели Скирма, так мало исследуется сегодня.

Теория магнитного рассеяния нейтронов слабонеоднородными наноструктурированными образцами до сих пор основывалась на решениях микромагнитной задачи во втором порядке теории возмущений по амплитуде неоднородностей. Логичным следующим шагом является поиск эффектов высоких порядков в этой теории.

Эти три задачи представляют собой отправные точки изложенного здесь исследования. В процессе их решения возникали и решались новые задачи, самые важные из которых перечислены во введении.

## Глава 2. Микромагнетизм и малоугловое рассеяние нейтронов

### 2.1. Введение

С начала XIX века, когда Карл Фридрих Гаусс измерил магнитное поле Земли, магнитометрия стала одним из важнейших инструментов экспериментальной физики, позволяющим изучать магнитные свойства материалов количественно. Чтобы связать результаты магнитометрии с микроструктурой материала [165], в начале XX века Неелем [125, 166], а затем и Шлёманом [128] развита теория приближения к насыщению. В сильных магнитных полях кривые намагничивания  $M(H)$ , представляющие собой зависимость средней намагниченности образца в направлении внешнего магнитного поля  $M = (\langle \mathbf{M} \rangle \cdot \mathbf{H})/H$  от величины магнитного поля  $H$ , можно представить в виде ряда по степеням  $1/H$ . Теория приближения к насыщению позволяет рассчитать из первых принципов коэффициенты этого ряда для слабонеоднородных образцов.

Решаемые в этой Главе задачи концептуально близки к задачам теории приближения к магнитному насыщению, с тем отличием, что для расчёта сечений рассеяния нужны все пространственные гармоники распределения намагниченности, а не только нулевая (среднее значение). Магнитное рассеяние нейтронов предоставляет возможность экспериментального изучения этих гармоник, а представленная здесь теория может служить одним из инструментов анализа измеренных сечений рассеяния в их связи с наноструктурой материала.

Здесь рассматривается рассеяние нейтронов слабонеоднородным ферромагнетиком с различными пространственно-неоднородными взаимодействиями в магнитном лагранжиане. Малым параметром при этом выступает амплитуда

неоднородностей.

Для вычисления сечения рассеяния сначала, методами теории возмущений, решена микромагнитная задача и найдены равновесные распределения намагниченности для конкретной реализации магнитных неоднородностей. Затем, посредством усреднения по реализациям и ориентации неоднородностей в поликристаллическом и/или наноструктурированном материале, вычислено сечение рассеяния им нейтронов.

Рассчитаны члены третьего порядка теории возмущений и найдены условия, при которых обусловленные этими членами эффекты становятся доступными для экспериментального наблюдения.

Кроме этого, изучены эффекты хиральности посредством: 1) включения в магнитный лагранжиан взаимодействия Дзялошинского-Мория и 2) рассмотрения сечения рассеяния нейтронов ферромагнитным наноцилиндром с магнитным вихрем, в котором хиральная симметрия нарушается спонтанно.

## 2.2. Уравнения для магнитной текстуры слабонеоднородного образца

Рассмотрим бесконечный магнетик с намагниченностью насыщения, которая зависит от пространственной координаты  $\mathbf{r}$

$$M_S(\mathbf{r}) = M_0 [1 + I_m(\mathbf{r})], \quad (2.1)$$

где величина  $I_m(\mathbf{r}) \ll 1$  является малой. Кроме того, без ограничения общности, потребуем, чтобы пространственное среднее  $\langle I_m(\mathbf{r}) \rangle = 0$ . Это гарантирует, что  $M_0 = \langle M_S(\mathbf{r}) \rangle$ , то есть  $M_0$  является средней намагниченностью насыщения материала.

В равновесии, как следует из уравнения Ландау-Лифшица (1.2), намагниченность материала подчиняется уравнениям (их называют ещё уравнениями Брауна [167]):

$$[\mathbf{H}^{\text{eff}}, \mathbf{M}] = 0, \quad (2.2)$$

где эффективное поле определено в виде вариационной производной энергии магнетика (1.4). Плотность энергии аддитивно содержит в себе взаимодействия внутри магнитного материала и между магнитным материалом и средой. Рассмотрим следующую плотность энергии

$$e = e_{\text{EX}} + e_{\text{A}} + e_{\text{MS}} + e_{\text{Z}}, \quad (2.3)$$

где слагаемые  $e_{\text{EX}}$ ,  $e_{\text{MS}}$ ,  $e_{\text{Z}}$  уже обсуждались ранее и определены выражениями (1.6), (1.5), (2.10), а в качестве плотности энергии анизотропии возьмём

$$e_{\text{A}} = -K(\mathbf{r}) \frac{[\mathbf{d}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})]^2}{M_{\text{S}}^2(\mathbf{r})}, \quad (2.4)$$

где  $K(\mathbf{r})$  задаёт пространственно-неоднородную константу одноосной анизотропии, а вектор  $\mathbf{d}(\mathbf{r})$  — локальное направление лёгкой оси. Зависимость константы и направления лёгкой оси от координаты — главное отличие от аналогичного выражения (1.27).

Как и энергия, эффективное поле (1.4) также аддитивно

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = \mathbf{H}_{\text{EX}} + \mathbf{H}_{\text{A}} + \mathbf{H}_{\text{MS}} + \mathbf{H}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{H}$  — просто внешнее поле, которое остаётся после вычисления вариационной производной энергии Зеемана (1.5).

Вычисление вариационной производной плотности обменной энергии (1.7) даёт следующее выражение для эффективного обменного поля

$$\mathbf{H}_{\text{EX}} = \gamma_{\text{B}} L_{\text{E}}^2(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \gamma_{\text{B}} \sum_{\alpha=X,Y,Z} \frac{\partial L_{\text{E}}^2(\mathbf{r})}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial \alpha} \quad (2.6)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Подобно намагниченности насыщения (2.1), предположим теперь, что квадрат обменной длины также является слабонеоднородным в пространстве

$$L_E^2(\mathbf{r}) = L_0^2 [1 + I_e(\mathbf{r})], \quad (2.7)$$

где  $L_0$  — среднеквадратичная по пространству обменная длина  $L_0^2 = \langle L_E^2(\mathbf{r}) \rangle$ , профиль неоднородностей имеет нулевое среднее  $\langle I_e(\mathbf{r}) \rangle = 0$ , а их амплитуда  $I_e \ll 1$  является малой во всех точках пространства величиной того же порядка, что и  $I_m$ . В магнитных материалах значения как обменной константы  $C$ , так и намагниченности насыщения  $M_S$  определяются одним и тем же квантовомеханическим обменом, поэтому значение  $L_0$  не очень сильно зависит от материала и, как правило, имеет величину порядка 5–15 нм. Тем не менее в этом параграфе пространственная неоднородность  $L_E$  учитывается в полной мере.

Эффективное поле анизотропии, соответствующее плотности энергии (2.4), можно представить в виде

$$\mathbf{H}_A = \gamma_B Q(\mathbf{r}) [\mathbf{d}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r})] \mathbf{d}(\mathbf{r}), \quad (2.8)$$

где пространственно-зависимый фактор качества

$$Q(\mathbf{r}) = 2K(\mathbf{r}) / [\mu_0 \gamma_B M_S^2(\mathbf{r})] = I_k(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

является слабонеоднородным  $I_k \ll 1$  того же порядка, что и  $I_m$ .

Согласно (1.17) плотность магнитостатической энергии

$$e_{MS} = -\frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_D, \quad (2.10)$$

содержит размагничивающее поле  $\mathbf{H}_D$ , которое, в свою очередь, зависит от всего векторного поля  $\mathbf{M}$ .

Вычислить  $\mathbf{H}_D$  проще всего в Фурье-представлении. Для удобства дальнейшего усреднения по положениям неоднородностей и ориентации образца в

этой Главе используется разложение в ряд Фурье

$$X(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \tilde{X}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (2.11)$$

$$\tilde{X}(\mathbf{q}) = \frac{1}{V} \iiint_V X(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (2.12)$$

который соответствует периодическому повторению магнитного куба размерами  $L \times L \times L$  и объёмом  $V = L^3$ . Здесь  $X$  — произвольная величина, которая раскладывается в ряд Фурье, а компоненты  $\mathbf{q} = \{q_X, q_Y, q_Z\}$  принимают значения, принадлежащие решётке  $\mathbf{q} \in 2\pi/L \times \mathbb{Z}^3$ , где  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел. Переход к выражениям для бесконечного пространства можно получить в пределе  $L \rightarrow \infty$ .

Подставляя эффективное поле  $\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}_D$  в закон магнитной индукции (1.1) и решая уравнения Максвелла (в статическом случае и при отсутствии макроскопических токов)  $\nabla \times \mathbf{H}_D = 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  получим для Фурье-компонент размагничивающего поля

$$\tilde{\mathbf{H}}_D = -\gamma_B \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{M}})}{q^2} \text{ для } \mathbf{q} \neq 0. \quad (2.13)$$

При этом среднее размагничивающее поле  $\tilde{\mathbf{H}}_D(0)$  всегда направлено против внешнего поля  $\mathbf{H}$ , из-за чего оно и называется “размагничивающим”. Эти два поля можно объединить и ввести внутреннее поле  $\mathbf{H} + \tilde{\mathbf{H}}_D(0)$ , всегда сонаправленное внешнему полю  $\mathbf{H}$ . Везде в дальнейшем в этой Главе под  $\mathbf{H}$  понимается внутреннее поле. Среднее размагничивающее поле может возникнуть, например, за счёт эффектов формы образца, которые можно учесть при определении внутреннего поля.

Простота выражений для Фурье-компонент размагничивающего поля (2.13) даёт возможность получить компактное решение уравнений Брауна (2.2) непосредственно в Фурье-пространстве. При этом нужно учитывать, что операции умножения функций в координатном пространстве превращаются в свёртки их

Фурье-образов. Для удобства работы со свёртками, обозначим их символом  $\otimes$ :

$$X \otimes Y(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}'} X(\mathbf{q}')Y(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (2.14)$$

где функции  $X(\mathbf{r})$  и  $Y(\mathbf{r})$  произвольны, аргумент  $\mathbf{q}$  в левой части равенства (который в дальнейшем практически всегда опускается) относится ко всей свёртке (а не только к  $Y$ ), а суммирование проводится по всем значениям  $\mathbf{q}'$ . Алгебра свёрток является коммутативной ( $X \otimes Y = Y \otimes X$ ), дистрибутивной ( $X \otimes (Y + Z) = X \otimes Y + X \otimes Z$ ), и ассоциативной относительно умножения на константу  $a(X \otimes Y) = (aX) \otimes Y = X \otimes (aY)$ , где  $a$  — произвольная константа. Она также имеет единичный элемент  $\delta(\mathbf{q})$  такой, что  $\delta \otimes X = X$ . Этот элемент можно представить в виде произведения  $\delta$ -символов Кронекера в дискретном случае или  $\delta$ -функций Дирака в непрерывном. Иногда удобно определять безымянные функции непосредственно в выражении с помощью подчеркивания. Так, что  $\underline{qZ} \otimes Y$  является свёрткой функции  $X(\mathbf{q}) = qZ(\mathbf{q})$  с функцией  $Y(\mathbf{q})$ .

Используя эти обозначения, выражения для Фурье-образов всех слагаемых в эффективном поле можно компактно представить в виде

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{EX}} = -\gamma_{\text{B}} \widetilde{L}_{\text{E}}^2 \otimes \underline{q^2 \widetilde{\mathbf{M}}} - \gamma_{\text{B}} \widetilde{\mathbf{M}} \star \mathbf{q} \otimes \underline{q \widetilde{L}_{\text{E}}^2}, \quad (2.15)$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{A}} = \gamma_{\text{B}} \widetilde{Q} \otimes \left( \widetilde{d}_{\text{X}} \otimes \widetilde{M}_{\text{X}} + \widetilde{d}_{\text{Y}} \otimes \widetilde{M}_{\text{Y}} + \widetilde{d}_{\text{Z}} \otimes \widetilde{M}_{\text{Z}} \right) \otimes \widetilde{\mathbf{d}}, \quad (2.16)$$

$$\widetilde{\mathbf{H}}_{\text{MS}} + \widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \delta - \gamma_{\text{B}} \frac{\mathbf{q}[\mathbf{q} \cdot (\widetilde{\mathbf{M}} - \delta \widetilde{\mathbf{M}})]}{q^2}, \quad (2.17)$$

где  $\star$  обозначает прямое (тензорное) произведение двух векторов (результатом такого произведения является матрица, строки которой представляют собой произведения каждого элемента первого вектора на второй вектор), а свёртка матрицы и вектора обозначает почти то же самое, что и их обычное произведение, только вместо операций умножения стоят свёртки.

Вычитание в круглых скобках второго слагаемого в (2.17) — это математический приём, который вместе с дополнительным условием  $\widetilde{\mathbf{M}} - \delta \widetilde{\mathbf{M}} \rightarrow 0$  при

$q \rightarrow 0$ , обнуляет это слагаемое при  $\mathbf{q} = 0$ . Он позволяет не исключать впоследствии точку  $\mathbf{q} = 0$  из суммирования (интегрирования). Дополнительное условие на предел  $\widetilde{\mathbf{M}} - \delta\widetilde{\mathbf{M}}$  автоматически удовлетворяется, если, как предполагается с самого начала,  $\langle I_m(\mathbf{r}) \rangle = \widetilde{I}_m(0) = 0$ .

Таким образом, для нахождения магнитной текстуры  $\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$  осталось решить уравнение Брауна (2.2) с эффективным полем, представляющим собой сумму (2.15), (2.16), (2.17). Этому и посвящён следующий параграф.

### 2.3. Теория возмущений для магнитной текстуры

Понятно, что если рассматриваемый (безграничный) материал является полностью однородным ( $I_m = 0$ ,  $I_e = 0$ ,  $I_k = 0$ ), то нет никакой причины для формирования в нём неоднородной магнитной текстуры в однородном внутреннем поле  $\mathbf{H}$ . Неоднородная магнитная текстура возникает как следствие неоднородности образца. Более того, если материал слабонеоднородный, то слабыми являются и неоднородности магнитной текстуры. Это значит, что можно организовать вычисления по теории возмущений с однородным состоянием в качестве нулевого приближения.

Выберем систему координат так, что (внешнее, а значит и однородное внутреннее) поле направлено вдоль оси  $OZ$

$$\mathbf{H} = \{0, 0, H\}. \quad (2.18)$$

Считая теперь  $I_m$ ,  $I_e$ ,  $I_k$  малыми параметрами одного порядка, представим Фурье-компоненты намагниченности в виде ряда

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \{0, 0, M_0\}\delta + \widetilde{\mathbf{M}}^{(1)} + \widetilde{\mathbf{M}}^{(2)} + \dots, \quad (2.19)$$

где  $\widetilde{\mathbf{M}}^{(i)}$  содержит члены порядка  $i$  относительно  $I_m, I_e, I_k$ .

Вследствие ограничения на длину вектора намагниченности  $\mathbf{M}^2 = M_S^2$ , только две компоненты вектора  $\mathbf{M}$  являются независимыми. Удобно выбрать в качестве этих независимых (и малых) компонент  $M_X = M_X^{(1)} + M_X^{(2)}$  и  $M_Y = M_Y^{(1)} + M_Y^{(2)}$ . Тогда до второго порядка малости оставшуюся зависимую компоненту вектора  $\mathbf{M}$  в реальном пространстве можно выразить как

$$M_Z = M_0 + M_0 I_m - \frac{(M_X^{(1)})^2 + (M_Y^{(1)})^2}{2M_0}. \quad (2.20)$$

Вводя безразмерный вектор намагниченности  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$  и переходя в Фурье-пространство, где произведения превращаются в свёртки, получим

$$\widetilde{m}_Z = \delta + \widetilde{I}_m - F_Z, \quad (2.21)$$

где

$$F_Z = \frac{\widetilde{m}_X^{(1)} \otimes \widetilde{m}_X^{(1)} + \widetilde{m}_Y^{(1)} \otimes \widetilde{m}_Y^{(1)}}{2}. \quad (2.22)$$

Уравнения Брауна (2.2), из которых только два являются независимыми, в Фурье-пространстве тоже содержат свёртки. Первое из них выглядит так

$$\widetilde{H}_Z^{\text{eff}} \otimes \widetilde{M}_Y = \widetilde{H}_Y^{\text{eff}} \otimes \widetilde{M}_Z, \quad (2.23)$$

а второе получается из него переменной индексов  $X \leftrightarrow Y$ . Подстановка в уравнения Брауна выражения для полного эффективного поля в виде суммы (2.15), (2.16), (2.17) и разложения намагниченности (2.19) приводит к ряду по степеням неоднородностей. Собирая члены одного порядка, получим бесконечную цепочку связанных уравнений для коэффициентов разложения независимых компонент намагниченности  $m_{X/Y}^{(1)}, m_{X/Y}^{(2)}, \dots$ . В первом порядке это приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} (h + L_0^2 q^2 + y_q^2) \widetilde{m}_Y^{(1)} + x_q y_q \widetilde{m}_X^{(1)} &= \widetilde{K}_Y - y_q z_q \widetilde{I}_m, \\ (h + L_0^2 q^2 + x_q^2) \widetilde{m}_X^{(1)} + x_q y_q \widetilde{m}_Y^{(1)} &= \widetilde{K}_X - x_q z_q \widetilde{I}_m, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $h = H/(\gamma_B M_0)$  — безразмерная величина внутреннего магнитного поля,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_X &= \tilde{d}_X \otimes \tilde{d}_Z \otimes \tilde{I}_k, \\ \tilde{K}_Y &= \tilde{d}_Y \otimes \tilde{d}_Z \otimes \tilde{I}_k,\end{aligned}\tag{2.25}$$

а  $\{x_q, y_q, z_q\} = \mathbf{q}/q$  — безразмерные компоненты единичного вектора (директора) в направлении  $\mathbf{q}$ . Величины  $L_0$  и  $q$  имеют размерность, но их произведение безразмерно. Уравнения (2.24) представляют собой систему линейных уравнений, которую легко решить

$$\tilde{m}_X^{(1)} = \frac{\tilde{K}_X(h_q + y_q^2) - x_q(\tilde{K}_Y y_q + h_q z_q \tilde{I}_m)}{h_q(h_q + x_q^2 + y_q^2)},\tag{2.26}$$

$$\tilde{m}_Y^{(1)} = \frac{\tilde{K}_Y(h_q + x_q^2) - y_q(\tilde{K}_X x_q + h_q z_q \tilde{I}_m)}{h_q(h_q + x_q^2 + y_q^2)},\tag{2.27}$$

где  $h_q = h + L_0^2 q^2$ . Если пренебречь обменным взаимодействием и анизотропией ( $h_q = h$ ,  $\tilde{K}_X = 0$ ,  $\tilde{K}_Y = 0$ ), эти выражения совпадают с решением теории приближения к насыщению первого порядка, полученным Шлёманом [128]. Они также совпадают с известным решением, используемым в микромагнитной теории малоуглового рассеяния нейтронов [123], с той лишь разницей, что теперь параметры анизотропии  $\tilde{K}_X$ ,  $\tilde{K}_Y$  не введены искусственно, а явно выражены через профиль неоднородности константы одноосной анизотропии и её директор (2.25).

Уравнения во втором (и выше) порядке отличаются от уравнений в первом порядке только правой частью, которая содержит суммы по решениям более низких порядков:

$$(h + L_0^2 q^2 + y_q^2)m_Y^{(2)} + x_q y_q m_X^{(2)} = F_Y + y_q z_q F_Z,\tag{2.28}$$

$$(h + L_0^2 q^2 + x_q^2)m_X^{(2)} + x_q y_q m_Y^{(2)} = F_X + x_q z_q F_Z.\tag{2.29}$$

Их решения также подобны

$$\tilde{m}_X^{(2)} = \frac{F_X(h_q + y_q^2) - x_q(F_Y y_q - h_q z_q F_Z)}{h_q(h_q + x_q^2 + y_q^2)},\tag{2.30}$$

$$\tilde{m}_Y^{(2)} = \frac{F_Y(h_q + x_q^2) - y_q(F_X x_q - h_q z_q F_Z)}{h_q(h_q + x_q^2 + y_q^2)}. \quad (2.31)$$

Функции, стоящие в правой части, при этом имеют вид

$$\begin{aligned} F_X = & \tilde{d}_X \otimes \tilde{I}_k \otimes (2\tilde{d}_Z \otimes \tilde{I}_m + \tilde{d}_X \otimes m_X^{(1)} + \tilde{d}_Y \otimes m_Y^{(1)}) - \\ & - \underline{qL_0 x_q \tilde{I}_e} \otimes \underline{qL_0 x_q m_X^{(1)}} - \underline{qL_0 y_q \tilde{I}_e} \otimes \underline{qL_0 y_q m_X^{(1)}} - \\ & - \underline{qL_0 z_q \tilde{I}_e} \otimes \underline{qL_0 z_q m_X^{(1)}} - \tilde{d}_Z \otimes \tilde{d}_Z \otimes \tilde{I}_k \otimes m_X^{(1)} - \\ & - \tilde{I}_e \otimes \underline{L_0^2 q^2 m_X^{(1)}} - \\ & - \tilde{I}_m \otimes \underline{L_0^2 q^2 m_X^{(1)}} + \underline{x_q(z_q \tilde{I}_m + x_q m_X^{(1)} + y_q m_Y^{(1)})} + \\ & + \underline{m_X^{(1)} \otimes L_0^2 q^2 \tilde{I}_m} + \underline{z_q(z_q \tilde{I}_m + x_q m_X^{(1)} + y_q m_Y^{(1)})}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

а выражение для  $F_Y$  отличается лишь заменой координат  $X \leftrightarrow Y$  и функций  $x_q \leftrightarrow y_q$ . Функция  $F_Z = -m_Z^{(2)}$  определена уравнением (2.22).

Чтобы сделать пример попроще, пренебрежём неоднородностями анизотропии и обмена ( $\tilde{I}_k = \tilde{I}_e = 0$ ). Тогда если в (2.32) подставить выражения для  $\tilde{m}_X^{(1)}$  и  $\tilde{m}_Y^{(1)}$ , специальные функции можно представить в виде

$$F_{X/Y/Z}(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{q}'} \frac{\tilde{I}_m(\mathbf{q}') \tilde{I}_m(\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{u_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}} f_{X/Y/Z}(\mathbf{q}', \mathbf{q} - \mathbf{q}')$$

где

$$\begin{aligned} f_X &= -hx_{\mathbf{q}'} z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} u_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - (z_{\mathbf{q}'}^2 (h + L_0^2 q'^2) + u_{\mathbf{q}'} L_0^2 q'^2) x_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}, \\ f_Y &= -hy_{\mathbf{q}'} z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} u_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - (z_{\mathbf{q}'}^2 (h + L_0^2 q'^2) + u_{\mathbf{q}'} L_0^2 q'^2) y_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}, \\ f_Z &= \frac{1}{2} z_{\mathbf{q}'} z_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} (x_{\mathbf{q}'} x_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} + y_{\mathbf{q}'} y_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

и  $u_{\mathbf{q}} = h_{\mathbf{q}} + x_{\mathbf{q}}^2 + y_{\mathbf{q}}^2$ . При этом выражение (2.33) для  $f_Z$  справедливо даже если не пренебрегать неоднородностями анизотропии и обмена. Оно является следствием ограничения на длину вектора намагниченности. Если ещё пренебречь эффектами обменного взаимодействия (положив  $L_0 = 0$ ), решения для  $\mathbf{m}^{(2)}$  в точности совпадут с аналогичными решениями, полученными ранее Шлёманом [128].

Таким образом, здесь получены явные решения задачи о магнитной текстуре слабонеоднородного ферромагнетика в магнитном поле. Эти решения справедливы вплоть до второго порядка теории возмущений. В предельных (упрощённых) случаях они переходят в известные выражения.

#### 2.4. Усреднение по неоднородностям

Пространственные распределения неоднородностей намагниченности насыщения  $I_m(\mathbf{r})$ , анизотропии  $I_k(\mathbf{r})$  и обмена  $I_e(\mathbf{r})$  практически никогда не известны. Для реального магнитного материала можно предположить, что неоднородности порождает некоторый случайный процесс, представленный своей реализацией в пределах рассматриваемого репрезентативного объёма ( $L \times L \times L$ ). Тогда для вычисления макроскопического малоуглового сечения рассеяния нейтронов от объёмного поликристаллического образца, содержащего множество репрезентативных объёмов, нужно провести усреднение как по реализациям случайных процессов, описывающих неоднородности, так и по ориентации неоднородностей (чтобы учесть случайную ориентацию зёрен и кристаллитов).

Кроме того, в реальных материалах неоднородности разных магнитных параметров обычно не являются независимыми. Физические причины, по которым они формируются (такие, например, как нанокристаллизация), приводят к тому, что материал состоит из нескольких фаз, каждая со своим набором магнитных параметров. Это значит, что можно ожидать существенной пространственной корреляции магнитных параметров между собой. Поэтому в дальнейшем предполагается, что пространственные неоднородности магнитных параметров пропорциональны одной универсальной функции  $\tilde{I}$ , описывающей микроструктуру материала:  $\tilde{I}_m = \tilde{I}$ ,  $\tilde{I}_k = \kappa\tilde{I}$ ,  $\tilde{I}_e = \epsilon\tilde{I}$ , где числа  $\kappa, \epsilon \lesssim 1$ .

Для выполнения процедуры усреднения нужно конкретизировать модель неоднородностей. Рассмотрим локализованные отклонения параметров материала от средних значений, которые распределены по материалу случайно:

$$I(\mathbf{r}) = \sum_n f_n(\mathbf{r} - \mathbf{p}_n), \quad (2.34)$$

где  $\mathbf{p}_n$  — случайно распределённые внутри репрезентативного объёма векторы, а суммирование ведётся по всем неоднородностям. Преобразование Фурье этой функции можно представить в виде

$$\tilde{I}(\mathbf{q}) = \sum_n e^{-i\mathbf{q}\mathbf{p}_n} \tilde{f}_n(\mathbf{q}), \quad (2.35)$$

где  $\tilde{f}_n(\mathbf{q})$  — преобразование Фурье функции  $f_n(\mathbf{r})$ .

Далее предположим, что неоднородности локализованы и имеют гауссовский профиль,

$$f_n(\mathbf{r}) = a_n e^{-\frac{1}{2} \mathbf{r}^\top \hat{\mathbf{A}} \mathbf{r}}, \quad (2.36)$$

где  $a_n$  обозначает их (случайную) амплитуду, символ  $\top$  обозначает транспонирование, а жирной заглавной буквой со “шляпкой” обозначена квадратная матрица. Матрица квадратичной формы  $\hat{\mathbf{A}}$  предполагается положительно определённой, а её элементы имеют размерность обратного квадрата длины  $\text{м}^{-2}$  (так, что аргумент экспоненты получается безразмерным). Считая размер неоднородностей много меньшим репрезентативного объёма, можно расширить пределы интегрирования в преобразовании Фурье до бесконечности и получить простое представление

$$\tilde{f}_n(\mathbf{q}) = \frac{a_n v}{V} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{q}}, \quad (2.37)$$

где  $v = (2\pi)^{3/2} / \sqrt{D}$  — объём одной неоднородности,  $D = \det \hat{\mathbf{A}}$  — определитель матрицы  $\hat{\mathbf{A}}$ , и  $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$  её обратная матрица.

Далее проводится усреднение по всем ориентациям неоднородностей. Поэтому без потери общности достаточно задать положительно определённую мат-

рицу  $\hat{\mathbf{A}}$  в диагональном виде. В частности, рассмотрим сфероидальные неоднородности, которым соответствует матрица

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tau/s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau/s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\tau s)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где  $s$  — действительное число, имеющее размерность длины, задающее размер неоднородностей и  $\tau$  — безразмерная величина, определяющая их форму. Случай  $\tau = 1$  соответствует сферическим неоднородностям,  $\tau \ll 1$  плоским, и  $\tau \rightarrow \infty$  вытянутым, похожим на иголку. Параметризация здесь выбрана так, чтобы объём одной неоднородности  $v = (2\pi)^{3/2}s^3$  не зависел от параметра  $\tau$ .

Добавим теперь к описанию неоднородностей повороты, используя матрицу вращений  $\hat{\mathbf{O}}$ . Есть множество способов задать такую матрицу. Для конкретики параметризуем её сферическими углами  $\varphi_R \in [0, 2\pi]$  и  $\theta_R \in [0, \pi]$ :

$$\hat{\mathbf{O}} = \begin{pmatrix} c_\varphi^2 c_\theta + s_\varphi^2 & c_\varphi s_\varphi (c_\theta - 1) & c_\varphi s_\theta \\ c_\varphi s_\varphi (c_\theta - 1) & c_\varphi^2 + s_\varphi^2 c_\theta & s_\varphi s_\theta \\ -c_\varphi s_\theta & -s_\varphi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

где  $c_\varphi = \cos \varphi_R$ ,  $s_\varphi = \sin \varphi_R$ ,  $c_\theta = \cos \theta_R$  и  $s_\theta = \sin \theta_R$ . Данная матрица поворачивает единичный вектор  $\{0, 0, 1\}$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{v} = \{c_\varphi s_\theta, s_\varphi s_\theta, c_\theta\}$  и, следовательно, имеет свойство  $\hat{\mathbf{O}}^{-1}\mathbf{v} = \{0, 0, 1\}$ .

Матрица  $\hat{\mathbf{A}}$  в повернутой системе координат имеет вид  $\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{O}}^{-1} = \hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{O}}^\top$  в силу того, что для матрицы вращения справедливо тождество:  $\hat{\mathbf{O}}^{-1} = \hat{\mathbf{O}}^\top$ . Аналогично,  $(\hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{O}}^\top)^{-1} = \hat{\mathbf{O}}\hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{O}}^\top$ , а  $\mathbf{q}^\top \mathbf{p}_n$  в повернутой системе координат нужно заменить на  $\mathbf{q}^\top \hat{\mathbf{O}} \mathbf{p}_n$ . Тогда для Фурье-образа повернутой функции неоднородностей имеем

$$\tilde{I}(\mathbf{q}) = \frac{v}{V} \tilde{J}(\mathbf{q}) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{q}^\top \hat{\mathbf{O}} \hat{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{O}}^\top \mathbf{q}}, \quad (2.40)$$

$$\tilde{J}(\mathbf{q}) = \sum_n a_n e^{-i\mathbf{q}^\top \hat{\mathbf{O}} \mathbf{p}_n}. \quad (2.41)$$

Кроме усреднения по всем углам поворота  $\varphi_R$  и  $\theta_R$ , выражения, содержащие  $\tilde{I}(\mathbf{q})$ , нужно усреднить по случайным позициям неоднородностей  $\mathbf{p}_n$ . Функция  $\tilde{I}$  зависит от этих позиций только через множитель  $J$ . В качестве примера конфигурационного усреднения, вычислим среднеквадратичное значение  $J$ :

$$\langle |\tilde{J}(\mathbf{q})|^2 \rangle = \left\langle \sum_n \sum_{n'} a_n a_{n'} e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{O}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n'})} \right\rangle = N \langle a_n^2 \rangle,$$

где  $N$  — количество неоднородностей в репрезентативном объёме. Последнее равенство имеет место в предположении неперекрывающихся неоднородностей, для которых усреднение экспоненты даёт дельта символ Кронекера, позволяющий избавиться от одного суммирования. Подобным образом можно показать, что различные  $m$ -произведения  $\tilde{J}$ , такие, как, например, тройное произведение  $|\tilde{J}(\mathbf{q})|^2 \text{Re}J(\mathbf{q})$  или четверное произведение  $|\tilde{J}(\mathbf{q})|^4$ , при усреднении по конфигурациям неоднородностей дают величину  $N \langle a_n^m \rangle$ , которая не зависит от  $\mathbf{q}$ .

Предположим, что направление оси локальной анизотропии не привязано к выделенным осям формы частицы. Это означает, что все выражения для сечений малоуглового рассеяния нейтронов нужно также усреднить по случайной ориентации лёгкой оси.

Теперь у нас есть все инструменты, необходимые для вычисления сечений малоуглового рассеяния нейтронов образцами с малыми случайными неоднородностями, локально модифицирующими намагниченность насыщения, константу анизотропии и обмен.

## 2.5. Сечения малоуглового рассеяния нейтронов во втором порядке

Как уже было сказано в §1.7, сечения малоуглового рассеяния нейтронов (1.99), (1.100) пропорциональны второй степени намагниченности. Разложения

её компонент (2.26), (2.27) начинаются с членов первого порядка по  $\tilde{I}$ . Это значит, что разложения сечений рассеяния начинаются с членов второго порядка.

Для простоты предположим, что направление оси анизотропии постоянно внутри каждой неоднородности (но ориентировано случайно в разных), так что  $\tilde{d}_X = \delta \cos \varphi_A \sin \theta_A$ ,  $\tilde{d}_Y = \delta \sin \varphi_A \sin \theta_A$ , и  $\tilde{d}_Z = \delta \cos \theta_A$ . Подставляя компоненты намагниченности (2.26), (2.27) в выражения для параллельного (1.100) / перпендикулярного (1.99) макроскопического магнитного сечения малоуглового рассеяния нейтронов и проводя усреднение по направлениям оси анизотропии

$$\langle F \rangle_A = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F \sin \theta_A d\varphi_A d\theta_A, \quad (2.42)$$

получим

$$\frac{d\Sigma_M^\parallel}{d\Omega} = 8\pi^3 V b_H^2 M_0^2 \langle \tilde{I}^2 \rangle \frac{\kappa^2}{15h_q^2}, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_M^\perp}{d\Omega} = 8\pi^3 V b_H^2 M_0^2 \langle \tilde{I}^2 \rangle & \left[ \frac{\kappa^2 \cos^2 \alpha}{15(h_q + \sin^2 \alpha)^2} + \frac{\kappa^2}{15h_q^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(3 + 4h_q - \cos 2\alpha) \sin^2 2\alpha}{8(h_q + \sin^2 \alpha)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

где введён угол в плоскости детектора ( $q_Y = 0$ ) для перпендикулярного сечения рассеяния  $q_Z = q \cos \alpha$ ,  $q_X = q \sin \alpha$ , а угловые скобки обозначают усреднение по ориентации репрезентативного объёма ( $\varphi_R, \theta_R$ ). Для гауссовых неоднородностей (2.36)–(2.38) это усреднение можно провести аналитически, что даёт  $\langle \tilde{I}^2 \rangle = N \langle a_n^2 \rangle (v/V)^2 \Upsilon(qs, \tau)$  с функцией

$$\Upsilon(\mu, \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{\mu^2}{\tau}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu} \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau^3}} \operatorname{Erfi}\left(\mu \sqrt{\frac{1-\tau^3}{\tau}}\right) & \tau < 1 \\ e^{-\mu^2} & \tau = 1, \\ e^{-\frac{\mu^2}{\tau}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu} \sqrt{\frac{\tau}{\tau^3-1}} \operatorname{Erf}\left(\mu \sqrt{\frac{\tau^3-1}{\tau}}\right) & \tau > 1 \end{cases} \quad (2.45)$$

где используется функция ошибок  $\operatorname{Erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-t^2} dt$  и её мнимая часть  $\operatorname{Erfi}(z) = \operatorname{Erf}(iz)/i$ . Зависимость  $\Upsilon(\mu, \tau)$  от формы частицы, заданной параметром  $\tau$ , для различных значений  $\mu = qs$  построена на рисунке 2.1.

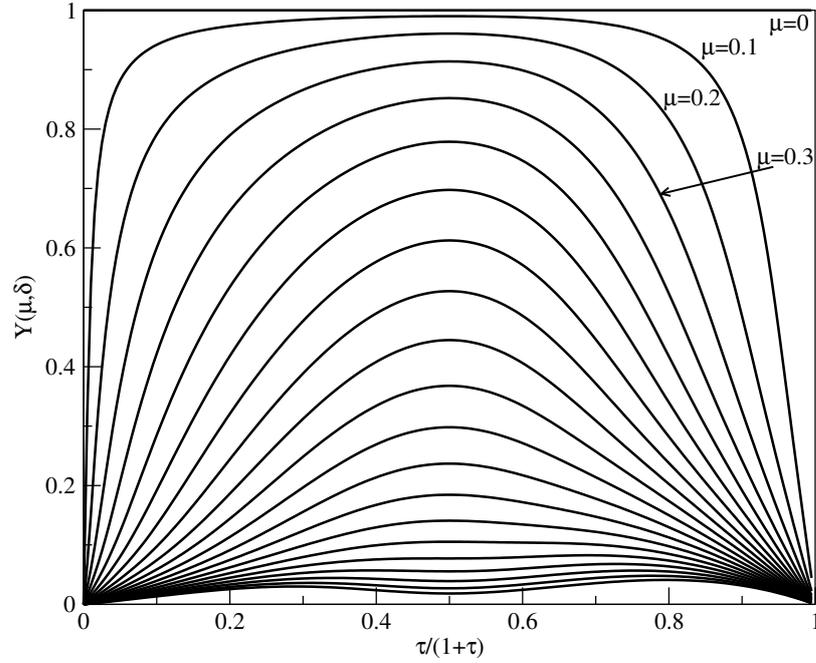


Рисунок 2.1. Зависимость усреднённого квадрата функции неоднородностей  $\langle \tilde{I}^2 \rangle = N \langle a_n^2 \rangle (v/V)^2 \Upsilon(qs, \tau)$  от формы включений  $\tau$  для различных значений  $\mu = qs$  в диапазоне от 0 до 2 с равным шагом 0.1.  $\langle \tilde{I}^2 \rangle$  имеет экстремум для сферической формы включений ( $\tau = 1$ ). Левая часть графика соответствует сплюснутым неоднородностям, правая — вытянутым

Параллельное сечение во втором порядке (2.43) полностью изотропно в плоскости детектора ( $q_z = 0$ ), в то время как перпендикулярное (2.44), кроме изотропного члена  $\frac{\kappa^2}{15h_q^2}$ , содержит два слагаемых, которые зависят от  $\alpha$ . Одно из них обусловлено эффектом анизотропии, а другое имеет чисто магнитостатическое происхождение. График угловой зависимости этих членов приведен на рисунке 2.2.

В соответствии с определением  $h_q = h + L_0^2 q^2$ , величина  $h_q$  принимает значения, начиная от величины внутреннего поля  $h > 0$  и до некоторого бóльшего предельного значения, заданного обменной константой и параметрами детектора нейтронов. Можно выделить два разных режима: когда величина  $h_q$  мала (малое поле  $h$  и  $q^2$  много меньше обратного квадрата обменной длины  $1/L_0^2$ ) и когда величина  $h_q$  велика (либо когда поле  $h$  велико, либо когда  $q$  велико при

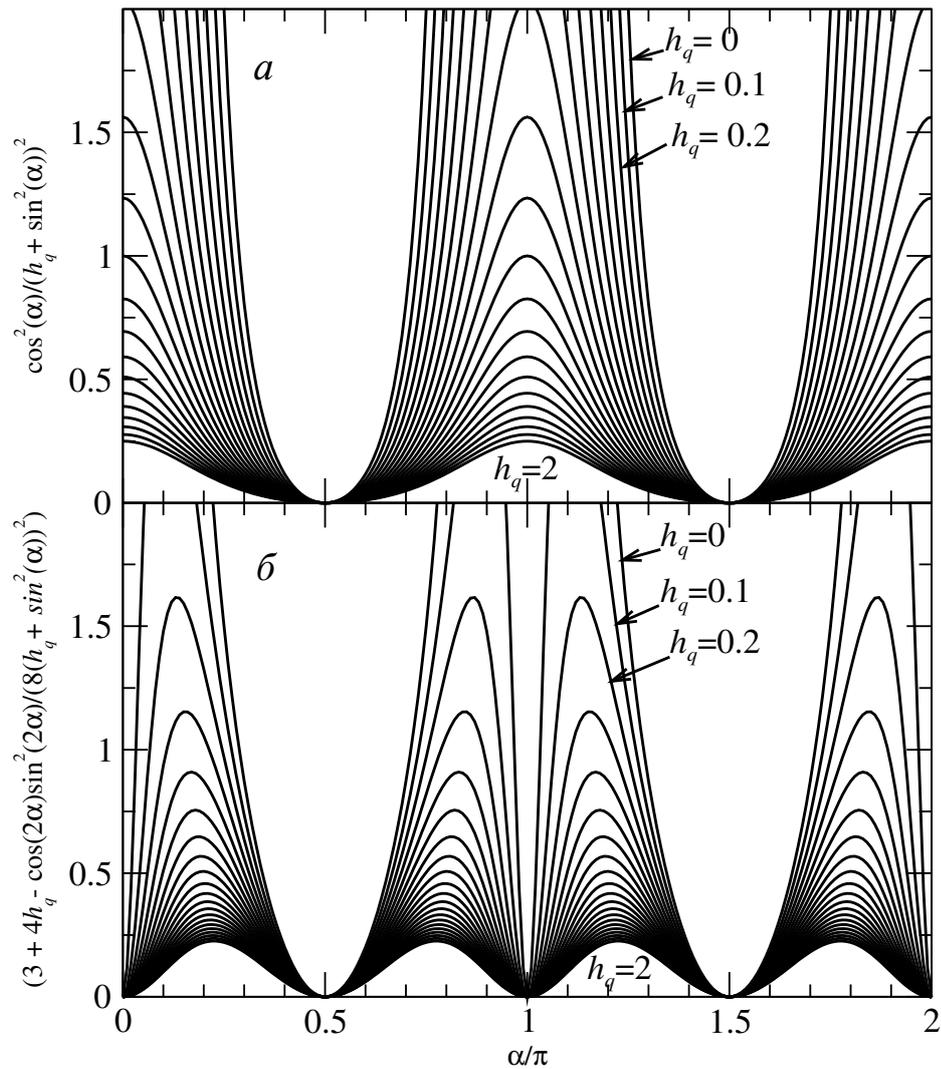


Рисунок 2.2. Угловая зависимость анизотропных членов в макроскопическом перпендикулярном сечении малоуглового рассеяния нейтронов (2.44) при разных значениях  $h_q$ :  $a$  — первый и  $б$  — третий члены

малом  $h$ ). В первом из этих случаев угловая зависимость обоих анизотропных членов демонстрирует анизотропию второго порядка в плоскости детектора и производит сечение рассеяния в виде восьмёрки с резкими максимумами вдоль  $\alpha = 0, \pi$ . Вместе с изотропным гало, описываемым вторым членом в (2.44), это даёт недавно обнаруженную экспериментально [11] форму сечения рассеяния [123] показанную на рисунке 2.3. По своей форме это сечение напоминает популярную пиктограмму неопознанного летающего объекта (НЛО).

При больших  $h_q$  угловая зависимость первого и третьего членов в урав-

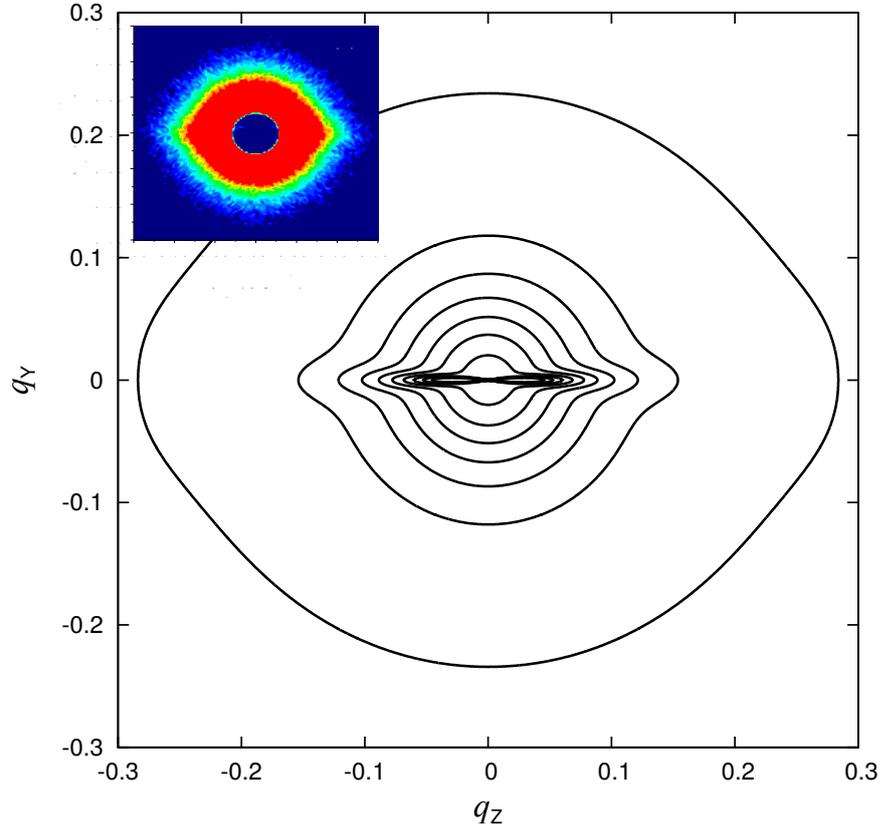


Рисунок 2.3. Магнитное сечение малоуглового рассеяния нейтронов (построенное, опуская множитель  $8\pi^3 V b_{\text{H}}^2 M_0^2 N \langle a_n^2 \rangle (v/V)^2$ ) в малых полях  $h = 0.01$  и при малых  $q$  в образце со сферическими ( $\tau = 1$ ) гауссовыми включениями. Остальные параметры следующие:  $\kappa = 1$ ,  $s = 1$ ,  $L_0 = 1$ . Шаг контуров соответствует значениям с шагом 100. В центре расположен очень резкий максимум. Вставка показывает аналогичное сечение рассеяния, измеренное в [11] и показанное там на рисунке 2b

нении (2.44) разная. Первый член имеет анизотропию второго порядка, в то время как второй асимптотически приближается к  $(1 - \cos 4\alpha)/(4h_q)$  с анизотропией четвёртого порядка. Это свидетельствует о возможности разделить вклады анизотропии и магнитостатического взаимодействия при помощи Фурье-анализа сечений рассеяния при больших  $h_q$  (при достаточно больших  $h$  или вдоль внешнего края сечений, измеренных в меньших полях).

При больших  $q$  оба магнитных сечения рассеяния асимптотически приближаются (в случае сферических гауссовых включений с  $\tau = 1$ ) к  $\propto e^{-s^2 q^2} (sq)^{-4}$ ,

где  $s$  обозначает размер включения. Другие предположения о профиле включений (например, профиль с резкой границей) могут привести к другой асимптотической зависимости.

## 2.6. Эффект третьего порядка в сечении рассеяния нейтронов

Структура решения второго порядка для компонент намагниченности (2.30), (2.31) подобна структуре решения первого порядка, с той лишь разницей, что теперь магнитоэлектронные эффекты также дают вклад в  $F_X$  и  $F_Y$ . Эти функции играют в решениях второго порядка ту же роль, что и функции  $\tilde{K}_X$  и  $\tilde{K}_Y$  в решениях первого порядка, хоть они и имеют другую зависимость от направления и величины  $\mathbf{q}$ -вектора.

Главная проблема с этими и другими вкладами высоких порядков теории возмущений в физические свойства заключается в том, что они, как правило, очень малы. Если при этом присутствуют эффекты низких порядков, то они полностью маскируют эффекты высоких порядков. С другой стороны, анализ эффектов высоких порядков часто позволяет извлечь независимую информацию о системе, которая другим образом не доступна. Отсюда следует, что желательно создать такие экспериментальные условия, при которых вклады низких порядков взаимоуничтожаются за счёт симметрии и измеряемые эффекты обусловлены исключительно вкладами членов высокого порядка малости. Так эти вклады можно сделать доступными для анализа.

В задаче о магнитном рассеянии нейтронов наноструктурированным поликристаллическим материалом в перпендикулярной геометрии рассеяния это можно сделать, рассмотрев следующую комбинацию значений измеренного се-

чения рассеяния:

$$\Delta\Sigma_{\text{M}}^{\perp} = \left. \frac{d\Sigma_{\text{M}}^{\perp}}{d\Omega} \right|_{\alpha=0} - 2 \left. \frac{d\Sigma_{\text{M}}^{\perp}}{d\Omega} \right|_{\alpha=\pi/2}, \quad (2.46)$$

где  $\alpha$  входит в определение вектора рассеяния  $\mathbf{q}_{\perp} = q\{0, \sin \alpha, \cos \alpha\}$ . Она представляет собой разность сечения рассеяния вдоль направления внешнего поля  $\mathbf{q} \parallel OZ$  и удвоенного сечения рассеяния в направлении  $\mathbf{q} \parallel OY$ , перпендикулярном внешнему полю в плоскости детектора.

Как можно убедиться из уравнения (2.44), эта комбинация тождественно равна нулю во втором порядке теории возмущений. Причём это её свойство сохраняется как в присутствии неоднородностей константы анизотропии  $\kappa > 0$ , так и в случае неоднородностей обменной константы  $\epsilon > 0$ . Оно справедливо и в случае негауссова профиля неоднородностей в силу того, что усреднённая по ориентациям неоднородностей величина  $\langle \tilde{I}^2 \rangle$  зависит только от длины вектора  $\mathbf{q}$ , но не от его направления. Это свойство также не зависит от предположения, что профиль неоднородностей анизотропии пропорционален профилю неоднородностей намагниченности насыщения  $\tilde{I}_{\text{k}} = \kappa \tilde{I}$ . Другими словами, взаимоуничтожение членов второго порядка в  $\Delta\Sigma_{\text{M}}^{\perp}$  является универсальным свойством сечений рассеяния, не зависящим от конкретной модели неоднородностей.

В следующем (третьем) порядке вклады  $F_X$  и  $F_Y$  точно также сокращаются и  $\Delta\Sigma_{\text{M}}^{\perp}$  принимает особенно простой вид

$$\Delta\Sigma_{\text{M}}^{\perp} = 32\pi^3 V b_{\text{H}}^2 M_0^2 \langle F_Z \tilde{I} \rangle \Big|_{q_z=0}, \quad (2.47)$$

где  $q = q_Y$ ,  $F_Z$  определено уравнением (2.22), а угловые скобки обозначают тройное (конфигурационное, по направлениям, и по направлениям оси анизотропии) усреднение.

Для конкретного примера, предположим сферическую форму включений ( $\tau = 1$ ), которая делает усреднение по ориентации включений ненужным. Тогда усредняя по реализациям неоднородностей и направлениям локальных осей

анизотропии, получим

$$\Delta\Sigma_M^\perp = 32\pi^3 b_H^2 M_0^2 \rho v^2 \langle a_n^3 \rangle [\kappa^2 g_A(qs) + g_{MS}(qs)], \quad (2.48)$$

где  $\rho = N/V$  — плотность включений. Безразмерные функции нормированного волнового вектора  $g_A(\mu)$  и  $g_{MS}(\mu)$ , которые также зависят от параметров  $h$  и  $\lambda = L_0/s$  описаны в Приложении 2.1 и построены на рисунках 2.4 и 2.5. Оставшиеся в них интегралы произошли от свёртки в определении функции  $F_Z$ .

Зависимость разности  $\Delta\Sigma_M^\perp$  в третьем порядке теории возмущений (2.48) от  $\mu$  для рассматриваемых сферических гауссовых неоднородностей представляет собой спадающую экспоненту. Только для малых значений поля  $h$  эта зависимость становится резче при малых значениях  $\mu$ . Для очень малой амплитуды неоднородностей анизотропии  $\kappa$  такой, что в сечении доминирует функция  $g_{MS}$ , можно получить отрицательные значения разности  $\Delta\Sigma_M^\perp$  при  $\mu \cong 1.5$ . При этом сечение рассеяния остаётся положительным.

Описанный здесь эффект третьего порядка ещё предстоит обнаружить и проанализировать экспериментально.

## 2.7. Рассеяние в присутствии антисимметричного обмена

До сих пор здесь рассматривались ахиральные системы, у которых правая и левая спиральная закрутка намагниченности имеют одинаковую энергию. Рассмотрим теперь магнетик с взаимодействием Дзялошинского-Мория (антисимметричным обменом), которое приводит к нарушению хиральной симметрии магнитных текстур и, как следствие, к невзаимности рассеяния нейтронов.

В простейшем случае это взаимодействие можно учесть в магнетике с кубической кристаллической решёткой путём добавления к лагранжиану энер-

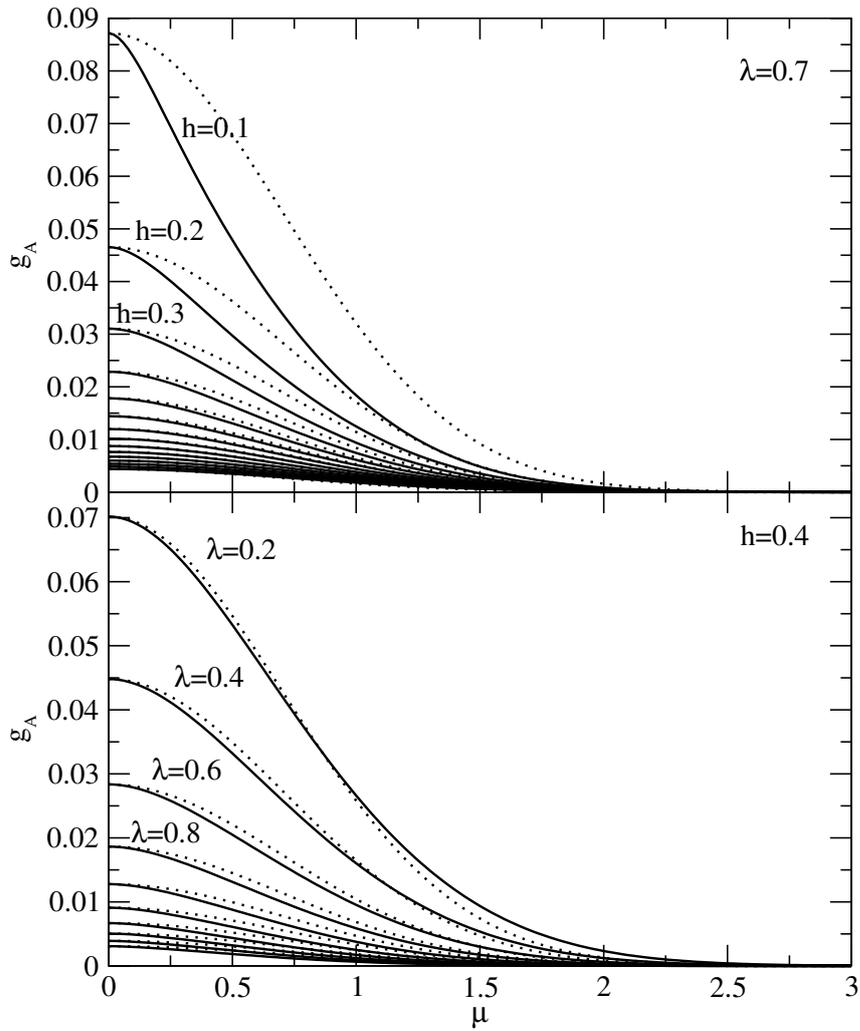


Рисунок 2.4. Функции  $g_A(\mu, h, \lambda)$  (сплошные линии) и их приближения спадающими экспонентами (линии из точек) для различных значений  $h$  при фиксированном  $\lambda$  (верхний график) и для разных значений  $\lambda$  при фиксированном  $h$  (нижний график)

гии изотропного антисимметричного обмена (1.35) (см. §1.2.4). Константа взаимодействия Дзялошинского-Мория, определяющая силу этого взаимодействия, имеет размерность  $[D] = \text{Дж м}^{-2}$ .

В кристаллическом материале, содержащем в группе точечной симметрии инверсию, глобальное взаимодействие Дзялошинского-Мория усредняется в нуль и  $D = 0$ . Если же этот материал поликристаллический с границами зёрен и другими дефектами, ненулевое среднее взаимодействие Дзялошинского-Мория симметрией не запрещено, а значит может возникнуть. Конечно, это

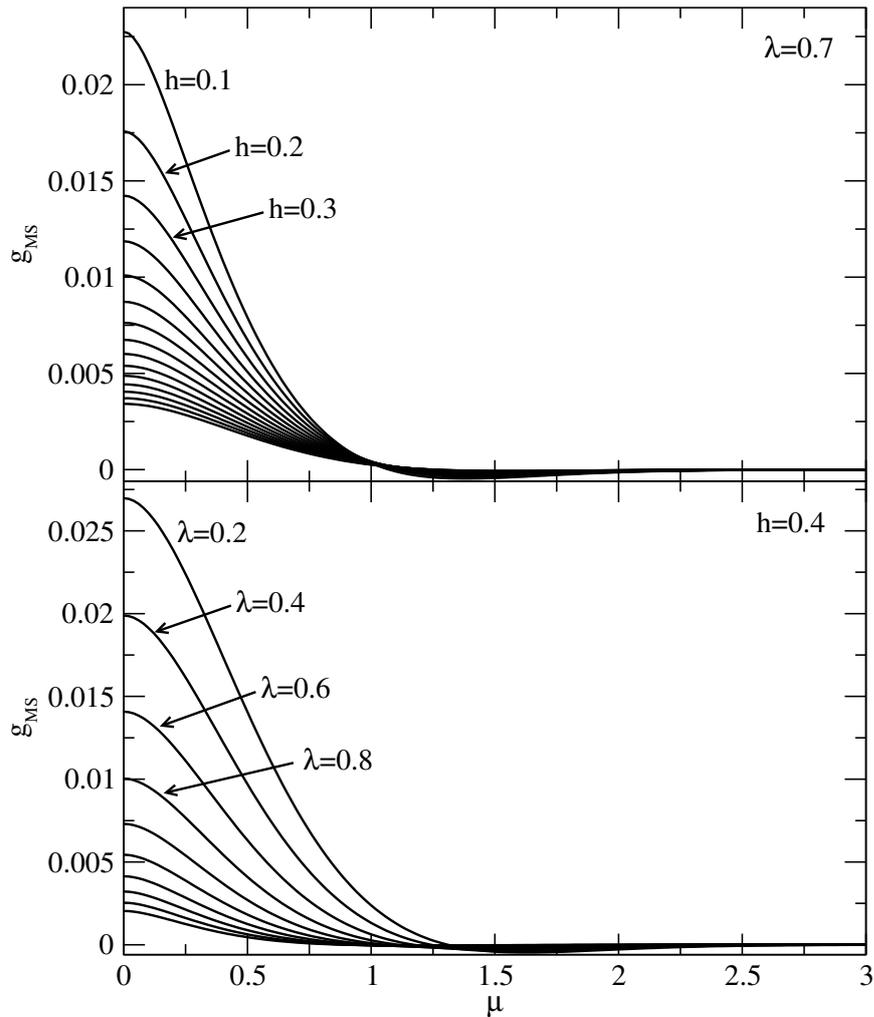


Рисунок 2.5. Функции  $g_{MS}(\mu, h, \lambda)$ . Кривые соответствуют тому же набору параметров, что и на рисунке 2.4

взаимодействие локализовано в области границ зёрен и точечных дефектов, но именно там, в рассматриваемой здесь задаче о слабонеоднородных образцах, намагниченность насыщения и отклоняется от направления поля. Вдалеке от областей, где локализовано изменение магнитных параметров, намагниченность всё равно лежит параллельно полю (и ненулевое значение  $D$  на неё никак не влияет), а значит предположение о пространственной однородности константы  $D$  может быть хорошей моделью для слабонеоднородных образцов.

Соответствующий (1.35) вклад в эффективное поле имеет вид

$$\mathbf{H}_{DM} = -L_D[\nabla \times \mathbf{M}], \quad (2.49)$$

где  $L_D = D/(\mu_0\gamma_B M_S^2)$  — длина Дзялошинского-Мория, измеряющая силу этого взаимодействия относительно магнитостатического. Для конкретных расчётов в этом параграфе используются параметры материала, приведенные в Таблице 2.1. Значения  $D$  соответствуют поверхностному взаимодействию Дзялошинского-Мория [77], объёмные значения обычно на порядок меньше [168, 169], но эксперименты, как правило, проводятся на гетероструктурах, в которых поверхностный вклад доминирует. В таком материале  $L_E \cong L_D \cong 5$  нм. Малые пространственные флуктуации  $L_D$  и  $L_E$  сейчас не рассматриваются. Они дают вклад второго порядка малости в уравнения для намагниченности, а интересные эффекты проявляют себя уже в первом порядке. В силу этого  $L_D$  и  $L_E = L_0$  нужно понимать как средние по объёму образца.

В Фурье-пространстве

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_{DM}(\mathbf{q}) &= -iL_D[\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{M}}] \cong \\ &\cong -iL_D \left\{ q_Y M_0 \tilde{I}_m - q_Z \tilde{M}_Y, q_Z \tilde{M}_X - q_X M_0 \tilde{I}_m, q_X \tilde{M}_Y - q_Y \tilde{M}_X \right\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где последнее равенство справедливо в первом порядке по степеням амплитуды неоднородностей материала.

Подставляя в уравнения Брауна выражение для полного эффективного поля в виде суммы (2.15), (2.16), (2.17), (2.50) и разложение намагниченности (2.19) в первом порядке по степеням амплитуды неоднородностей, получим следующую систему уравнений для  $m_X^{(1)}$ ,  $m_Y^{(1)}$

$$\begin{aligned} (h_q + q^2 L_0^2) \tilde{m}_X^{(1)} + x_q (z_q \tilde{I}_m + x_q \tilde{m}_X^{(1)} + y_q \tilde{m}_Y^{(1)}) + i q L_D (y_q \tilde{I}_m - z_q \tilde{m}_Y^{(1)}) &= \tilde{K}_X, \\ (h_q + q^2 L_0^2) \tilde{m}_Y^{(1)} + y_q (z_q \tilde{I}_m + x_q \tilde{m}_X^{(1)} + y_q \tilde{m}_Y^{(1)}) - i q L_D (x_q \tilde{I}_m - z_q \tilde{m}_X^{(1)}) &= \tilde{K}_Y, \end{aligned}$$

где  $\tilde{K}_X$  и  $\tilde{K}_Y$  определены уравнениями (2.25).

Эту линейную систему несложно решить

$$\tilde{m}_X^{(1)} = \frac{p(\tilde{K}_X(1 + p y_q^2) - p \tilde{K}_Y(x_q y_q - i q L_D z_q))}{1 + p(x_q^2 + y_q^2) - p^2 q^2 L_D^2 z_q^2} -$$

Таблица 2.1. Магнитные и структурные параметры, использованные при вычислении Фурье-компонент и сечений рассеяния материала с хиральным взаимодействием. Значение  $\kappa$  обсуждается в Приложении 2.2

$\mu_0 M_0$ [Тл]	1.0
$A$ [пДж м <sup>-1</sup> ]	10
$D$ [мДж м <sup>-2</sup> ]	2
$\kappa$	$\sqrt{15/2}$
$R$ [нм]	8

$$\tilde{m}_Y^{(1)} = \frac{p(\imath(1+p)qL_D y_q + (1+pq^2L_D^2)x_q z_q)\tilde{I}_m}{1+p(x_q^2+y_q^2)-p^2q^2L_D^2z_q^2} - \frac{p(\tilde{K}_Y(1+px_q^2)-p\tilde{K}_X(x_q y_q + \imath qL_D z_q))}{1+p(x_q^2+y_q^2)-p^2q^2L_D^2z_q^2} - \frac{p(-\imath(1+p)qL_D x_q + (1+pq^2L_D^2)y_q z_q)\tilde{I}_m}{1+p(x_q^2+y_q^2)-p^2q^2L_D^2z_q^2}, \quad (2.51)$$

$$\tilde{m}_X^{(1)} = \frac{p(\imath(1+p)qL_D x_q + (1+pq^2L_D^2)y_q z_q)\tilde{I}_m}{1+p(x_q^2+y_q^2)-p^2q^2L_D^2z_q^2} - \frac{p(\tilde{K}_X(1+px_q^2)-p\tilde{K}_Y(x_q y_q + \imath qL_D z_q))}{1+p(x_q^2+y_q^2)-p^2q^2L_D^2z_q^2} - \frac{p(-\imath(1+p)qL_D y_q + (1+pq^2L_D^2)x_q z_q)\tilde{I}_m}{1+p(x_q^2+y_q^2)-p^2q^2L_D^2z_q^2}, \quad (2.52)$$

где  $p = p(h, q) = 1/(h + q^2 L_0^2)$ , а выражения для  $\tilde{m}_X^{(1)}$  и  $\tilde{m}_Y^{(1)}$  отличаются заменой  $X \leftrightarrow Y$  (соответственно,  $x_q \leftrightarrow y_q$ ) и изменением знака перед  $\imath$ , что и является причиной не взаимности. В пределе, когда взаимодействие Дзялошинского-Мория отсутствует ( $L_D = 0$ ), эти выражения переходят в (2.26) и (2.27).

Для иллюстрации вычислим теперь магнитные текстуры в реальном пространстве в каком-нибудь простом случае. Например, для периодической решётки круговых неоднородностей [170]. Неоднородности необходимы, иначе у вектора намагниченности нет никаких причин отклониться от направления однородного внешнего (внутреннего) поля. Предположим, что поле направлено вдоль оси  $OZ$  и рассмотрим периодический в плоскости  $XOY$  массив макроскопических столбчатых неоднородностей в виде круговых (радиуса  $R$ ) цилиндров, оси которых параллельны оси  $OZ$ . Внутри каждой неоднородности величина

намагниченности насыщения немного (на величину  $\Delta M_S \ll M_0$ ) отличается от её величины снаружи. Предположим, что неоднородности расположены в узлах периодической решётки  $\mathbf{L} = i\mathbf{a}_1 + j\mathbf{a}_2$ , где  $i, j$  — целые числа, а  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  — векторы решётки. Для единичной квадратной решётки  $\mathbf{a}_1 = \{1, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \{0, 1, 0\}$ ; для гексагональной  $\mathbf{a}_1 = \{1, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \{-1/2, \sqrt{3}/2, 0\}$ . Этим векторам соответствуют векторы обратной решётки  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ , такие, что  $(\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_m) = 2\pi\delta_{nm}$ . Для единичной квадратной решётки  $\mathbf{b}_1 = 2\pi\{1, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{b}_2 = 2\pi\{0, 1, 0\}$ ; для гексагональной  $\mathbf{b}_1 = 2\pi\{1, 1/\sqrt{3}, 0\}$ ,  $\mathbf{b}_2 = 2\pi\{0, 2/\sqrt{3}, 0\}$ . Такой профиль намагниченности насыщения можно представить в виде ряда Фурье

$$M_S(\mathbf{r}) = M_0 \left( 1 + \frac{\Delta M_S}{M_0} \frac{2\pi R}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \sum'_{i,j=-\infty}^{\infty} \frac{J_1(qR)}{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \right), \quad (2.53)$$

где суммирование ведётся по всем  $\mathbf{q} = i\mathbf{b}_1 + j\mathbf{b}_2$ , кроме  $i, j = 0$  (что обозначено штрихом, рядом со знаком суммы). Независимое от координат слагаемое исключается, чтобы гарантировать  $M_0 = \langle M_S(\mathbf{r}) \rangle$ . Выражение под знаком суммы (включая множитель перед суммой) представляет собой Фурье-образ функции неоднородностей  $\tilde{I}_m$ . Предположим, что профиль неоднородностей анизотропии пропорционален профилю неоднородностей намагниченности насыщения  $\tilde{I}_k = \kappa\tilde{I}_m$ . Ось анизотропии выберем не зависящей от положения в материале и направленной под углом  $45^\circ$  к оси  $OZ$  и к осям в плоскости  $XOY$ . Это соответствует  $\tilde{d}_X = \delta \cos \varphi_A \sin \theta_A$ ,  $\tilde{d}_Y = \delta \sin \varphi_A \sin \theta_A$ , и  $\tilde{d}_Z = \delta \cos \theta_A$  с  $\varphi_A = \theta_A = \pi/4$ . Тогда из (2.25) следует, что  $\tilde{K}_X = \tilde{K}_Y = \tilde{I}_m/2$ . Подставляя эти выражения и (2.53) в (2.51), (2.52) получим после вычисления обратного преобразования Фурье магнитные текстуры, показанные на рисунке 2.6.

Как видно из рисунка 2.6а, векторы намагниченности больше всего отклоняются от направления поля вблизи границ неоднородностей — там, где намагниченность насыщения меняется. Эта локализация зависит от величины обменной константы, увеличение которой, как показано на рисунке 2.6б, уменьшает резкость переходных областей. Включение анизотропии (рисунок 2.6в),

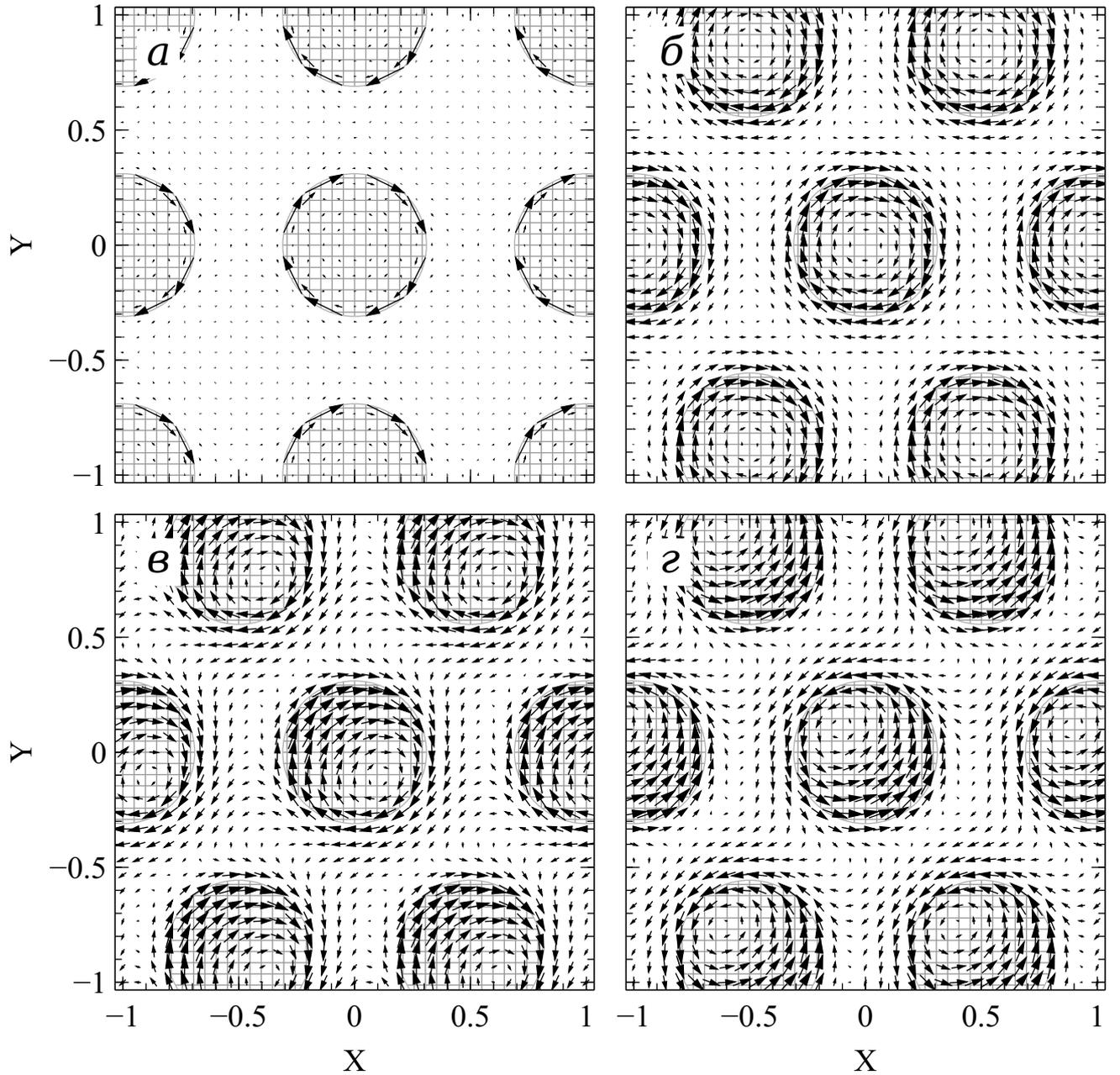


Рисунок 2.6. Магнитные текстуры в реальном пространстве, соответствующие решению (2.51), (2.51). Слабые неоднородности намагниченности (амплитудой  $\Delta M_S/M_S = 0.1$ ) представляют собой цилиндры радиуса  $R = 0.3$ , с осями, параллельными оси  $OZ$  и центрами, расположенными в узлах  $a$  — квадратной или  $б, в, г$  гексагональной решётки с горизонтальным периодом 1. Все длины здесь измеряются относительно периода решётки. Остальные параметры следующие:  $a$  —  $L_D = 1$ ,  $h = 1$ ,  $L_E = 0.01$ ,  $\tilde{K}_X = \tilde{K}_Y = 0$ ;  $б$  — то-же, кроме  $L_E = 0.2$ ;  $в$  — то-же, кроме  $\tilde{K}_X = \tilde{K}_Y = 3$ ;  $г$  — то-же, кроме  $L_D = -1$ . Штриховкой показаны области неоднородностей (уменьшенной намагниченности насыщения)

действует подобно магнитному полю, лежащему в плоскости решётки, смещая центры вихрей. Это происходит потому что директор оси анизотропии имеет компоненту, параллельную внешнему магнитному полю (лежащему перпендикулярно плоскости картинки). В присутствии такой скошенной оси внешнее поле делает одно из направлений вдоль оси анизотропии более энергетически выгодным. Изменение знака константы взаимодействия Дзялошинского-Мория (рисунок 2.6в) меняет хиральность всей магнитной текстуры на противоположную и, как следствие, вихри (под действием того же, что и раньше, внешнего поля) смещаются в противоположную сторону. Важно также отметить, что распределения намагниченности на рисунках 2.6б–г кроме основных вихрей в центре каждой неоднородности, содержат также два дополнительных вихря на ячейку и три седла (антивихря). Причём количество и положения этих особенностей подчиняются универсальным топологическим ограничениям, которые установлены в §6.4.

Вернёмся теперь к вычислению сечений рассеяния для нанокристаллического материала со случайно расположенными сферическими неоднородностями. Основными ингредиентами здесь являются средние квадраты Фурье-компонент вектора намагниченности. В случае перпендикулярной геометрии рассеяния, когда пучок нейтронов направлен вдоль оси  $OY$ , потребуются усреднённые квадраты компонент намагниченности и перекрёстный член при  $q_X = 0$ , входящие в выражение для сечения рассеяния (1.95). Проводя усреднение по формуле (2.42) с учётом сказанного в Приложении 2.2 получим

$$\begin{aligned}
\langle |\tilde{m}_X^{(1)}|^2 \rangle_{\perp} &= \frac{|\tilde{I}_m|^2 p^2 (((1+p)y_q^2 + z_q^2)^2 \kappa^2 + (15(1+p)^2 y_q^2 + p^2 z_q^2 \kappa^2) q^2 L_D^2)}{15(1 + p y_q^2 - p^2 z_q^2 q^2 L_D^2)^2}, \\
\langle |\tilde{m}_Y^{(1)}|^2 \rangle_{\perp} &= \frac{|\tilde{I}_m|^2 p^2 (\kappa^2 + z_q^2 (p^2 \kappa^2 q^2 L_D^2 + 15 y_q^2 (1 + p q^2 L_D^2)^2))}{15(1 + p y_q^2 - p^2 z_q^2 q^2 L_D^2)^2}, \\
C_{\perp} &= \frac{2|\tilde{I}_m|^2 p^2 y_q z_q (1 + p^2 q^2 L_D^2)}{(1+p)y_q^2 + z_q^2 - p^2 z_q^2 q^2 L_D^2},
\end{aligned} \tag{2.54}$$

где  $C_{\perp} = -\langle \tilde{m}_Y^{(1)} \overline{\tilde{m}_Z^{(1)}} + \overline{\tilde{m}_Y^{(1)}} \tilde{m}_Z^{(1)} \rangle$ . Для параллельной геометрии вычисления проводятся аналогично, только Фурье-компоненты нужно усреднять при  $q_Z = 0$ , потому что пучок нейтронов теперь направлен вдоль оси  $OZ$

$$\begin{aligned} \langle |\tilde{m}_X^{(1)}|^2 \rangle_{\parallel} &= \frac{|\tilde{I}_m|^2 p^2 (((1+p)^2 y_q^2 + x_q^2) \kappa^2 + 15(1+p)^2 y_q^2 q^2 L_D^2)}{15(1+p)^2}, \\ \langle |\tilde{m}_Y^{(1)}|^2 \rangle_{\parallel} &= \frac{|\tilde{I}_m|^2 p^2 (((1+p)^2 x_q^2 + y_q^2) \kappa^2 + 15(1+p)^2 x_q^2 q^2 L_D^2)}{15(1+p)^2}, \\ C_{\parallel} &= \frac{2|\tilde{I}_m|^2 p^2 y_q x_q (p(2+p) \kappa^2 + 15(1+p)^2 q^2 L_D^2)}{15(1+p)^2}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где  $C_{\parallel} = -\langle \tilde{m}_X^{(1)} \overline{\tilde{m}_Y^{(1)}} + \overline{\tilde{m}_X^{(1)}} \tilde{m}_Y^{(1)} \rangle$ . В случае сферических неоднородностей  $\tilde{I}_m \propto j_1(qR)/(qR)$ , где  $j_1$  — сферическая функция Бесселя первого порядка. Функции (2.54) и (2.55) изображены на рисунках 2.7 и 2.8.

Как видим, Фурье-компоненты и в случае параллельной, и в случае перпендикулярной геометрии рассеяния сильно анизотропны. Но если вычислить сечения рассеяния по формулам (1.95) и (1.96), подставив в них усреднённые квадраты компонент намагниченности (2.54) и (2.55), то окажется, что параллельное сечение рассеяния, показанное на рисунке 2.9, полностью изотропно в плоскости детектора. В то время как перпендикулярное сечение рассеяния, показанное на рисунке 2.10, всё ещё имеет нетривиальную структуру. Такая ситуация является скорее правилом, чем исключением. Поэтому в дальнейшем чаще обсуждаются свойства перпендикулярных сечений рассеяния. Знание зависимости сечения рассеяния от волнового вектора позволяет решить путём подгонки ряд обратных задач. Таких, например, как определение магнитных параметров материала ( $L_0$ ,  $L_D$ ) и параметров системы неоднородностей в нём. Сосредоточимся всё же здесь на общих свойствах этих сечений.

Одно из этих свойств, в случае хиральной магнитной текстуры — не взаимность, когда прохождение нейтронов в прямом и обратном направлении через образец приводит к разным результатам измерений. Такая ситуация может сложиться если образец вращает поляризацию падающих нейтронов. В рамках

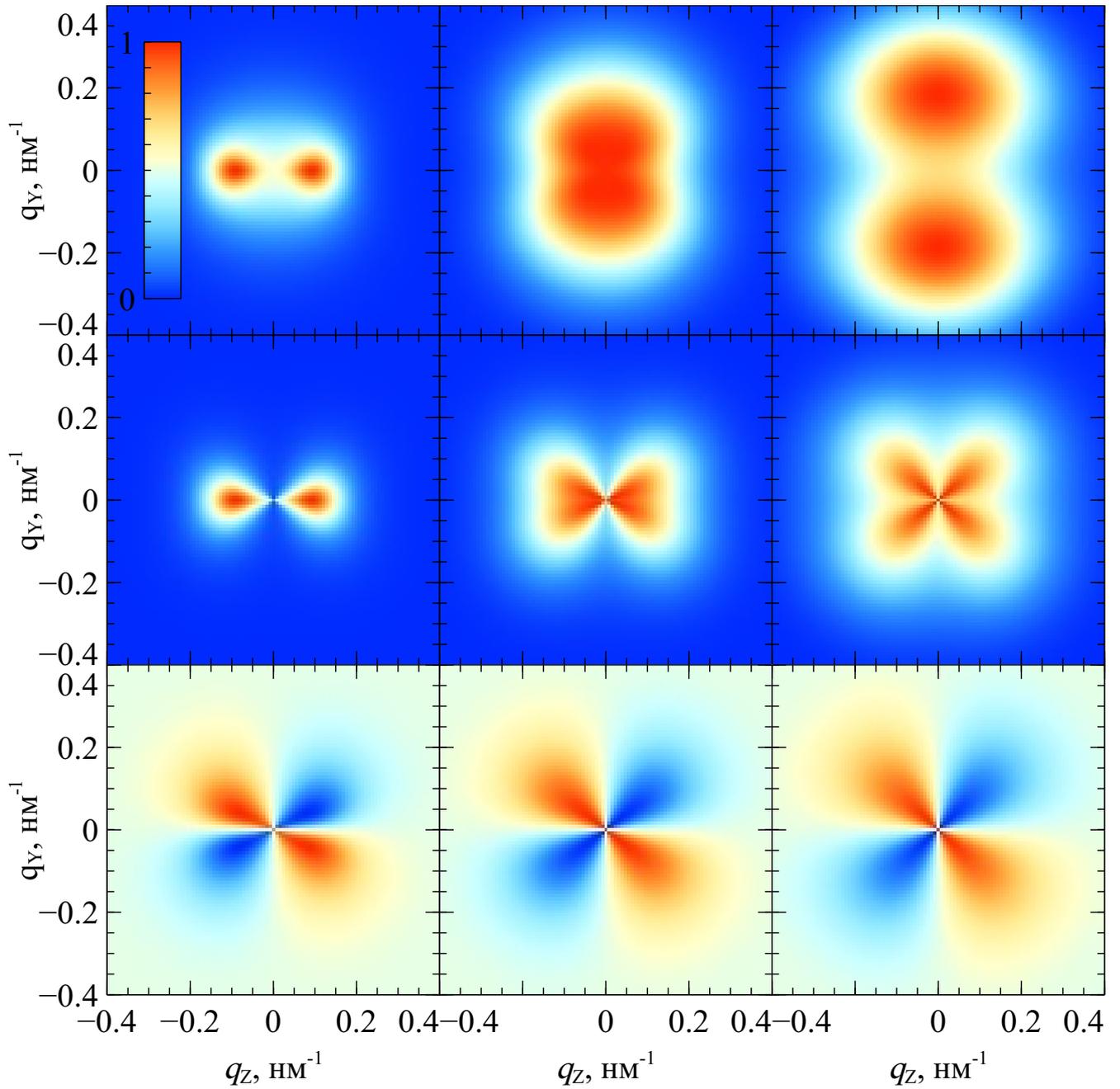


Рисунок 2.7. Усреднённые Фурье-компоненты намагниченности (2.54) в перпендикулярной геометрии для сферических неоднородностей намагниченности насыщения. Сверху вниз:  $\langle |\tilde{m}_X^{(1)}|^2 \rangle_{\perp}$ ,  $\langle |\tilde{m}_Y^{(1)}|^2 \rangle_{\perp}$ ,  $CT_{\perp}$  слева направо меняется значение внутреннего поля  $h = 0.5, 1.5, 10$ . Остальные параметры приведены в Таблице 2.1

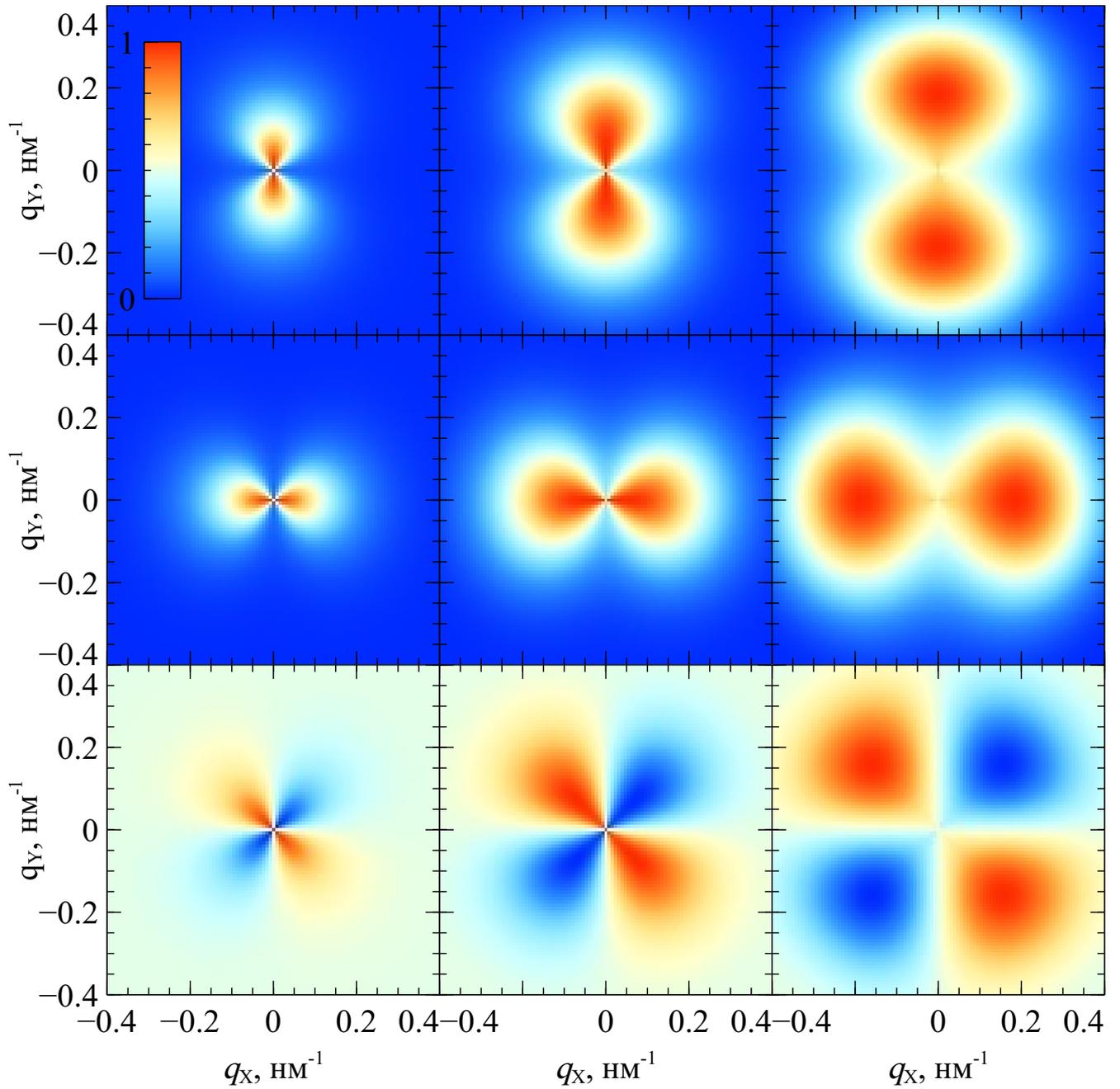


Рисунок 2.8. Усреднённые Фурье-компоненты намагниченности (2.54) в параллельной геометрии для сферических неоднородностей намагниченности насыщения. Сверху вниз:  $\langle |\tilde{m}_X^{(1)}|^2 \rangle_{\parallel}$ ,  $\langle |\tilde{m}_Y^{(1)}|^2 \rangle_{\parallel}$ ,  $CT_{\parallel}$  слева направо меняется значение внутреннего поля  $h = 0.5, 1.5, 10$ . Остальные параметры приведены в Таблице 2.1

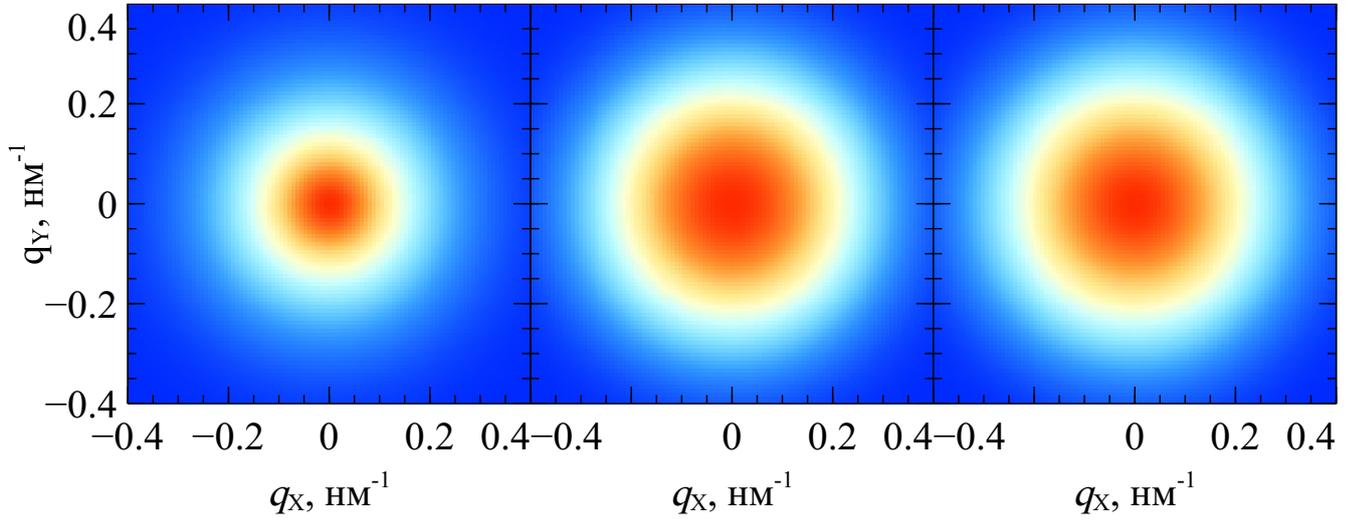


Рисунок 2.9. Сечение рассеяния нейтронов в параллельной геометрии (когда пучок нейтронов параллелен внешнему магнитному полю) магнетика с взаимодействием Дзялошинского-Мория. Графики слева направо соответствуют значениям внутреннего поля  $h = 0.5, 1.5, 10$ . Остальные параметры приведены в Таблице 2.1

изложенной выше схемы этот вопрос можно рассмотреть количественно.

Чтобы отследить изменение поляризации пучка нейтронов в процессе рассеяния рассмотрим следующую безразмерную разность

$$2i\chi = \frac{1}{8\pi^3 V b_H^2 M_0^2} \left( \frac{d\Sigma_M^{\perp -+}}{d\Omega} - \frac{d\Sigma_M^{\perp +-}}{d\Omega} \right), \quad (2.56)$$

где из выражений для сечений рассеяния с переворотом спина (1.105) следует, что

$$\chi(\mathbf{q}) = \left( \tilde{m}_X \overline{\tilde{m}_Y} - \overline{\tilde{m}_X} \tilde{m}_Y \right) \cos^2 \alpha - \left( \tilde{m}_X \overline{\tilde{m}_Z} - \overline{\tilde{m}_X} \tilde{m}_Z \right) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.57)$$

В этом выражении появляются два новых перекрёстных члена, которые также несложно вычислить

$$C_{\perp}^{\text{SF1}} = \frac{2i|\tilde{I}|_{\text{m}}^2 p^2 z_q q L_D (15(1+p)x_q^2 + p(2+px_q^2)\kappa^2 + 15p(1+p)x_q^2 q^2 L_D^2)}{15(1+px_q^2 - p^2 z_q^2 q^2 L_D^2)^2} \quad (2.58)$$

$$C_{\perp}^{\text{SF2}} = -\frac{2i|\tilde{I}|_{\text{m}}^2 p(1+p)x_q q L_D}{1+px_q^2 - p^2 z_q^2 q^2 L_D^2}$$

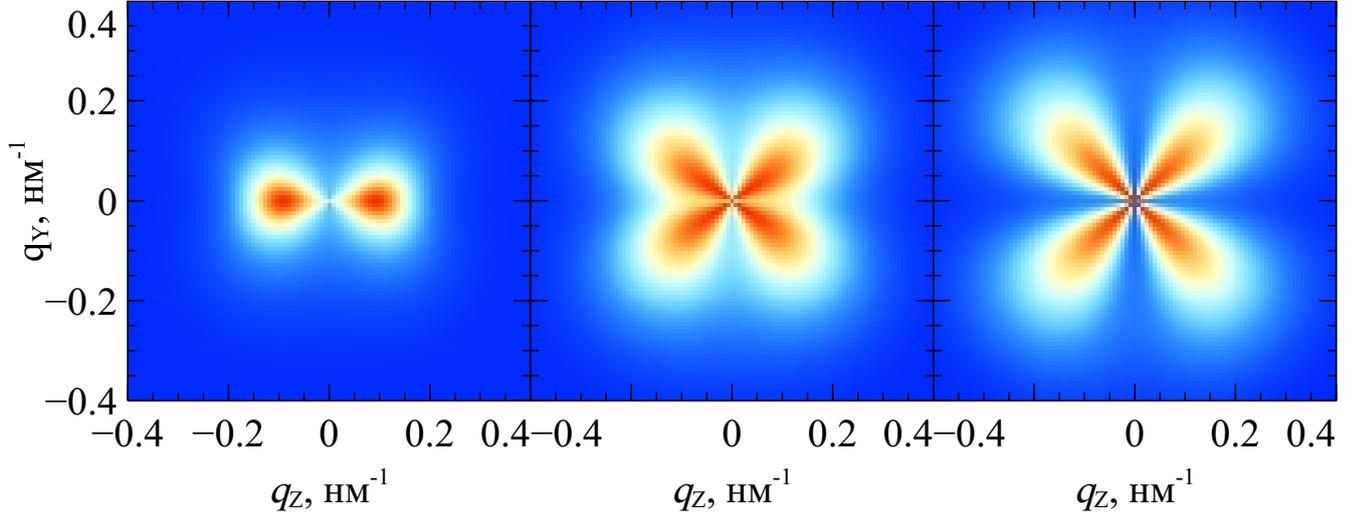


Рисунок 2.10. Сечение рассеяния нейтронов в перпендикулярной геометрии (когда пучок нейтронов перпендикулярен внешнему магнитному полю) магнетика с взаимодействием Дзялошинского-Мория. Графики слева направо соответствуют значениям внутреннего поля  $h = 0.5, 1.5, 10$ . Остальные параметры приведены в Таблице 2.1

где  $C_{\perp}^{\text{SF1}} = \tilde{m}_X \overline{\tilde{m}_Y} - \overline{\tilde{m}_X} \tilde{m}_Y$  и  $C_{\perp}^{\text{SF2}} = \tilde{m}_X \overline{\tilde{m}_Z} - \overline{\tilde{m}_X} \tilde{m}_Z$ . Тогда (2.57) можно представить в виде  $\chi = C_{\perp}^{\text{SF1}} y_q^2 - C_{\perp}^{\text{SF2}} y_q z_q$  или, подставляя (2.58),

$$-2i\chi = \frac{4|\tilde{I}|_m^2 p z_q q L_D (15(1+p)^2 x_q^2 + p^2(2 + p x_q^2) z_q^2 \kappa^2)}{15(1 + p x_q^2 - p^2 z_q^2 q^2 L_D^2)^2}. \quad (2.59)$$

Эти разности сечений рассеяния показаны на рисунке 2.11. Видно, что в зависимости от величины приложенного внешнего поля их анизотропия меняет порядок от второго к четвёртому. Эти выражения находятся в превосходном согласии с экспериментом [170] и позволяют, в дополнение к известному эффекту возникновения хиральности в слоистых гетероструктурах [171] за счёт нарушения симметрии на интерфейсах, показать возможность её возникновения в объёмных магнетиках со структурными дефектами, даже если их идеальная кристаллическая структура содержит центр инверсии.

Подгоняя экспериментальные данные выражениями для неполяризованных сечений, можно найти значение  $L_D$  и, таким образом, подтвердить (или

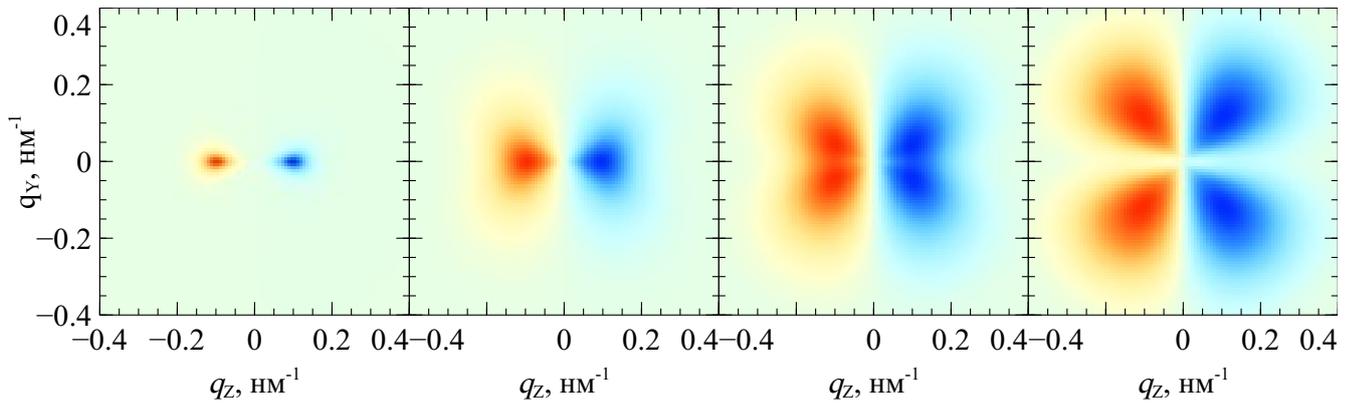


Рисунок 2.11. Разность сечений рассеяния с переворотом спина  $2i\chi(\mathbf{q})$  в перпендикулярной геометрии магнетика с взаимодействием Дзялошинского-Мория. Графики слева направо соответствуют значениям внутреннего поля  $h = 0.3, 0.6, 1.0, 3.5$ . Остальные параметры приведены в Таблице 2.1

опровергнуть) наличие антисимметричного обмена в материале. Измерение разности сечений с поворотом спина  $2i\chi(\mathbf{q})$  открывает более прямой путь к детектированию хиральности. В её отсутствии  $2i\chi(\mathbf{q}) = 0$ . Кроме того, в  $2i\chi(\mathbf{q})$  константа  $L_D$  входит в первом порядке, а значит измерение  $L_D$  при помощи поляризованных нейтронов позволяет определить не только величину  $D$ , но и её знак.

Наконец, из вида выражения (2.59) можно сказать, что невзаимность в рассеянии поляризованных нейтронов слабонеоднородными магнетиками с взаимодействием Дзялошинского-Мория ( $L_D^2 > 0$ ) возникает всегда, хотя виды магнитных текстур, тесно связанные с формой и распределением неоднородностей материала, могут сильно отличаться.

## 2.8. Рассеяние нейтронов магнитным вихрем

В предыдущем параграфе рассмотрен случай, когда магнитному материалу присуща хиральность на микроскопическом уровне (взаимодействие Дзялошинского-Мория) и показано, как она проявляет себя при рассеянии нейтронов. Тем не менее, хиральные магнитные текстуры могут формироваться в ферромагнетике и без сколько-нибудь значительных микроскопических хиральных взаимодействий, а просто в силу спонтанного нарушения симметрии, когда произвольно (в силу предыстории) реализуется одно из двух равноправных стабильных состояний с противоположной хиральностью.

Простым примером хирального состояния нехирального ферромагнетика является магнитный вихрь в тонком планарном нанозементе цилиндрической формы. Магнитные вихри более подробно рассмотрены в §3.6, где получено приближённое выражение для распределения намагниченности в этом состоянии, и в Главе 4, где исследованы их равновесные свойства и сосуществование с другими магнитными фазами. Здесь, воспользовавшись выражением для вихревой магнитной текстуры в круговом цилиндре из §3.6, вычислим соответствующее сечение малоуглового рассеяния нейтронов.

Как уже было сказано в §1.6, компоненты намагниченности удобно выразить при помощи функции  $w(z, \bar{z})$  комплексной переменной  $z = Z + iY$ , используя стереографическую проекцию

$$\begin{aligned} m_Z + im_Y &= \frac{2w(z, \bar{z})}{1 + w(z, \bar{z})\bar{w}(z, \bar{z})}, \\ m_X &= \frac{1 - w(z, \bar{z})\bar{w}(z, \bar{z})}{1 + w(z, \bar{z})\bar{w}(z, \bar{z})}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где в отличие от (1.60) компоненты вектора намагниченности переставлены так, чтобы (в соответствии с соглашением этой Главы) магнитное поле было направлено вдоль оси  $OZ$ . При этом нейтроны в перпендикулярной геометрии рассея-

ния движутся перпендикулярно плоскости цилиндра вдоль оси  $OX$ .

Как показано в §3.5 и §3.6, комплексную функцию, соответствующую (возможно смещённому из центра) вихрю в тонком круговом ферромагнитном цилиндре, можно записать в виде

$$w(z, \bar{z}) = \begin{cases} f(z) & |f(z)| \leq 1 \\ f(z)/\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})} & |f(z)| > 1, \end{cases} \quad (2.61)$$

$$f(z) = \iota c \frac{z}{p} + A - \bar{A} \frac{z^2}{p^2},$$

где скалярный параметр  $c$  задаёт размер ядра магнитного вихря (области, где намагниченность выходит из плоскости торца цилиндра), скалярный параметр  $p$  регулирует нормальные к стенке цилиндра компоненты намагниченности (он позволяет описывать квазиоднородные состояния намагниченности в цилиндре, которые рассмотрены в §4.6), а параметр  $A$  управляет смещением центра вихря из центра цилиндра. В этом параграфе положим  $p = R$ , но сохраним этот параметр в некоторых промежуточных формулах. Магнитные текстуры, соответствующие различным значениям параметра  $A$ , приведены на рисунке 2.12.

Смещение центра вихря может быть вызвано приложением внешнего магнитного поля в плоскости цилиндра. Соответствующая экспериментальная петля гистерезиса квадратного массива далеко отстоящих друг от друга (а значит практически изолированных) планарных магнитных цилиндров субмикронного радиуса приведена на рисунке 2.13. Её можно схематически изобразить, используя только прямые линии: две параллельные линии под наклоном и две горизонтальные. Смещение магнитного вихря, показанное на рисунке 2.12б, соответствует увеличению параметра  $|A|$  в (2.61) и происходит при движении вдоль петли гистерезиса по наклонным линиям. Две горизонтальные линии соответствуют состоянию вблизи магнитного насыщения, подобного состоянию на рисунке 2.12г с  $c = 0$  и  $|p| \gg 1$ . Штриховые вертикальные линии на петле обозначают резкие переходы между двумя этими состояниями (как, например,

переход между вихревым состоянием и квазиоднородным, который рассмотрен в §4.5). Приближение петли гистерезиса прямыми линиями хуже всего работает в области этих переходов, но даже в их непосредственной окрестности отклонение от прямых линий не так уж велико.

В рамках этой простой модели, вдоль гистерезисной петли намагниченность находится либо в состоянии (смещенного) магнитного вихря ( $|A| < |c|/2$ ,  $p = R$ ), либо в (квази)однородном состоянии ( $c = 0$ ,  $p > R$ ). Линейность участков петли гистерезиса при малых полях подсказывает, что линейного приближения по смещению центра вихря должно быть достаточно для дальнейшего рассмотрения.

Для вычисления сечения рассеяния нейтронов магнитным цилиндром в состоянии (смещенного) магнитного вихря перейдем сначала к более удобным (но менее универсальным) переменным, сделав замену  $A = ac$  и предположив, что  $p = R$  в уравнении (2.61):

$$f(z) = c \left( i \frac{z}{R} + a - \frac{z^2 \bar{a}}{R^2} \right), \quad (2.62)$$

где  $|a| \ll 1$  — безразмерный малый параметр, связанный со смещением центра магнитного вихря. Уравнение границы ядра вихря  $|f(z)| = 1$  можно решить в полярных координатах  $\{Z, X\} = r\{\cos \varphi, \sin \varphi\}$  с точностью до членов первого порядка по  $a$

$$\frac{R_V(\varphi)}{R} = \frac{1}{c} + a \left( 1 + \frac{1}{c^2} \right) \sin \varphi + \dots \quad (2.63)$$

Область  $0 < r < R_V$  представляет собой ядро вихря. Ядру соответствует первая строчка в определении  $w$  из уравнения (2.61). Конфигурация намагниченности в нём описывается мероморфной функцией комплексной переменной (как отмечалось в §1.6) — “солитоном”. Область  $R_V < r < R$  содержит конфигурацию, соответствующую второй строчке в определении  $\bar{w}$  из уравнения (2.61) — “мерон” (она обсуждается в §3.5). Солитон и мерон непрерывно переходят друг в

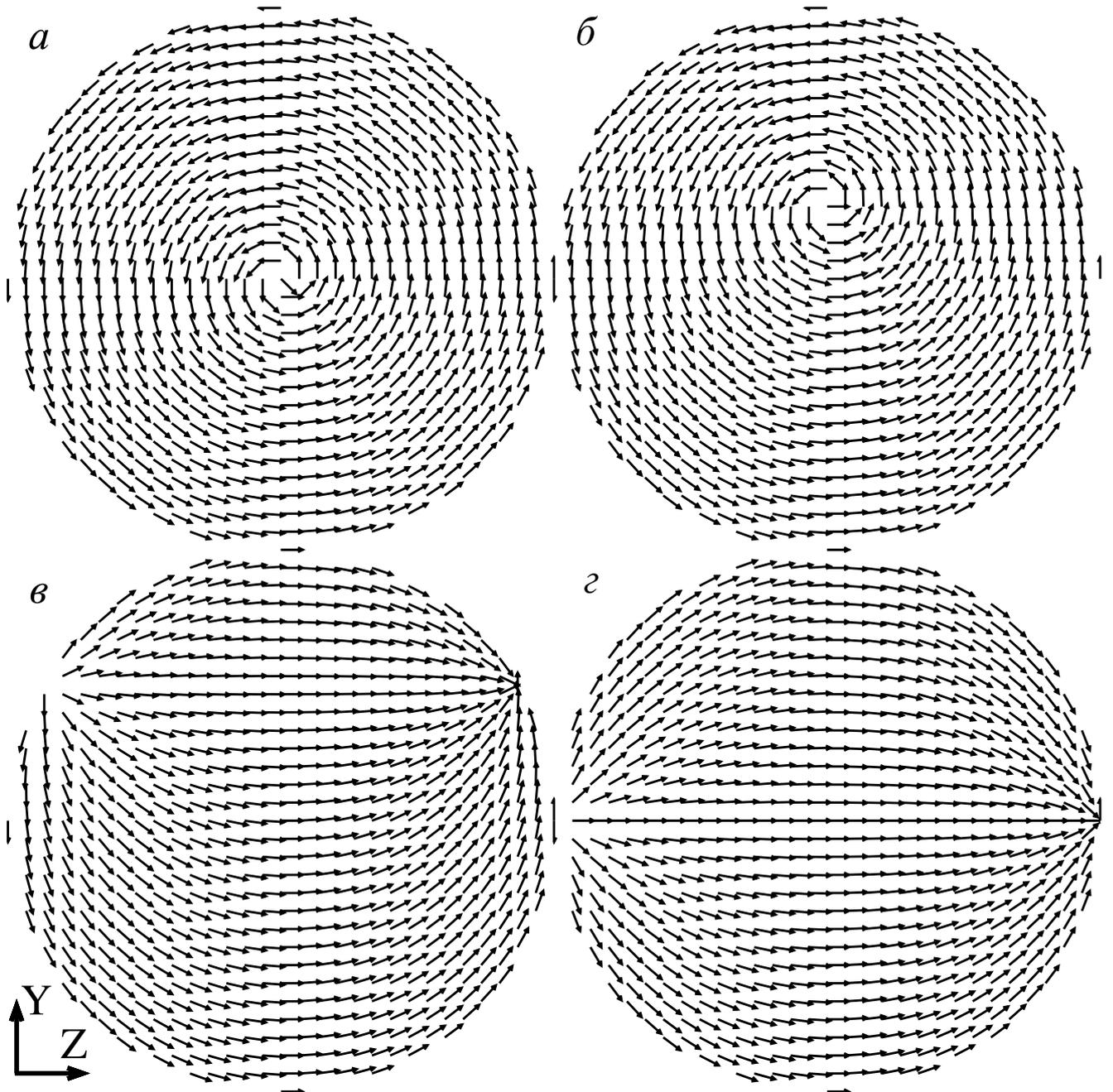


Рисунок 2.12. Векторные поля намагниченности, соответствующие магнитному вихрю в круговом цилиндре (2.61) при  $p = R = 1$ ,  $c = 10$  и разных значениях параметра  $A$ :  $a$  — центрированный магнитный вихрь при  $A = 0$ ;  $б$  — смещённый магнитный вихрь при  $|A| < c/2$ ;  $в$  — состояние типа “С” при  $|A| > c/2$ ; и  $г$  — состояние типа “лист” при  $|A| \gg c$

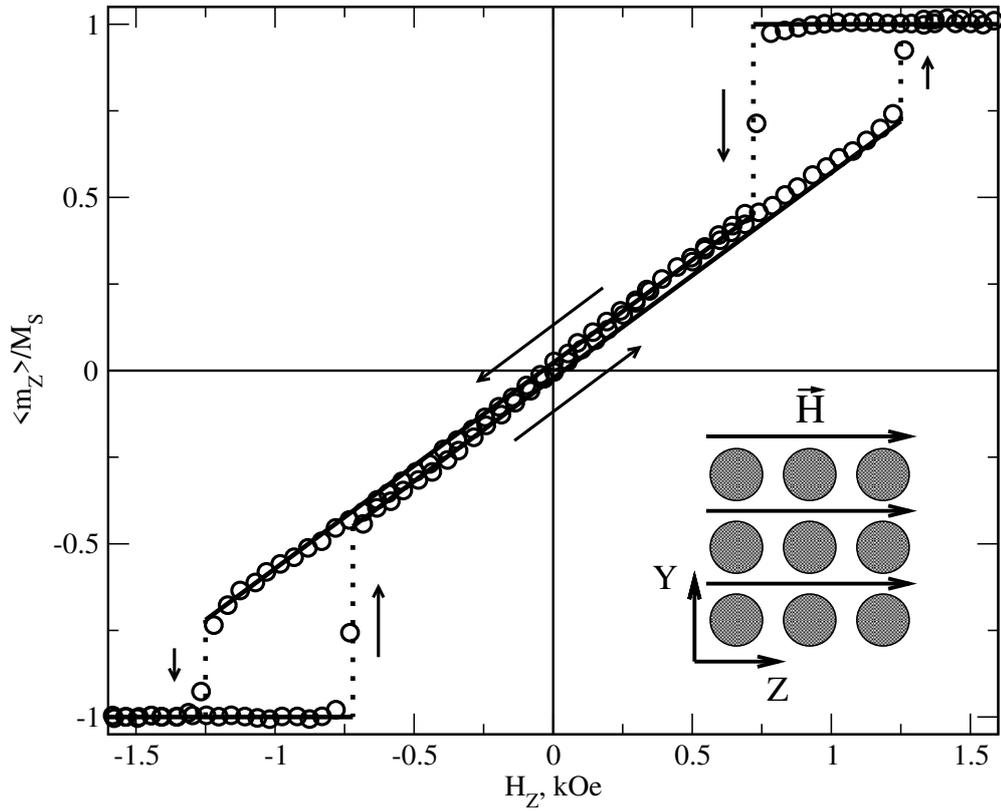


Рисунок 2.13. Типичная гистерезисная петля массива слабо взаимодействующих цилиндров субмикронного радиуса, допускающего существование магнитных вихрей. Экспериментальные точки взяты из [172]. Вставка схематически изображает массив, направления осей координат и приложенного магнитного поля. Прямые сплошные и штриховые линии соответствуют простой теоретической модели этой петли (см. обсуждение в тексте)

друга на границе ядра вихря. Вследствие этой непрерывности интегралы вида

$$I = \int_0^{R_V(a)} s(r, a) dr + \int_{R_V(a)}^R u(r, a) dr, \quad (2.64)$$

где  $s(R_V(a), a) = u(R_V(a), a)$ , не содержат членов, связанных с границей ядра и, как следствие, их можно непосредственно раскладывать в ряды Тейлора по малому параметру  $a$ :

$$I = \int_0^{R_V(0)} s(r, a) dr + \int_{R_V(0)}^R u(r, a) dr + \quad (2.65)$$

$$+ a \left( \int_0^{R_V(0)} \frac{\partial s(r, a)}{\partial a} \Big|_{a=0} dr + \int_{R_V(0)}^R \frac{\partial u(r, a)}{\partial a} \Big|_{a=0} dr \right) + \dots,$$

где  $R_V(0) = R/c$  — радиус ядра центрированного вихря. Такие интегралы типичны при вычислении Фурье-разложений компонент вектора намагниченности, входящих в выражения для сечения рассеяния. Результаты их вычисления даны в Приложении 2.3. Соответствующее перпендикулярное сечение рассеяния нейтронов ферромагнитным цилиндром с вихрем для разных значений  $p$ ,  $c$  и  $a$  приведено на рисунке 2.14.

Если пренебречь вкладом ядра вихря (которое обычно имеет размер порядка 20 нм), то разложение второго порядка для перпендикулярного сечения рассеяния можно представить алгебраически при помощи функций Бесселя и Струве:

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_{\perp}^{\text{М}}}{d\Omega} \frac{1}{4b_{\text{H}}^2 V M_{\text{S}}^2} = & \frac{\pi^2 (J_1 H_0 - J_0 H_1)^2}{4k^2} - \frac{J_1^2 \sin^2 \alpha}{k^2} + \\ & + \frac{a^2 ((2k + \pi(1 - k^2)H_0)J_1 - (2k^2 + \pi(1 - k^2)H_1)J_0)^2 \sin^2 \alpha}{4k^4}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где  $J_n = J_n(k)$  и  $H_n = H_n(k)$  обозначают, соответственно, функции Бесселя и функции Струве, вычисленные при значении аргумента  $k = qR$ ,  $\mathbf{q} = q\{0, \sin \alpha, \cos \alpha\}$  и  $V = \pi R^2 L$ . В данном случае пучок падающих нейтронов направлен вдоль оси  $OX$  и вихрь, смещённый магнитным полем, приобретает ненулевую  $Z$ -компоненту намагниченности. Значение параметра  $a$  пропорционально величине приложенного поля  $H$ . Коэффициент пропорциональности можно вычислить из экспериментально измеренной петли гистерезиса и теоретического выражения для намагниченности цилиндра с вихрем  $M_Z/M_S = 2a/3$ , которое справедливо при используемых здесь предположениях  $a \ll 1$  и  $p = R$ . Выражение (2.66) в частном случае центрированного вихря ( $a = 0$ ) уже было использовано в работе [173], где получило независимую проверку.

Из верхней строки на рисунке 2.14 видно, что в магнитном сечении рассеяния доминирует член  $J_1^2 \sin^2 \alpha / k^2$ , связанный с магнитным насыщением, который полностью маскирует эффект от смещения магнитного вихря. Это связано с определением магнитного сечения (см. §1.7.3), которое предполагает вычита-

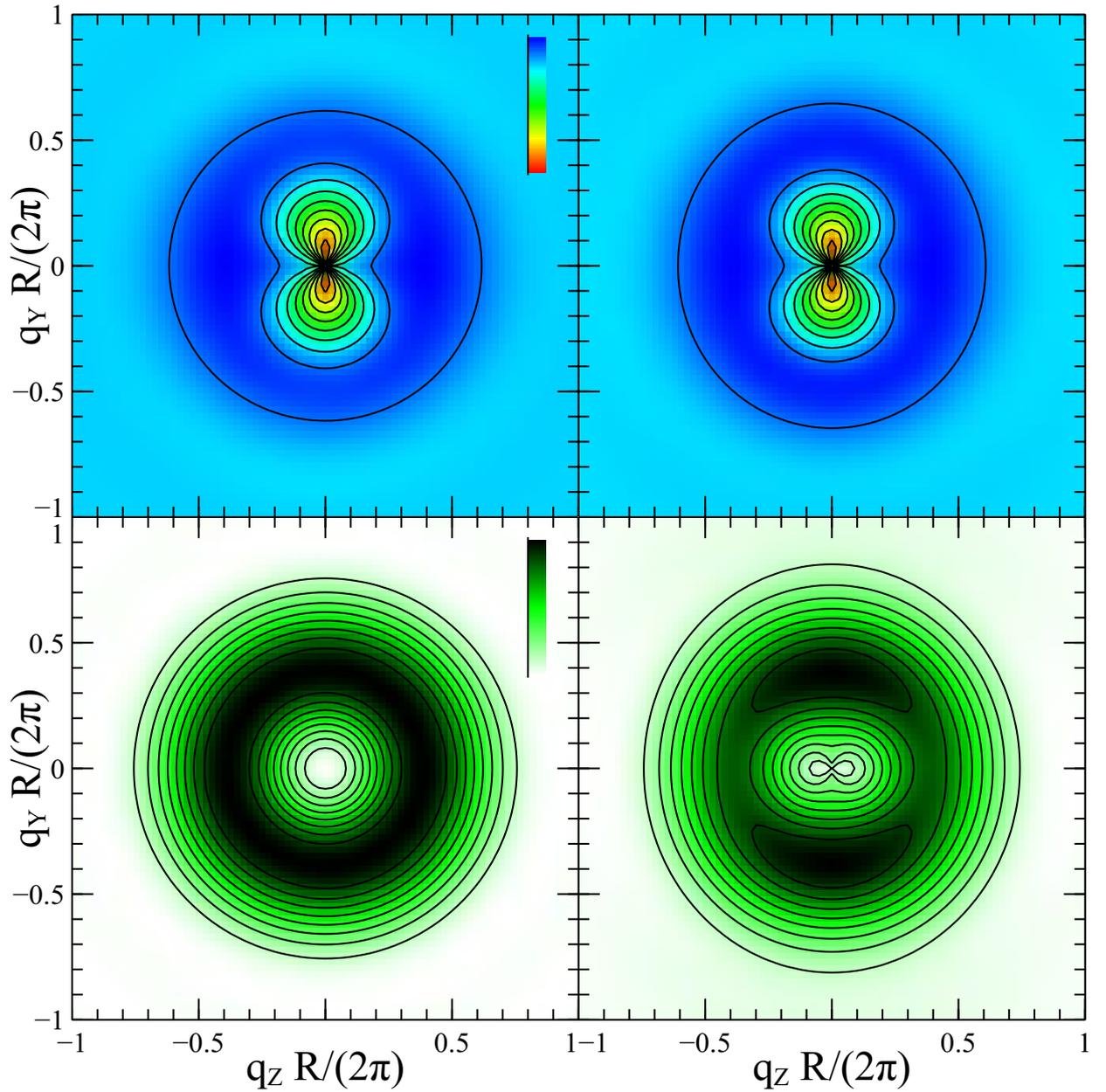


Рисунок 2.14. Перпендикулярное сечение рассеяния нейтронов ферромагнитным диском единичного радиуса  $R = 1$ , содержащего центрированный (слева,  $a = 0$ ) или смещенный (справа,  $a = 0.4$ ) магнитный вихрь с  $c = 5$  и  $p = 1$ . Смещение вихря соответствует намагниченности частицы  $M_Z/M_S = 2/3 \cdot 0.4 \simeq 0.27$ , которая, считывая с рисунка 2.13, примерно соответствует внешнему полю  $H = 0.6$  кЭ для образца из [172]. В верхней строке показано магнитные сечения рассеяния (1.99) так, как оно обычно определено. Нижняя строка показывает то же сечение, но с добавленным обратным членом  $J_1^2 \sin^2 \alpha / k^2$ , соответствующим магнитному насыщению

ние “фонового” сечения рассеяния, измеренного на образце в состоянии магнитного насыщения. Такая процедура хороша при анализе рассеяния нейтронов магнитными текстурами, близкими к магнитному насыщению. Но в существенно неоднородном вихревом состоянии вычитание такого “фонового” сигнала (характеризующегося значительными магнитными зарядами на торце цилиндра, которые дают существенный вклад в рассеяние) лишь искажает слабый сигнал от вихревого состояния.

Вклад в сечение рассеяния от однородного состояния легко вычислить. Он зависит от формы частицы и для кругового цилиндра (выражение приведено в предыдущем абзаце) — только от его радиуса  $R$ , который входит в определение  $k$ . Чтобы увидеть тонкую структуру малоугловых сечений рассеяния в состояниях, далёких от насыщения, удобно вернуть этот “фоновый” член обратно в магнитное сечение рассеяния  $d\Sigma_M^\perp/d\Omega$ . Скорректированные таким образом сечения изображены в нижней строке рисунка 2.14. Благодаря этой процедуре, становится заметным нарушение симметрии, связанное со смещением центра магнитного вихря от оси цилиндра. Такие скорректированные сечения можно представить в виде суммы двух членов — нулевого и второго порядка по  $a$ , которые показаны отдельно на рисунке 2.15. Большие смещения вихря соответствуют большему весу второго слагаемого в этой сумме.

Заметьте, что и слагаемое, соответствующее насыщению, которое доминирует в верхней строке рисунка 2.14, и слагаемое, соответствующее смещению вихря (правая картинка на рисунке 2.15), пропорциональны  $A \sin^2 \alpha$  с положительным  $A$ . Они дают вклад в сечение, выглядящий как вертикальная восьмёрка в координатах  $\{q_x, q_z\}$ . Но в магнитном сечении рассеяния (2.66) насыщенный “фон” вычитается, а то время как член, соответствующий смещению вихря, входит со знаком “+”. Именно поэтому восьмёрка на рисунке 2.14 стоит вертикально в верхнем ряду и лежит горизонтально на правой нижней картинке. В обоих случаях центры каждой восьмёрки на рисунке 2.14 соответствуют

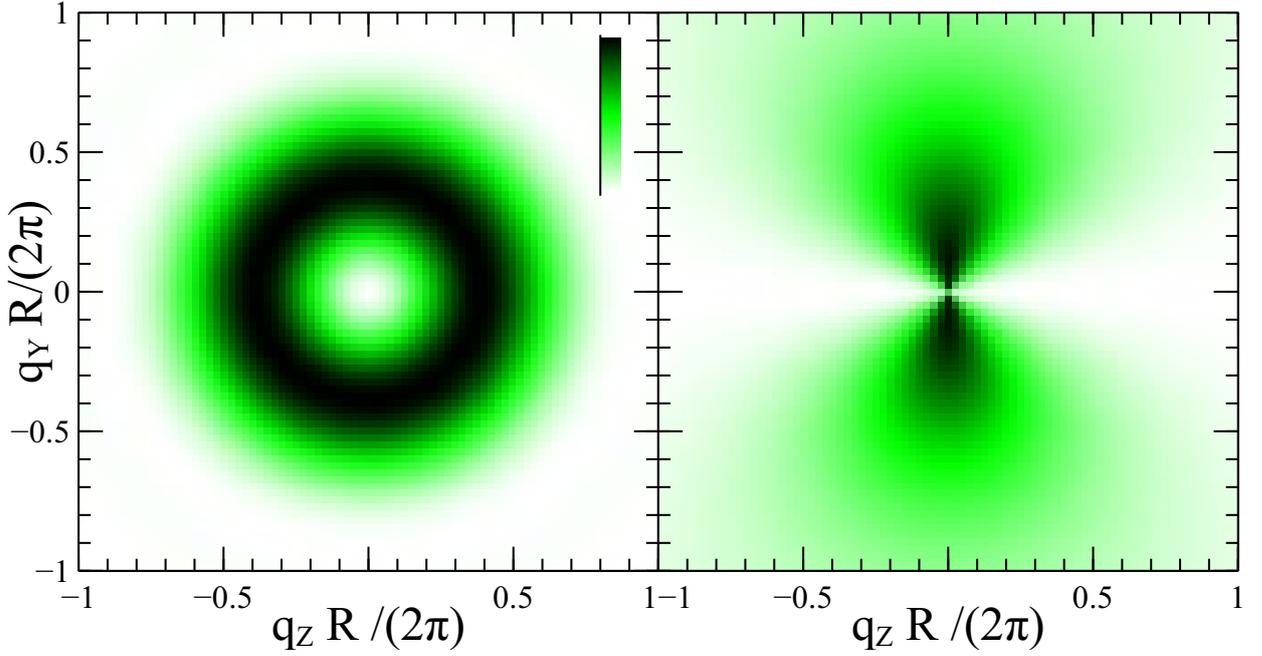


Рисунок 2.15. Вклады в скорректированное сечение рассеяния нейтронов магнитным цилиндром с вихрем (нижняя строка на рисунке 2.14) нулевого (слева) и второго (справа) порядка по  $a$

локальным минимумами сечения рассеяния.

Отметим, что Фурье-компоненты намагниченности магнитного вихря, приведенные в Приложении 2.3, уже в нулевом порядке по  $a$  содержат как действительные, так и мнимые слагаемые. Это приводит к появлению отличной от нуля разности (2.56) сечений рассеяния с переворотом спина  $2i\chi$ . Вычисляя эту величину по формуле (2.57), получим в простейшем случае центрального вихря ( $a = 0$ ):

$$2i\chi = \frac{16\gamma^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha G_1(k\gamma)(2k^2\gamma^2 F_1(k\gamma) + F_2(k) - F_2(k\gamma))}{k^2}, \quad (2.67)$$

где  $k = qR$ ,  $\gamma = R/c$ .

Таким образом, даже в отсутствии хиральных членов в магнитном лагранжиане, возникающие в результате спонтанного нарушения симметрии магнитные текстуры, приводят к невзаимности в рассеянии нейтронов.

## Выводы к Главе 2

- 2.1 Получены выражения для магнитной текстуры слабонеоднородного ферромагнетика до второго порядка теории возмущений с учётом неоднородностей намагниченности насыщения, обменной константы и константы одноосной анизотропии. Амплитуда неоднородностей выступает в качестве малого параметра.
- 2.2 Рассчитаны сечения рассеяния наноструктурированным слабонеоднородным ферромагнетиком в третьем порядке теории возмущений. Найдены условия, при которых эффекты первого и второго порядков взаимоуничтожаются и становится возможным измерение эффектов третьего (и выше) порядка.
- 2.3 Рассчитано сечение рассеяния нейтронов кубическим слабонеоднородным ферромагнетиком с антисимметричным обменным вкладом (взаимодействии Дзялошинского-Мория). Показано, что неизбежно возникающая в таком магнетике хиральная магнитная текстура всегда приводит к невзаимности при рассеянии поляризованных нейтронов.
- 2.4 Рассчитано сечение рассеяния нейтронов цилиндрической наночастицей с магнитным вихрем на базе пробных функций, полученных в Главе 3. Показано, что, несмотря на отсутствие хиральных членов в магнитном лагранжиане, невзаимность при рассеянии нейтронов возникает как результат спонтанного нарушения хиральной симметрии.

Результаты опубликованы в статьях [11–14].

## Приложение 2.1

Функции  $g_A$  и  $g_{MS}$  появляются как результат вычисления среднего значения  $\langle F_Z \tilde{I} \rangle$  по случайному расположению неоднородностей, направлению оси анизотропии и ориентации включений (если они не сферические), где  $F_Z$  определено уравнением (2.22), а  $\tilde{I}$  уравнением (2.35). Функция  $F_Z$  содержит свёртки решений первого порядка для векторного поля намагниченности (2.26), (2.27), которые, в свою очередь, пропорциональны  $\tilde{I}$ . Для их вычисления удобнее всего перейти от тройного суммирования к тройному интегрированию по формуле

$$\sum_{\mathbf{q}} \dots = \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint \dots d^3 \mathbf{q}, \quad (2.68)$$

и проинтегрировать по всему  $\mathbf{q}$ -пространству в сферических координатах. Несмотря на это, даже в простейшем случае сферических включений (для которых усреднение по ориентации не нужно), полные выражения слишком сложны для того, чтобы их здесь представить; они опубликованы в виде файла системы `Mathematica` в приложении к работе [12] и построены на рисунках 2.4 и 2.5 сплошными линиями.

Относительно простая формула может быть получена для значений  $g_A$  и  $g_{MS}$  при  $\mu = 0$

$$g|_{\mu=0} = \int_{\sqrt{1+h}}^{\infty} \frac{e^{-(p^2-1-h)/\lambda^2} u(p) \sqrt{p^2-1-h}}{2\sqrt{2\pi}\lambda^3} dp, \quad (2.69)$$

где функции  $u(p)$  определены

$$u_A = \frac{\frac{p(3p^2-1)}{(p^2-1)^2} + \coth^{-1} p}{15p^2}, \quad (2.70)$$

$$u_{MS} = -3p + (3p^2 - 1) \coth^{-1} p. \quad (2.71)$$

Также, можно получить простое аналитическое выражение для асимптотики

$g_A$  при больших  $h$

$$g_A(h \gg 1) = \frac{e^{-3\mu^2/4}}{30\sqrt{2}h^2}. \quad (2.72)$$

## Приложение 2.2

При усреднении по направлениям анизотропии в расчёте сечения рассеяния традиционно [123, 133, 174] используется усреднение только лишь по азимутальному углу

$$\langle F \rangle_{A, \text{traditional}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\varphi_A, \quad (2.73)$$

после подстановки  $\tilde{K}_X = K \cos \varphi_A$  и  $\tilde{K}_Y = K \sin \varphi_A$ .

В работе [12] была получена явная форма (2.25) зависимости коэффициентов  $\tilde{K}_X$  и  $\tilde{K}_Y$  от направления оси анизотропии. Это позволяет провести трёхмерное усреднение по направлениям, используя  $\tilde{K}_X = K \cos \varphi_A \sin \theta_A \cos \theta_A$ ,  $\tilde{K}_Y = K \sin \varphi_A \sin \theta_A \cos \theta_A$  и интегрируя по всем сферическим углам (2.42).

В литературе до сих пор часто используется формула (2.73). Эффект от такого двумерного усреднения не очень принципиален и может быть скомпенсирован перенормировкой эффективной амплитуды флуктуаций константы анизотропии. В рассматриваемом случае она сводится к умножению на  $\sqrt{15/2}$ , после чего формулы, использующие трёхмерное усреднение (2.42), дают тот же результат для сечения рассеяния, что и формулы с двумерным усреднением (2.73).

Именно поэтому в Таблице 2.1  $\kappa$  принято равным  $\sqrt{15/2}$ , что даёт возможность непосредственно сравнивать полученные здесь результаты с литературными, вычисленными при  $\kappa = 1$ . Все формулы в этой работе, предполагающие усреднение по направлениям оси анизотропии, используют трёхмерное усредне-

ние (2.42).

### Приложение 2.3

Параллельные и перпендикулярные сечения (обычно, и в рассматриваемом случае) выражаются в системах координат, таких, что пучок нейтронов движется вдоль направления  $OZ$  или  $OY$  соответственно, а внешнее поле всегда направлено вдоль оси  $OZ$ . Здесь представлены Фурье-компоненты намагниченности в системе координат, соответствующей перпендикулярной геометрии рассеяния нейтронов (см. рисунок 1.8). Отметим также, что в параллельной геометрии, когда магнитное поле приложено параллельно оси цилиндра, магнитный вихрь не смещается ( $a = 0$ ).

Фурье-образы компонент намагниченности в вихревом состоянии (2.61) вплоть до членов первого порядка малости по  $a$  (применимом в достаточно широкой области малых полей, см. рисунок 2.13) можно выразить как:

$$\widetilde{M}_i = M_S L R^2 (\widetilde{\mu}_i^0 + a \widetilde{\mu}_i^1 + O(a^2)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(Lq_Y/2)}{Lq_Y/2}$$

где  $i = X, Y, Z$  — индекс координатной оси декартовой системы координат, а безразмерные величины  $\widetilde{\mu}$ :

$$\begin{aligned} \{\widetilde{\mu}_Z^0, \widetilde{\mu}_X^0\} &= \imath \widetilde{\mu}_\perp^0 \{\sin \alpha, -\cos \alpha\}, \\ \widetilde{\mu}_\perp^0 &= \frac{2p^2 F_1(\gamma k)}{c^2} + \frac{F_2(k) - F_2(\gamma k)}{k^2} \\ \widetilde{\mu}_Y^0 &= \widetilde{\mu}_\parallel^0 = \gamma^2 G_1(\gamma k), \end{aligned}$$

где  $k = q_\perp R$ ,  $\gamma = p/c$  и вектор  $\mathbf{q}_\perp = \{q_Z, q_Y\} = q_\perp \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$  представлен в полярной системе координат как  $\{q_\perp, \alpha\}$ . Из-за нарушения аксиальной симметрии

при смещении вихря, выражения для членов первого порядка сложнее:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_Z^1 &= \frac{1}{p} \left( 2\gamma^3 (c^2 F_3(\gamma k) - F_4(\gamma k) + (1 - c^2) \cos 2\alpha F_5(\gamma k)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k^3} \left( \cos^2 \alpha (F_6(\gamma k) - F_6(k) + k^2 p^2 (F_7(k) - F_7(\gamma k))) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos 2\alpha (F_2(k) - F_2(\gamma k) + k^2 p^2 (F_8(\gamma k) - F_8(k))) \right) \right), \\ \tilde{\mu}_X^1 &= \sin 2\alpha \left( \frac{p}{2k} (F_{10}(\gamma k) - F_{10}(k)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1 - c^2)p^2}{c^3} F_5(\gamma k) + \frac{1}{2pk^3} (F_9(k) - F_9(\gamma k)) \right), \\ \tilde{\mu}_Y^1 &= -\frac{4lp^2}{c^3} (c^2 G_2(\gamma k) + G_3(\gamma k)) \sin \alpha.\end{aligned}$$

Слагаемые, пропорциональные  $F_i(\gamma k)$  и  $G_i(\gamma k)$ , соответствуют ядру вихря. Они зануляются в пределе  $c \rightarrow \infty$ . Остальные члены, пропорциональные  $F_i(k)$ , соответствуют меронной части магнитной текстуры.

Специальные функции  $F_j(x)$  и  $G_j(x)$  определены следующим образом:

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \int_0^1 \frac{\rho^2 J_1(x\rho)}{1 + \rho^2} d\rho, & F_2(x) &= \int_0^x \rho J_1(\rho) d\rho, \\ F_3(x) &= \int_0^1 \frac{\rho J_0(x\rho)}{(1 + \rho^2)^2} d\rho, & F_4(x) &= \int_0^1 \frac{\rho^5 J_0(x\rho)}{(1 + \rho^2)^2} d\rho, \\ F_5(x) &= \int_0^1 \frac{\rho^3 J_2(x\rho)}{(1 + \rho^2)^2} d\rho, & F_6(x) &= \int_0^x \rho^2 J_0(\rho) d\rho, \\ F_7(x) &= \int_0^x J_0(\rho) d\rho, & F_8(x) &= \int_0^x (J_1(\rho)/\rho) d\rho, \\ F_9(x) &= \int_0^x \rho^2 J_2(\rho) d\rho, & F_{10}(x) &= \int_0^x J_2(\rho) d\rho, \\ G_1(x) &= \int_0^1 \frac{\rho(1 - \rho^2)J_0(x\rho)}{1 + \rho^2} d\rho, \\ G_2(x) &= \int_0^1 \frac{\rho^2 J_1(x\rho)}{(1 + \rho^2)^2} d\rho, & G_3(x) &= \int_0^1 \frac{\rho^4 J_1(x\rho)}{(1 + \rho^2)^2} d\rho.\end{aligned}$$

Функции  $\tilde{\mu}$  изображены на рисунке 2.16.

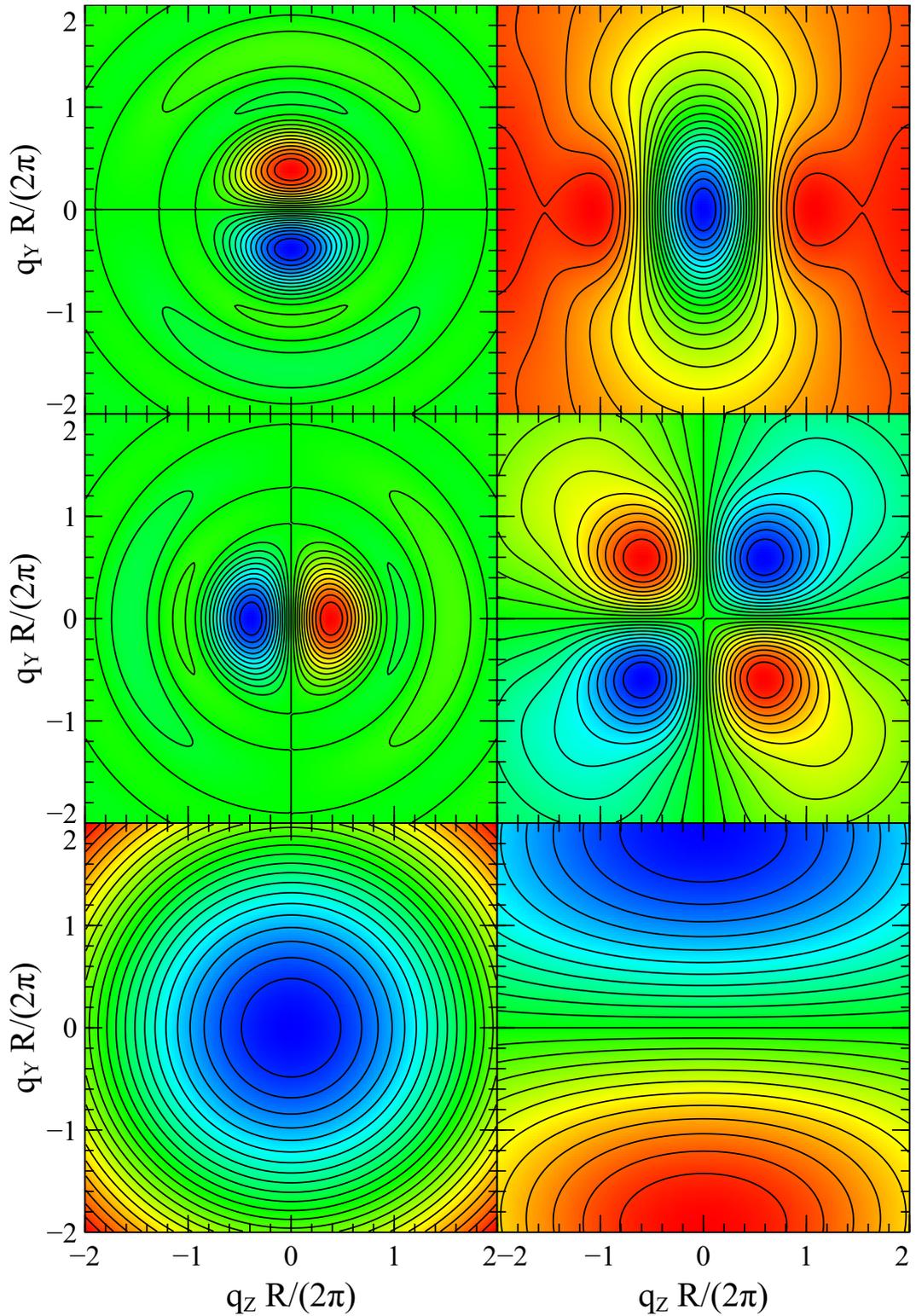


Рисунок 2.16. Фурье-представления компонент намагниченности вихревого состояния цилиндра (2.61) в плоскости  $q_x = 0$  для  $p = 1$  и  $c = 2$ . Сверху вниз:  $\tilde{\mu}_z$ ,  $\tilde{\mu}_x$ ,  $\tilde{\mu}_y$ . Левая половина соответствует центрированному вихрю  $\tilde{\mu}^0$ , правая показывает Фурье-представления членов первого порядка  $\tilde{\mu}^1$  по  $a$ . Так как Фурье-компоненты либо чисто действительные, либо чисто мнимые, здесь изображены действительные или мнимые их части соответственно

## Глава 3. Микромагнетизм в комплексных переменных

### 3.1. Введение

Основная задача микромагнетизма состоит в нахождении стабильных и метастабильных магнитных текстур в конечных магнетиках с реалистичным лагранжианом (включающим, как минимум, обменное и магнитостатическое взаимодействие). Она имеет точное решение лишь в одном случае — для однородно намагниченного эллипсоида [175]. И только потому что в этом случае размагничивающее поле внутри эллипсоида является однородным [3]. И хоть сфера, бесконечный цилиндр и плёнка — суть эллипсоиды, всё равно этот случай покрывает лишь незначительное подмножество форм магнитных элементов, используемых на практике.

Кроме того, остаётся открытым вопрос о рассмотрении неоднородных магнитных текстур. Для них можно воспользоваться методом последовательных приближений и строить разложения по малому параметру, характеризующему отклонение намагниченности от однородного состояния, как это сделано в §2.3. Но, во-первых (и это справедливо для теории возмущений в целом), в каждом следующем порядке выражения становятся всё более громоздкими и во-вторых, как типично для сильно нелинейных задач, асимптотический ряд последовательных приближений даёт уменьшение погрешности с ростом порядка разложения лишь для малых порядков, а при больших порядках погрешность расходится. Кроме теории приближения к насыщению и теории магнитного рассеяния нейтронов, разложения по малым отклонениям векторов намагниченности от однородного состояния нашли (основное) своё применение в линейной

теории спиновых волн [49, 176]. А разложения следующего (третьего по малым отклонениям в уравнении движения) порядка позволяют построить теорию дисперсионных солитонов огибающей спиновых волн [177, 178], которые описываются нелинейным уравнением Шрёдингера.

Для построения теории топологических солитонов — существенно нелинейных конфигураций намагниченности, не подходят даже разложения высоких порядков. Это потому что, как обсуждалось в §1.6, намагниченность в текстуре с ненулевым топологическим зарядом обязательно должна полностью покрывать сферу Римана (содержать все направления намагниченности), причём, столько раз каково значение топологического заряда. Для описания таких полных оборотов, разложение в ряды намагниченности относительно любого её фиксированного направления должно содержать все степени её отклонений, а значит никакой пользы от его использования нет.

Поэтому основой теории магнитных текстур стал метод Ритца [91]. В применении к магнетизму его суть состоит в замене вариационной задачи по нахождению минимальной по энергии магнитной текстуры на задачу о минимизации функции некоторого количества скалярных переменных. Такой функцией становится магнитный лагранжиан, вычисленный в предположении, что намагниченность описывается некоторой, зависящей от скалярных параметров, пробной функцией. Чем ближе пробная функция к точному решению вариационной задачи, тем ниже получается соответствующая ей равновесная (минимальная) энергия, вычисленная по методу Ритца. Этим методом была построена приближённая (но очень точная и безусловно полезная на практике) теория доменных границ, которая в частном случае тонкой изотропной магнитной плёнки, разбиралась в §1.5. С его же помощью строится теория доменных структур [1, 2, 86, 179] в конечных образцах и тонких плёнках.

В этой Главе представлена приближённая теория существенно-нелинейных магнитных текстур в конечных образцах, имеющих форму цилиндра (с произ-

вольной формой основания), которая не использует разложений намагниченности в ряды Тейлора. При этом конкретный вид пробных функций не постулируется, а они выводятся из магнитного лагранжиана при помощи метода “последовательной минимизации”, описанного ниже. Эти магнитные текстуры можно компактно представить на языке функций комплексной переменной для случая цилиндров различной формы — как конечных, так и бесконечных (например, полосы). Они описывают как одновихревые, так и многовихревые магнитные состояния и будут использованы в рамках метода Ритца для дальнейшего исследования статических (Глава 4) и динамических (Глава 5) свойств цилиндрических планарных наноэлементов. В качестве примеров получены явные выражения для магнитных текстур в круговом цилиндре, треугольном цилиндре, квадратном цилиндре, и в полосе.

На этом же языке здесь выражена магнитная текстура доменной границы с перетяжками. Она представляет собой конденсированное состояние магнитных топологических солитонов (скирмионов) и вся в целом также является скирмионом. Рассчитана равновесная энергия такой границы и показано, что в некотором диапазоне толщин плёнок она имеет энергию ниже энергии доменных границ Блоха и Нееля.

### 3.2. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндр с произвольной формой основания, показанный на рисунке 3.1 вместе с декартовой системой координат  $\mathbf{r} = \{X, Y, Z\}$ . Ось цилиндра параллельна оси  $OZ$ , его толщина равна  $L$ , а торец (основание) представляет собой область на плоскости  $XOY$ , обозначенную символом  $\mathcal{D}$ . Предположим, что цилиндр сделан из магнитомягкого материала с намагниченностью насы-

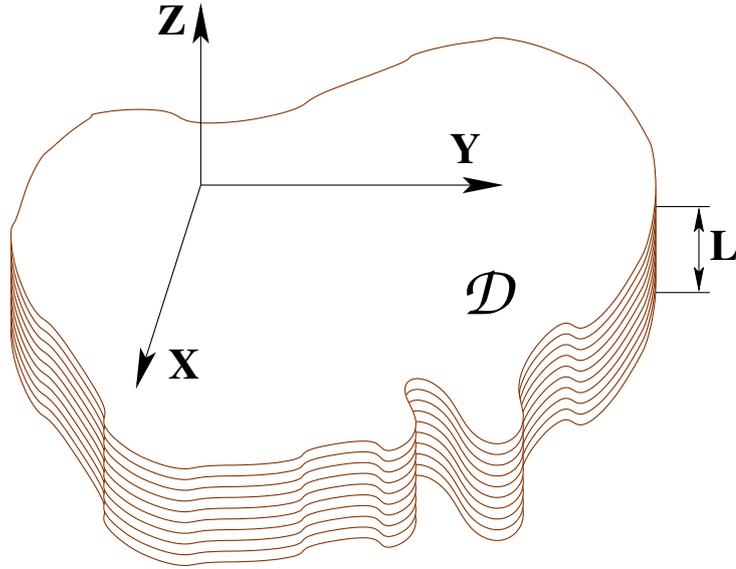


Рисунок 3.1. Некруговой цилиндр и используемая в этой Главе декартова системы координат

щения  $M_S$ , обменной жёсткостью  $C$  и пренебрежимо малой кристаллической анизотропией. Тогда можно, используя безразмерный вектор намагниченности  $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \{m_X, m_Y, m_Z\} = \mathbf{M}(\mathbf{r})/M_S$ ,  $|\mathbf{m}| = 1$ , представить потенциальную энергию магнитных моментов (см. §1.2) в виде

$$\frac{E(\{\mathbf{m}\})}{\mu_0 \gamma_B M_S^2} = \iiint_{\mathcal{D}, L} \left\{ \frac{L_E^2}{2} \sum_{i=X,Y,Z} (\nabla m_i)^2 - \mathbf{h}_D(\{\mathbf{m}\}) \cdot \mathbf{m} \right\} d^3\mathbf{r}, \quad (3.1)$$

где  $L_E = \sqrt{C/(\mu_0 \gamma_B M_S^2)}$  обменная длина,  $\nabla = \{\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z\}$ ,  $\mathbf{h}_D[\mathbf{m}] = \mathbf{H}_D/(\gamma_B M_S)$  безразмерное размагничивающее поле, созданное распределением намагниченности  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ . Фигурные скобки здесь обозначают функциональную зависимость, то есть зависимость от всей функции  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , а не только от её значения в конкретной точке. Величины  $E$  и  $\mathbf{h}_D$  являются функционалами от  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ .

В статическом случае и в отсутствии макроскопических токов зависимость  $\mathbf{h}_D(\{\mathbf{m}\})$  можно вычислить при помощи метода магнитных зарядов (см. §1.2.2). В соответствии с этим методом, размагничивающее поле выражается в виде градиента некоторого скалярного потенциала  $\mathbf{h}_D = \nabla u(\mathbf{r})$ , который, как следует

из уравнений Максвелла, является решением уравнения Пуассона  $\Delta u = -\gamma_B \rho$  во всём пространстве с граничными условиями (1.18) в силу конечности частицы. Величина  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{m}$  представляет собой объёмную плотность магнитных зарядов (на поверхности частицы она пропорциональна дельта функции, умноженной на нормальную компоненту вектора намагниченности  $\mathbf{m}$  к границе).

Основное и метастабильные состояния для магнитной текстуры  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  в цилиндре  $\mathcal{D} \times L$  можно получить найдя глобальный и локальные минимумы функционала (3.1) относительно векторного поля  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ . Решить аналитически получающуюся при этом систему связанных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных на данный момент не представляется возможным. Поэтому рассмотрим способ приближённого решения этой задачи.

### 3.3. Последовательная минимизация

Начнём с простой алгебраической иллюстрации. Допустим, нужно найти минимум суммы  $u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 + v_4 u_4$  четырёх функций:

$$\begin{aligned} u_1 &= (z + 2)^2, & u_2 &= (x + y - 4)^2, \\ u_3 &= (y - 5)^2, & u_4 &= (z - 2)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

трёх вещественных переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$  с положительными вещественными весами  $v_i$ . Каждая из этих функций представляет собой параболическую поверхность, а веса  $v_i$  задают кривизну этой поверхности. Предположим, что веса очень сильно отличаются, взяв, например,  $v_i = \{1000, 100, 10, 1\}$ . Минимум такой суммы несложно найти (даже без предположения о сильном неравенстве весов), он находится в точке  $\{x, y, z\} = \{-1, 5, -1998/1001\}$ .

Теперь представим себе, что функции сложные и найти минимум их сум-

мы невозможно. Но можно зато найти минимумы каждого из слагаемых по отдельности. Суть метода последовательной минимизации заключается в том, чтобы двигаться от функции с наибольшим весом (наибольшей кривизной в минимуме) к функции с наименьшим, вычисляя минимум каждого следующего слагаемого при условии, что все слагаемые перед ним уже имеют минимальное значение.

Начнём с первого слагаемого: функция  $u_1$  имеет минимум (нулевое значение) на прямой  $z = -2$ . Второе слагаемое — функция  $u_2$  имеет минимум при  $y = 4 - x$ . Функция  $u_3$ , при условии, что рассмотренные до этого две функции минимальны, имеет вид  $(-1 - x)^2$ , её минимальное значение достигается при  $x = -1$ . Таким образом, последовательная минимизация приводит нас к приближённому ответу  $\{x, y, z\} = \{-1, 5, -2\}$  для задачи нахождения минимума суммы  $u$ . Как видим, этот ответ не слишком отличается от точного.

Интересной особенностью описанной выше процедуры является то, что веса  $v_i$  не участвуют в ней явно. Их величина не имеет никакого значения при минимизации каждого отдельного слагаемого. Веса определяют порядок минимизации при получении приближённого решения. И хотя приближённое решение больше никак от них не зависит, точное решение тем ближе к приближённому, чем дальше веса отстоят друг от друга. Например, для весов  $v_i = \{1000000, 10000, 100, 1\}$  точное решение  $\{x, y, z\} = \{-1, 5, -1999998/1000001\}$  ещё ближе к приближённому  $\{x, y, z\} = \{-1, 5, -2\}$ .

А что если минимизировать слагаемые в другом “неправильном” порядке, насколько приближённое решение удалится от точного? Это несложно проверить. Для этого рассмотрим все возможные перестановки весов и вычислим расстояние от соответствующего каждой из этих перестановок точного положения минимума до приближённого решения  $\{x, y, z\} = \{-1, 5, -2\}$  для исходного упорядочения весов. Результаты такого расчёта приведены в таблице 3.1. Как видим, “правильное” упорядочение даёт наилучшее приближение к точке ми-

нимума, в то время как “неправильное” — наихудшее. Кроме того, видно, что некоторые перестановки “вырождены”, как, например, перестановка весов перед  $u_2$  и  $u_3$ , которая не меняет решения. Аналогичные “коммутативные” слагаемые встречаются и при анализе микромагнитной задачи.

Функции (3.2) специально выбраны так, что каждая из них не имеет единственной экстремальной точки, а уравнение для её минимума имеет множество решений. В противном случае процедура закончилась бы после первого же слагаемого, которое сразу дало бы единственное решение. Такой выбор слагаемых для примера сделан специально потому что аналогичная ситуация имеет место в микромагнитной задаче.

Процедуру последовательной минимизации можно оборвать на любом шаге и завершить её минимизацией полной суммы всех слагаемых при условии минимума уже рассмотренных (если эти условия упрощают задачу и делают её осуществимой). Такое решение априори является более точным, чем продолжение последовательной минимизации.

Идейно метод последовательной минимизации близок к адиабатическому приближению (приближению Борна-Оппенгеймера), используемому для решения многочастичных квантовомеханических задач, когда степени свободы в (квантово)механической системе разделяются на быстрые и медленные. Критерием применимости адиабатического приближения является малость т.н. параметра Месси, которая соответствует большому разделению энергетических уровней, участвующих в медленном движении (по сравнению с уровнями, участвующими в быстром). Параметр Месси в адиабатическом приближении также сложно оценить *a priori*.

Полное математическое обоснование метода последовательной минимизации не является предметом данной работы. Здесь важно, что этот метод в применении к микромагнитной задаче о планарных наноэлементах *a posteriori* работает в рассмотренных ниже практических случаях и воспроизводит множество

Таблица 3.1. Различные перестановки весов  $v_i$  при минимизации функции  $u = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 + v_4u_4$  и соответствующее каждой перестановке расстояние точного положения минимума от приближённого решения  $\{x, y, z\} = \{-1, 5, -2\}$ , полученного последовательной минимизацией для весов  $v_i = \{1000, 100, 10, 1\}$ . Расстояние измеряется как декартова длина разности векторов  $\{x, y, z\}$ , соответствующих решениям. Перестановки отсортированы по возрастанию расстояния

$\{1000, 100, 10, 1\}$	0.003 996	$\{100, 10, 1, 1000\}$	3.636 36
$\{1000, 10, 100, 1\}$	0.003 996	$\{100, 1, 10, 1000\}$	3.636 36
$\{1000, 100, 1, 10\}$	0.039 604	$\{10, 1000, 1, 100\}$	3.636 36
$\{1000, 1, 100, 10\}$	0.039 604	$\{10, 1, 1000, 100\}$	3.636 36
$\{100, 1000, 10, 1\}$	0.039 604	$\{1, 1000, 100, 10\}$	3.636 36
$\{100, 10, 1000, 1\}$	0.039 604	$\{1, 100, 1000, 10\}$	3.636 36
$\{1000, 10, 1, 100\}$	0.363 636	$\{10, 100, 1, 1000\}$	3.636 36
$\{1000, 1, 10, 100\}$	0.363 636	$\{10, 1, 100, 1000\}$	3.9604
$\{100, 1000, 1, 10\}$	0.363 636	$\{1, 1000, 10, 100\}$	3.9604
$\{100, 1, 1000, 10\}$	0.363 636	$\{1, 10, 1000, 100\}$	3.9604
$\{10, 1000, 100, 1\}$	0.363 636	$\{1, 100, 10, 1000\}$	3.996
$\{10, 100, 1000, 1\}$	0.363 636	$\{1, 10, 100, 1000\}$	3.996

экспериментально наблюдаемых эффектов как качественно, так и количественно. Его обоснование *a priori* могло бы стать предметом интересной работы по математике.

### 3.4. Иерархия взаимодействий в наномагните

Вернёмся к магнитному лагранжиану (3.1). Как уже сказано ранее в §1.2.2, магнитостатическую энергию в нём, можно представить в виде энергии взаимодействия магнитных зарядов. Причём заряды можно разделить на два вида — поверхностные и объёмные. Поверхностные заряды, в свою очередь, делятся на торцевые (расположенные на торцах цилиндра) и боковые (расположенные на его боковой поверхности). В рамках предположения о том, что намагниченность не зависит от координаты  $Z$  вдоль оси цилиндра, торцевые заряды на противоположных торцах цилиндра имеют разные знаки. Это, в частности, означает, что энергия взаимодействия торцевых и боковых зарядов равна нулю. Для каждого заряда на торцевой поверхности можно найти пару равных зарядов противоположных знаков на торцах, взаимодействие с которыми взаимно уничтожится. По той же причине равна нулю энергия взаимодействия торцевых зарядов и объёмных (плотность которых, так же как и плотность боковых зарядов не зависит от  $Z$ ).

Таким образом, энергию (3.1) можно представить в виде суммы

$$E = E_{\text{EX}} + E_{\text{MS}} = E_{\text{EX}} + E_{\text{FF}} + E_{\text{SS}} + E_{\text{SV}} + E_{\text{VV}}, \quad (3.3)$$

где  $E_{\text{EX}}$  — обменная энергия, а  $E_{\text{MS}}$  — магнитостатическая. Причём последняя разбита на: энергию взаимодействия торцевых (по-английски “face”) зарядов между собой  $E_{\text{FF}}$ , энергию взаимодействия боковых (“side”) зарядов между со-

бой  $E_{SS}$ , энергию взаимодействия боковых с объёмными зарядами  $E_{SV}$  и энергию взаимодействия объёмных зарядов между собой  $E_{VV}$ . Эти слагаемые уже отсортированы в том порядке, как они будут минимизированы при решении рассматриваемой задачи. Выясним теперь почему порядок именно такой. Проще всего установить его, сравнивая слагаемые попарно.

Сначала рассмотрим обменную энергию  $E_{EX}$  и полную магнитостатическую энергию  $E_{MS}$ , выраженную в виде энергии взаимодействия магнитных зарядов (1.21). И та, и другая энергия по отдельности имеют четко определённый глобальный абсолютный минимум, равный нулю. В случае обменной энергии он достигается, когда намагниченность однородна в пространстве, а в случае магнитостатической, когда магнитные заряды (поверхностные и объёмные) отсутствуют.

При уменьшении размера частицы “наказание” за отклонение конфигурации от оптимальной (для обменного или магнитостатического слагаемого) масштабируется по-разному. В обоих случаях присутствует чисто положительный вклад, связанный с возникновением локальных вариаций векторов намагниченности (градиентов или дивергенции). Но в случае магнитостатической энергии, присутствует и отрицательный вклад (он всегда меньше положительного потому что магнитостатическая энергия в целом всегда положительна), связанный со взаимодействием локальных зарядов разных знаков.

В силу того, что магнитных монополей не существует (или, как минимум, они не наблюдаются), общая сумма магнитных зарядов всегда равна нулю. Возникающий в одном месте положительный заряд, обязательно компенсируется возникающим в другом месте отрицательным зарядом. При уменьшении размеров магнита, заряды разных знаков сближаются, а потому их положительная собственная энергия всё больше и больше компенсируется отрицательной энергией их взаимодействия. Из-за того, что аналогичного отрицательного вклада в обменной энергии нет — в конце концов она “выигрывает” по сравнению с

магнитостатической.

Это подтверждается и общеизвестным фактом, что частицы очень малых размеров являются однодоменными. Такое состояние полностью “удовлетворяет” обменную энергию, а магнитостатическая энергия возникающих при этом поверхностных магнитных зарядов на магнитном состоянии практически не отражается. Можно ожидать, что такая же иерархия, когда обменная энергия по своей значимости (кривизне потенциала в минимуме) доминирует над магнитостатической, сохраняется и в некоторой окрестности однодоменного состояния. Это и очерчивает область применимости изложенной здесь теории.

Охарактеризовать относительную силу обменного и магнитостатического взаимодействия можно величиной обменной длины  $L_E$ , которая в типичных ферромагнетиках принимает значения около 5–20 нм. Этими же масштабами, порядка единиц-десятков обменных длин, и ограничивается применимость данного рассмотрения. Поэтому изложенное далее можно назвать теорией “наномагнетизма”.

Для упорядочения различных вкладов в магнитостатическую энергию, выписанных в (3.3), отметим, что в наномасштабе (для малых частиц) поверхностные эффекты доминируют над объёмными. Это значит, что энергия объёмных зарядов  $E_{VV}$  окажется на последнем месте в иерархии, перед ней станет энергия взаимодействия объёмных зарядов с боковыми  $E_{SV}$  и уже потом более важные чисто поверхностные вклады  $E_{SS}$  и  $E_{FF}$ . Отсортировать между собой  $E_{SS}$  и  $E_{FF}$  можно в предположении, что частица представляет собой планарный наноэлемент, торец которого гораздо больше по площади его боковой поверхности. Но это не обязательно. Как будет видно далее, с точки зрения последовательной минимизации эти два слагаемых являются “коммутативными”. Аналогично  $u_2$  и  $u_3$  в примере из §3.3 их можно минимизировать в любом порядке.

Таким образом, сортировку вкладов в полную энергию магнита (3.3) можно обосновать его малым (субмикронным) размером. Из-за дальнедействующе-

го характера магнитостатической энергии и её сильной зависимости от формы частицы, сделать более точную оценку размеров *a priori* в общей постановке задачи (§3.2) на данный момент не представляется возможным. Вместо этого, применимость теории можно оценить *a posteriori*, сравнивая с экспериментом полученные с её помощью результаты.

### 3.5. Топологические солитоны в ограниченной геометрии

Применим теперь метод последовательной минимизации к магнитному лагранжиану (3.1) с учётом иерархии членов (3.3). Но перед этим (что можно считать нулевым шагом последовательной минимизации, учитывающим самый сильный термодинамический фактор, влияющий на векторы намагниченности) введём ограничение на длину вектора намагниченности  $\mathbf{m}$ , выразив его в виде стереографической проекции (1.60) через комплексную функцию  $w(z, \bar{z})$  комплексных переменных  $z = X + iY$ ,  $\bar{z} = X - iY$ , не обязательно аналитической. Стереографическая проекция гарантирует, что для любой функции  $w(z, \bar{z})$  ограничение  $|\mathbf{m}| = 1$  выполняется автоматически.

Рассмотрим первый член в иерархии (3.3) — обменную энергию (1.61). Используя операции комплексного дифференцирования (1.62) и опуская размерные множители, его можно представить в виде (1.64). Уравнения для экстремума функционала обменной энергии уже обсуждались в §1.6, они имеют два типа решений — солитоны (1.66), найденные в 1975-м году А.А. Белавиным и А.М. Поляковым [7] и сингулярные мероны (1.73), найденные в 1978-м году Дэвидом Гроссом [106]. Оба этих семейства решений выражаются через некоторую произвольную мероморфную функцию  $f(z)$  комплексной переменной  $z$ . Будучи решениями уравнения Эйлера, солитоны и мероны локально экстремальны, от-

носителем обменного функционала. Это значит, что любой небольшой поворот любого отдельного спина от его равновесного направления в одной из этих конфигураций приводит к возрастанию обменной энергии.

Рассмотрим теперь следующий член в иерархии — энергию торцевых магнитных зарядов  $E_{\text{FF}}$ . В соответствии с методом последовательной минимизации, из функций, полученных на предыдущем шаге, нужно теперь выбрать те, которые минимизируют энергию торцевых магнитных зарядов. На первый взгляд, сделать это просто, выбрав в качестве решений мероны. Действительно, так как  $|w_{\text{M}}| = 1$ , в соответствии со стереографической проекцией (1.60), вектор намагниченности в мероне не имеет  $Z$ -компоненты. Это значит, что торцевые магнитные заряды тождественно равны нулю, а их магнитостатическая энергия достигает своего абсолютного минимума — нуля. Но есть и проблема: в точках, соответствующих нулям и полюсам функции  $f(z)$ , мероны (1.73) не являются решениями уравнения Эйлера. Их обменная энергия в окрестности этих точек стремится к бесконечности. Выйти из положения можно, заметив, что для фиксированной функции  $f(z)$  солитоны и сингулярные мероны можно непрерывно соединить вдоль линии  $|f(z)| = 1$ , представив функцию  $w(z, \bar{z})$  в виде их сшивки

$$w(z, \bar{z}) = \begin{cases} f(z)/e_1 & |f(z)| \leq e_1 \\ f(z)/\sqrt{f(z)\bar{f}(\bar{z})} & e_1 < |f(z)| \leq e_2 \\ f(z)/e_2 & |f(z)| > e_2 \end{cases}, \quad (3.4)$$

где  $0 < e_1 < e_2 < \infty$  — две свободные действительные константы. Эти две константы контролируют размер “солитонных шапок” вокруг нулей и полюсов функции  $f(z)$ , позволяя установить баланс между обменной (увеличивается при стягивании “шапок”) и магнитостатической энергией (увеличивается при расширении “шапок” за счёт увеличения количества заключённых в них торцевых магнитных зарядов). Выражение (3.4), таким образом, будучи составленным из решений, локально экстремальных относительно обменного функционала, поз-

воляет, за счёт подбора констант  $e_1$  и  $e_2$ , минимизировать сумму обменной и магнитостатической энергии торцевых зарядов. Выражение (3.4) было впервые предложено для устранения сингулярностей мерона в работе [106], но в другом контексте, где магнитостатическая энергия не рассматривалась. Функция  $f(z)$  остаётся на данный момент произвольной.

Далее следуя методу последовательной минимизации нужно, используя оставшуюся свободу в выборе  $f(z)$ , минимизировать энергию боковых зарядов. Абсолютный минимум этой энергии достигается, как известно, когда заряды отсутствуют вообще. Это приводит к следующей краевой задаче для функции  $f(z)$ :

Найти мероморфную в области  $\mathcal{D}$  функцию  $f(z)$ , такую, что

$$\operatorname{Re} [f(\zeta)\overline{n(\zeta)}] = 0,$$

где  $\zeta \in \partial\mathcal{D}$  принадлежит границе области  $\mathcal{D}$ , а  $n(\zeta) = n_x + in_y$  — комплексная нормаль к этой границе.

Данная краевая задача является однородной краевой задачей Римана - Гильберта [180]. Её общее решение можно параметризовать при помощи некоторого количества скалярных параметров.

Выражение (3.4) справедливо как для произвольной, так и для конкретной  $f(z)$ . Это значит, что второй и третий шаги проведенной выше процедуры являются коммутативными. Порядок их проведения не влияет на результат.

На этом процедуру последовательной минимизации можно остановить. Это значит, что для нахождения равновесных состояний необходимо теперь вычислить полную энергию (3.1) получившихся пробных функций и минимизировать её по оставшимся скалярным параметрам. В Главе 4 эта процедура проведена до конца для различных магнитных состояний в круговом цилиндре.

Таким образом, для получения пробных (в терминологии метода Ритца) магнитных текстур (нано) частицы в виде цилиндра с определённой формой основания  $\mathcal{D}$  нужно сначала найти функцию  $f(z)$ , являющуюся решением сформулированной выше задачи Римана-Гильберта, а затем, подставив эту функцию в (3.4) и (1.60), получить выражения для компонент вектора намагниченности, зависящие от некоторого количества скалярных параметров. В следующих параграфах приведены конкретные примеры использования этого рецепта.

### 3.6. Магнитный вихрь в цилиндрах различной формы

Введём конформное отображение  $z = T(t)$  внутренности единичного круга  $|t| \leq 1$  на форму торца нашего цилиндра  $z \in \mathcal{D}$ . В соответствии с теоремой Римана, такое отображение существует для любой односвязной области  $\mathcal{D}$ . Под действием этого преобразования граница  $\partial\mathcal{D}$  переходит в единичную окружность  $|t| = 1$ , а в граничное условие теперь входит отображённая нормаль  $n_T(\zeta) = n(T(\zeta))$ , где  $|\zeta| = 1$ . Мероморфные функции при конформном отображении переходят в мероморфные функции. Это означает, что, найдя мероморфную функцию  $f(t)$  в единичном круге, удовлетворяющую граничному условию  $\operatorname{Re}[f(\zeta)\overline{n_T(\zeta)}] = 0$ , после обратного конформного отображения  $t = T^{(-1)}(z)$ , которое всегда определено и единственно, получим решение исходной задачи для  $f(z)$  в области  $\mathcal{D}$ .

Для задачи Римана-Гильберта можно использовать метод, предложенный Мухелишвили и изложенный в учебнике [180]. В рамках этого метода решение (однородной) задачи Римана-Гильберта выражается через решение (однородной) задачи Гильберта-Привалова о нахождении двух аналитических функций

$F^-$  и  $F^+$  внутри и вне единичного круга, связанных на его границе условием

$$F^-(\zeta) = A(\zeta)F^+(\zeta), \quad (3.5)$$

где  $A(\zeta) = -n_T(\zeta)/\overline{n_T(\zeta)}$ .

Решение  $f(t)$  внутри единичного круга задачи Римана-Гильберта тогда даётся выражением [180]

$$f(t) = \frac{a_0 t^2 + a_1 t + a_2}{e^{F^+(t)}} + \frac{\overline{a_0} + \overline{a_1} t + \overline{a_2} t^2}{e^{\overline{F^-(1/\bar{t})}}} \quad (3.6)$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\log[-\zeta^2 \overline{n_T(\zeta)}/n_T(\zeta)]}{\zeta - t} d\zeta, \quad (3.7)$$

где  $a_0, a_1, a_2$  — произвольные комплексные константы,  $F^+(t) = F(t), |t| < 1$  и  $F^-(t) = F(t), |t| > 1$  значения интеграла типа Коши (3.7) внутри и вне круга (на границе  $|t| = 1$  этот интеграл терпит разрыв). В решении присутствуют точно три произвольные константы в силу того, что индекс краевого условия задачи Гильберта-Привалова  $\text{ind}[\overline{n_T}/n_T] = -2$ . Индекс — это количество полных оборотов, которые совершает комплексный вектор при обходе один раз вдоль всей границы в положительном направлении. В частности: индекс нормали  $\text{ind}[n_T] = 1$ , комплексное сопряжение меняет знак индекса  $\text{ind}[\overline{n_T}] = -\text{ind}[n_T] = -1$ , индекс произведения равен сумме индексов, а индекс частного — их разности.

Для вычисления интеграла (3.7) заметим, что производная конформного отображения, представленная через амплитуду и фазу,  $T'(t) = G(t)e^{i\varphi(t)}$  даёт масштабирование (действительная функция  $G(t)$ ) и угол поворота (действительная функция  $\varphi(t)$ ), выполняемые преобразованием в точке  $t$ . В силу того, что нормаль к единичному кругу это просто  $\zeta$  (когда  $|\zeta| = 1$ ), можно (с точностью до действительного множителя) выразить отображённую нормаль как  $n_T(\zeta) \propto \zeta T'(\zeta)$ . Действительный множитель в  $n_T(\zeta)$  не играет роли при решении однородной задачи Гильберта-Привалова потому что в граничное условие (3.5) и в интеграл (3.7) входит только комбинация  $\overline{n_T}/n_T$ . Вычисляя интеграл,

получим  $F^+(t) = -i\pi - \log T'(t)$  и  $F^-(t) = -\log \overline{T'(1/\bar{t})}$ , где использовано тождество  $1/\bar{\zeta} = \zeta$  и теорема о вычетах. Подставляя эти функции в (3.6), получим окончательное решение

$$f(t) = (itc + A - \bar{A}t^2)T'(t), \quad (3.8)$$

где  $c = \text{Im } a_1$  — произвольная действительная константа, а  $A = \bar{a}_0 - a_2$  — произвольная комплексная константа. Роль этих констант проиллюстрирована на следующих примерах.

### 3.6.1. Магнитный вихрь в круговом цилиндре

Самым простым является случай цилиндра с круговым основанием. Для него  $T(t) = t$  и  $T'(t) = 1$ , а значит

$$f_C(z) = izc + A - \bar{A}z^2. \quad (3.9)$$

Компоненты намагниченности можно вычислить, подставляя эту функцию в (3.4) и (1.60). В частном случае, когда  $A = 0$  и  $f_C(z) = izc$  центр вихря находится в центре цилиндра (рисунок 2.12a), а параметр  $c$  обратно пропорционален радиусу его ядра (“солитонной шапки”, где намагниченность выходит из плоскости цилиндра). Этот случай ( $A = 0$ ) полностью совпадает с центрально-симметричным решением, полученным в полярных координатах и исследованным аналитически Усовым и Песчаным [8] в хорошем согласии с результатами численных расчётов.

Не менее интересны и решения при  $|A| > 0$ , у которых отсутствует аксиальная симметрия. Эти решения и их обобщения подробно изучены в Главе 4.

Здесь лишь укажем, что параметр  $A$  определяет направление и величину смещения центра вихря, как показано на рисунке 2.12б. Если величина  $|A| = c/2$  — вихрь вплотную подходит к границе цилиндра. При  $|A| > c/2$  он расщепляется (рисунок 2.12в) на два, закреплённых на границе, полувихря (точнее, полу-“ежа”, с учётом того, что “ежи” топологически эквивалентны вихрям, см §1.6.), которые, в пределе  $|A| \gg c/2$ , расходятся в противоположные стороны окружности (рисунок 2.12г).

### 3.6.2. Магнитный вихрь в треугольном цилиндре

Конформное отображение единичной окружности на равнобедренный треугольник даётся интегралом Шварца-Кристоффеля  $T(t) = C \int_0^t (1 - t^3)^{-2/3} dt$ . Треугольник является единичным, если положить  $C = 2^{2/3} \sqrt{3\pi} / \Gamma(1/6) / \Gamma(1/3)$ , где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция Эйлера. Используя (3.8) получим

$$f_T(z) = (itc + A - \bar{A}t^2) \frac{1}{(1 - t^3)^{2/3}}, \quad t \rightarrow T^{-1}(z). \quad (3.10)$$

Особенностью данного выражения является его расходимость в углах треугольника, которая привела бы к неопределённостям типа  $\infty/\infty$  в мероне и его бесконечной (сингулярной) обменной энергии. В функции (3.4) никаких сингулярностей не возникает. Окрестности больших значений  $f(z)$  (так же как и окрестности нулей, которые только и имеют место в предыдущем примере кругового цилиндра) покрыты “солитонными шапками”. Вместо сингулярности, намагнитченность в углах треугольника просто становится параллельной оси  $OZ$ , оставаясь при этом касательной к его боковой границе. Результат, для нескольких разных соотношений параметров  $A$  и  $c$  построен на рисунке 3.2. Изображённые там состояния находятся, как минимум, в хорошем качественном согласии с

численным и натурным экспериментом.

### 3.6.3. Магнитный вихрь в прямоугольном цилиндре

Конформное отображение единичной окружности на прямоугольник, как и в предыдущем параграфе, является частным случаем преобразования Шварца-Кристоффеля

$$T(t) = C_1 \left( \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+t^4-2t^2\cos 2\delta}} dt + C_0 \right). \quad (3.11)$$

Этот интеграл можно выразить аналитически при помощи эллиптического интеграла первого рода  $F(\phi, m)$ . Параметр  $0 \leq \delta \leq \pi/4$  задаёт отношение сторон прямоугольника:  $\delta = \pi/4$  соответствует квадрату,  $\delta \simeq 0.172426$  прямоугольнику с соотношением сторон  $2 : 1$ . Константы  $C_1$  и  $C_0$  можно выбрать таким образом, чтобы высота прямоугольника была равна 1, а его левый верхний угол лежал в начале координат  $X, Y = 0$ . Для прямоугольника с соотношением сторон  $2 : 1$ , показанного на картинках,  $C_1 \simeq 0.63189$  и  $C_0 \simeq -1.849 + 0.787i$ .

Аналогично рассмотренным ранее примерам, есть два принципиально различающихся класса магнитных текстур — с вихрем (при  $|A| < |c|/2$ ) и с двумя, закреплёнными на границе, “ежами” (при  $|A| > |c|/2$ ). В квадратной частице, как известно, стабильным является центрированный вихрь, показанный на рисунке 3.3а. В вытянутых частицах происходит спонтанное нарушение симметрии и для вихря появляются два положения равновесия, оба немного смещённые из центра цилиндра. Такие магнитные текстуры наблюдаются экспериментально (см. рисунок 3-5 в [184]) и воспроизводятся данной теорией на рисунке 3.3б. Состояния с “ежами”, закреплёнными на границе, так же могут иметь различные конфигурации. В целом для частиц с углами можно ожидать, исходя из

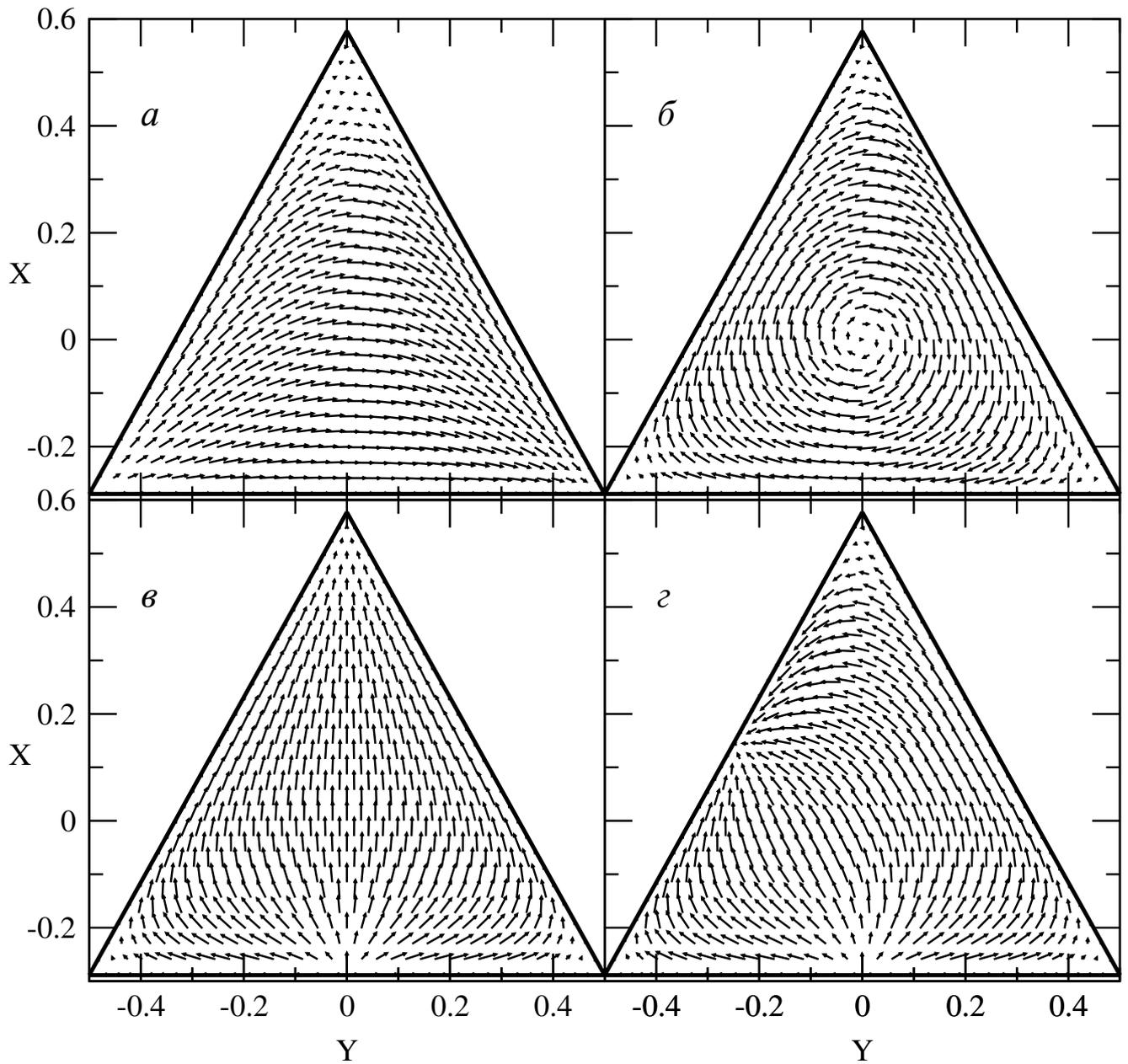


Рисунок 3.2. Векторные поля намагниченности в треугольном цилиндре (3.10), (3.4), (1.60):  $a$  — с двумя закреплёнными в углах “ежами” ( $c = 0$ ,  $A = -2i$ );  $b$  — с центрированным магнитным вихрем ( $A = 0$ ,  $c = 1$ );  $v$  — в конфигурации типа “лист” ( $A = 1$ ,  $c = 0$ );  $z$  — с “ежами”, закреплёнными в центрах сторон ( $A = e^{2\pi/6}$ ,  $c = 1$ ). Во всех случаях  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 4$ . Аналогичные состояния получаются в численных расчётах [181] и в эксперименте [182, 183]

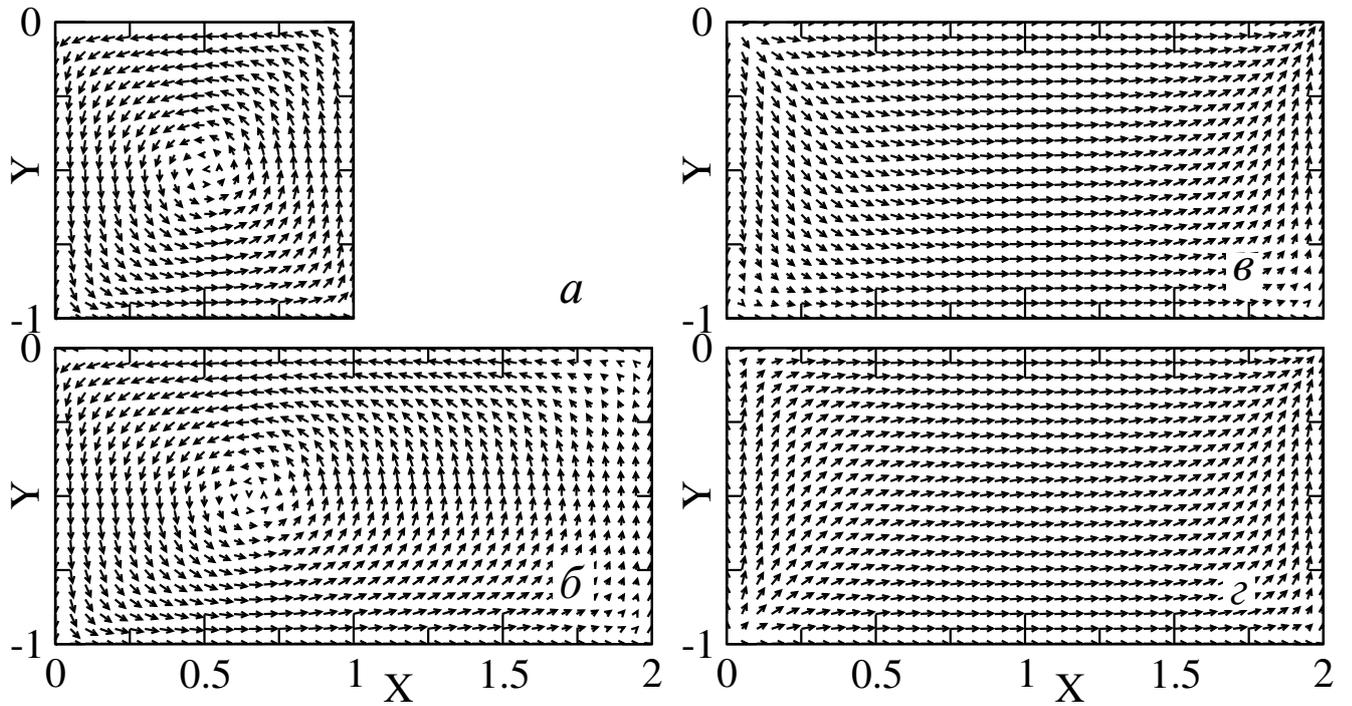


Рисунок 3.3. Векторные поля намагниченности в прямоугольном цилиндре (3.11), (3.8), (3.4), (1.60): *a* — центрированный вихрь  $c = 2$ ,  $A = 0$ ,  $\delta = \pi/4$ ; *б* — смещённый вихрь  $c = 3$ ,  $A = 6i/5$ ; *в* — структура типа “С”  $c = 2$ ,  $A = 11.6$ ; *г* — структура типа “S”  $c = 0$ ,  $A = 6e^{i0.172426}$ . На всех картинках  $e_1 = 1$  и  $e_2 = 6$

общего количества магнитных зарядов на торцах, что состояния, когда “ежи” закреплены в углах, имеют энергию ниже, чем состояния, когда “ежи” закреплены на серединах сторон многоугольника (хотя такие состояния тоже наблюдаются). В случае прямоугольника есть два варианта состояний с “ежами” в углах: они могут быть закреплены в соседних углах (рисунок 3.3в) или в противоположных (рисунок 3.3г). Такие состояния хорошо известны в экспериментальном магнетизме и называются состояниями типа “С” и типа “S”. Аналитические выражения для распределения векторов намагниченности в них, как видим, получаются в рамках описанной теории совершенно естественным образом.

### 3.7. Многовихревые состояния

Использованное здесь ранее решение Мусхелишвили не позволяет получить многовихревые решения задачи Римана-Гильберта, которые тем не менее наблюдаются в эксперименте [185] и в численных расчётах [186]. Расширим теорию на этот случай.

Для этого отобразим конформно, при помощи функции  $z = T(t)$  торец цилиндра  $z \in \mathcal{D}$  не на круг, а на верхнюю (для определённости) полуплоскость  $\text{Im } t > 0$ . По теореме Римана так всегда можно сделать потому что обе эти области односвязные. Граница области  $\mathcal{D}$  перейдёт тогда в действительную ось. Аналогично рассмотренному ранее случаю, решение краевой задачи Римана-Гильберта  $f(t)$  в полуплоскости  $\text{Im } t > 0$  без нормальных компонент к границе связано с решением в области  $\mathcal{D}$  соотношением

$$f(z) = f(t)T'(t)|_{t=T^{-1}(z)}. \quad (3.12)$$

Записать же мероморфную функцию в верхней полуплоскости без нормальных компонент к действительной оси тривиально легко. Такой является любая рациональная функция (частное двух полиномов) с действительными коэффициентами

$$f(t) = \frac{\sum_{i=0}^m g_i t^i}{\sum_{i=0}^n h_i t^i}, \quad (3.13)$$

где  $g_i$  и  $h_i$  — произвольные действительные числа. Используя тот факт, что полиномы с действительными коэффициентами имеют либо действительные корни, лежащие на действительной оси, либо пары комплексно сопряжённых корней,  $f(z)$  можно представить в виде

$$f(z) = T'(t) \frac{\prod_{i=0}^{m_p} (a_i - t)(\bar{a}_i - t) \prod_{j=0}^{m_r} (b_j - t)}{\prod_{i=0}^{n_p} (c_i - t)(\bar{c}_i - t) \prod_{j=0}^{n_r} (d_j - t)} \Big|_{t=T^{-1}(z)}, \quad (3.14)$$

где  $b_j, d_j$  — действительные, а  $a_i, c_i$  — комплексные параметры. Такое представление позволяет непосредственно указать центры вихрей, антивихрей и “ежей” на границе цилиндра.

Для конкретного примера напомним, что конформное преобразование верхней полуплоскости на единичный круг имеет вид

$$T_{\text{disk}}(t) = -\frac{e^{i\alpha}(h + it)}{h - it}, \quad (3.15)$$

где  $h$  — произвольное действительное число и  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Задавая решение на верхней полуплоскости в виде полинома второй степени  $at^2 + bt + c$  с действительными  $a, b$  и  $c$ , путём несложных алгебраических выкладок решение (3.14) можно привести к виду (3.8), выразив  $A$  и  $c$  через коэффициенты полинома и параметры конформного преобразования. Используя бóльшие степени числителя и знаменателя рациональной функции, можно представить, например, многовихревое состояние в диске, показанное на рисунке 3.4, которое подобно полученному численно в работе [186] промежуточному динамическому состоянию. Подход к описанию динамики таких состояний в коллективных переменных, задающих положения центров вихрей и антивихрей, описан в Главе 5.

Другой интересный случай — конечная доменная граница в полосе, которая изучалась численно в [187]. Интерес к таким границам возникает также в связи с идеей Стюарта Паркина применить их для магнитной записи в рамках концепции “racetrack memory” [188], предполагающей кодирование информации путём создания последовательности (разных или с разным шагом) доменных границ в нанополосе и её считывание путём перемещения границ электрическим током мимо чувствительного датчика магнитного поля.

Преобразование верхней полуплоскости на бесконечную полосу  $0 < \text{Im } z < 1$  выражается в виде

$$T(t) = -\frac{\log t}{\pi}, \quad (3.16)$$

где дополнительные параметры, связанные с некоторой свободой при этом пре-

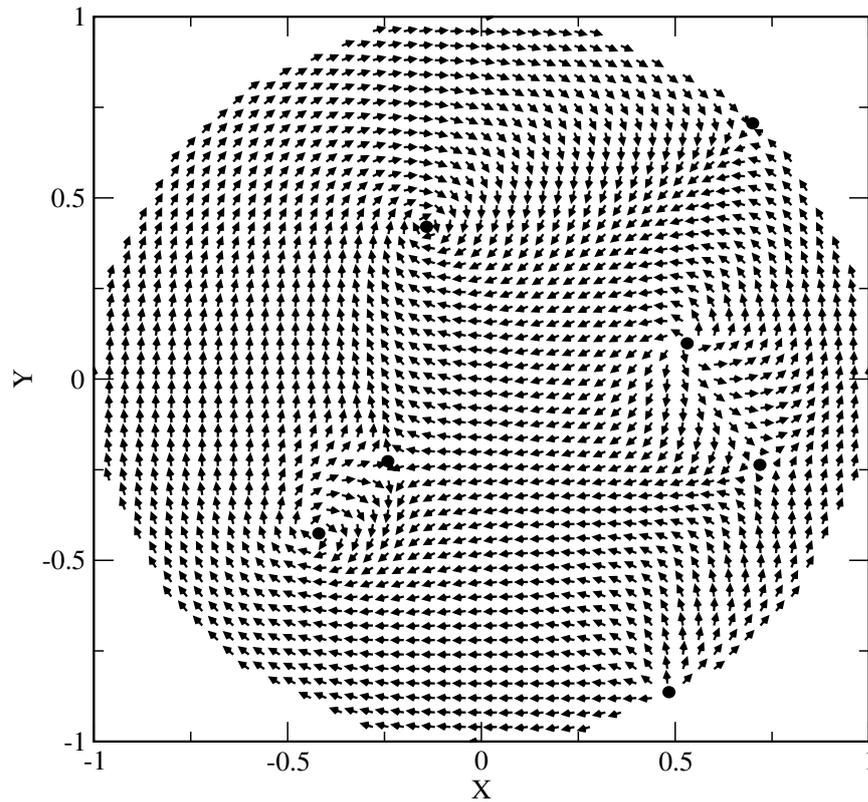


Рисунок 3.4. Многовихревое состояние - (3.15), (3.14), (3.4), (1.60) с параметрами:  $h = 4$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,  $e_1 = 0.01$ ,  $e_2 = 400$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\{i, -4 + 4i, 6 + 7i\}, \{3\}, \{2i, 6 + 2i\}, \{\})$ . Содержит три вихря, три антивихря и два закреплённых на границе “ежа”, их центры отмечены точками

образовании (выбор трёх точек Римана) для простоты опущены. Конфигурации намагниченности в такой полосе показаны на рисунке 3.5. Как видим, этот подход позволяет представить аналитически не только одну доменную границу, а целое семейство различных границ в полосе одновременно.

### 3.8. Доменная граница с перетяжками

Как уже сказано в описании метода последовательной минимизации, его не обязательно проводить до конца, а можно остановиться на любом этапе, если

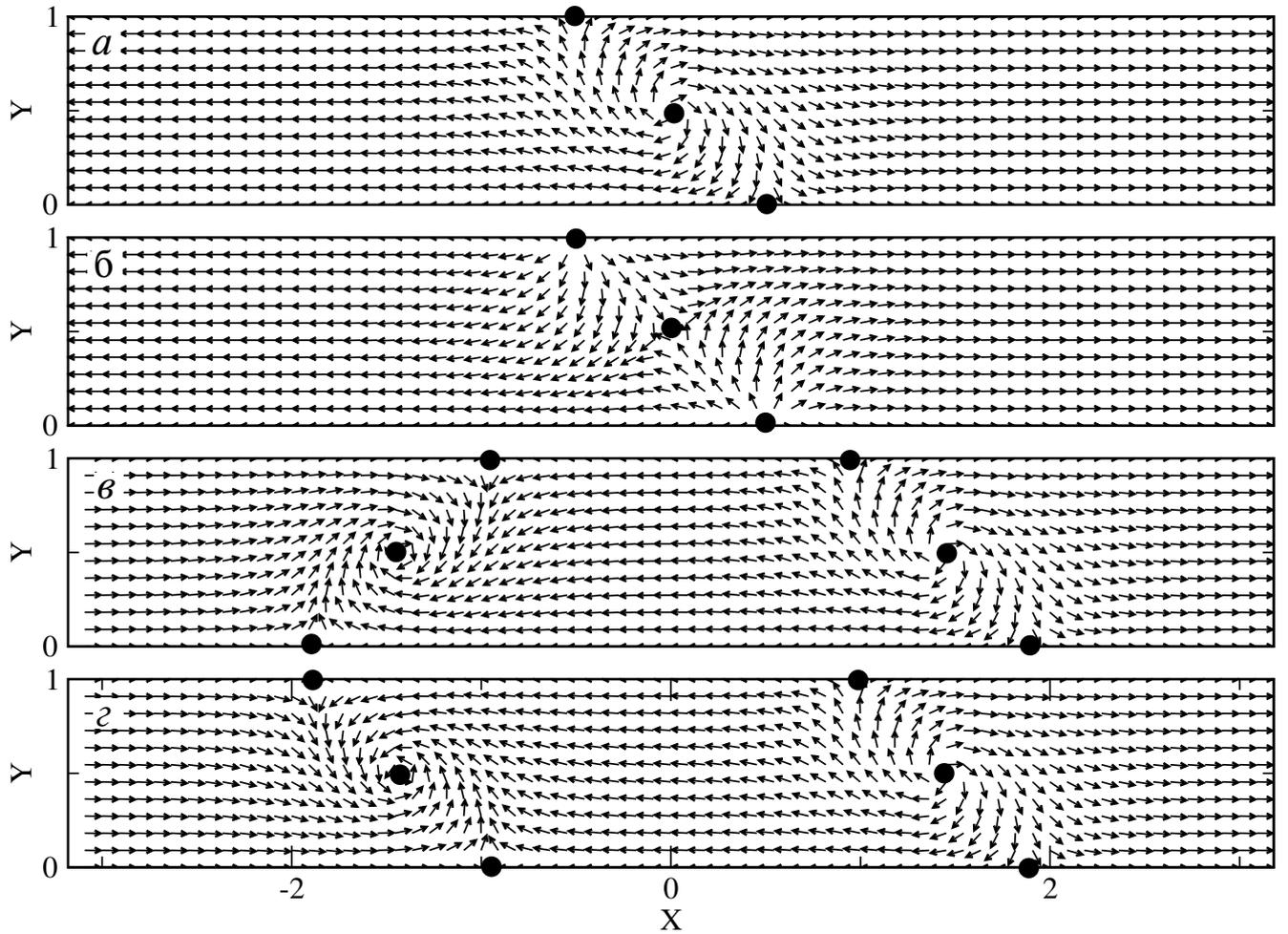


Рисунок 3.5. Конфигурации сложных конечных доменных границ в полосе: *a* — вихревая (сравните с результатами численного расчёта в [187]); *б* — антивихревая; *в* и *г* — две разных конфигурации пары вихревых границ. Точками отмечены центры особенностей. Из (3.16), (3.14), (3.4), (1.60) с  $e_1 = 0.01$ ,  $e_2 = 400$ , и  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ : *a* —  $(\{\iota\}, \{0\}, \{\}, \{5, -1/5\})$ ; *б* —  $(\{\}, \{0, 5, -1/5\}, \{\iota\}, \{\})$ ; *в* —  $(\{90\iota, \iota/90\}, \{0\}, \{\}, \{360, 1/360, -20, -1/20\})$ ; *г* —  $(\{90\iota, \iota/90\}, \{0\}, \{\}, \{360, -1/360, -20, 1/20\})$

магнитная текстура получается достаточно простой, чтобы её энергию можно было вычислить аналитически.

В этом параграфе остановимся сразу после первого шага и рассмотрим следующую комплексную функцию

$$w_{\text{СТ}} = \imath \tan(z/d), \quad (3.17)$$

где  $d$  — произвольный на данном этапе действительный масштаб. Соответствующее распределение намагниченности изображено на рисунке 3.6. Оно (как минимум, топологически) эквивалентно наблюдаемой экспериментально [189–191] структуре доменной границы с перетяжками. Её можно представить себе как доменную границу, тип которой (при движении вдоль неё) периодически меняется от блоховской к неелевской и обратно. Эта граница разделяет два однородно и противоположно намагниченных в плоскости плёнки домена при  $Y \rightarrow \pm\infty$ . Отметим, что хорошо заметные “ties” — узелки с хвостиками, благодаря которым эта граница получила своё английское название “cross-tie domain wall”, наблюдаются при измерении полей рассеяния (скажем, порошковым методом или при помощи магнитного силового микроскопа), создаваемых этой структурой вне магнитной плёнки. На рисунке же показана магнитная текстура — распределение намагниченности внутри плёнки.

Подойдём теперь к вопросу количественно и вычислим равновесную энергию такой доменной границы. В рамках рассматриваемой здесь простой модели изотропного ферромагнетика, энергия состоит из обменного и магнитостатического вкладов. Вычисление этих вкладов для стенок Блоха и Нееля уже подробно рассмотрено в §1.5, где введена “естественная” параметризация толщины доменной границы так, что её полная энергия на единицу площади имеет вид (1.55). Для стенки с перетяжками естественная толщина  $\omega = \pi d/L$  получается репараметризацией непосредственно вычисленной обменной энергии магнитной текстуры (3.17), (1.60) по формуле (1.6) так, чтобы привести конечное выраже-

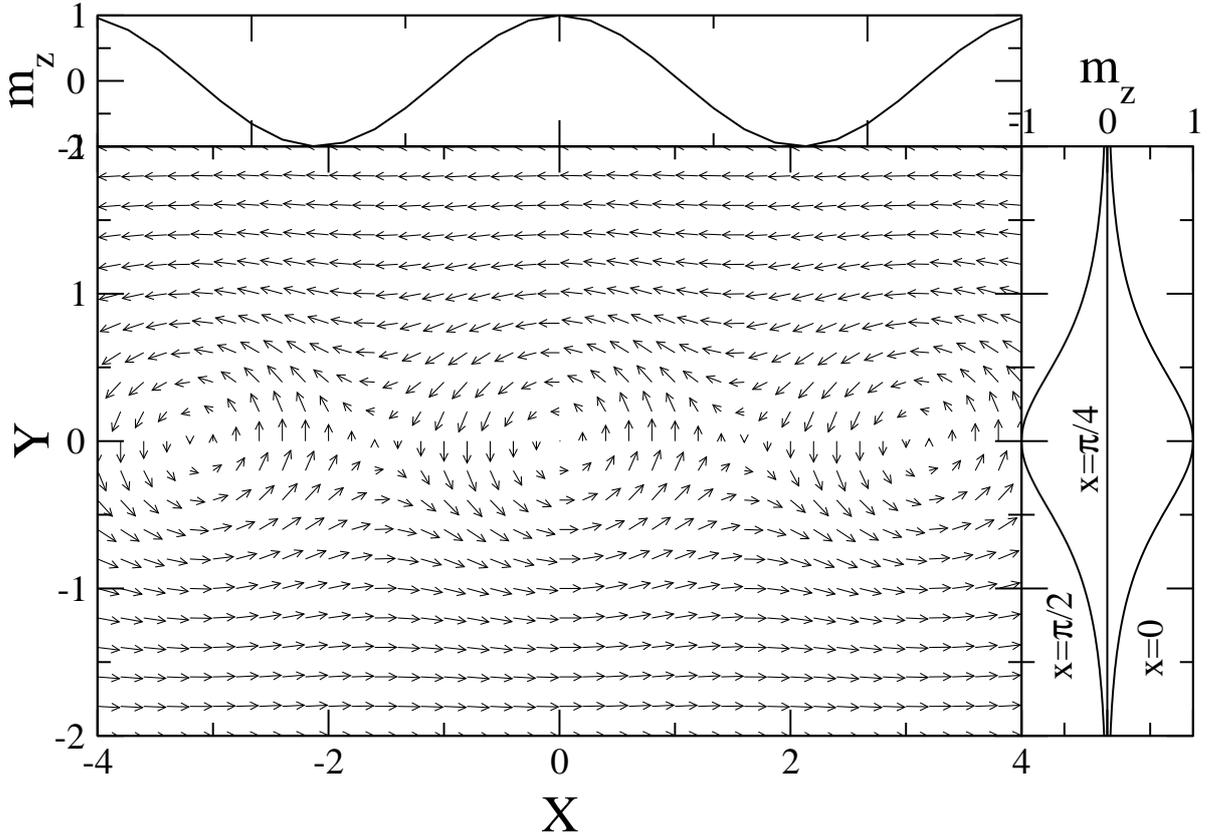


Рисунок 3.6. Распределение намагниченности внутри доменной границы с перетяжками (3.17), (1.60) с  $d = 1$

ние для поверхностной плотности обменной энергии к виду первого слагаемого в (1.55). Магнитостатическая функция для стенки с перетяжками имеет вид

$$f^{\text{CT}}(\omega) = 4\omega^2 \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{u^2 + v^2 \sin^2(v/(4\omega))}{v^2 \cosh^2(u\pi/2)} \frac{1}{1 + u^2 + v^2} \approx \quad (3.18)$$

$$\approx \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) \omega + A \left(1 - e^{-1/(2\omega)}\right) \omega^2,$$

где в приближённом выражении численная константа  $A \approx 1.522886$ . Детали вычисления этой функции приведены в Приложении 3.1.

Магнитостатические функции стенки с перетяжками, а также двух рассмотренных в §1.5 моделей для стенок Блоха и Нееля, построены на рисунке 3.7. Из-за того, что магнитостатические функции при росте  $\omega$  бесконечно растут, на рисунке приведены графики комбинации  $f(\omega)/\omega$ , которая всегда конечна и пропорциональна магнитостатической энергии на единицу поверхности стенки

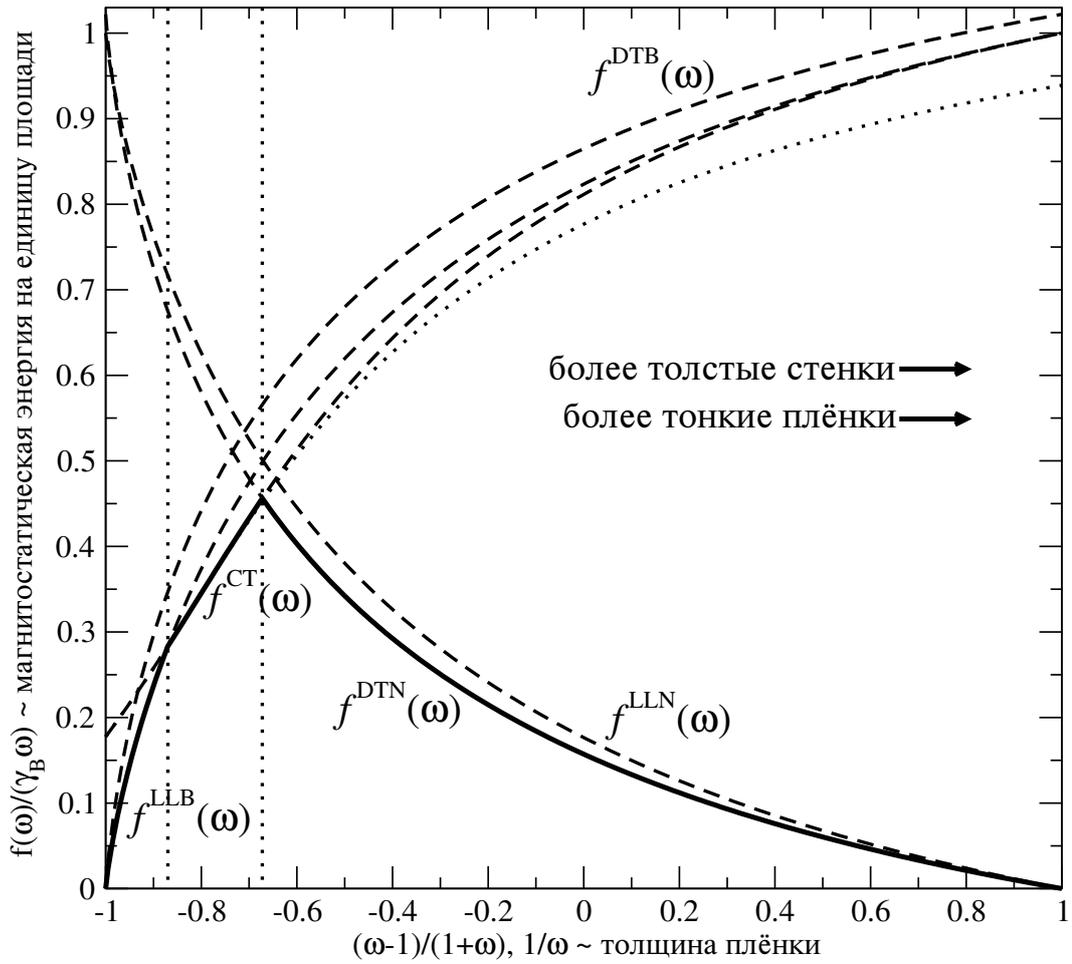


Рисунок 3.7. Магнитостатические функции для доменных границ разного типа. Сплошными толстыми линиями подсвечено основное состояние. Параметр  $\omega \in [0, \infty)$  пропорционален толщине доменной границы, делённой на толщину плёнки  $L$ . Линия из точек показывает приближённую магнитостатическую функцию стенки с перетяжками в (3.18)

(принимая во внимание возможность изменения толщины плёнки). Параметр  $\omega \in [0, \infty)$  тоже имеет бесконечный диапазон, он был отображён на интервал  $[-1, 1)$  при помощи преобразования  $(\omega - 1)/(\omega + 1)$ . Таким образом, на рисунке 3.7 магнитостатические функции представлены полностью. Из него видно, что доменная граница с перетяжками является промежуточной конфигурацией между стенками Блоха и Нееля.

Хорошо известно, что магнитостатическая энергия на единицу поверхности любой модели доменной границы Нееля стремится к нулю, когда толщина

плёнки стремится к нулю (что соответствует пределу  $\omega \propto 1/L \rightarrow \infty$ ) и имеет конечный предел, когда толщина плёнки стремится к бесконечности ( $\omega \rightarrow 0$ ). Это связано с тем, что в стенке Нееля присутствуют только объёмные магнитные заряды, распределённые однородно (при малых толщинах) по толщине плёнки. Таким образом, когда плёнка имеет нулевую толщину, магнитные заряды отсутствуют и магнитостатическая энергия равна нулю. Когда толщина плёнки стремится к бесконечности, поверхностные эффекты становятся несущественными и энергия (на единицу поверхности) становится конечной, подобно энергии (также на единицу площади) однородно заряженной поверхности.

В стенке Блоха, наоборот, присутствуют только поверхностные магнитные заряды. Это значит, что, если плёнка становится бесконечно толстой, то конечная энергия, связанная с нормальными к поверхности плёнки компонентами магнитного момента, становится пренебрежимо малой в сравнении с растущей до бесконечности площадью стенки. То есть предел магнитостатической энергии стенки Блоха в бесконечно толстой плёнке равен нулю. В противоположном случае тонкой плёнки магнитные заряды (положительные и отрицательные) всё так же присутствуют на обеих её сторонах и, при исчезающе малой толщине, их энергия остаётся конечной как энергия двойного слоя.

Стенка с перетяжками — промежуточный случай, она содержит и объёмные, и поверхностные магнитные заряды. Её магнитостатическая энергия на единицу площади является конечной в обоих предельных случаях: и когда толщина плёнки стремится к нулю

$$\lim_{L \rightarrow 0} \gamma_M^{\text{CT}} = \gamma_B = 4\pi \propto \lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega)/\omega, \quad (3.19)$$

и когда она стремится к бесконечности

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \gamma_M^{\text{CT}} = \frac{\gamma_B}{8} \int_0^\infty \frac{u^2 \text{sech}^2(\pi u/2) du}{(1+u^2)} = \gamma_B \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) \propto \lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega)/\omega. \quad (3.20)$$

Эта граница является промежуточной и в прямом смысле, что можно увидеть непосредственно из значений магнитостатических функций. При исполь-

зовании естественной параметризации, все конфигурации с одинаковым значением  $\omega$  имеют одну и ту же обменную энергию. Это значит, что магнитостатическая функция с наименьшим значением  $f(\omega)$  (или  $f(\omega)/\omega$ ) соответствует конфигурации с самой низкой энергией. Таким образом, топологию фазовой диаграммы можно увидеть ещё до минимизации энергии всех этих конфигураций доменных границ. Из рисунка 3.7 видно, что при различных толщинах плёнки равновесными являются три разных конфигурации доменных границ (разделены вертикальными линиями из точек). Можно сделать и другой (известный ранее) вывод, что модель Дитце-Томаса для блоховской стенки и модель Ландау-Лифшица для неелевской стенки никогда не дают конфигурации с минимальной энергией, среди всех рассмотренных. Поэтому эти две модели далее здесь не рассматриваются.

Хоть топология фазовой диаграммы видна. Из рисунка 3.7 невозможно определить какой конкретно толщине плёнки соответствует тот или иной переход. Это требует минимизации энергии каждого типа доменной границы по  $\omega$ . Результаты этой минимизации (энергии различных конфигураций доменных границ как функция толщины плёнки) приведены на рисунке 3.8.

Переход между неелевской границей Дитце-Томаса и стенкой с перетяжками происходит при  $L_{N \rightarrow CT}/L_E \approx 2.317$ , а между стенкой с перетяжками и блоховской границей Ландау-Лифшица при  $L_{CT \rightarrow B}/L_E \approx 6.223$ . Интересно, что в значительной области толщин (показанной на рисунке штриховкой) кривые энергии стенки Блоха и стенки с перетяжками практически касаются друг друга. Физически это означает, что существует достаточно протяжённая область по толщинам, в которой стенки Блоха и стенки с перетяжками могут сосуществовать.

Следует отметить и близость друг к другу равновесных энергий стенки Блоха и стенки с перетяжками. Это значит, что более грубые модели [95–98], переоценивающие энергию стенки с перетяжками, могут легко привести к (невер-

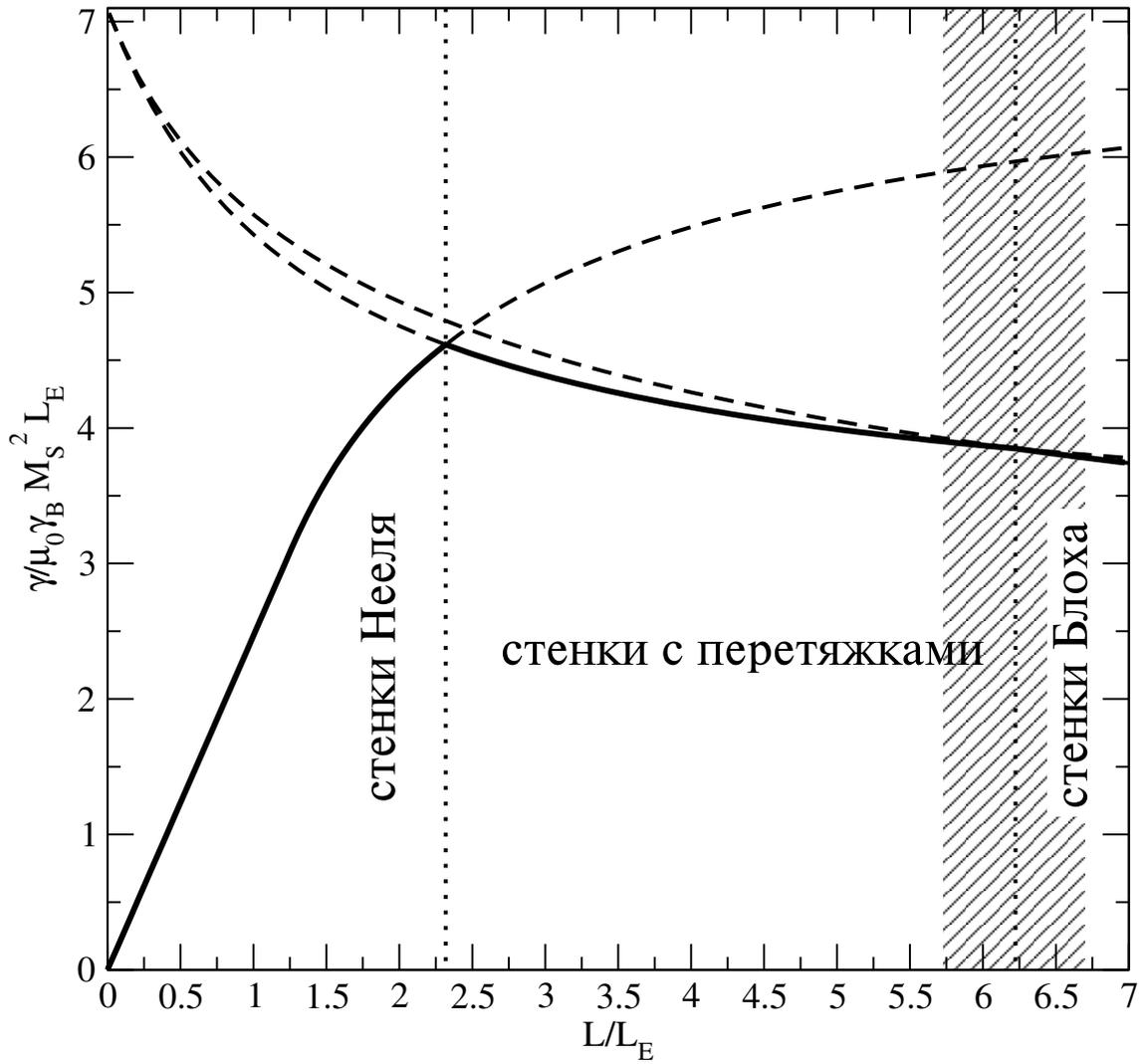


Рисунок 3.8. Равновесная энергия доменных границ на единицу их площади как функция толщины плёнки

ному) выводу, что эта стенка не может существовать в качестве основного состояния (см. обсуждение этого вопроса на с. 163 в [3]).

## Выводы к Главе 3

- 3.1 Построена приближённая теория метастабильных состояний в наноразмерных цилиндрах с произвольной формой основания при помощи функций комплексной переменной.
- 3.2 Получено выражение для одновихревых метастабильных состояний в круговом цилиндре. Поверхностные состояния с топологическими сингулярностями, привязанными к границе цилиндра, следуют из этого выражения естественным образом.
- 3.3 Получены выражения для многовихревых состояний в полосе, которые описывают весь комплекс сложных конечных доменных границ в такой системе.
- 3.4 Сформулирована модель для доменной границы с перетяжками в виде функции комплексной переменной. Показано, что такая доменная граница является основным состоянием в определённом интервале толщин плёнки, где её энергия ниже энергии стенок Блоха и Нееля.

Результаты опубликованы в статьях [15–18].

## Приложение 3.1

Выпишем явно компоненты вектора намагниченности для модели (3.17), (1.60) стенки с перетяжками

$$m_x = -\tanh(2Y/d)(\theta[1/2 + Z/L] + \theta[1/2 - Z/L] - 1) \quad (3.21)$$

$$m_Y = \frac{\sin(2Y/d)}{\cosh(2Y/d)} (\theta[1/2 + Z/L] + \theta[1/2 - Z/L] - 1) \quad (3.22)$$

$$m_Z = \frac{\cos(2X/d)}{\cosh(2Y/d)} (\theta[1/2 + Z/L] + \theta[1/2 - Z/L] - 1). \quad (3.23)$$

Функции Хевисайда  $\theta(t < 0) = 0$ ,  $\theta(t > 0) = 1$  используются здесь, чтобы ограничить магнитный материал по толщине  $|Z| < L/2$ .

Фурье-образ (1.49) объёмной плотности зарядов, произведенных намагниченностью (3.21)-(3.23), можно выразить как

$$\tilde{\rho}_{\pm 1}(q_Y, q_Z) = -\frac{d\pi (\pm q_Y + iq_Z) \sin(q_Z L \pi)}{2q_Z \cosh(dq_Y \pi^2/2)}, \quad (3.24)$$

где  $T = d\pi$  и  $\rho_n = 0$  для  $n \neq \pm 1$ . Это выражение включает в себя как объёмные, так и поверхностные магнитные заряды (появившиеся как множители при  $\delta$ -функциях Дирака, возникших после дифференцирования  $\theta$ -функций Хевисайда:  $\delta(t) = \theta'(t)$ ). Подставляя этот образ в формулу для магнитостатической энергии периодических магнитных текстур (1.52), выведенную в §1.5, и вводя безразмерные переменные интегрирования  $u = q_Y T$  и  $v = q_Z T$ , придём к следующему представлению для магнитостатической энергии стенки с перетяжками

$$\gamma_M^{\text{CT}} = \mu_0 M_S^2 L \gamma_B f^{\text{CT}}(d\pi/L) \quad (3.25)$$

$$f^{\text{CT}}(\zeta) = \frac{\zeta^2}{4\pi^2} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{u^2 + v^2}{v^2} \frac{\sin^2(v\pi/\zeta)}{\cosh^2(u\pi/2)} \frac{1}{1 + u^2 + v^2}, \quad (3.26)$$

которая в гауссовых единицах ( $\mu_0 = 1$ ,  $\gamma_B = 4\pi$ ) совпадает с опубликованной в работе [15]. Таким образом, полная энергия стенки с перетяжками на единицу её площади может быть записана в виде

$$\gamma^{\text{CT}} = \mu_0 M_S^2 L \gamma_B \left( \frac{\zeta^2}{\omega} + f^{\text{CT}}(4\pi\omega) \right), \quad (3.27)$$

Отсюда после замены аргумента на  $\omega = \zeta/(4\pi)$ , получаются магнитостатические функции (3.18).

## Глава 4. Магнитные состояния кругового наноцилиндра

### 4.1. Введение

В Главе 3 получены простые аналитические выражения для пробных функций, описывающих магнитные текстуры в цилиндрах различной формы. Как показано в Главе 6, в некоторых случаях эти функции сами по себе могут привести к нетривиальным и верифицируемым физическим выводам. Но всё-же, для получения конкретных результатов, необходимо минимизировать энергию полностью, чему и посвящена эта Глава.

Вычисление магнитной энергии в явном виде — довольно сложный процесс. Особенно это касается магнитостатического вклада, расчёт которого сильно зависит от формы магнитной частицы. Все вычисления здесь (кроме результатов §4.2) относятся к цилиндрам с круговым основанием (так же называемым иногда в литературе “магнитными точками”). Это наиболее простая форма частицы, которая допускает аналитическую трактовку и тем не менее хорошо демонстрирует поведение магнетика в режиме наномagnetизма.

Из-за их малого размера и малых полей рассеяния магнитные наноцилиндры являются интересным объектом с точки зрения записи информации [192–196] в приложениях спинтроники [197], магнито-фотоники [198] и сверхпроводимости [199]. Важнейшим для приложений является вопрос о метастабильных состояниях магнетика. Это потому, что запись информации есть не что иное, как переключение между этими состояниями. Такими, например, как состояния с разной хиральностью [200] и поляризацией ядра [201] магнитного вихря. Последнюю, в частности, можно переключать динамически при помощи коротких

импульсов магнитного поля в плоскости цилиндра [202–207]. Какой бы ни была динамика намагниченности, когда она заканчивается — конечное магнитное состояние, призванное хранить информацию, должно быть (мета)стабильным. Такие состояния здесь и рассмотрены.

В этой Главе рассчитаны равновесная энергия и радиус магнитного вихря в круговом цилиндре, получены простые аналитические выражения для этих величин в зависимости от геометрических размеров и параметров материала. Магнитная фазовая диаграмма кругового наноцилиндра дополнена (с использованием массивно-параллельных вычислений и аналитического расчёта) областью равновесности состояния типа “большой магнитный вихрь”, что решает известный ранее парадокс. Построена область “метастабильности большого вихря”. Рассмотрен, вопрос об аннигиляции вихря магнитным полем. Выполнено обобщение полученной ранее пробной функции для описания квазиоднородных состояний. Рассмотрен переход между квазиоднородным состоянием в плоскости основания тонкого цилиндра и однородным состоянием, перпендикулярным этой плоскости. Рассчитаны магнитостатические поля рассеяния в квадратном массиве магнитных точек. Решена задача об анизотропии в плоскости квадратного массива магнитных точек в квазиоднородном состоянии. Исследованы состояния типа “С” и типа “лист”, рассчитаны их области метастабильности и нанесены на магнитную фазовую диаграмму.

#### **4.2. Обменная энергия в комплексных переменных**

Итак, магнитные состояния тонкого наноцилиндра можно приближённо (как обсуждалось в Главе 3, пренебрегая зависимостью намагниченности от координаты  $Z$ , параллельной оси цилиндра) выразить при помощи комплексной

функции  $f(z)$ , комплексной переменной  $z = X + iY$ , задающей координату на торце цилиндра. При этом компоненты безразмерного вектора намагниченности  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_S$  выражаются при помощи стереографической проекции (1.60) в которой функция  $w(z, \bar{z})$  представляет собой сшивку солитона и сингулярного мерона (3.4), построенных на базе функции  $f(z)$ . Сама функция  $f(z)$  при этом является решением задачи Римана-Гильберта и для кругового цилиндра единичного радиуса имеет вид

$$f_{C1}(z) = \frac{1}{b} \left( iz + \frac{1}{2} (a - \bar{a}z^2) \right), \quad (4.1)$$

что является слегка репараметризованной версией (3.9), такой, что значениям  $|a| < 1$  соответствует состояние типа вихрь (смещённый, при  $|a| > 0$ ). В этом параграфе вычислим обменную энергию для произвольной функции  $f(z)$  и произвольной формы основания цилиндра  $\mathcal{D}$ , схематически изображённого на рисунке 3.1, а затем приведём конкретный пример для функции (4.1) в круговом цилиндре.

Безразмерная обменная энергия  $\mathcal{E}_{EX}$  в терминах функции  $w(z, \bar{z})$  выражается в виде интеграла (1.64), по основанию цилиндра  $\mathcal{D}$ . Теорема Римана-Грина

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial\mathcal{D}} u(\zeta, \bar{\zeta}) d\zeta = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial u(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d^2z \quad (4.2)$$

для произвольной (не обязательно аналитической) функции  $u$  позволяет свести интеграл (1.64) по основанию цилиндра  $\mathcal{D}$  к интегралу по его контуру  $\partial\mathcal{D}$ , если удастся найти комплексную функцию, производная которой по  $\bar{z}$  даст плотность обменной энергии. И для солитона, и для мерона в (3.4) такую первообразную можно найти аналитически

$$u^S(z, \bar{z}) = -\frac{8}{1 + f(z)\bar{f}(\bar{z})} \frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (4.3)$$

$$u^M(z, \bar{z}) = \frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial z} \log(f(z)\bar{f}(\bar{z})). \quad (4.4)$$

Тогда из (4.2) следует, что полная обменная энергия солитонной части сшивки (3.4) равна

$$\mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{S}} = \frac{2}{i} \oint_{|f(\zeta)|=1} \frac{1}{f(\zeta)} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} d\zeta, \quad (4.5)$$

где использован тот факт, что  $|f(\zeta)| = 1$  на границе солитона (контуре интегрирования), а дополнительный знак “-” появляется из-за того, что положительный обход внутреннего контура (окружающего солитон) соответствует его обходу по часовой стрелке. Подынтегральная функция здесь является аналитической везде, кроме центров вихрей  $z_i$ , в которых  $f(z_i) = 0$ . Это позволяет стянуть контуры интегрирования к центрам вихрей и использовать теорему о вычетах

$$\mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{S}} = 4\pi \sum_i \text{Res} \left. \frac{1}{f(z)} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right|_{z \rightarrow z_i} = 4\pi q, \quad (4.6)$$

где  $q$  — количество вихрей внутри частицы (количество нулей  $f(z)$  внутри  $\mathcal{D}$ , подсчитанное с учётом их кратности) или топологический заряд, заключённый внутри частицы. Отметим, что обменная энергия “солитонных шапок” (4.6) ровно в два раза меньше энергии солитонов Белавина-Полякова (1.72), которые обсуждались в §1.6. Связано это с тем, что множество концов вектора намагниченности внутри каждой “шапки” покрывает только половину сферы Римана.

Для меронной части (3.4) граница интегрирования является многосвязной, состоящей из внешнего контура основания цилиндра и (возможно многосвязного) контура  $|f(\zeta)| = 1$ , ограничивающего “солитонные шапки”. На внутренних контурах  $u^{\text{M}}(z, \bar{z}) \propto \log 1 = 0$ . Предполагая что контуры солитонов не пересекают границу цилиндра (если на границе частицы закреплены “ежи”, контур интегрирования в (4.7) нужно модифицировать так, чтобы исключить их “солитонные шапки”), остаётся только интеграл по внешней границе основания цилиндра

$$\mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{M}} = \frac{1}{2i} \oint_{\partial \mathcal{D}} \frac{1}{f(\zeta)} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \log f(\zeta) \bar{f}(\bar{\zeta}) d\zeta. \quad (4.7)$$

Для полной обменной энергии  $\mathcal{E}_{\text{EX}} = \mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{S}} + \mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{M}}$  пробной функции (4.1) это даёт

$$\mathcal{E}_{\text{EX},C1} = 4\pi + \int_0^{2\pi} \log \frac{1 - |a| \sin \varphi}{b} d\varphi = 2\pi(2 - \log b - \log \frac{2}{1 + \sqrt{1 - a\bar{a}}}), \quad (4.8)$$

где от фазы  $a$  ничего не зависит потому что с точки зрения обменной энергии в круговом цилиндре все направления смещения вихря эквивалентны. Расходимость этого выражения при  $|a| = 1$  не физическая. Ещё до того как центр вихря прикоснётся к границе цилиндра, этой же границы коснётся его ядро (“солитонная шапка”), а значит контур интегрирования в (4.7) нужно будет изменить. На практике это означает, что при определённом значении  $|a|$ , приближающемся к 1, функция (4.8) сошлётся с другой функцией, соответствующей изменённому контуру интегрирования.

Этот метод вычисления обменной энергии годится для любой магнитной текстуры, которую можно описать комплексной функцией (3.4). Причём  $f(z)$  в ней не обязана быть решением задачи Римана-Гильберта. Например, рассмотрим функцию

$$f_{C2}(z) = \frac{i(z - A)}{R_V}, \quad (4.9)$$

которая описывает параллельную трансляцию централизованного вихря в цилиндре радиуса  $R$  без деформации его ядра (такая мода была впервые рассмотрена Усовым и Песчаным [208]). Отметим, что величины  $z$ ,  $A$  и  $R_V$  в этой формуле имеют размерность длины, а  $R_V$  — радиус ядра вихря (“солитонной шапки” в которой вектор намагниченности выходит из плоскости основания цилиндра). Для неё обменная энергия мерона (4.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{EX},C2}^{\text{M}} &= \int_0^{2\pi} \frac{(1 - A \cos(\varphi)/R) \log \left( \frac{A^2 - 2AR \cos(\varphi) + R^2}{R_V^2} \right)}{2(A^2/R^2 - 2A \cos(\varphi)/R + 1)} d\varphi = \\ &= \pi \log \left( 1 - \frac{A^2}{R^2} \right) - 2\pi \log \left( \frac{R_V}{R} \right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

а полная обменная энергия равна

$$\mathcal{E}_{\text{EX},C2} = 2\pi \left( 2 - \log \frac{R_V}{R} + \log \sqrt{1 - \frac{A^2}{R^2}} \right). \quad (4.11)$$

Обменная энергия центрированного вихря ( $a = 0$  в (4.1) или  $A = 0$  в (4.9)) в обоих рассмотренных моделях совпадает и равна

$$\mathcal{E}_{\text{EX,CV}} = 2\pi (2 - \log b) = 2\pi \left( 2 - \log \frac{R_V}{R} \right). \quad (4.12)$$

Видно, что она логарифмически (то есть медленно) расходится с увеличением радиуса частицы. Эта расходимость приводит к тому, что в больших частицах (в отсутствии дополнительной стабилизации за счёт хиральных взаимодействий) вихревые (хиральные) состояния сменяются доменными структурами. Тем не менее в определённом диапазоне (малых) геометрических размеров вихревое состояние является основным.

Выражения (4.6) и (4.7) позволяют вычислять обменную энергию меронных конфигураций намагниченности (3.4) для широкого круга различных мероморфных функций  $f(z)$  в явном аналитическом виде без разложения по малым параметрам. Непосредственное интегрирование (1.6) значительно сложнее, хотя для случая центрированного вихря или при малости смещений его центра, оно тоже возможно.

### 4.3. Энергия и радиус магнитного вихря в круговом цилиндре

Вычислим теперь магнитостатическую энергию центрированного вихря, взяв за основу модель (4.9) с  $A = 0$ . В таком вихре дивергенция вектора намагниченности равна нулю, а значит объёмные магнитные заряды отсутствуют. Нет и боковых магнитных зарядов из-за отсутствия нормальной компоненты намагниченности к боковой границе цилиндра. Остаются лишь магнитные заряды на торцах, локализованные в области ядра вихря (“солитонной шапки”), плотность которых несложно вычислить по формуле  $\sigma = M_S m_Z$  из (1.60) в

полярных координатах  $r, \varphi$ :

$$\sigma(r) = M_S \frac{R_V^2 - r^2}{R_V^2 + r^2} \quad (4.13)$$

для  $r < R_V$ , при  $r \geq R_V$  поверхностная плотность зарядов равна нулю. Энергию взаимодействия (1.21) двух таких систем магнитных зарядов противоположного знака, расположенных параллельно друг другу по оси  $OZ$  на расстоянии  $h$ , можно представить в виде

$$\frac{4\pi U(h)}{\mu_0 \gamma_B} = \int_0^{R_V} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_V} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r_1) \sigma(r_2) r_1 dr_1 d\varphi_1 r_2 dr_2 d\varphi_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + h^2}}. \quad (4.14)$$

Эту функцию (с конкретной плотностью зарядов (4.13)) будем называть функцией Усова-Песчаного потому что она впервые появилась в работе [8]. Можно также ввести её безразмерный вариант — функцию  $u(\chi)$

$$U(h) = \mu_0 \gamma_B M_S^2 \pi R_V^3 u(h/R_V). \quad (4.15)$$

Несколько альтернативных выражений для этой функции дано в Приложении 4.1. С её помощью, безразмерную магнитостатическую энергию ядра вихря на единицу объёма цилиндра можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{MS} = \frac{E_{MS}}{\mu_0 \gamma_B M_S^2 \pi L R^2} = \frac{R_V^3}{L R^2} (u(0) - u(L/R_V)), \quad (4.16)$$

где первый член представляет собственную энергию торцевых зарядов на верхнем и нижнем торце цилиндра, а второй взаимодействие противоположно заряженных зарядов на разных торцах.

Обменную энергию в обычной здесь нормировке на единицу объёма цилиндра несложно получить из (4.12)

$$\mathcal{E}_{EX} = \frac{L_E^2}{R^2} \left( 2 - \log \frac{R_V}{R} \right). \quad (4.17)$$

Минимизируя полную безразмерную плотность энергии цилиндра  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{EX} + \mathcal{E}_{MS}$  по радиусу ядра вихря  $R_V$ , получим следующее уравнение [8]

$$-\frac{1}{\rho_V} + \frac{3\rho_V^2 (u(0) - u(\lambda/\rho_V))}{\lambda} + \rho_V u'(\lambda/\rho_V) = 0, \quad (4.18)$$

где  $\rho_V = R_V/L_E$ ,  $\lambda = L/L_E$ , а штрих обозначает производную. Это уравнение не зависит от радиуса цилиндра.

Конечно, можно вычислить функцию  $u(\chi)$  и решить уравнение (4.18) численно, но гораздо предпочтительнее иметь простые, пусть и приближённые, аналитические выражения для этих величин. Это особенно важно, если свойства магнитного вихря являются входными параметрами для дальнейших вычислений.

Проще всего продвинуться аналитически в случае большой толщины цилиндра, соответствующей  $\chi \gg 1$ . Тогда внешний интеграл в (4.95) сходится очень быстро, да и подынтегральное выражение в (4.91) тоже ведёт себя хорошо. Это позволяет разложить его в ряд Тейлора при больших значениях  $\chi$  и вычислить интеграл почленно, что даёт:

$$u(\chi) = \frac{(\log(4) - 1)^2}{4\chi} + \frac{3 + 8 \log^2(2) - 10 \log(2)}{8\chi^3} + \frac{35 + 4 \log(2)(18 \log(2) - 25)}{32\chi^5} + \dots \quad (4.19)$$

Решение уравнения (4.18) с этой функцией  $u$  позволяет получить следующее разложение для радиуса ядра магнитного вихря

$$\rho_V^C(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{3u_0}\right)^{1/3} + \left(\frac{(\log(4) - 1)^6}{81^2 u_0^5 \lambda}\right)^{1/3} + \frac{(\log(4) - 1)^4}{81 \lambda u_0^3} + \dots, \quad (4.20)$$

где  $u_0 = u(0) \approx 0.082676185$ . Первый член этого разложения был получен впервые Усовым и Песчаным [8]. Используя это выражение, можно вычислить и равновесную энергию толстого цилиндра ( $\lambda \gg 1$ ) с магнитным вихрем

$$e^{\text{EQ}} \approx \frac{7 + \log\left(\frac{3\rho^3 u_0}{\lambda}\right)}{3\rho^2} - \frac{(\log(4) - 1)^2}{12\rho^2(3u_0^4 \lambda^2)^{1/3}}, \quad (4.21)$$

где  $\rho = R/L_E$ .

Эти простые формулы дают погрешность меньше нескольких процентов для  $\lambda > 2$ , а для  $\lambda > \sqrt{4\pi}$  менее одного процента. Но очевидно, что для толстого цилиндра ( $\lambda \gg 1$ ), предположение о независимости магнитной текстуры от

координаты  $Z$  выполняется всё хуже и хуже. Из-за этого источником погрешности становятся не только вычисления, но и сама модель. Вихри приобретают трёхмерную структуру, характеризующуюся утолщением ядра вихря в глубине цилиндра по сравнению с его радиусом на торцах. Тем не менее эти формулы могут быть полезными хотя бы для сравнения этой модели вихря с более точными вариационными моделями.

Может показаться, что удобной точкой разложения магнитостатических функций  $u(\chi)$  для построения теории магнитных вихрей в тонких цилиндрах является  $\chi = 0$ . Но непреодолимым препятствием на этом пути является неаналитичность функции  $u(\chi)$  в точке  $\chi = 0$ . Она содержит члены, пропорциональные  $\chi \log \chi$ , поэтому интегралы для коэффициентов разложения Тейлора расходятся. Из-за того, что очень тонкие цилиндры находятся в однодоменном состоянии, а также потому что тонкие цилиндры большого радиуса начинают формировать доменные границы, такая теория была бы наиболее точной в цилиндрах, где магнитные вихри не являются основным состоянием, а то и не могут существовать вообще.

Отсюда происходит идея построить разложение магнитостатической функции  $u(\chi)$  в районе промежуточной точки  $\chi = 1$ , где она является аналитической. Такое разложение наиболее точно для  $R_V \approx L$ , где справедливы все физические предположения теории магнитных вихрей. В этой области также располагается особая точка на магнитной фазовой диаграмме кругового цилиндра (см. §4.4). Точка  $\chi = 1$  соответствует

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{3(u(0) - u(1)) + u'(1)}} \approx 2.728\,408 \approx 0.769\,67\sqrt{4\pi}. \quad (4.22)$$

Разложения равновесного радиуса вихря и энергии вокруг точки  $\lambda_0$  следующие

$$\rho_V^C(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\lambda - \lambda_0)^i \quad (4.23)$$

$$e^{\text{EQ}} = \frac{\log(\rho/\lambda_0)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=0}^{\infty} b_i (\lambda - \lambda_0)^i, \quad (4.24)$$

где первые несколько коэффициентов разложения приведены в таблице 4.1. Эти коэффициенты являются универсальными числовыми константами. Ряды (4.23) и (4.24) быстро сходятся. Приведенных нескольких членов достаточно, чтобы получить значения с погрешностью менее 0.5% в интервале  $0 < \lambda < 6$ . Сравнение этих приближённых аналитических формул с точными численными значениями приведено на рисунке 4.1.

#### 4.4. Вихри большого радиуса

Как видно из §4.3, даже в случае центрированного вихря аналитическое вычисление его равновесной энергии является непростой задачей. Вычисление этой энергии при помощи компьютера позволяет отказаться от многих упрощающих предположений, но результат при этом получается только в виде картинки, и никак иначе. Тем не менее, такой расчёт был проведен в рамках распределённого вычислительного проекта Magnetism@home.

Проект вычисляет полную энергию магнитной частицы произвольной формы, основываясь на следующей параметризации магнитной текстуры

$$f^{M@H}(z) = c \left( \frac{it}{p} - \frac{1}{2} \left( a - \frac{\bar{a}t^2}{p^2} \right) \right) T'(t) \Big|_{t=T^{-1}(z)} \quad (4.25)$$

Её главным отличием от (4.1) является наличие дополнительного параметра  $p$ ,

$i$	0	1	2	3	4
$a_i$	$\lambda_0$	0.189400	-0.012521	0.001182	-0.000093
$b_i$	2.387556	-0.082425	0.010332	-0.00171	0.000315

Таблица 4.1. Коэффициенты разложения в формулах (4.23) и (4.24)

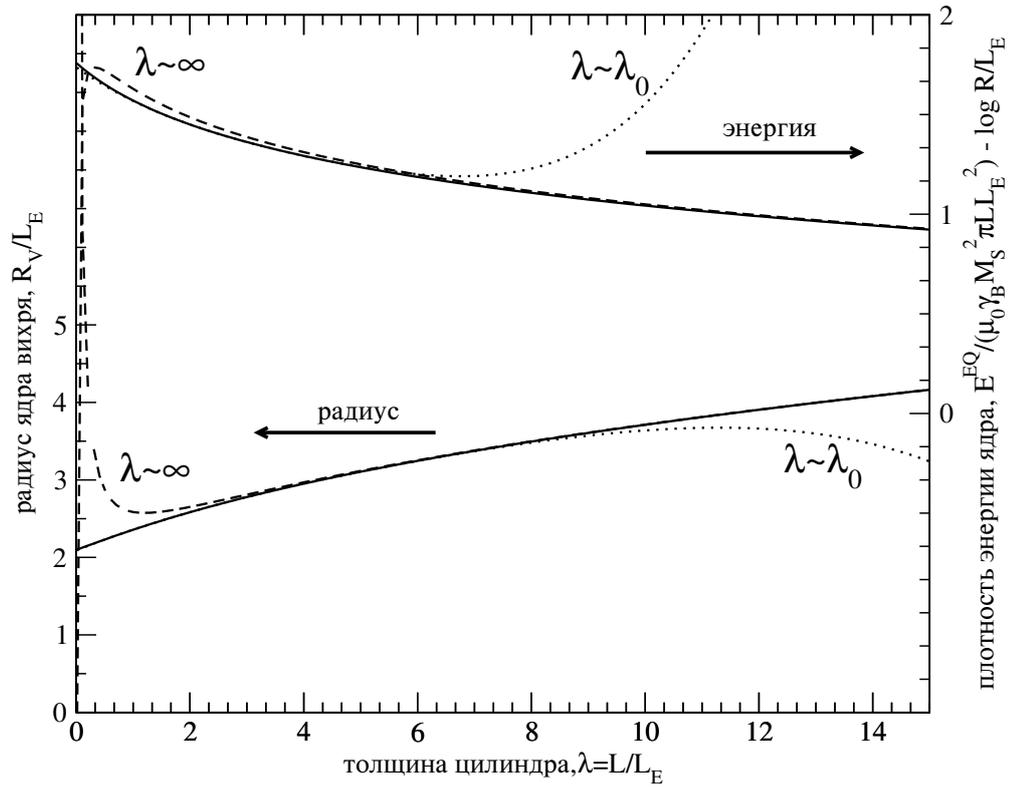


Рисунок 4.1. Радиус ядра магнитного вихря в круговом цилиндре и его равновесная плотность энергии как функция толщины цилиндра. Сплошные линии — точный численный счёт, штриховыми линиями показаны разложения (4.20), (4.21) в окрестности  $\lambda \sim \infty$ , а точками (4.23), (4.24) в окрестности  $\lambda \sim \lambda_0$ .

позволяющего изменять масштаб текстуры целиком и моделировать состояния, квазиоднородные в плоскости цилиндра (это обобщение подробно обсуждается в §4.6). В данной Главе рассмотрен только случай кругового цилиндра, для которого  $T(t) = t$  и  $T'(t) = 1$ . Комплексная фаза параметра  $a$  задаёт направление смещения вихря. В круговом цилиндре эффект этой фазы можно аннулировать выбором (повёрнутой) системы координат. Поэтому здесь считается, что  $a$  принимает действительные значения  $0 \leq a < \infty$ . Параметр  $0 < c < \infty$  управляет размером ядра вихря (или ядер половинок закреплённых на границе “ежей”). Нормированную на радиус цилиндра толщину обозначим символом  $g = L/R$ .

В проекте Magnetism@home вычислялась обменная и магнитостатическая энергия распределений намагниченности (4.25) в четырёхмерном единичном ги-

перкубе с безразмерными координатами  $\hat{g} = g/(1+g)$ ,  $\hat{c} = c/(1+c)$ ,  $\hat{a} = a/(1+a)$ ,  $\hat{p} = 1/p$ , которые покрывают всё пространство параметров. Плотности магнитных зарядов вычислялись аналитически, а для численного расчёта магнитостатической энергии использовался быстрый мультипольный метод [209] на сетке из 50000 конечных элементов неправильной формы, идеально покрывающих границу цилиндра. Зависимость размагничивающего поля от координаты  $Z$  учитывалась точно (аналитически). Несмотря на относительно небольшое количество параметров в (4.25), объём вычислений получается довольно значительным. Эти вычисления заняли (включая предварительные тестовые запуски) порядка одного года, используя время простоя нескольких десятков тысяч компьютеров по всему миру, организованных в единую сеть с использованием библиотеки Berkeley Open Infrastructure for Network Computing (BOINC). Полученные таким образом данные и исходный код программ опубликованы в качестве дополнительного материала к работе [25].

Полученный в результате расчётов числовой гиперкуб позволяет быстро вычислить энергетический ландшафт для магнитных состояний цилиндра различных физических размеров  $R/L_E$  и  $L/L_E$  как функцию  $p$ ,  $a$  и  $c$ . После этого нахождение основных состояний цилиндра так же просто, как нахождение минимального значения в массиве для каждой точки  $(R/L_E, L/L_E)$ . Классификация найденного таким образом состояния, используя значения  $p$ ,  $a$  и  $c$  в минимуме, позволяет представить результаты расчётов в виде магнитной фазовой диаграммы. Эта диаграмма показана на рисунке 4.2 в виде заштрихованных разными цветами областей.

Интересно, что на диаграмме присутствуют два разных вихревых состояния. Одно из них — классический вихрь, он является равновесным состоянием в области, заштрихованной зелёным. Другое — состояние типа “большой вихрь”, которое топологически подобно обычному вихрю, но имеет радиус ядра, превышающий радиус цилиндра. Большие вихри существуют в узкой области фазо-

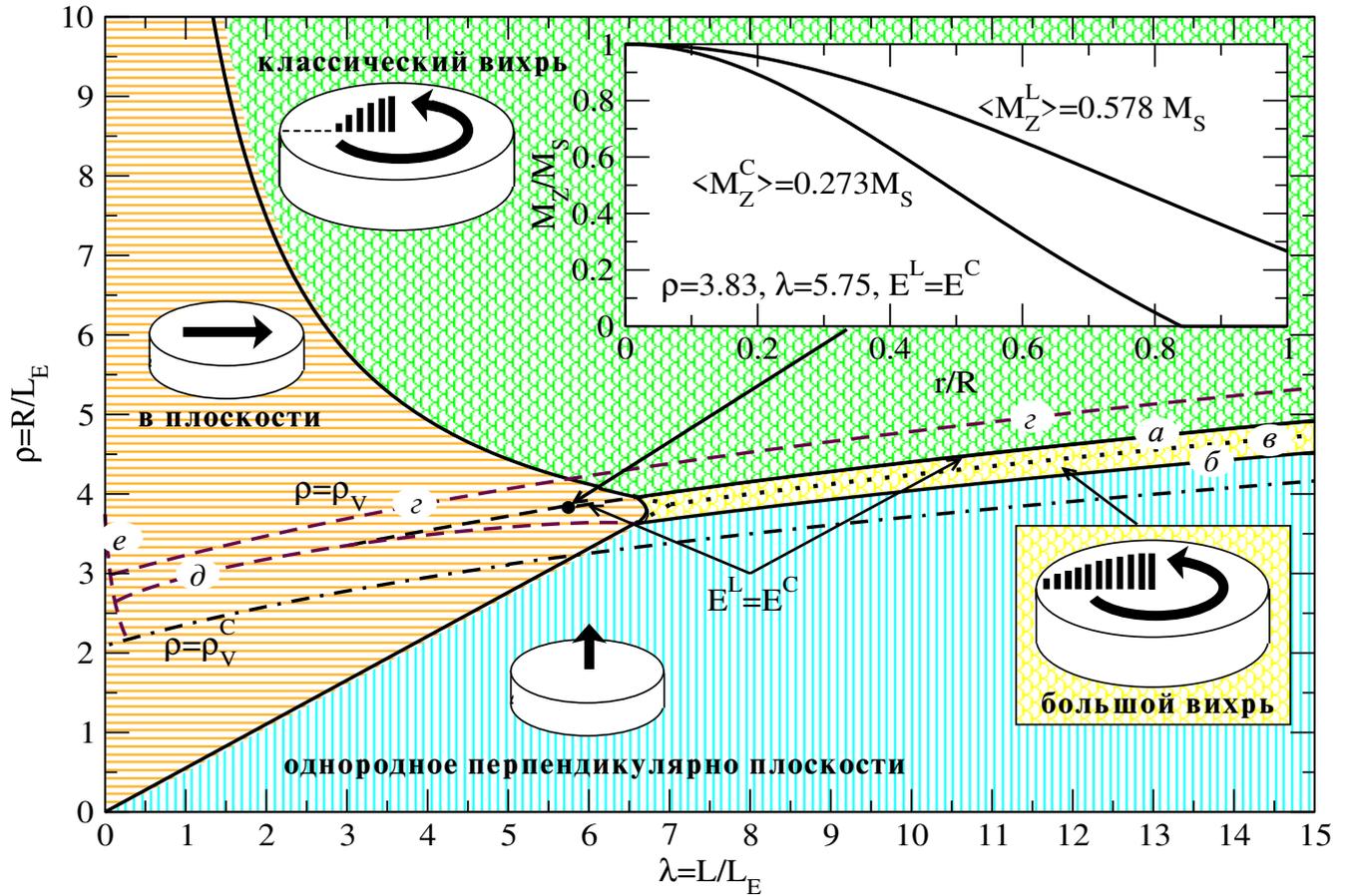


Рисунок 4.2. Равновесие и стабильность состояния типа “большой магнитный вихрь” в круговых цилиндрах различных радиусов  $R$  и толщин  $L$  в изотропном магнитном материале с обменной длиной  $L_E$  и намагниченностью насыщения  $M_S$ . Сплошные линии соответствуют попарному равенству энергий различных состояний и отделяют друг от друга области параметров, где эти состояния (однородное в плоскости, однородное параллельно оси цилиндра, классический магнитный вихрь и большой магнитный вихрь) являются основными. Подписанные буквами линии обсуждаются в тексте. Пунктирные линии соответствуют различным способам потери стабильности магнитным вихрем. Штрихпунктирная линия  $\rho_V^C$  — радиус классического вихря, который зависит только от толщины цилиндра. Вставка показывает распределение компоненты намагниченности  $M_Z/M_S$ , выходящей из плоскости цилиндра, как функцию радиальной координаты  $r/R$  в большом и классическом вихрях при конкретной геометрии цилиндра, где оба этих состояния стабильны и имеют одинаковую энергию ( $E^L = E^C$ )

вой диаграммы, заштрихованной жёлтым, соответствующей высоким ( $\lambda \gtrsim 6.5$ ) цилиндрам определённых радиусов. При увеличении радиуса цилиндра, энергия больших вихрей становится сначала равной (сплошная линия  $a$  на рисунке 4.2), а затем и большей, чем энергия классического магнитного вихря.

При малых радиусах большие вихри непрерывно трансформируются (путём расширения их ядра до бесконечности) в состояние однородной намагниченности, параллельной оси цилиндра (это происходит на сплошной линии  $b$ ). Линия  $b$  соответствует фазовому переходу второго рода, во время которого однородное состояние теряет стабильность и  $Z$ -компонента полной намагниченности цилиндра начинает отклоняться от  $M_S$ . Линия  $a$  соответствует переходу первого рода, сопровождающемуся гистерезисом. То есть большие вихри могут существовать в качестве метастабильных состояний и выше линии  $a$ , в то время, как классические вихри могут быть метастабильными ниже этой линии (они продолжают оставаться стабильными относительно расширения ядра в цилиндрах с радиусами вплоть до равновесного радиуса ядра классического вихря  $\rho_V^C$ ). Добавление к карте основных состояний кругового цилиндра фазы больших вихрей позволяет решить, замеченный в ранних работах [210] и [24], парадокс. Он состоит в том, что параллельное оси цилиндра однородное состояние намагниченности продолжает быть основным состоянием в цилиндрах с размерами, лежащими между линиями  $b$  и  $a$ , где оно уже не является стабильным.

Для подтверждения описанных выше результатов численного расчёта, выполненного в рамках проекта Magnetism@home, рассмотрим теперь состояние типа “большой вихрь” и его стабильность аналитически.

Распределение намагниченности внутри большого магнитного вихря можно описать комплексной функцией

$$f(z) = \frac{iz}{\rho_V}, \quad (4.26)$$

где  $\rho_V = R_V/R > 1$ . Так как  $|f(z)| < 1$ , эта текстура представляет собой чистый солитон  $w(z, \bar{z}) = f(z)$ . Для центрированного большого вихря, его обменную энергию (1.64) можно вычислить непосредственным интегрированием

$$\mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{LV}} = \frac{4}{\rho^2(1 + \rho_V^2)}, \quad (4.27)$$

где безразмерная энергия  $\mathcal{E} = E/(\mu_0\gamma_B M_S^2 \pi L R^2)$  и безразмерный радиус цилиндра  $\rho = R/L_E$ .

Аналогично случаю центрированного классического вихря, рассмотренному в §4.3 и Приложении 4.1, магнитостатическую энергию большого вихря можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{LV}} = \frac{1}{g} (u(\rho_V, 0) - u(\rho_V, g)), \quad (4.28)$$

где  $g = L/R$ , а магнитостатическая функция зависит уже не только от параметра  $\chi$ , но и от радиуса вихря  $\rho_V$

$$u(\rho_V, \chi) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_1 \eta_2 (\rho_V^2 - \eta_1^2)(\rho_V^2 - \eta_2^2) K\left(-\frac{4\eta_1 \eta_2}{\chi^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}\right) d\eta_1 d\eta_2}{(\rho_V^2 + \eta_1^2)(\rho_V^2 + \eta_2^2) \sqrt{\chi^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}}. \quad (4.29)$$

Зависимость от  $\rho_V$  возникает потому что ядро большого вихря (в отличие от ядра классического) помещается в цилиндре не полностью, а доля ядра, помещающаяся внутри цилиндра, зависит от  $\rho_V$ . Функция  $u$  является непрерывной функцией  $\rho_V$ , её можно дифференцировать под знаком интеграла.

Равновесный радиус большого магнитного вихря можно найти минимизируя полную энергию частицы  $\mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{LV}} + \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{LV}}$  по  $\rho_V$ , что приводит к следующему трансцендентному уравнению

$$-\frac{8g\rho_V}{\rho^2(1 + \rho_V^2)^2} + \frac{\partial}{\partial \rho_V} (u(\rho_V, 0) - u(\rho_V, g)) = 0, \quad (4.30)$$

аналогичному уравнению (4.18) для центрированного вихря. Это уравнение сложно разрешить относительно  $\rho_V$ , но зато просто относительно  $\rho$ , что даёт

$$\rho = \frac{2}{1 + \rho_V^2} \sqrt{\frac{2g\rho_V}{\partial_{\rho_V} U(\rho_V, 0) - \partial_{\rho_V} U(\rho_V, g)}} \quad (4.31)$$

для радиуса цилиндра  $\rho$ , в котором равновесным является большой вихрь с радиусом ядра  $\rho_V$ . Предел  $\rho_V \rightarrow \infty$  тогда сразу даёт линию  $b$  на рисунке 4.2. Вдоль неё большие вихри теряют свою хиральность и переходят в полностью однородное состояние, намагниченное параллельно оси цилиндра.

Вторую границу стабильности больших вихрей (линию  $g$ ) можно получить двумя разными способами. Один из них прямой, но сложный, основывающийся на рассмотрении преобразования большого вихря в классический и поиске геометрии цилиндра, при которой это преобразование происходит самопроизвольно. Это можно сделать, например, рассмотрев распределения намагниченности, описываемые следующей комплексной функцией

$$w(z, \bar{z}) = \begin{cases} f(z) & |f(z)| \leq 1 \\ \frac{f(z)}{|f(z)| \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} & |f(z)| > 1 \end{cases}. \quad (4.32)$$

При  $\alpha = 0$  она описывает большой вихрь, а при  $\alpha = \pi/2$  классический с меронной частью при  $|z| > \rho_V$ . Линию  $g$  можно получить как границу на которой энергетический минимум при  $\alpha = 0$  исчезает. Такой анализ был проведен и показал (по крайней мере с доступной для численных вычислений точностью), что большие вихри теряют стабильность точно в тот момент, когда граница их ядра касается стенки цилиндра. В этот момент они мгновенно превращаются в классические вихри с намного меньшим радиусом ядра  $\rho_V^C$ . Таким образом, линию  $g$  можно просто вычислить как радиус цилиндра (4.31) в пределе  $\rho_V \rightarrow 1$ .

Другой “подводный камень” заключается в том, что линия  $b$  становится нефизичной, когда параметр  $g = L/R$  становится меньше, чем примерно 1.812952. В более тонких цилиндрах (при фиксированном радиусе) основным состоянием становится состояние, однородно намагниченное в плоскости цилиндра, а значит для исследования стабильности нужно рассмотреть преобразование большого вихря в такое однородное состояние. Сделать это можно, рассматривая однородный поворот намагниченности большого вихря, описываемый

мый комплексной функцией

$$f^{\text{tilt}}(t) = \frac{if(t) \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)}{i \cos(\alpha/2) + f(t) \sin(\alpha/2)}. \quad (4.33)$$

При  $\alpha = 0$  эта функция соответствует большому вихрю (4.26), но с увеличением  $\alpha$  намагниченность в описываемой ей магнитной текстуре однородно поворачивается в сторону плоскости торца цилиндра. Линию стабильности тогда можно вычислить как условие исчезновения энергетического минимума при  $\alpha = 0$

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}^{\text{tilt}}}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{tilt}}}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{tilt}}}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (4.34)$$

при равновесном  $\rho_V$ . Обменную энергию  $\mathcal{E}_{\text{EX}}^{\text{tilt}}$  магнитной текстуры, соответствующей комплексной функции  $f^{\text{tilt}}(t)$ , несложно вычислить непосредственным интегрированием (1.64). Магнитостатическая энергия теперь имеет дополнительные вклады от объёмных и боковых магнитных зарядов. Их взаимодействие проще всего учесть, объединив объёмные и боковые заряды в одну объёмную плотность заряда, используя  $\delta$ -функцию Дирака. От  $\alpha$  зависит только произведение плотностей в разных точках, входящее в магнитостатический интеграл. Поэтому рассмотрим сразу необходимую нам вторую производную, которую можно представить в виде

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \varrho(r_1, \varphi_1, \alpha) \varrho(r_2, \varphi_2, \alpha) \right|_{\alpha=0} = 2\omega(r_1, \varphi_1) \omega(r_2, \varphi_2), \quad (4.35)$$

где

$$\omega(r, \varphi) = -\frac{4r\rho_V^2 \sin \varphi}{(r^2 + \rho_V^2)^2} + \frac{(1 - \rho_V^2)\delta(1 - r) \sin \varphi}{1 + \rho_V^2}. \quad (4.36)$$

Интеграл такого произведения зарядов удобно факторизовать, используя второй метод, описанный в Приложении 4.1. То есть представляя квадратный корень в магнитостатической функции Грина при помощи интеграла Липшица (4.93), а затем раскладывая получившуюся функцию Бесселя в ряд при помощи теоремы сложения (4.92). Получившиеся в результате такого разложения

угловые интегралы легко вычисляются, что даёт

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{tilt}}}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f_{\text{MS}}(kg)}{k} \left( \int_0^1 \omega(r, \varphi) J_1(kr) r \, dr \right)^2 dk, \quad (4.37)$$

где дельта функция считалась при расчёте правосторонней. Этот интеграл можно вычислить численно, что достаточно для решения трансцендентного уравнения (4.34) и нахождения линии стабильности  $d$ . Ниже этой линии большие вихри, если бы они были созданы, сразу превратились бы в (квази)однородное в плоскости цилиндра состояние. Правильность проведенных расчётов подтверждается фактом, что линия  $d$  соединяется с линией  $b$  точно при критическом значении  $g \approx 1.812952$ , при котором энергии однородных состояний с намагниченностью, лежащей в плоскости основания цилиндра и перпендикулярно этой плоскости — равны.

Наконец, имеется ещё одна возможность преобразования большого вихря в однородное в плоскости цилиндра состояние. При малых толщинах цилиндра вихрь может быть нестабилен по отношению к горизонтальному смещению. Стабилизирующая сила в этом случае производится боковыми магнитными зарядами, роль которых быстро падает при уменьшении толщины цилиндра до тех пор, пока они уже не могут сдержать смещение вихря, выгодное с точки зрения обменной энергии. Соответствующая линия стабильности  $e$  была вычислена путём приравнивания нулю второй производной по  $A$  в точке  $A = 0$  энергии распределения намагниченности, соответствующего комплексной функции (4.9). Энергия торцевых зарядов при этом не меняется, а баланс сил обеспечивается обменной энергией (4.11) и магнитостатической энергией боковых зарядов, которая вычислялась по второй методике, описанной в Приложении 4.1. Обмен “побеждает” ниже линии стабильности  $e$  и большие вихри, если они даже там созданы, нестабильны относительно перехода в однородно намагниченное в плоскости основания цилиндра состояние.

В заключение можно сказать, что (как показано прямым численным поис-

ком, подтверждённым аналитическими расчётами) ферромагнитный цилиндр допускает существование двух состояний типа магнитный вихрь в качестве своего основного состояния. Одно из них — классический вихрь Усова и Песчаного [8], для которого в §4.3 получены явные приближённые формулы энергии и радиуса. Другое — состояние типа “большой магнитный вихрь”, в котором намагниченность никогда не ложится в плоскость основания цилиндра. Хотя существование “больших вихрей” не было ещё подтверждено экспериментально (возможно потому что они существуют лишь в очень узкой области магнитной фазовой диаграммы), магнитные цилиндры похожих размеров доступны экспериментально и не являются суперпарамагнитными (см. рисунок 14 в [211]). Здесь также рассмотрены механизмы, приводящие к потере стабильности большого магнитного вихря, и вычислены соответствующие им линии лабильности.

Следует отметить, что вследствие использования метода Ритца проведенные расчёты завышают стабильность состояний. Значит истинная область метастабильности большого вихря меньше очерченной на рисунке 4.2. Тем не менее из модельных расчётов следует, что в определённом диапазоне геометрических размеров цилиндра большие вихри могут сосуществовать с классическими. Более того, можно подобрать геометрические размеры цилиндра так (см вставку на рисунке 4.2), что оба вихревых состояния являются в нём стабильными, их энергии равны, но их полный магнитный момент при этом существенно отличается.

В силу того, что большой и классический вихри топологически эквивалентны, переходы между ними не требуют создания блоховских точек и не должны сопровождаться значительной генерацией спиновых волн. Кроме того, из фазовой диаграммы видно, что большие магнитные вихри существуют в частицах наименьших размеров из тех, которые вообще могут содержать состояние типа магнитный вихрь. Это значит, что большие вихри могут быть интересным объектом для перспективных технологий магнитной записи.

#### 4.5. Коллапс магнитного вихря внешним полем

Рассмотрим теперь влияние внешнего магнитного поля на магнитный вихрь в круговом цилиндре. Наиболее интересный (за счёт нарушения симметрии) случай, когда вектор поля направлен в плоскости основания цилиндра (перпендикулярно его оси). В отсутствие внешнего магнитного поля (или для малых полей) хорошо работают пробные функции (3.9), которые описывают распределения намагниченности без боковых магнитных зарядов  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$  на границе цилиндра. В этом параграфе рассмотрен случай больших полей, настолько больших, что они приводят к коллапсу магнитного вихря.

Так как магнитное поле непосредственно поворачивает магнитные моменты на боковой поверхности цилиндра, отсутствие на ней магнитных зарядов в достаточно больших полях перестаёт быть хорошим приближением. Поэтому процедуру последовательной минимизации, описанную в Главе 3 и приводящую к функциям (3.9) или (4.38), нужно прервать до минимизации боковых зарядов и решения задачи Римана-Гильберта для мероморфной функции  $f(z)$ . Возьмём для неё представление в виде [212]

$$f_{C3}(z) = \frac{i}{b} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (4.38)$$

где параметр  $b$  связан с радиусом магнитного вихря, параметр  $0 \leq a \leq 1$  задаёт смещение его центра ( $|a| = 0$  соответствует центрированному вихрю, а  $|a| = 1$  однородно намагниченному в плоскости основания цилиндру), а комплексная координата  $z = X + iY$  безразмерная, нормированная на радиус цилиндра  $R$  так, что  $|z| \leq 1$ . Эта функция производит конформное отображение единичного диска на единичный диск со смещённым центром. В соответствии с предыдущими шагами процедуры последовательной минимизации, векторы намагниченности всё также выражаются при помощи стереографической проекции (1.60)

через сшивку (3.4) с  $f(z) = f_{C3}(z)$ .

В отличие от (4.9), у которого нормальные к боковой поверхности компоненты вектора намагниченности отсутствуют, выражение (4.38) при  $|a| > 0$  содержит магнитные заряды на боковой поверхности цилиндра. При этом для любых значениях  $a$  выражение (4.38) гарантирует равенство нулю нормальной производной намагниченности к границе  $(\partial \mathbf{m} / \partial \mathbf{n})|_{\partial \mathcal{D}} = 0$ . Пример этого распределения для конкретного цилиндра во внешнем магнитном поле показан на рисунке 4.3.

Для нахождения равновесных значений  $a$  и  $b$  во внешнем магнитном поле необходимо вычислить и минимизировать полную энергию цилиндра, включающую, кроме рассмотренных ранее обменной и магнитостатической энергии (3.1), энергию Зеемана с плотностью:  $-\mu_0 \gamma_V M_S^2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}$ .

Магнитостатическая энергия имеет объёмный и поверхностные вклады (на торцах и на боковой поверхности цилиндра). Для упрощения дальнейших расчётов предположим, что цилиндр является достаточно тонким, чтобы объёмным вкладом можно было пренебречь.

Введём две полярные системы координат с одними и теми же обозначениями для радиальной  $r$  и угловой координаты  $\varphi$ . Их использование ниже тщательно оговорено, поэтому путаницы не будет. Центр одной из этих систем совпадает с центром цилиндра, соответствующая безразмерная радиальная координата определена как  $\eta = r/R$ . Центр другой совпадает с центром ядра вихря. Это удобно потому что при любых  $a$  граница ядра вихря (4.38), определяемая уравнением  $|f_{C3}| = 1$ , представляет собой окружность. Для действительных  $a$  её радиус  $R_V = Rb(1 - a^2)/(1 - a^2b^2)$ , а центр расположен в точке  $X_V = Ra(1 - b^2)/(1 - a^2b^2)$ ,  $Y_V = 0$ . Безразмерная радиальная координата в системе координат, центрированной на вихре, определена как  $\eta = r/R_V$

Плотность торцевых магнитных зарядов, производимых распределением намагниченности (4.38), в полярной системе координат, центрированной на ядре

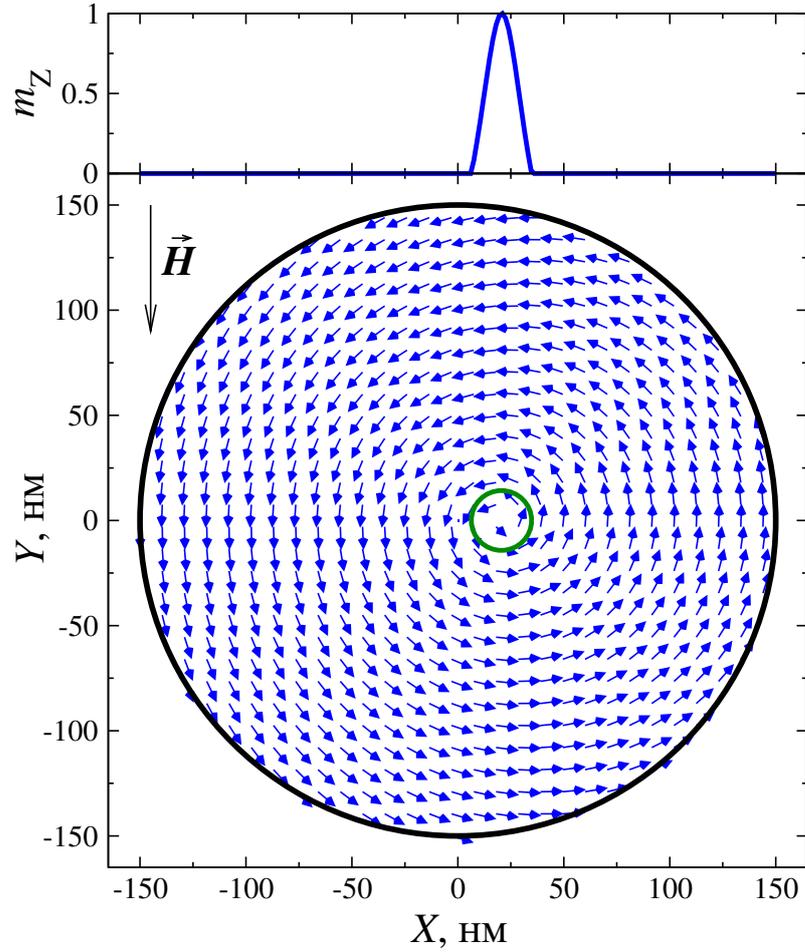


Рисунок 4.3. Распределение намагниченности (4.38) с равновесными значениями  $a \approx 0.14$  и  $b \approx 0.092$ , соответствующими пермаллоевому ( $L_E = 5$  нм) цилиндру ( $R = 150$  нм,  $L = 15$  нм) в магнитном поле  $h = H/(\mu_0\gamma_B M_S) = -0.025$ , приложенному вдоль оси  $OY$ . Компонента намагниченности  $m_Z$  вдоль линии  $Y = 0$  показана на верхнем графике

вихря равна

$$m_Z = \sigma(\kappa, \eta, \varphi) = \cos \kappa \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2 - 2\eta \sin \kappa \cos \varphi}, \quad (4.39)$$

где  $\kappa = 2 \arctan(ab)$ . Безразмерную магнитостатическую энергию этих зарядов в единицах  $\mu_0\gamma_B M_S^2 V$  (где  $V = L\pi R^2$  — объём цилиндра) можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{MS}^{\text{face}} = \frac{E_{MS}^{\text{face}}}{\mu_0\gamma_B M_S^2 V} = \frac{R_V^3}{LR^2} (u(\kappa, 0) - u(\kappa, L/R_V)), \quad (4.40)$$

где

$$u(\kappa, \chi) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(\kappa, \eta_1, \varphi_1) \sigma(\kappa, \eta_2, \varphi_2) \eta_1 d\eta_1 \eta_2 d\eta_2 d\varphi_1 d\varphi_2}{(2\pi)^2 \sqrt{\chi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1 \eta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}. \quad (4.41)$$

Предполагая малость произведения  $ab \ll 1$ , что подтверждается численными расчётами (см. также подпись к рисунку 4.3), и пренебрегая этими произведениями по сравнению с единицей, безразмерную энергию (4.40) можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{face}} = \frac{b^3(1-a^2)^3}{g} \left( u(0) - u\left(\frac{g}{b(1-a^2)}\right) \right), \quad (4.42)$$

где  $u(\chi) = u(\kappa \rightarrow 0, \chi)$  — безразмерная магнитостатическая функция Усова и Песчаного [8] для централизованного вихря (4.15), выражения для которой получены в §4.3 и Приложении 4.1. Несмотря на приближённый характер выражения (4.42), его зависимость от  $a$ ,  $b$  и  $g$  очень точно соответствует точному выражению (4.40) и даёт ошибку не более 1% в рассматриваемом диапазоне параметров.

Распределение боковых магнитных зарядов магнитной текстуры (4.38) имеет следующий вид

$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\mathcal{D}} = \sigma(a, \varphi) = 2a \sin \varphi \frac{a \cos \varphi - 1}{1 + a^2 - 2a \cos \varphi}, \quad (4.43)$$

в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, Z$  с началом отсчёта в центре цилиндра. Их безразмерную энергию можно записать как

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{side}} = \int_0^g \int_0^g \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(a, \varphi_1) \sigma(a, \varphi_2) d\zeta_1 d\zeta_2 d\varphi_1 d\varphi_2}{2g(2\pi)^2 \sqrt{2(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}}, \quad (4.44)$$

где безразмерная переменная интегрирования  $\zeta = Z/R$ . Используя теорему сложения для функций Бесселя и другие тождества, приведенные в Приложении 4.1 это выражение можно представить в виде ряда

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{side}} = \frac{1}{2} \left[ a^2(a^2 - 2)^2 I_1(g) + (1 - a^2)^2 \sum_{\mu=1}^{\infty} a^{2\mu} I_{\mu}(g) \right] \quad (4.45)$$

$$I_\mu(g) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left( 1 - \frac{1 - \exp(-kg)}{kg} \right) J_\mu^2(k), \quad (4.46)$$

где  $J_\mu(x)$  функция Бесселя первого рода порядка  $\mu$ . При минимизации полной энергии использовался только первый член в этом выражении. Как было проверено численно, этого достаточно для получения ошибки в пределах 3%.

Полную  $Y$ -компоненту намагниченности цилиндра (которая входит в энергию Зеемана в рассматриваемом случае поля, параллельного оси  $OY$ ) можно представить в виде

$$\langle m_Y \rangle = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{((1+a^2)\eta \cos \varphi - a(1+\eta^2))\eta d\eta d\varphi}{\sqrt{a^2 + \eta^2 - 2a\eta \cos \varphi} \sqrt{1 + a^2\eta^2 - 2a\eta \cos \varphi}}, \quad (4.47)$$

где используется система координат, центрированная на оси цилиндра. Величину этого интеграла можно приблизить выражением  $\langle m_Y \rangle = a(15a^4 + 34a^2 - 193)/144$  с погрешностью не более 1%.

Обменную энергию распределения намагниченности (4.38) несложно вычислить по методу, изложенному в §4.2. Она в точности равна (4.17) и не зависит от  $a$ .

Теперь осталось минимизировать полную плотность магнитной энергии цилиндра  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{EX}} + \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{face}} + \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{side}} - h\langle m_Y \rangle$  по параметрам  $a$  и  $b$ . Эти параметры связаны через член  $\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{face}}$ , который зависит и от  $a$ , и от  $b$ . Тем не менее, если вместо параметра  $b$  ввести новый параметр  $q = b(1 - a^2)/g$ , то  $a$  и  $q$  становятся независимыми и энергию можно минимизировать по каждому из них отдельно.

Единственные члены в полной энергии  $\mathcal{E}$ , зависящие от  $q$  — это  $\mathcal{E}_{\text{EX}} + \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{face}} = \lambda_E^2 g^2 (2 - \log qg) + q^3 g^2 Q(1/q) + \text{const}$ , где  $Q(x) = u(0) - u(x)$ ,  $\lambda_E = L_E/L$ . Равновесное значение  $q$  тогда удовлетворяет следующему уравнению

$$q \frac{d}{dq} [q^3 Q(1/q)] = \lambda_E^2, \quad (4.48)$$

которое в точности повторяет уравнение (4.18) для равновесного радиуса ядра центрированного вихря в нулевом поле.

Оставшиеся члены в полной энергии  $\mathcal{E}_1(a, h) = \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{side}} - h\langle m_Y \rangle + \lambda_E^2 g^2 \log(1 - a^2)$  зависят только от  $a$ , где последний член появляется после замены  $b$  на  $q$  в обменной энергии и отделения слагаемых, зависящих от  $q$ .

Вихрь теряет стабильность при некотором значении внешнего поля  $h = h_{\text{ан}}$ , когда энергетический минимум, в котором он находится, превращается в седловую точку или максимум. Это условие приводит к следующей системе уравнений для  $a_{\text{ан}}, h_{\text{ан}}$ :

$$\begin{cases} \partial \mathcal{E}_1(a_{\text{ан}}, h_{\text{ан}}) / \partial a_{\text{ан}} = 0 \\ \partial^2 \mathcal{E}_1(a_{\text{ан}}, h_{\text{ан}}) / \partial a_{\text{ан}}^2 = 0. \end{cases} \quad (4.49)$$

Решая эти уравнения численно для обменной длины  $L_E/L = 5 \text{ нм}/15 \text{ нм}$  (соответствующей эксперименту в [213]), получим зависимость поля аннигиляции вихря  $h_{\text{ан}}$  от безразмерного радиуса цилиндра  $1/g = R/L$ , которая показана на рисунке 4.4. Кривая  $h_{\text{ан}}(1/g)$  хорошо ложится на экспериментальные точки из [213].

Можно определить и другое характерное поле  $h_{\text{еқ}}$ , когда равновесная энергия смещённого магнитным полем вихря становится равной энергии однородно намагниченного состояния. Это поле определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \partial \mathcal{E}_1(a_{\text{еқ}}, h_{\text{еқ}}) / \partial a_{\text{еқ}} = 0 \\ \mathcal{E}(a_{\text{еқ}}, h_{\text{еқ}}) = \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{side}} \Big|_{a \rightarrow 1} - h_{\text{еқ}}, \end{cases}, \quad (4.50)$$

оно также показано на рисунке 4.4. Последнее уравнение здесь основывается на том, что обменная энергия и энергия торцевых магнитных зарядов равны нулю в однородно намагниченном в плоскости основания (насыщенном планарным полем) цилиндре, а средняя намагниченность такого цилиндра в направлении поля равна единице.

Как видим, поле равновесия лежит ниже поля аннигиляции. Расхождение измеренного поля исчезновения вихрей с полем аннигиляции при  $R/L \lesssim 10$  можно объяснить влиянием термических флуктуаций, которому маленькие ци-

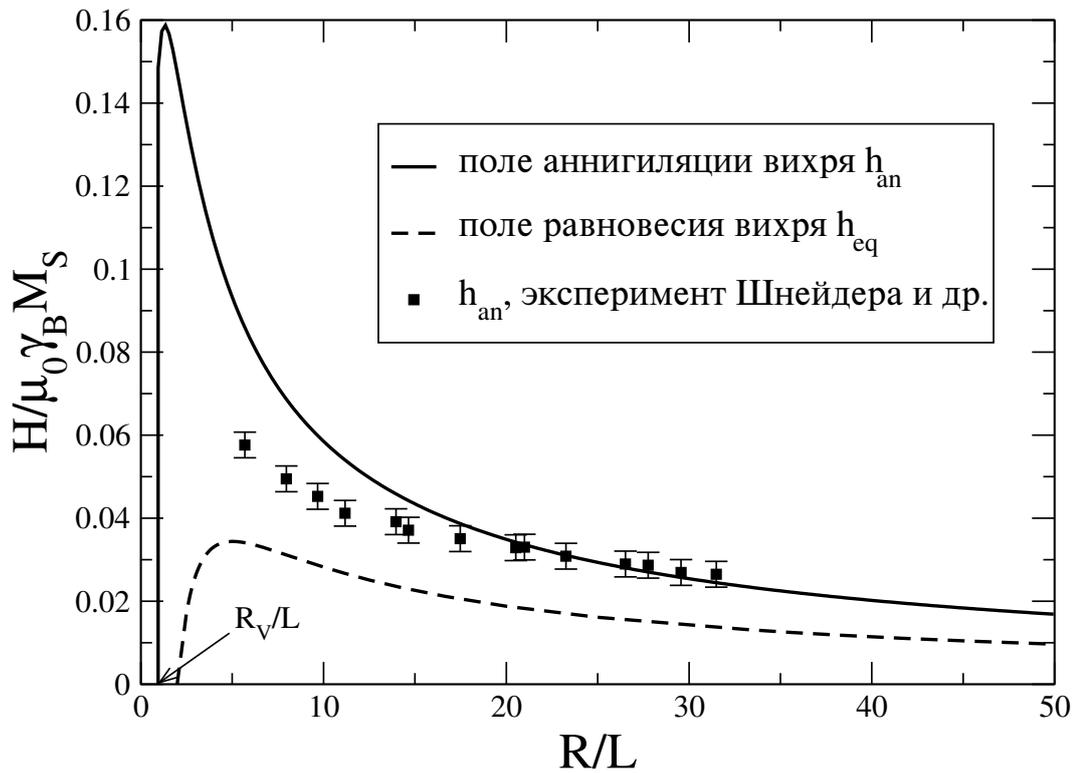


Рисунок 4.4. Характерные поля исчезновения вихря в пермаллоевом ( $L_E = 5$  нм) цилиндре толщиной  $L = 15$  нм как функция его радиуса. Экспериментальные точки взяты из [213]

линдры более подвержены. Флуктуации перебрасывают вихрь через потенциальный барьер до достижения поля аннигиляции.

Таким образом, в этом параграфе поле аннигиляции магнитного вихря и поле его равновесия с однородным состоянием вычислены в зависимости от размеров цилиндра (относительно обменной длины, определённой параметрами материала). Расчёт хорошо согласуется с экспериментом на изолированных (стоящих далеко друг от друга) цилиндрических магнитных точках и справедлив для сильно смещённых вихрей в силу того, что не использует разложение в ряд Тейлора по смещениям.

После аннигиляции вихря внешним полем цилиндр оказывается в (квази)однородном состоянии намагниченности. Эффекты взаимодействия между цилиндрами в этом состоянии (его поля рассеяния значительно больше полей, рассеиваемых вихревым состоянием) рассмотрены в §4.7, а само квазиоднород-

ное состояние изучено в §4.6.

#### 4.6. Квазиоднородные состояния намагниченности цилиндра

В §4.4 уже рассмотрено квазиоднородное состояние, каковым является “большой вихрь” чуть выше линии  $b$  на магнитной фазовой диаграмме (рисунок 4.2), когда намагниченность в цилиндре почти однородна и перпендикулярна плоскости его основания (параллельна оси цилиндра). Ниже линии  $b$  на рисунке 4.2 намагниченность является однородной, а в области линии  $a$  уже сильно неоднородной. Здесь, обобщая модель (3.9), рассмотрено квазиоднородное состояние намагниченности в плоскости основания цилиндра. Это рассмотрение позволяет уточнить классический результат Джозефа [214] для перехода между (квази) однородным состоянием в плоскости основания цилиндра и однородным состоянием, перпендикулярным этой плоскости. Из него так же станет очевидной невозможность [215] существования в конечных полях полностью однородного в плоскости основания цилиндра состояния намагниченности.

В качестве отправной точки выберем состояние с двумя “ежами” в противоположных сторонах цилиндра, изображённое на рисунке 2.12г. В квазиоднородном состоянии боковые заряды присутствуют всегда. Поэтому можно отодвинуть “ежей” от границы цилиндра в функции (3.9) и сделать расстояние от них до границы параметром в методе Ритца. Проще всего это сделать масштабированием. Так появляется выражение (4.25) для магнитной текстуры с произвольным масштабированием, описываемым параметром  $p$ , которое уже использовалось в расчётах проекта Magnetism@home.

Из него, в случае цилиндра с круговым основанием  $|z| \leq 1$ , для которого  $T(t) = t$ ,  $T'(t) = 1$  и  $T^{(-1)}(z) = z$ , после замены переменных  $c \rightarrow k$   $a \rightarrow a/k$

в пределе  $k \rightarrow 0$  получим  $f(z) = (\bar{a}z^2/p^2 - a)/2$ . Положим  $a$  действительным, что фиксирует направление средней намагниченности цилиндра вдоль оси  $OX$ . Тогда (в предположении, что величина параметра  $p$  достаточно велика, а размер ядер “ежей” достаточно мал для того, чтобы они лежали полностью вне цилиндра) квазиоднородное в плоскости цилиндра состояние намагниченности соответствует мерону (средней строке в (3.4)), построенному на базе этой функции. То есть

$$w(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{p^2 - z^2}{p^2 - \bar{z}^2}}, \quad (4.51)$$

где  $a$  сокращается, а  $p > 1$ . Это и есть модель для квазиоднородного состояния, которая здесь рассмотрена аналитически. Численно, такие распределения намагниченности покрываются расчётами по более общему выражению (4.25), использованному в проекте Magnetism@home. При  $p = 1+0$ , “ежи” расположены у границы цилиндра, при увеличении  $p$  они расходятся и, при  $p \rightarrow \infty$ , состояние цилиндра становится полностью однородным  $w(z, \bar{z}) = 1$ ,  $m_X = 1$ ,  $m_Y = 0$ . Промежуточные значения  $1 < p < \infty$  соответствуют квазиоднородным в плоскости состояниям как, например, показанное на рисунке 4.5. Выражение (4.51) является решением уравнения Эйлера (1.65), то есть локально экстремальным с точки зрения обменного функционала для любых значений  $p$ . Но только одно значение  $p$  соответствует минимуму полной энергии цилиндра.

В отсутствие внешнего магнитного поля равновесное значение  $p$  и энергия соответствующей магнитной конфигурации (4.51) зависят только от материала и геометрических размеров цилиндра. Эту зависимость и другие равновесные свойства магнитной текстуры (4.51) можно получить путём минимизации полной энергии цилиндра, включая магнитостатическую.

Вычисление обменной энергии (нормированной на  $\mu_0\gamma_B M_S^2 V$ ) можно провести прямым интегрированием, что даёт

$$\mathcal{E}_{\text{EX}} = \frac{1}{\mu_0\gamma_B M_S^2 V} \frac{C}{2} \int_V ((\nabla m_X)^2 + (\nabla m_Y)^2) d^3\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\rho^2} \log \frac{p^4}{p^4 - 1}, \quad (4.52)$$

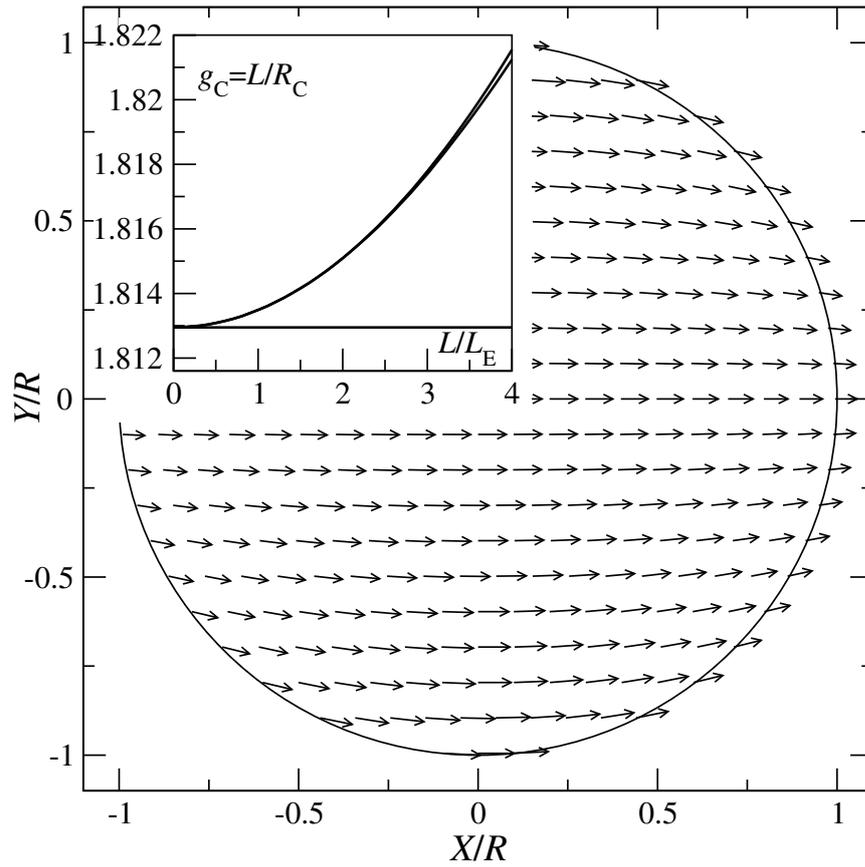


Рисунок 4.5. Равновесное состояние типа “лист” в круговом ферромагнитном цилиндре с  $L/L_E = 0.5$  и  $R/L_E = 3$  для которого  $p_{EQ} \approx 2.05$ . Вставка показывает зависимость критического фактора формы цилиндра  $g_c$  (соответствующего переходу между состояниями намагниченными в плоскости основания и перпендикулярно ему) от толщины цилиндра. Горизонтальная линия соответствует  $g_{c0} \approx 1.812952 \approx 1/0.551587$

где  $V = \pi LR^2$  — объём цилиндра,  $L$  — его толщина,  $R$  — его радиус, а  $\rho = R/L_E$ .

Вычисление магнитостатической энергии сложнее. Проведём его с использованием метода магнитных зарядов, описанного в §1.2.2. Объёмную плотность магнитных зарядов (1.16) в единицах  $M_S/R$ , созданную распределением намагниченности (4.51) можно представить в виде

$$\rho = \frac{2\eta \cos \varphi}{\sqrt{\eta^4 + p^4 - 2p^2\eta^2 \cos 2\varphi}} \left( 1 + \frac{p^2 - 1}{2} \delta(1 - \eta) \right), \quad (4.53)$$

где  $\eta = \sqrt{X^2 + Y^2}/R$  и  $\varphi$  — полярные координаты, центрированные в основа-

нии цилиндра, а  $\delta$ -функция Дирака считается правосторонней. Это выражение включает поверхностные (на боковой поверхности цилиндра) и объёмные магнитные заряды. Магнитостатическую энергию этих зарядов, в той же нормировке на  $\mu_0\gamma_{\text{В}}M_{\text{С}}^2V$ , можно записать как

$$\mathcal{E}_{\text{MS}} = \int_0^g \int_0^g \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\eta_1\eta_2\varrho(\eta_1, \varphi_1)\varrho(\eta_2, \varphi_2) d\zeta_1 d\zeta_2 d\eta_1 d\eta_2 d\varphi_1 d\varphi_2}{2(2\pi)^2 g \sqrt{(\zeta_1 - \zeta_2)^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}}, \quad (4.54)$$

где  $g = L/R$  — безразмерный радиус цилиндра. Из-за наличия интегрируемой сингулярности, данный интеграл непросто вычислить даже численно. Но он легко факторизуется аналитически, как описано в Приложении 4.1, используя интеграл Липшица (4.93) и теорему сложения для функций Бесселя (4.92). Результат можно представить в виде ряда по степеням  $1/p^2$

$$\mathcal{E}_{\text{MS}} = \mathcal{E}^{\parallel}(g) + \frac{\mathcal{E}_2(g)}{p^2} + \frac{\mathcal{E}_4(g)}{p^4} + \dots \quad (4.55)$$

$$\mathcal{E}^{\parallel}(g) = \int_0^{\infty} dk \frac{f_{\text{MS}}(kg) J_1^2(k)}{k} > 0 \quad (4.56)$$

$$\mathcal{E}_2(g) = \int_0^{\infty} dk \frac{f_{\text{MS}}(kg) J_1(k) J_3(k)}{k} < 0 \quad (4.57)$$

$$\mathcal{E}_4(g) = - \int_0^{\infty} dk \frac{f_{\text{MS}}(kg) J_0(k) J_3(k)}{k} > 0 \quad (4.58)$$

где функция  $f_{\text{MS}}(x) = 1 - (1 - e^{-x})/x$  получается после интегрирования по толщине цилиндра (4.96). Интегралы (4.56)-(4.58) не выражаются в терминах элементарных функций, но они являются функциями одной переменной, а значит их несложно протабулировать численно.

Ряд (4.55) сходится очень быстро потому что для рассматриваемых слабо-неоднородных состояний  $p \gg 1$ . Это позволяет ограничиться анализом только первых двух членов в (4.55). Нужно также отметить, что все члены порядка  $1/p^4$  и выше входят в этот ряд с положительными коэффициентами, отрицательным является только коэффициент перед  $1/p^2$ .

Полную энергию  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{ЕХ}} + \mathcal{E}_{\text{MS}}$  можно теперь минимизировать по  $p$  анали-

тически. Это приводит к квадратному уравнению для  $p_{\text{EQ}}^2$ , физическое решение которого можно представить в виде

$$p_{\text{EQ}} = \sqrt{\coth(\alpha/2)} \quad (4.59)$$

$$\mathcal{E}_{\text{EQ}} = \mathcal{E}^{\parallel}(g) + \mathcal{E}_2(g) \frac{\cosh \alpha - 1 - \log \cosh^2(\alpha/2)}{\sinh \alpha}, \quad (4.60)$$

где  $\sinh \alpha = -4\pi\rho^2\mathcal{E}_2(g) > 0$ . Параметр  $\alpha$  зависит только от магнитных параметров материала и геометрических размеров цилиндра. Распределение типа “лист” для конкретного цилиндра показано на рисунке 4.5. Вследствие того, что величина  $|e_2(g)| < 0.015$  мала, можно получить ещё более простую приближённую формулу  $\mathcal{E}_{\text{EQ}} \approx \mathcal{E}^{\parallel}(g) - \pi\rho^2\mathcal{E}_2^2(g)$ , раскладывая выражение (4.60) в ряд по степеням  $\alpha$ . Из этого выражения следует, что энергия состояния типа “лист” всегда ниже, чем энергия однородно намагниченного состояния  $\mathcal{E}^{\parallel}(g)$  потому что второй член в (4.60) является отрицательным для всех значений  $\alpha$ . Также из-за того, что  $p_{\text{EQ}} < \infty$  для всех  $\alpha > 0$ , и  $\alpha = 0$  соответствует либо  $R = 0$ , либо  $L = 0$ . То есть нет другой возможности, кроме как прийти к выводу, что намагниченное в плоскости цилиндра состояние является абсолютно однородным только если объём цилиндра равен нулю. В реальных цилиндрах состояние намагниченности, лежащей в плоскости их основания, всегда неоднородное.

Используя соотношение между магнитометрическими размагничивающими факторами [214], энергию однородно намагниченного перпендикулярно плоскости его основания цилиндра можно выразить как

$$\mathcal{E}^{\perp}(g) = \frac{1 - 4\mathcal{E}^{\parallel}(g)}{2}. \quad (4.61)$$

Сравнивая энергию равновесного “листа” с энергией однородного состояния, намагниченного перпендикулярно плоскости цилиндра (4.61), можно вычислить фактор формы  $g_{\text{C}}$  или критический радиус цилиндра  $R_{\text{C}}$ , соответствующий переходу между этими состояниями. Для малых отношений  $L/L_{\text{E}}$  его

можно выразить как

$$g_C = \frac{L}{R_C} = g_{C0} + \Delta g \left( \frac{L}{L_E} \right)^2 \quad (4.62)$$

$$\Delta g = \frac{\pi \mathcal{E}_2(g_{C0})^2}{3g_{C0}^2 \mathcal{E}'(g_{C0})} \approx 0.000\,536\,982 \quad (4.63)$$

где штрих означает производную, а  $g_{C0} \approx 1.812\,952 \approx 1/0.551\,587$  соответствует переходу между однородными состояниями, рассмотренному Джозефом [214] и получается из условия  $\mathcal{E}^{\parallel}(g_{C0}) = \mathcal{E}^{\perp}(g_{C0})$ . Зависимости  $g_C$  от  $L/L_E$ , одна из которых вычислена из (4.62), а другая получена численно без разложения по степеням  $L/L_E$ , показаны в виде вставки на рисунке 4.5. Эти две зависимости сливаются в одну и визуально не различимы.

При увеличении радиуса цилиндра  $R$  состояние типа “лист” в конце концов становится нестабильным по отношению к формированию магнитного вихря и превращается в него в результате перехода первого рода [21]. Дипольный момент “листа” (средняя по объёму намагниченность) является возрастающей функцией  $p$

$$\langle m_X \rangle = 1 - \frac{1}{12p^4} - \frac{3}{320p^8} - \frac{5}{1792p^{12}} - \dots \quad (4.64)$$

Таким образом, основываясь на подходе, представленном в Главе 3, здесь представлена модель квазиоднородного состояния намагниченности в круговом цилиндре и уточнён результат Джозефа о критическом радиусе перехода между (квази) однородными состояниями в плоскости и перпендикулярно плоскости основания цилиндра. Как обычно (см. §2.6), эффект от учёта поправок высокого порядка оказывается незначительным. Так бывает часто, но не всегда. Далее рассмотрен случай, когда учёт слабой неоднородности намагниченности приводит к принципиально новым эффектам.

#### 4.7. Анизотропия в квадратном массиве круговых цилиндров

В 1997-м году большой группой исследователей был экспериментально обнаружен эффект анизотропии четвёртого порядка спин-волновых свойств (в данном случае спиновые волны служат инструментом измерения равновесной магнитной энергии наноструктуры) квадратного массива круговых магнитных цилиндров при повороте намагниченности в плоскости массива [216]. На первый взгляд можно было бы сказать, что ничего удивительного в наличии анизотропии 4-го порядка у квадратного массива нет. Но это не так.

Удивительно то, что такой анизотропии в квадратном массиве быть не должно. Если последовательно и без приближений решить магнитостатическую задачу о распределении полей рассеяния в квадратном массиве однородно намагниченных круговых цилиндров [19], то окажется, что, хотя пространственное распределение полей рассеяния сильно зависят от направления намагниченности в цилиндрах, магнитостатическая энергия относительно этого направления является (в силу тождества  $\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 = 1$ ) полностью изотропной. Это потому, что (как следует из уравнений Максвелла) взаимодействие параллельных диполей (чем и является состояние однородной намагниченности) зависит только от вторых степеней направляющих косинусов и может произвести только одноосную в плоскости массива анизотропию даже если массив прямоугольный. Но в пределе, когда оба периода прямоугольной решетки равны, анизотропия в плоскости массива полностью исчезает.

Таким образом, ясно, что эффект анизотропии является следствием неоднородности намагниченности цилиндров. Например, двухдоменные цилиндры (разделённые на два противоположно намагниченных в плоскости домена), действительно демонстрируют анизотропию четвёртого порядка [217]. Тем не менее сомнительно, что такая конфигурация доменов выживет в почти насыщающем

магнитном поле, характерном для экспериментов по измерению магнитных резонансов. В таких полях можно ожидать, что цилиндры являются квазиоднородно намагниченными, а модель для квазиоднородной намагниченности одиночного цилиндра была только что исследована в §4.6. Применим её для описания взаимодействия квазиоднородно намагниченных цилиндров в массиве.

В качестве отправной точки возьмём следующее выражение для квазиоднородной в плоскости магнитной текстуры

$$w(z, \bar{z}) = e^{i\varphi_0} \sqrt{\frac{p^2 - e^{-2i\varphi_0} z^2}{p^2 - e^{2i\varphi_0} \bar{z}^2}}. \quad (4.65)$$

Оно получено точно так же, как и (4.51), с той лишь разницей, что теперь величина  $a$  не предполагается действительной (как это было ранее в аксиально симметричном случае), а имеет комплексную фазу  $a = |a|e^{i\varphi_0}$ . Модуль  $|a|$  при этом сокращается, а фаза  $\varphi_0$  остаётся и входит в (4.65). Она управляет направлением квазиоднородной намагниченности, которая теперь может быть направлена не только вдоль оси  $OX$ , а произвольно в плоскости цилиндра. Параметр  $p$  позволяет отодвигать “ежей” от границы цилиндра (см. рисунок 4.6 для  $p = 2$ ).

Для вычисления магнитостатической энергии массива таких точек, как обычно, воспользуемся методом магнитных зарядов. Плотность магнитных зарядов (1.16) в единицах  $M_S/R$ , соответствующая распределению намагниченности (4.65) можно представить как:

$$\rho = \frac{2\eta \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{\eta^4 + p^4 - 2p^2\eta^2 \cos 2(\varphi - \varphi_0)}}, \quad (4.66)$$

$$\sigma = \frac{(p^2 - 1) \cos(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{1 + p^4 - 2p^2 \cos 2(\varphi - \varphi_0)}}, \quad (4.67)$$

где  $\eta = r/R \leq 1$  и  $0 < \varphi \leq 2\pi$  — нормированные полярные координаты на основании цилиндра. Они отличаются от (4.53) только возможностью поворота на угол  $\varphi_0$ .

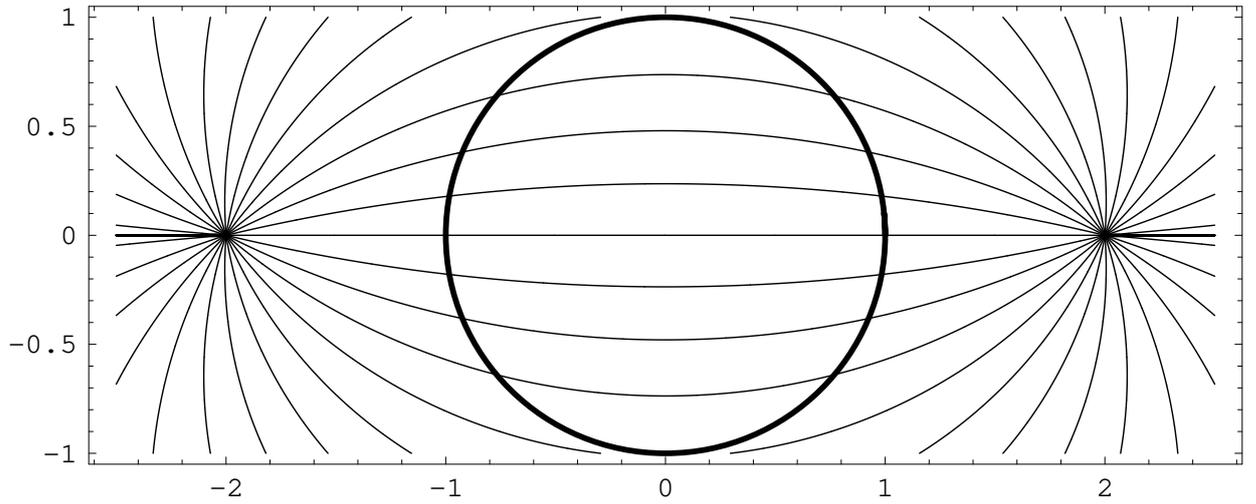


Рисунок 4.6. Квазиоднородное состояние намагниченности (4.65) при  $p = 2$ . Линии внутри частицы (окружность изображает её контур) являются касательными к векторам намагниченности

Чтобы учесть периодичность массива и связанные с ней взаимодействия между цилиндрами, представим объёмную плотность зарядов (включив в неё поверхностную) в виде ряда Фурье:

$$\tilde{\varrho}_{n,m}(qz) = \frac{P \tilde{\varrho}_{n,m}}{T} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-2\pi i qz Z} dZ = \frac{\tilde{\varrho}_{n,m} P \Lambda \sin qz L \pi}{qz L \pi} \quad (4.68)$$

$$\tilde{\varrho}_{n,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \sigma F|_{\eta=1} + \int_0^1 \eta d\eta \varrho F \right), \quad (4.69)$$

$$F = e^{-2\pi i P(nX+mY)} = e^{-2\pi i P\eta(n \cos \varphi + m \sin \varphi)}, \quad (4.70)$$

где (в рамках данного параграфа) радиус частицы  $R$  и её толщина  $L$  нормированы на период массива  $P = R/T$ ,  $\Lambda = L/T$ ,  $T > 2R$ ;  $\tilde{\varrho}_{0,0} \equiv 0$  в силу отсутствия магнитных монополей.

Гармонические функции  $F$ , служащие базисом преобразования Фурье, являются собственными функциями дифференциального оператора Лапласа. Это значит, что уравнение Пуассона (1.15) для скалярного потенциала размагничивающего поля в Фурье-пространстве становится алгебраическим и его несложно

решить. Нормированная (в рамках данного параграфа на объём элементарной ячейки массива) магнитостатическая энергия взаимодействия размагничивающего поля и магнитных зарядов  $\mathcal{E}_{\text{MS}} = E_{\text{MS}}/(\mu_0\gamma_{\text{В}}M_{\text{S}}^2T^2L)$  равна

$$\mathcal{E}_{\text{MS}} = \frac{P^2\Lambda^2}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{|\tilde{\varrho}_{n,m}|^2}{\Lambda^2(n^2 + m^2) + \xi^2} \frac{\sin^2 \xi\pi}{(\xi\pi)^2}, \quad (4.71)$$

где  $|\tilde{\varrho}_{n,m}|^2 = \tilde{\varrho}_{n,m}\tilde{\varrho}_{-n,-m}$ ,  $\xi = q_{\text{Z}}L$ . Интеграл в этом уравнении можно взять, что даёт

$$e_{\text{M}} = \frac{P^2}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\varrho}_{n,m}|^2 f_{\text{MS}}(2\pi\Lambda\sqrt{n^2 + m^2})}{n^2 + m^2}, \quad (4.72)$$

$$f_{\text{MS}}(x) = 1 + \frac{e^{-x} - 1}{x}. \quad (4.73)$$

Заметьте, что выражение для  $f_{\text{MS}}(x)$  здесь совпадает с (4.96), полученным другим путём.

Для вычисления Фурье-компонент (4.69) заметим, что знаменатели в выражениях для боковых  $\sigma$  и объёмных зарядов  $\varrho$  можно разложить в ряды по степеням  $1/p^2$  (малый параметр для квазиоднородного состояния намагниченности в точках), используя следующее тождество для производящей функции полиномов Лежандра  $P_i(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{r^4 + p^4 - 2p^2r^2 \cos \psi}} = \frac{1}{p^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^{2i} P_i(\cos \psi)}{p^{2i}} \quad (4.74)$$

где  $\psi = 2(\varphi - \varphi_0)$ . Используя тождества (формулы 6.521 в [218]) для функций Бесселя первого рода  $J_k(x)$ , базис Фурье (4.70) можно представить в виде

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-i)^k (-1)^l J_k(\alpha n) J_l(\alpha m) e^{i(k+l)\varphi}, \quad (4.75)$$

где  $\alpha = 2\pi lPr$ . В этом представлении угловой интеграл (4.69) легко вычислить: при заданном  $i$  он ненулевой только для  $k + l = \pm(2j + 1)$  где  $j = 1, 2, \dots, i$ . Это убирает (делая её конечной) одну бесконечную сумму из тройного суммирования по  $i, k, l$ , возникающего после применения разложений (4.74), (4.75).

Оставшиеся бесконечные суммы по  $k + l = (2j + 1)$  и  $k + l = -(2j + 1)$  можно затем вычислить и скомбинировать, используя теорему сложения для функций Бесселя, что даёт  $\tilde{\varrho}_{n,m}$  для заданного  $i$  в терминах конечной суммы функций Бесселя порядка  $2j + 1$  для  $j = 1, 2, 3, \dots, i$ , которые затем нужно проинтегрировать по  $r$  для вычисления вклада объёмных зарядов в (4.69). Это вычисление довольно громоздкое, его лучше всего проводить, при помощи системы компьютерной алгебры.

Для получения разложения магнитостатической энергии до четвёртого порядка по  $1/p^4$  (пренебрегая членами порядка  $\propto 1/p^6$ ) достаточно вычислить Фурье-компоненты объёмных зарядов для  $i = 0, 1$  и поверхностных зарядов для  $i = 0, 1, 2$  (из-за  $p^2$  в (4.67)). Окончательный результат выглядит так

$$\mathcal{E}_{\text{MS}} = \mathcal{E}_0 + \frac{\mathcal{E}_2 + \cos(4\varphi_0)\mathcal{E}_{2a}}{p^2} + \frac{\mathcal{E}_4 + \cos(4\varphi_0)\mathcal{E}_{4a}}{p^4} + \dots, \quad (4.76)$$

$$\mathcal{E}_i = P^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_i(Pk_{m,n}, \psi_{m,n})}{m^2 + n^2} f_{\text{MS}}(\Lambda k_{m,n}), \quad (4.77)$$

где  $k_{m,n} = 2\pi\sqrt{m^2 + n^2}$ ,  $\psi_{m,n} = \frac{1}{2} \arctan(\frac{2mn}{n^2 - m^2})$ ,

$$K_0(x) = J_1^2(x), \quad (4.78)$$

$$K_2(x) = J_1(x)J_3(x), \quad (4.79)$$

$$K_{2a}(x, \psi) = J_1(x)J_3(x) \cos(4\psi), \quad (4.80)$$

$$K_4(x) = -2J_0(x)J_3(x)/x, \quad (4.81)$$

$$K_{4a}(x, \psi) = (J_3(x)^2 + 2J_1(x)J_5(x)) \cos(4\psi)/2. \quad (4.82)$$

Функции  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(P, \Lambda)$  зависят только от геометрии массива, представляя собственную энергию и взаимодействие объёмных и боковых зарядов в одном цилиндре и между всеми цилиндрами массива. Их можно проверить перенормировкой на единицу объёма цилиндра (вместо объёма элементарной ячейки) и переходом к пределу  $T \rightarrow \infty$ . В этом случае  $\mathcal{E}_{2a} = \mathcal{E}_{4a} = 0$ , а  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_4$  становятся идентичными  $\mathcal{E}^{\parallel}$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_4$  из выражений (4.56), (4.57), (4.58) для

изолированного цилиндра. В силу того, что одна и та же программа системы компьютерной алгебры использовалась при выводе всех  $K_i$ , включая угловые (помеченные индексом  $a$ ), можно ожидать с большой долей уверенности, что все они правильные.

Из (4.76) сразу видно, что для однородно намагниченных точек ( $p \rightarrow \infty$ ) магнитостатическая энергия не имеет угловой зависимости и полностью изотропна для всех направлений намагниченности цилиндров в плоскости массива. Функция  $\mathcal{E}_0$  таким образом представляет собой энергию однородно намагниченного массива.

Обменная энергия и энергия Зеемана для взаимодействия намагниченности с внешним полем не содержат взаимодействия между точками, их можно вычислять для каждой точки в отдельности. Перенормируя (4.52) как  $\mathcal{E}_{\text{EX}} = E_{\text{EX}}/(\mu_0\gamma_{\text{В}}M_{\text{S}}^2T^2L)$  и используя выражение для средней намагниченности (4.64) получим вплоть до  $1/p^4$ :

$$\mathcal{E}_{\text{EX}} + \mathcal{E}_{\text{Z}} = \frac{\pi}{\tau^2 p^4} - \pi \rho^2 h \cos(\varphi_0 - \varphi_1) \left(1 - \frac{1}{12p^4}\right) + O\left(\frac{1}{p^8}\right) \quad (4.83)$$

где  $\tau = T/L_{\text{E}}$ ,  $h = \mathbf{H}/(\mu_0\gamma_{\text{В}}M_{\text{S}})$  — величина приложенного магнитного поля, а  $\varphi_1$  — угол приложения этого поля по отношению к векторам решётки.

Теперь остаётся минимизировать сумму (4.76) и (4.83) и найти равновесные значения  $p$  и  $\varphi_0$ . Для  $\varphi_0$  при этом получается два решения: опережающее и запаздывающее. Соответствующие углы  $\varphi_0$  лишь немного отклоняются от направления магнитного поля  $\varphi_1$ . Это означает, что в зависимости от того увеличивается угол магнитного поля со временем или уменьшается, намагниченность массива демонстрирует гистерезис. Вследствие того, что обычно измерения магнитных резонансов производятся в больших, почти насыщающих, магнитных полях, можно ожидать, что гистерезис будет небольшим. Пренебрегая им для простоты, положим  $\varphi_0 = \varphi_1$ . Минимизируя затем полную энергию по  $p$ , полу-

чим

$$p_{\text{EQ}}^2 = \frac{h\pi\rho^2 + 12(\pi/\tau^2 + \mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_{4a} \cos 4\varphi_1)}{6(-\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_{2a} \cos 4\varphi_1)}. \quad (4.84)$$

Будем пока считать, что знаменатель в этих выражениях всегда положителен, то есть  $\mathcal{E}_2 < 0$ ,  $\mathcal{E}_{2a} > 0$  и  $|\mathcal{E}_{2a}| < |\mathcal{E}_2|$ . Эти соотношения выполняются во всех рассмотренных здесь экспериментах. Нарушение этого предположения обсуждается в конце параграфа. Значение  $p_{\text{EQ}}$  полностью определяет магнитную текстуру массива. Подставляя его обратно в выражение для энергии, можно получить равновесную энергию массива с заданными магнитными свойствами, геометрией и под действием заданного магнитного поля. Рассмотрим угловую зависимость этой энергии.

Самая большая (кроме константы) Фурье-гармоника в угловой зависимости равновесной энергии пропорциональна  $\cos 4\varphi_1$ , что можно однозначно классифицировать как наличие анизотропии 4-го порядка. Гармоники более высоких порядков тоже присутствуют, но они, хоть и меняют угловую зависимость энергии, не изменяют позиции её локальных угловых минимумов при  $\varphi_1 = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$  и максимумов при  $\varphi_1 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Это позволяет ввести константу анизотропии 4-го порядка, представив равновесную энергию одного цилиндра (после перенормировки на объём магнитного материала в ячейке, то есть на объём цилиндра  $V$ ) как  $E = E_0 + K_4 \cos 4\varphi_1$  с  $K_4 > 0$ . Значение  $K_4$  это половина разности равновесной энергии между её значениями в максимуме и минимуме ( $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_1 = \pi/4$ ).

Большое магнитное поле, которое приложено в типичных экспериментах по измерению магнитного резонанса, так же выравнивает намагниченность цилиндров, как и обменное взаимодействие, только эффект магнитного поля гораздо сильнее. Поэтому для упрощения пренебрежём обменом, полагая  $\tau \rightarrow \infty$ , что приводит к следующему выражению для константы анизотропии 4-го по-

рядка

$$K_4 = \frac{\mu_0 \gamma_B M_S^2}{2\pi \rho^2} \left( \frac{3(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_{2a})^2}{12(\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_{4a}) + \pi h \rho^2} - \frac{3(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{2a})^2}{12(\mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_{4a}) + \pi h \rho^2} \right). \quad (4.85)$$

Полное выражение с учётом обменного взаимодействия (более точное при  $T \simeq L_E$ ) получить так же можно, оно построено на рисунках ниже. Тем не менее для сравнения с экспериментом, точности (4.85) вполне достаточно. Можно также получить асимптотическое разложение для  $K_4$  при больших полях  $h \gg 1$

$$K_4 = -\mu_0 \gamma_B M_S^2 \frac{6\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_{2a}}{\pi^2 \rho^4 h} + O\left(\frac{1}{h^2}\right). \quad (4.86)$$

Рассмотрим теперь эксперимент из [216]. При интерпретации своих измерений авторы использовали выражение для анизотропии в виде  $K_4^* \sin^2 \psi \cos^2 \psi$  (где  $\psi$  — угол между магнитным моментом цилиндра и осью решётки) в своей численной процедуре для вычисления резонансных частот спиновых волн и подогнали получившимся выражением измеренные спектры, определив  $K_4^*$ . Так как намагниченность цилиндров близка к однородной ( $\psi = \varphi_1$ ), этот член сдвигает полную энергию цилиндров, которой и следуют измеренные в эксперименте спинволновые моды. Из-за того, что  $\sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1$  осциллирует между 0 и 1/4, в то время как  $\cos 4\varphi_1$  между  $-1$  и  $1$ , причём максимумы первого выражения соответствуют минимумам второго (и наоборот), определения константы анизотропии в [216] и здесь связаны множителем  $-8$ .

Другая особенность в том, что значение  $K_4^*$  в [216] при больших полях выходит на постоянное значение. Это нельзя объяснить никакой моделью неоднородного состояния точек в массиве. Любая из них в пределе  $h \rightarrow \infty$  должна переходить в однородное состояние, не имеющее никакой анизотропии. Отсюда можно заключить, что в эксперименте присутствует другой фактор (возможно, из-за эффекта формы самого массива). Предполагая, что этот фактор не зависит от внешнего поля, просто добавим его:  $K_4^* = -8K_4 - 0.6 \times 10^5$  эрг см $^{-3}$ . Эта величина построена на рисунке 4.7 (выбирая  $M_S = 850$  эме см $^{-3}$ , что является характерной величиной для пермаллоя, но не указано в работе [216])

вместе с экспериментальными данными. Согласие с экспериментом выглядит достаточно хорошим, особенно если учесть, что точность эксперимента не позволила авторам [216] надёжно различить полевые зависимости  $K_4^*$  для двух измеренных ими массивов.

Гораздо более точный эксперимент был выполнен с использованием техники ферромагнитного резонанса [219]. В ФМР невозможно изменить величину внешнего поля, которая была равна 1100 Э. В этом фиксированном поле авторы [219] измерили поле анизотропии как функцию расстояния между цилиндрами для массивов с периодами от 1100 нм до 2500 нм. В системе единиц СГС, используемой в [219], поле анизотропии можно выразить через константу анизотропии как  $H_4 = 2K_4/M_S$ . Эта величина изображена на рисунке 4.8 вместе с параметрами массива и экспериментальными данными из [219]. Экспериментальные точки совпадают с теоретическими кривыми в пределах погрешности, когда  $K_4$  вычисляется из (4.85), в то время как упрощённое асимптотическое выражение (4.86) и его аналог более высокого порядка работают очень плохо в таких малых полях.

Возвращаясь к выражению (4.84), можно заметить, что обращение в нуль его знаменателя очень даже возможно. Это происходит для геометрических параметров цилиндра, описываемых приближённым выражением  $R_{cr}/T \approx 0.51 - 0.37 \cdot (L/T) + 0.13 \cdot (L/T)^2$  в диапазоне  $0 < L/T < 1$  и ограничивая  $R_{cr}/T$  величиной 0.5, когда это выражение даёт большее значение. При радиусах  $R > R_{cr}$  параметр  $p$  становится мнимым при определённых направлениях внешнего поля, что соответствует переходу магнитной точки в состояние типа “цветок”. В этом состоянии, в отличие от изначально рассматриваемого “листа” вектора намагниченности расходятся от линии проходящей параллельно внешнему полю через центр магнитного цилиндра. Все приведенные выше выражения справедливы и для случая мнимых  $p$ , но вследствие переходов между состояниями “цветок”  $\leftrightarrow$  “лист”, массив с точками большого радиуса  $R >$

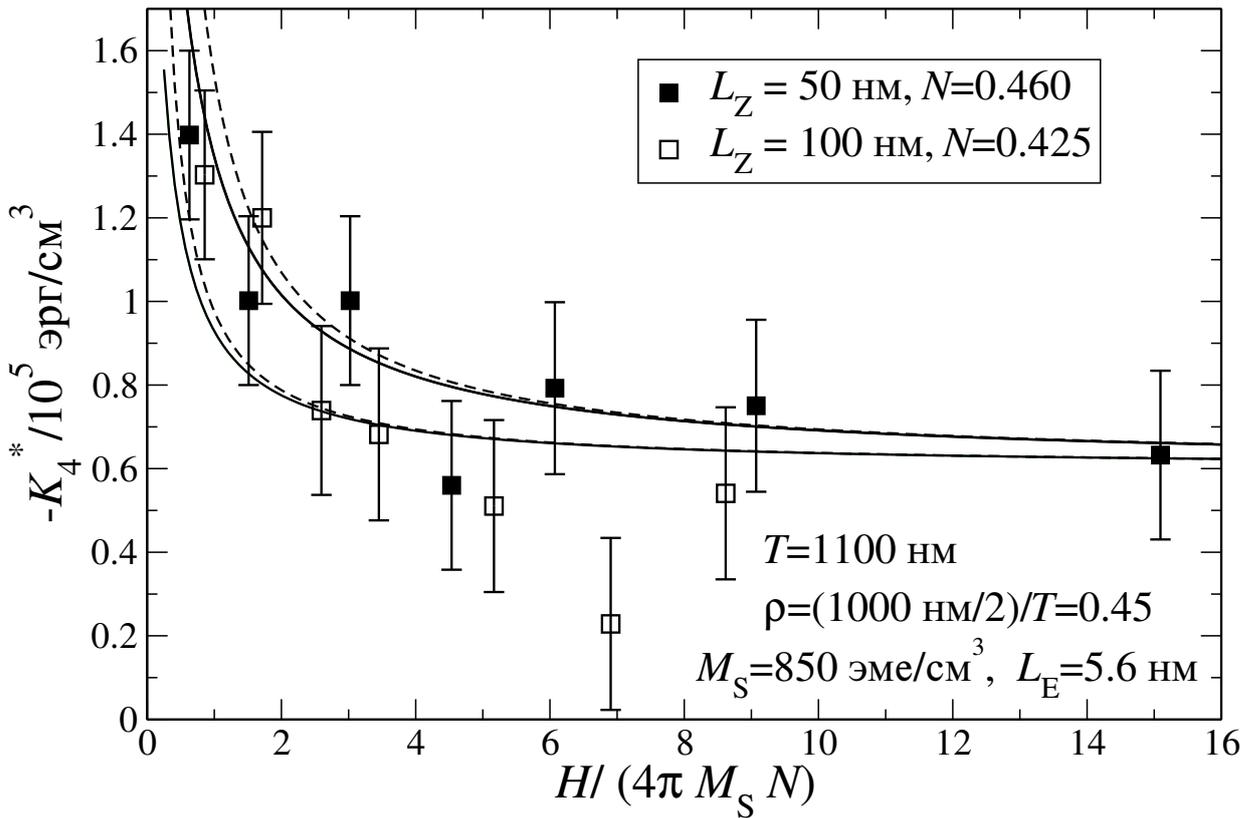


Рисунок 4.7. Зависимость константы анизотропии 4-го порядка  $K_4^*$  от величины магнитного поля, приложенного в плоскости массива. Экспериментальные точки взяты из [216]. Сплошные линии из (4.85) и полное выражение (без вычисления предела  $\tau \rightarrow \infty$ ) различить невозможно. Пунктирные линии из (4.86). Верхний набор точек и линий соответствует  $L = 100$  нм, нижний  $L = 50$  нм. Значения размагничивающего фактора в плоскости частицы  $N$  даны на вставке

$R_{cr}$  должен показывать дополнительную анизотропию 8-го порядка. Угловая зависимость равновесной энергии в таком массиве описывается выражением  $K_4 \cos 4\varphi_1 + K_8 \cos 8\varphi_1$ , в котором константа анизотропии  $K_4$  всё так же определена (4.85), а  $K_8 < 0$ . Такую анизотропию ещё предстоит обнаружить экспериментально.

В завершение нужно сказать, что рассмотренная задача об анизотропии в квадратном массиве круговых точек принадлежит к тому интересному классу задач, где проявляются эффекты высоких порядков. Это происходит потому

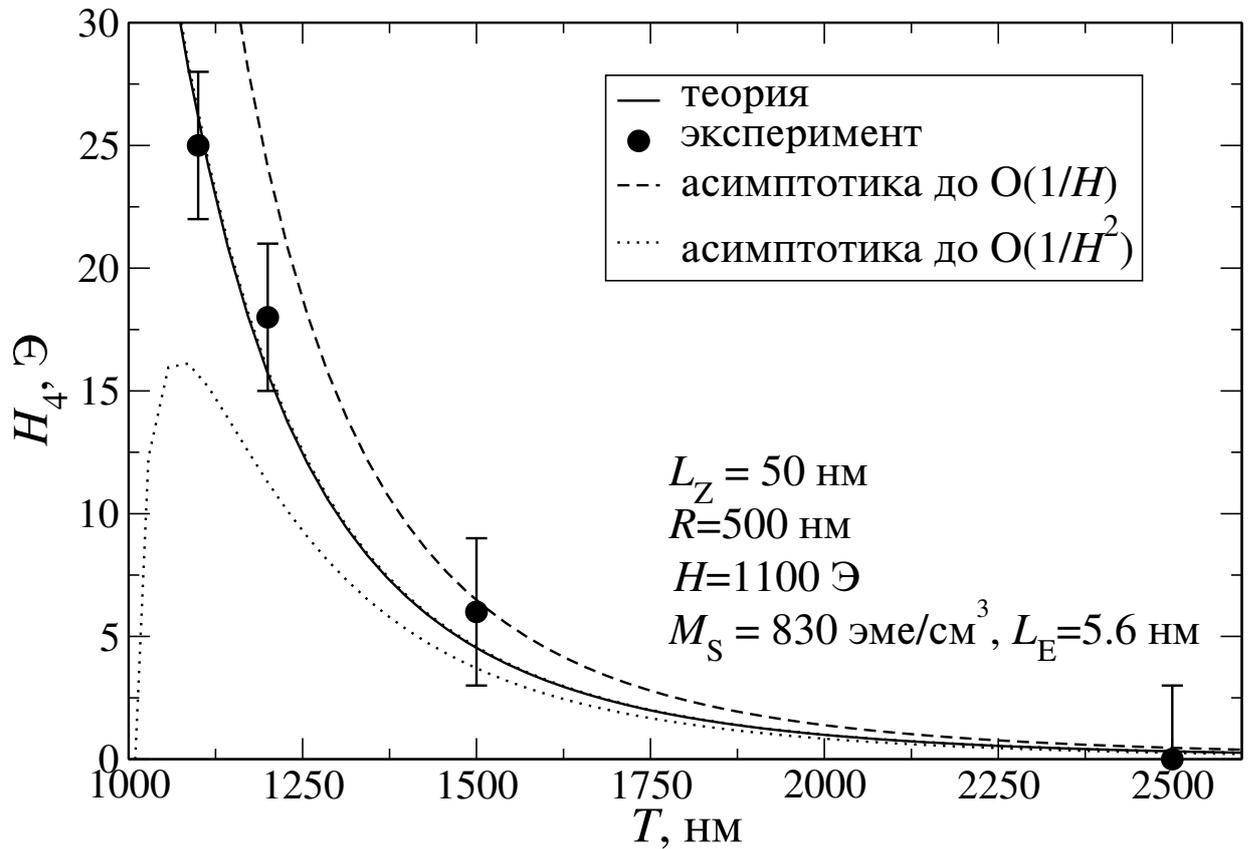


Рисунок 4.8. Зависимость поля анизотропии четвёртого порядка  $H_4$  от периода массива. Экспериментальные точки взяты из [219]. Сплошные линии из (4.85) (снова, случай конечных  $\tau$  неотличим). Линии из штрихов и точек показывают асимптотики (4.85) до порядков  $O(1/h)$  (4.86) и  $O(1/h^2)$ , соответственно. Значение  $L_E$  получено из измеренной [220] обменной константы ( $A = C/2$ )

что эффекты низких порядков, которые обычно их маскируют, оказываются запрещены симметрией, что и открывает экспериментальный доступ к более тонким эффектам.

#### 4.8. Метастабильные состояния кругового наноцилиндра

В рамках проекта Magnetism@home уже была вычислена магнитная фазовая диаграмма основных состояний кругового цилиндра (рисунок 4.2), найдено состояние типа “большой вихрь” и приближённо очерчена его область метастабильности. В этом параграфе исследуются состояния с намагниченностью в плоскости цилиндра, вычислены их области метастабильности и (вместе с известными ранее результатами) нанесены на фазовую диаграмму метастабильных состояний кругового наноцилиндра, показанную на рисунке 4.9. Обсудим сначала известные линии на этой карте.

Самыми простыми магнитными состояниями являются однородные. Их два: намагниченное в плоскости основания цилиндра и намагниченное перпендикулярно этой плоскости (параллельно оси цилиндра). В §4.6 установлено, что состояние с намагниченностью, лежащей в плоскости цилиндра, на самом деле всегда является квазиоднородным (типа “лист”). Из условия равенства энергий здесь уже вычислен (4.62) фактор формы цилиндра  $g_C = L/R_C$ , соответствующий переходу между этими двумя состояниями. Он соответствует (почти) прямой линии  $a$  на рисунке 4.9. За исключением небольшой поправки, связанной с квазиоднородностью состояния типа “лист”, эта линия была получена Джозефом [214].

Из условия равенства энергии классического вихря и (квази) однородных состояний (“листа” и “большого вихря”) следует линия  $b$ , ограничивающая снизу область геометрических размеров, где классические вихри являются основным состоянием цилиндра. Слева от линии  $a$  эта кривая соответствует равенству энергии состояния типа “лист” и магнитного вихря. За исключением небольшой поправки, связанной с квазиоднородностью состояния типа “лист”, эта часть линии  $b$  была рассчитана Усовым и Песчаным [8]. Справа от линии  $a$  линия  $b$  соот-

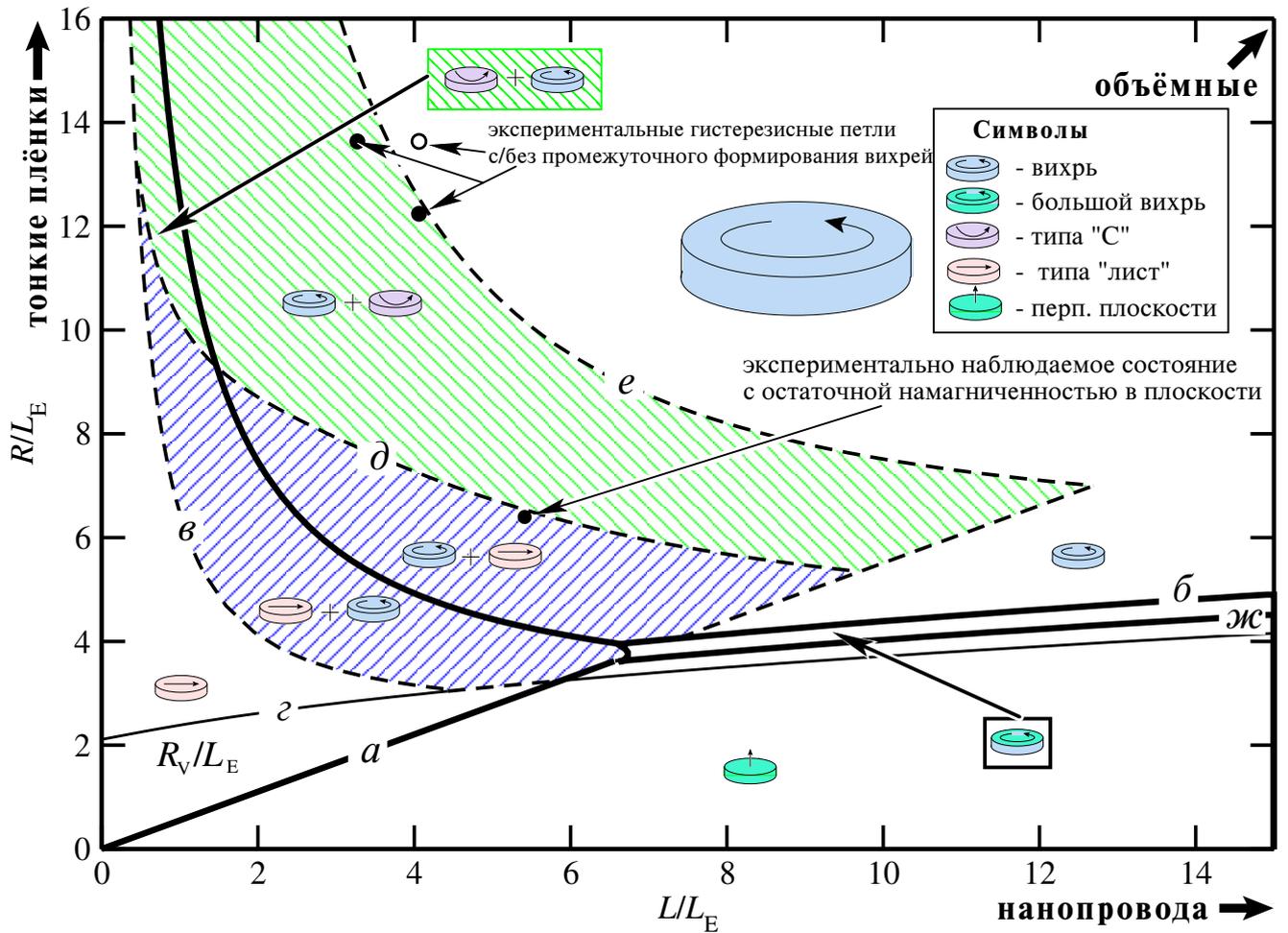


Рисунок 4.9. Основные и метастабильные состояния кругового наноцилиндра из материала с пренебрежимо малой кристаллической анизотропией и обменной длиной  $L_E$ . Сплошные толстые линии соответствуют равенству равновесных энергий различных состояний. Пунктирные линии — границы стабильности. В заштрихованных областях стабильными являются несколько состояний, левый символ при этом соответствует основному состоянию. Экспериментальные точки взяты из работ [211, 221, 222] и обсуждаются в тексте. Область метастабильности большого вихря показана отдельно на рисунке 4.2

ветствует равенству энергий классического и большого вихрей, рассчитанной в §4.4. Там же определена и кривая равновесности  $\mathcal{E}$  между большими вихрями и однородным, перпендикулярным плоскости цилиндра, состоянием. Большие вихри являются основным состоянием цилиндра в области между линиями  $b$  и  $\mathcal{E}$ .

Исследование стабильности классического вихря по отношению к малым смещениям его центра [21], даёт линию  $e$ . Ниже этой линии (при меньших  $R/L_E$ ) энергетический минимум для центра вихря в центре цилиндра превращается в максимум. Равновесный радиус ядра классического вихря  $R_V/L_E$  для различных толщин цилиндра  $L/L_E$  показан тонкой линией  $g$ . В цилиндрах меньшего радиуса, чем равновесный радиус ядра, классические вихри превращаются в большие.

В этом параграфе исследуется стабильность состояния типа “лист” относительно изгиба в плоскости цилиндра (линия  $d$ ). Приведенные ниже расчёты приводят к пересечению линии  $d$  и линии  $b$  при  $L/L_E \approx 2$ . Какое же состояние тогда должно существовать между этими линиями слева вверху? Оказывается, что нестабильность листа относительно изгиба не приводит к формированию вихря. Вместо этого появляется промежуточный энергетический минимум. Такой, что намагниченность остаётся частично изогнутой и формируется состояние типа “С”. Оно может существовать при больших радиусах и толщинах цилиндров, пока на линии  $e$  тоже не теряет стабильность, переходя в классический магнитный вихрь. Область метастабильности состояний с намагниченностью, лежащей в плоскости цилиндра, ограничена критическим фактором формы  $g_C$  (в цилиндрах с  $L > g_C R$  эти состояния нестабильны).

Отправной точкой является уже использованное ранее выражение для магнитной текстуры (4.25), где сделана замена  $a \rightarrow a/c$ ,  $c \rightarrow xa$ , предполагая  $a$  действительным, и, для цилиндра с круговым основанием  $|z| \leq 1$ , считается

$T(t) = t$ ,  $T'(t) = 1$  и  $T^{(-1)}(z) = z$ :

$$f(z) = a \left( \frac{ixz}{p} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z^2}{p^2} \right) \right). \quad (4.87)$$

Для нахождения линий  $\partial$  и  $e$  допустим ненулевые значения  $x$  в квазиоднородном состоянии ( $p > 1$  и  $|x| < 1$ ), что приводит к скручиванию “листа”. Предположим также  $a > a_0$ , так, что всегда  $|f(z)| > 1$  и распределение намагниченности представляет собой мерон  $w = \sqrt{f/\bar{f}}$ . Тогда это распределение не зависит от  $a$  и при  $x = 0$  совпадает с (4.51).

Вычисление магнитостатической энергии выполним с использованием тождеств, приведенных в Приложении 4.1. В обычной нормировке на  $\mu_0\gamma_{\text{В}}M_{\text{S}}^2L\pi R^2$  до четвёртого порядка по  $1/p$ , она равна

$$\mathcal{E}_{\text{MS}} = \mathcal{E}^{\parallel}(g) + \frac{\mathcal{E}_2(g) + x^2\mathcal{E}_{22}(g)}{p^2} + \frac{\mathcal{E}_4(g) + x^2\mathcal{E}_{42}(g) + x^4\mathcal{E}_{44}(g)}{p^4}. \quad (4.88)$$

Функции  $\mathcal{E}^{\parallel}$ ,  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_4$  точно совпадают с рассмотренными ранее и определены уравнениями (4.56), (4.57), (4.58). Три новых функции имеют вид

$$\begin{aligned} e_{22}(g) &= \int_0^{\infty} \frac{f_{\text{MS}}(kg)}{k} \frac{J_2^2(k) - J_1^2(k)}{2} dk < 0, \\ e_{42}(g) &= \int_0^{\infty} \frac{f_{\text{MS}}(kg)}{k} \frac{k^2(J_1^2(k) - J_3^2(k)) + 8J_1(k)J_3(k)}{4k^2} dk > 0, \\ e_{44}(g) &= - \int_0^{\infty} \frac{f_{\text{MS}}(kg)}{k} \frac{J_1^2(k) + 8J_2^2(k) - 9J_3^2(k)}{8} dk < 0, \end{aligned}$$

где  $f_{\text{MS}}(x) = 1 - [1 - \exp(-x)]/x$ . Их можно выразить в замкнутом виде через полные эллиптические интегралы.

Обменная энергия в той же нормировке и до того же порядка по  $1/p$  имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{EX}} = \frac{1 + 2(p^2 - 2)x^2 + 4x^4}{p^4\rho^2}, \quad (4.89)$$

где  $\rho = R/L_{\text{E}}$ .

Полная энергия  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{EX}} + \mathcal{E}_{\text{MS}}$  является многочленом по  $1/p$  и  $x$ , её несложно минимизировать аналитически. Решение для равновесного  $p$  всегда существует и стабильно. А вот для  $x$  уравнения дают два решения. При определённой геометрии стабильным является решение с  $x = 0$  (состояние типа “лист”), в то время как при других соотношениях геометрических параметров точка  $x = 0$  превращается в максимум и равновесным становится другое значение  $|x| < 1$  (что соответствует состоянию типа “С”, или частично свёрнутому “листу”). Для ещё бóльших цилиндров остаётся единственное решение  $x > 1$ , что соответствует вихрю. Критические линии  $d$  и  $e$  получаются при совместном решении трёх уравнений  $\partial\mathcal{E}/\partial p = 0$ ,  $\partial\mathcal{E}/\partial x = 0$  и  $\partial^2\mathcal{E}/\partial x^2 = 0$ . Эти уравнения являются полиномиальными и обе критические линии (два разных их решения) можно выразить в замкнутом виде.

Ряд экспериментальных и численных результатов [211, 221, 222] согласуется с картой, изображённой на рисунке 4.9. Остановимся лишь на тех, которые непосредственно подтверждают вычисленные только что линии. Сначала, обратим внимание на “выпавшую” [211] точку из эксперимента [221], где остаточное намагниченное в плоскости состояние было найдено далеко в глубине области геометрических параметров, соответствующих равновесному магнитному вихрю (выше линии  $b$ ). Эта точка, приведенная на рисунке 4.9 точно попадает в область метастабильности состояния типа “лист”, чуть ниже линии  $d$ .

Ещё более прямое подтверждение можно найти в работе [222], где измерялись и классифицировались петли гистерезиса в плоскости для цилиндров разных размеров. Эти данные позволяют провести границу между точками меньшего объёма с гистерезисом типа когерентного вращения и бóльшими точками, петли которых имеют вид, характерный для зарождения/аннигиляции магнитного вихря. Ниже этой границы, уменьшение поля из насыщения приводит к возникновению состояния типа “С”, которое переворачивается, когда поле проходит 0 и плавно выпрямляется при достижении противоположного насыще-

ния. Выше линии состояния типа “С” нестабильны и вместо них зарождается магнитный вихрь, который потом нужно вытолкнуть из частицы в обратном поле, производя характерные петли. Все точки вокруг границы, обнаруженной в [222] согласуются с фазовой диаграммой, но на рисунке 4.9 приведены только три из них, наиболее плотно охватывающих линию  $e$ .

Некоторые из деталей фазовой диаграммы могут являться артефактами используемых приближений. Например, вычисление радиуса стабильности по отношению к смещению центра вихря [21] использует предположение о том, что ядро вихря много меньше радиуса частицы. Это приближение нарушается там, где линия стабильности  $e$  касается кривой  $g$ , соответствующей равновесному радиусу вихря.

Кроме того, сам метод Ритца, основывающийся на проверке стабильности относительно конкретных процессов дестабилизации (мод), переоценивает стабильность состояний. Он гарантирует только то, что если состояние нестабильно относительно одного из рассмотренных выше процессов в какой-либо области фазовой диаграммы, то оно в этой области существовать не может. Но метод Ритца не гарантирует отсутствие других (не рассмотренных здесь) мод, которые дестабилизируют состояния там, где в результате проведенного анализа они оказались стабильными.

Проведенные вычисления не принимают во внимание пиннинг, который наоборот стабилизирует магнитные состояния и расширяет их области метастабильности. Эффекты пиннинга могут возникнуть за счёт малых пространственных неоднородностей (дефектов) в материале, из которого изготовлены наноструктуры. В магнитомягких материалах пиннинг, как правило, невелик.

Тем не менее построенная здесь фазовая диаграмма хорошо описывает множество известных экспериментальных фактов и даёт некоторую “большую картину”, которая может быть полезной при планировании натуральных и вычислительных экспериментов.

## Выводы к главе 4

- 4.1 Получены приближённые явные выражения для равновесного радиуса и равновесной энергии магнитного вихря в круговом цилиндре. Они значительно упрощают практическое построение магнитных фазовых диаграмм по сравнению с точными, вычисление которых требует численного интегрирования и численной минимизации.
- 4.2 Теоретически предсказано равновесное состояние типа “большой вихрь” в круговом цилиндре. Диапазон геометрических параметров, где это состояние является основным вычислен и нанесен на карту основных состояний. Результаты верифицированы массивно-параллельным численным расчётом в рамках той же модели.
- 4.3 Исследован вопрос о природе анизотропии 4-го порядка в квадратном массиве круговых наноцилиндров. Показано, что анизотропия возникает вследствие слабой пространственной неоднородности их магнитного состояния. Построена количественная теория, предсказывающая зависимость соответствующей константы анизотропии от внешнего поля и геометрии массива. Теория верифицирована на основе данных независимого эксперимента.
- 4.4 Магнитная фазовая диаграмма кругового наноцилиндра дополнена областями метастабильности состояний типа “С” и типа “лист”, указаны области сосуществования состояний. Новые линии хорошо согласуются с данными независимых экспериментов.

Результаты опубликованы в статьях [19–26].

## Приложение 4.1

Для интеграла в (4.14) можно получить два эквивалентных представления.

Одно получается после интегрирования по углам

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 d\varphi_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \chi^2}} = \frac{8\pi K\left(\frac{4r_1 r_2}{\chi^2 + (r_1 + r_2)^2}\right)}{\sqrt{\chi^2 + (r_1 + r_2)^2}}, \quad (4.90)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода, что даёт

$$u(\chi) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta_1(1 - \eta_1^2)\eta_2(1 - \eta_2^2)K\left(\frac{4\eta_1\eta_2}{\chi^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2}\right)}{(1 + \eta_1^2)(1 + \eta_2^2)\sqrt{\chi^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2}}, \quad (4.91)$$

где безразмерные переменные интегрирования введены заменой переменных

$$\eta_1 = r_1/R_V, \quad \eta_2 = r_2/R_V.$$

Другое представление можно получить с использованием теоремы сложения для функций Бесселя [218]

$$\begin{aligned} J_0(k\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}) &= \\ &= J_0(\eta_1 k)J_0(\eta_2 k) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{\mu}(\eta_1 k)J_{\mu}(\eta_2 k) \cos \mu(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned} \quad (4.92)$$

интеграла Липшица [180]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\chi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}} &= \\ &= \int_0^{\infty} dk e^{-k|\chi|} J_0(k\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}), \end{aligned} \quad (4.93)$$

и тождества

$$\cos \mu(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \mu\varphi_1 \cos \mu\varphi_2 + \sin \mu\varphi_1 \sin \mu\varphi_2. \quad (4.94)$$

Для функции  $u(\chi)$ , в силу аксиальной симметрии распределения зарядов, в сумме (4.92) остаётся только первый член, пропорциональный  $J_0$ . Это позволяет

получить для неё следующее представление

$$u(\chi) = \int_0^{\infty} e^{-k\chi} \left( \int_0^1 \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} J_0(k\eta)\eta \, d\eta \right)^2 dk. \quad (4.95)$$

Это выражение выглядит компактнее (4.91), но оно эквивалентно тройному интегралу.

Также стоит упомянуть тождество, полезное для интегрирования магнитостатической функции Грина по координате  $Z$  при вычислении энергии объёмных и/или боковых зарядов

$$\int_0^g d\zeta_1 \int_0^g d\zeta_2 \exp(-k|\zeta_1 - \zeta_2|) = \frac{2g}{k} f_{\text{MS}}(kg), \quad (4.96)$$

$$f_{\text{MS}}(x) = 1 - \frac{1 - \exp(-x)}{x}. \quad (4.97)$$

Интегралы (4.91), (4.95) можно вычислить на компьютере. Но это непросто потому что (4.95) представляет собой слабо сходящийся несобственный интеграл от слабо спадающей осциллирующей функции, а (4.91) содержит резкий пик при  $\eta_1 = \eta_2$ , превращающийся в линию интегрируемых логарифмических особенностей при  $h = 0$ . Первопричиной этих (и многих других) сложностей с численным вычислением магнитостатических функций, по-видимому, является сингулярность и неаналитичность в магнитостатической функции Грина (1.20). Она приводит к плохой сходимости несобственных интегралов (если они записаны в интегральном представлении) или рядов (если они представлены в виде рядов Фурье), неаналитичности (что создаёт сложности при разложении этих функций в ряды Тейлора). Тем не менее только достаточно точный учёт магнитостатического взаимодействия может обеспечить количественное соответствие эксперименту результатов теоретических расчётов.

## Глава 5. Динамика солитонов в ограниченной геометрии

### 5.1. Введение

Идея, что частицы являются всего лишь стабильными конфигурациями полей, является краеугольным камнем современной теории поля [223–225]. Самую простую из таких частиц — “ежа”, открыл теоретически Т. Скирм [4] как решение нелинейных уравнений поля, которые он сформулировал для адронов. Множество подобных конфигураций (топологических солитонов или скирмионов) поддерживается другими полями, включая и поля векторного параметра порядка: намагниченность, скорость тока сверхтекучей жидкости или комплексный параметр порядка сверхпроводников. Это делает физику конденсированного состояния (и магнетизм, в частности) удобной площадкой для их изучения. В магнетизме эта тематика получила новый импульс после экспериментального наблюдения ядер магнитных вихрей [9, 10] и скирмионных решёток [68, 226]. Хотя границы с перетяжками, которые представляют собой солитонную конфигурацию (см. §3.8), наблюдались и в более ранних экспериментах [93–95].

Скирмионы, как следует из Главы 3, часто встречаются в планарных магнитных нанoelementах, где их удобно описывать при помощи функций комплексной переменной. Здесь разработан теоретический подход к получению динамических уравнений движения непосредственно в терминах скалярных параметров этих функций. В пределе (если параметризация достаточно точно описывает возникающие в динамическом процессе промежуточные конфигурации намагниченности) этот подход эквивалентен динамическому уравнению Ландау-Лифшица (см. §1.1). Он позволяет применить методы классической ме-

ханики систем с конечным набором степеней свободы к описанию динамики магнитных скирмионов как если бы это были частицы.

Магнитную текстуру тонких плёнок можно представить в виде набора магнитных доменов и доменных границ (см. §1.4). Динамика при этом состоит в основном из смещения доменных границ, которое традиционно описывается при помощи уравнения Тила [227]. Этот подход (как и другие подходы [228–230], пусть и базирующиеся на кинетическом лагранжиане, но изначально разработанные для описания динамики доменных границ и/или блоховских линий в них) состоит в поиске автомодельного решения, предполагающего однородную трансляцию магнитной текстуры. Для далеко отстоящих друг от друга (уединённых) доменных границ в бесконечных плёнках это предположение хорошо работает, но в случае ограниченных в пространстве наномагнитов нарушается. Особое положение магнитных моментов на границе наномагнита приводит к тому, что, вместо параллельного смещения происходит неоднородная деформация магнитной текстуры. Трансляционная инвариантность отсутствует, а значит уравнение Тила априори не применимо. Его всё-же применяют для относительно больших наномагнитов [231, 232], где влияние границы не так значительно, но полноценный учёт специфики наномагнетизма требует совершенно другого подхода к описанию динамики.

Такие подходы известны, но все они обладают рядом недостатков. Часто для описания динамики используется объёмное усреднение векторной формы уравнения Ландау-Лифшица, которое даёт результаты в качественном согласии с натурным и численным экспериментом [233, 234]. Количественно же такой подход недооценивает мобильность магнитной текстуры [234] и, как следствие, частоту магнитной прецессии вихря [233]. Это происходит из-за нелинейности уравнений Ландау-Лифшица, обусловленной ограничением на длину вектора намагниченности. Объёмное усреднение намагниченности приводит к нарушению этого ограничения.

Альтернативой является рассмотрение спин-волновых мод в цилиндре на фоне центрированного магнитного вихря [235, 236]. Этот подход хорошо воспроизводит движение магнитного вихря (и вдобавок предсказывает высокоэнергетические спин-волновые моды), но принципиально ограничен рассмотрением малых (линейных) смещений его центра. Включение членов высокого порядка по отклонениям векторов намагниченности от статического фона не только сложно математически, но и малоперспективно при рассмотрении многовихревых текстур, которые в процессе динамики легко деформируются так, что уже никак не напоминают исходную статическую конфигурацию. Кроме того, рассмотрение неоднородного статического фонового состояния приводит к значительным трудностям при учёте дальнедействующего магнитостатического взаимодействия. Вот почему во многих работах (в том числе и [235, 236]) оно заменяется эффективной локальной анизотропией. Это приближение допустимо для ультратонких наноэлементов, но количественное согласие с экспериментом в более широком диапазоне геометрий возможно только при полном учёте магнитостатического взаимодействия.

Здесь описан лагранжев подход к описанию динамики намагниченности наноструктур в коллективных переменных, который годится для описания динамики многовихревых состояний (с полным учётом относительного движения и деформации составляющих их индивидуальных вихрей). Его единственное приближение относительно уравнений Ландау-Лифшица заключается в определении коллективных переменных, которые являются скалярными параметрами некоторой функции комплексной переменной.

Задавшись такой параметризованной комплексной функцией, подход позволяет получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения (без интегральных членов, даже в присутствии магнитостатического взаимодействия) непосредственно в терминах скалярных параметров. Он не предполагает ни трансляционной инвариантности, ни постоянной скорости движения

и годится для описания нелинейной динамики. Позволяет включить в рассмотрение внешнее поле и другие дополнительные члены в потенциальной энергии магнетика без принципиального усложнения уравнений движения (они остаются обыкновенными дифференциальными уравнениями). В нём также просто учесть феноменологическую диссипацию, аналогичную диссипативному члену Гильберта в уравнении Ландау-Лифшица-Гильберта.

В качестве примера применения описанного подхода здесь получены уравнения для линейной и слабонелинейной прецессии магнитного вихря в круговом цилиндре непосредственно в терминах скалярных параметров, входящих в пробные функции. Для проверки вычислена частота свободной прецессии вихря в круговом цилиндре в первом порядке по амплитуде его отклонения от центра. Уточнён известный результат других авторов, тоже основывающийся на пробной функции из Главы 3, но с кинетической частью из уравнения Тиля, построенного на базе других пробных функций, соответствующих однородному смещению магнитной текстуры.

Рассмотрена прецессия магнитного вихря с бóльшей амплитудой, учтена её нелинейность и вычислен амплитудно-частотный коэффициент прецессии вихря в широком диапазоне геометрических параметров цилиндра.

## 5.2. Уравнения динамики в коллективных переменных

Обычной отправной точкой для рассмотрения динамики намагниченности являются уравнения Ландау-Лифшица (1.2) или Ландау-Лифшица-Гильберта (1.37). Оба этих уравнения хорошо подходят для численных расчётов, но не очень удобны для аналитического решения. Основная причина сложности в том, что неоднородное эффективное поле, вокруг которого прецессирует локаль-

ный вектор намагниченности, зависит, в свою очередь, от всего распределения намагниченности в образце. Из-за этого (1.2) или (1.37) являются на самом деле нелинейными системами интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Полной математической теории таких уравнений до сих пор не существует.

Поэтому вместо уравнений Ландау-Лифшица, начнём рассмотрение с кинетической плотности лагранжиана (1.36), введенной Дёрингом [81] в терминах сферических углов  $\theta$ ,  $\varphi$  вектора магнитного момента  $\mathbf{M}$ . Константа  $\theta_0$  в нём произвольная и на окончательные уравнения движения не влияет. Использование сферической системы координат позволяет автоматически учесть, что  $|\mathbf{M}| = M_S$ , а значит только две компоненты этого вектора являются независимыми. Система уравнений Эйлера-Лагранжа для экстремума соответствующего действия (разности кинетического лагранжиана  $\tau$  и не зависящей явно от времени потенциальной энергии магнитного момента) по  $\theta$  и  $\varphi$  эквивалентна бездиссипативным уравнениям Ландау-Лифшица [81, 85]. Константу  $\theta_0$  можно выбрать, например, так, чтобы обеспечить нулевое значение  $\tau$  на границе магнетика.

Динамика в коллективных переменных тогда подобна методу Ритца [91] для решения оптимизационных задач: сначала выбирается пробная функция, параметризующая широкий класс возможных решений, а затем находятся значения параметров, соответствующие экстремуму исходного функционала, вычисленного на основе выбранной пробной функции. Метод Ритца в его оригинальной форме широко применяется в магнетизме для решения статических задач. Применение его для динамических задач не слишком отличается, только теперь параметры являются не числами, а функциями времени. Уравнения для этих функций получаются из условия экстремума функционала, включающего потенциальную и кинетическую энергию меняющегося во времени распределения намагниченности.

Изложенная выше общая схема применима к любым пробным функциям. Для более конкретного рассмотрения ограничимся семейством функций, определённым в Главе 3.

Рассмотрим цилиндр из магнитомягкого материала, показанный на рисунке 5.1 с координатной системой, выбранной так, что ось  $OZ$  перпендикулярна торцу цилиндра  $\mathcal{D}$ , который не обязательно представляет собой диск. Магнитные текстуры такого цилиндра, как обсуждалось в Главе 3, можно выразить при помощи стереографической проекции (1.60), в которой функция  $w(z, \bar{z})$  представляет собой сшивку солитона и сингулярного мерона (3.4), построенных на базе мероморфной функции  $f(z)$ .

В Главе 4 рассмотрено множество выражений для функции  $f(z)$ , как непосредственно полученное в качестве решения краевой задачи Римана-Гильберта (3.9), так и различные его обобщения. Самым простым из них является выражение, описывающее однородное смещение вихря (4.9), для которого в (3.4) полагалось  $e_1 = 1$  (этот параметр уже включён в  $b$ ) и  $e_2 \rightarrow \infty$  (потому что антивихри в круговом цилиндре не рассматривались). Усов и Песчаный [208] использовали эквивалентную модель при анализе стабильности магнитного вихря в круговом цилиндре, относительно его отклонения от оси цилиндра. Эта модель, как и уравнение Тиля, предполагает трансляцию магнитной текстуры как целого. Коллективными переменными в данном случае являются действительный параметр  $b$  и комплексный параметр  $a = a_x + ia_y$ , задающий положение центра вихря. Задача теперь состоит в том — как найти динамические уравнения для этих (и других подобных) коллективных переменных, предполагая, что они являются функциями времени  $b = b(t)$ ,  $a = a(t)$ .

Уравнение Ландау-Лифшица также можно выразить на языке комплексных функций [237], но само по себе это не облегчает его решения. Вместо этого вычислим кинетическую часть плотности магнитного лагранжиана (1.36) как функцию коллективных переменных и их производных по времени. Её состав-

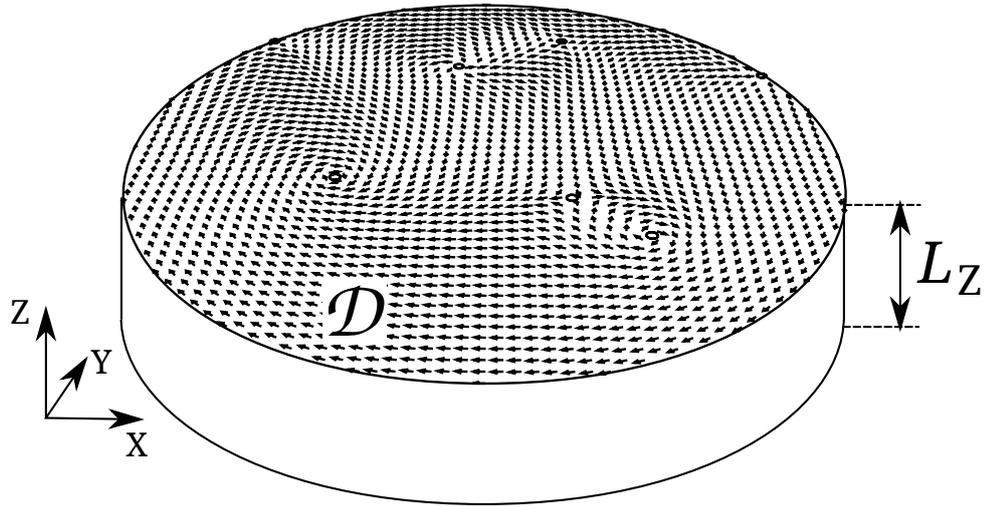


Рисунок 5.1. Иллюстрация ферромагнитного цилиндра с обозначенными осями декартовой системы координат. Основание цилиндра  $\mathcal{D}$  не обязательно должно быть круговым. Векторы соответствуют некоторой магнитной текстуре  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , содержащей вихри и antivихри внутри частицы и на её границе. Координаты центров вихрей и antivихрей могут быть выбраны в качестве коллективных координат

ные части можно выразить как

$$\cos \theta = \pm \frac{1 - w\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \quad (5.1)$$

$$\exp(i\varphi) = \sqrt{\frac{w}{\bar{w}}} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \log \frac{w}{\bar{w}}, \quad (5.3)$$

так что (1.36) становится

$$\tau = \mp \frac{M_S}{\gamma_p} \operatorname{Im} \frac{1 - w\bar{w} \dot{w}}{1 + w\bar{w} w}, \quad (5.4)$$

где точка обозначает производную по времени, а функция  $w(z, \bar{z}, t)$  из (3.4) зависит от времени  $t$  через коллективные переменные в пробной функции  $f(z)$ . В отсутствие внешнего магнитного поля, задача о статическом вихре инвариантна относительно изменения поляризации его ядра на противоположную. Здесь

поляризация ядра важна, поэтому она указана явно в виде знака в (5.1) и далее. Верхние знаки во всех выражениях этой Главы соответствуют вихрю с  $m_Z = 1$  в центре, а нижние с  $m_Z = -1$ . В соответствии с выбором  $\theta_0 = \pi/2$ , меронная часть (3.4) не вносит никакого вклада в кинетический лагранжиан потому что в мероне  $|w(z, \bar{z})| = 1$  и, соответственно,  $\tau \propto m_Z \propto \cos \theta = 0$ .

Для вывода уравнений динамики потребуется полный лагранжиан. Его можно вычислить, проинтегрировав по объёму частицы плотность лагранжиана:

$$\mathcal{T} = \int_{\mathcal{D} \times L} \tau d^3 \mathbf{r} = L \int_{\mathcal{D}_S} \tau d^2 z, \quad (5.5)$$

где  $L$  — толщина цилиндра, а  $\mathcal{D}_S$  — часть торца цилиндра, занятая солитоном (ядрами вихрей и антивихрей). Для  $z \in \mathcal{D}_S$  выполняется  $|f(z)| < c_1$  или  $|f(z)| > c_2$ . Это выражение можно упростить не предполагая конкретного вида  $f$  в (3.4) заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \frac{4w(t)\bar{w}(t')}{(1+w(t)\bar{w}(t'))^2} = \frac{1-w(t)\bar{w}(t')}{1+w(t)\bar{w}(t')} \frac{1}{w(t)} \frac{\partial w(t)}{\partial t}, \quad (5.6)$$

где переменная  $t'$  рассматривается в качестве независимой и не принимает участия в дифференцировании. Вынося взятие мнимой части и дифференцирование из-под интеграла (это возможно потому что элемент площади является действительной величиной, а интегрирование представляет собой линейную операцию), получим следующее выражение для полного кинетического лагранжиана

$$\mathcal{T} = \mp \frac{M_S L}{\gamma_p} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}'_S} \log \frac{4w(z, t)\bar{w}(\bar{z}, t')}{(1+w(z, t)\bar{w}(\bar{z}, t'))^2} d^2 z \Big|_{t' \rightarrow t}, \quad (5.7)$$

где при вычислении интеграла и дифференцировании предполагается, что все коллективные переменные внутри  $\bar{w}$  и в определении области интегрирования  $\mathcal{D}'_S$  (обратите внимание на штрих) зависят от новой независимой переменной  $t'$ , в то время как внутри  $w$  они всё ещё зависят от  $t$ . Только после дифференцирования  $t'$  заменяется на  $t$ . Можно также отметить, что внутри солитона  $\mathcal{D}_S$  функция  $w$  является аналитической и не зависит от  $\bar{z}$ , в то время как сопряжённая

функция  $\bar{w}$  не зависит от  $z$ . Эту формулу можно проверить непосредственно. Её также можно упростить для случая, когда отсутствуют граничные вихри и антивихри. Тогда (5.7) можно проинтегрировать по частям, используя теорему Римана-Грина (4.2). Это даёт

$$\mathcal{T} = \pm \frac{M_S L}{\gamma_p} \left[ \text{Im} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}'_S} \bar{z} \frac{1 - w\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \frac{1}{\bar{w}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} d^2 z \right]_{t' \rightarrow t}, \quad (5.8)$$

где аргументы функций были опущены, но всё также предполагается, что все коллективные переменные внутри  $w$  зависят от  $t$ , а все аналогичные переменные внутри  $\bar{w}$  и определении области интегрирования  $\mathcal{D}'_S$  зависят от  $t'$ .

Чтобы получить уравнения движения для определённых пробной функцией  $f(\{x_i\}, z)$  коллективных переменных  $x_i(t)$ , достаточно записать полный лагранжиан:

$$\mathcal{L}(\{\dot{x}_i\}, \{x_i\}) = \mathcal{T}(\{\dot{x}_i\}, \{x_i\}) - E(\{x_i\}), \quad (5.9)$$

где  $E$  представляет собой полную потенциальную энергию (включающую в себя обменную, магнитостатическую и, возможно, другие слагаемые); и получить из него систему уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0. \quad (5.10)$$

Это позволяет рассматривать проблемы (много-) вихревой динамики аналогично задачам классической механики.

Отметим, что, кроме ограничений, обусловленных конкретным выбором комплексной функции  $f$ , определяющей коллективные переменные  $x_i$ , вышеприведенное рассмотрение не содержит приближений и соответствует решению уравнений Ландау-Лифшица точно. Это потому, что лагранжиан Дёринга (1.36) воспроизводит в рамках формализма Лагранжа уравнения Ландау-Лифшица. Если рассмотреть дискретный магнетик, в котором каждый спин параметризован его сферическими углами  $\theta_{ijk}$ ,  $\varphi_{ijk}$  и ввести в нём дискретные аналоги

статических взаимодействий. Тогда при выборе  $\theta_{ijk}$  и  $\varphi_{ijk}$  в качестве независимых переменных и в пределе, когда дискретная решётка переходит в непрерывную среду (количество спинов стремится к бесконечности при сохранении объёма магнетика), уравнения движения (5.10) точно совпадут с уравнениями Ландау-Лифшица в сферических координатах для  $\theta(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ .

### 5.3. Частота прецессии вихря

Подобно классической механике, не всякий выбор пробных функций приводит к правильным результатам. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим динамику однородно смещённого магнитного вихря (4.9) с  $b = \text{const}$  и  $a = a(t)$ . Легко убедиться, что в этом случае все три выражения для кинетического лагранжиана (5.5), (5.7) и (5.8) равны нулю. Это значит, что уравнения Эйлера-Лагранжа (5.10) сводятся к условиям статического равновесия или к тому (в случае потенциальной энергии, включающей в себя обменную и магнитостатическую), что такой недеформированный вихрь стоит неподвижно в центре цилиндра. Этот вывод аналогичен известному из теории доменных границ факту, что профиль движущихся доменных границ всегда отличается от профиля стационарных [238]. Причина в том, что уравнения Ландау-Лифшица являются дифференциальными уравнениями первого порядка по времени, а значит информация о движении распределения намагниченности должна содержаться в её пространственном распределении.

Перейдём теперь к более сложной комплексной функции из Главы 3, описывающей смещение вихря без формирования боковых магнитных зарядов

$$f(z) = i \frac{z - (a + \bar{a}z^2)}{b}, \quad (5.11)$$

которая является репараметризованной версией (3.9), где введен безразмерный радиус вихря  $b = R_V/R = \text{const}$ , а его смещение  $a = a(t) = a_X(t) + ia_Y(t)$ ,  $|a| < 1/2$  определяет пару коллективных координат:  $a_X(t)$  и  $a_Y(t)$ . Центр вихря, где  $f(z_C) = 0$ , расположен не строго в точке  $a$ , как это имеет место в случае однородно смещённого вихря, а в  $z_C = (1 - \sqrt{1 - 4a\bar{a}})/(2\bar{a})$ . При помощи замены переменных можно получить уравнения движения непосредственно в терминах  $z_C(t)$ , но на результат для частоты прецессии это не влияет.

Во втором порядке по  $|a| \ll 1$ , лагранжиан можно вычислить из (5.8) и (5.9) с полным учётом деформации ядра вихря при смещении

$$\ell = \pm \kappa_2 (a_X(t)\dot{a}_Y(t) - a_Y(t)\dot{a}_X(t)) - k_2 (a_X^2(t) + a_Y^2(t)), \quad (5.12)$$

где  $\ell = \mathcal{L}/(\mu_0\gamma_B M_S^2 \pi L R^2)$ ,  $k_2$  является безразмерной величиной, а  $\kappa_2 = (1 + b^4(4 \log 2 - 3))/(\gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S)$  имеет размерность времени;  $k_2$  является коэффициентом разложения потенциальной энергии (состоящей из обменного и магнитостатического членов) второго порядка по  $|a|$ . Постоянный член нулевого порядка в потенциальной энергии, равный энергии равновесного централизованного вихря, был опущен. Он не влияет на динамику. Уравнения движения (5.10) имеют вид

$$\kappa_2 \dot{a}_X(t) \pm k_2 a_Y(t) = 0 \quad (5.13)$$

$$\kappa_2 \dot{a}_Y(t) \mp k_2 a_X(t) = 0$$

и для начальных условий  $a_X(0) = a_0$ ,  $a_Y(0) = 0$  их решением является

$$a_X(t) = a_0 \cos(\omega t) \quad (5.14)$$

$$a_Y(t) = \pm a_0 \sin(\omega t),$$

что соответствует круговому движению вихря вокруг центра цилиндра с частотой  $\omega = \omega_0 = k_2/\kappa_2$ . Здесь важно отметить, что направление движения вихря не произвольно. Оно зависит от поляризации его ядра (но не от его хиральности потому что  $\mathcal{T}$  и  $E$  не зависят от знака  $w$  или  $f$ ). Вихри с  $m_Z = -1$  в центре вращаются по часовой стрелке, а вихри с  $m_Z = 1$  против часовой. Это находится в

полном соответствии с натурными и численными экспериментами работы [239]. Это также позволяет сделать обоснованное предположение, что поляризация ядра вихря в работе [233] была положительной, что не было указано авторами. Подобная поляризация была и у вихрей, показанных на рисунке 2 в [232], но здесь уверенности меньше из-за того, что пространственное разрешение измерений в направлении  $OY$  было недостаточно высоким.

Для ещё более тщательной проверки теории вычислим частоту прецессии магнитного вихря в пределе больших плоских круговых цилиндров с  $L \ll R$  и  $R \gg L_E$ . В этом случае  $b \ll 1$  и  $\kappa_2 \simeq 1/(\gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S)$ . Разложение потенциальной энергии вихря (5.11) до второго порядка по смещениям в большом плоском цилиндре (где ядром вихря можно пренебречь) было впервые опубликовано в [21]. Если также пренебречь обменным вкладом порядка  $L_E/R \ll 1$ , то коэффициент  $k_2$  в больших цилиндрах полностью определяется энергией объёмных магнитных зарядов [21]. Подставляя эти коэффициенты для частоты прецессии получим

$$\nu = \frac{k_2}{2\pi\kappa_2} = \frac{\gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S}{\pi} \int_0^\infty \frac{f_{MS}(kg)}{k} \left[ \int_0^1 \eta J_1(k\eta) d\eta \right]^2 dk, \quad (5.15)$$

$$\nu \simeq \gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S g \frac{2(2G-1)}{6\pi^2} \quad \text{при } g \ll 1 \quad (5.16)$$

где  $f_{MS}(x) = 1 - (1 - e^{-x})/x$  из (4.96),  $g = L/R \ll 1$  и  $G \approx 0.915966$  — постоянная Каталана. Это выражение (кроме единиц измерения и более точного значения числовой константы) совпадает с выражением для частоты вихря, полученным в [232] с использованием уравнения Тиля и подтверждённым там количественно на экспериментах с большими плоскими цилиндрами. Здесь же обратим внимание на то, что в [232] кинетический и потенциальный члены в уравнении движения соответствуют разным моделям: кинетический член (с производными по времени) происходит из уравнения Тиля для однородной трансляции магнитной текстуры, а потенциальный член для возвращающей

силы вычислен в предположении смещения вихря по модели (5.11). Это, строго говоря, непоследовательно и работает только потому, что в очень плоских ( $R \gg L$ ) наноцилиндрах  $b \ll 1$  и динамический член  $\kappa_2 \rightarrow 1$  становится мало чувствительным к деформации ядра вихря. Частота прецессии (5.16) выведена на основании логически последовательного рассмотрения с использованием одной и той же пробной функции для кинетического и для потенциального членов в уравнении движения.

#### 5.4. Феноменологическая диссипация

В реальных магнитных материалах энергия движущихся спинов неизбежно рассеивается в виде тепла. Но формализм Лагранжа в чистом виде, как известно, не допускает диссипации. Её можно добавить в уравнения движения искусственно при помощи диссипативной функции Релея  $D$

$$D = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (5.17)$$

которая затем включается в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа (5.10) через дополнительный член  $-\partial D / \partial \dot{x}_i$ . Матрица  $D_{ij}$  состоит из феноменологических коэффициентов диссипации. Судя из резюме неопубликованной работы Гильберта [82] можно предположить, что формализм Лагранжа был и его отправной точкой при выводе диссипативного члена в уравнении движения (вопрос о микроскопическом обосновании которого всё ещё остаётся открытым [240]). Таким образом,  $D_{ij}$  должны быть связаны с феноменологическим параметром затухания Гильберта. Из соображений симметрии, простейшим выражением для диссипативной функции является  $D = d(\dot{a}_X(t))^2 + \dot{a}_Y(t)^2$ . После

её учёта в уравнениях Эйлера-Лагранжа, решение (5.14) изменится на

$$\begin{aligned} a_X(t) &= a_0 e^{-dk_2 t / (d^2 + \kappa_2^2)} \cos(k_2 t \kappa_2 / (d^2 + \kappa_2^2)) \\ a_Y(t) &= \pm a_0 e^{-dk_2 t / (d^2 + \kappa_2^2)} \sin(k_2 t \kappa_2 / (d^2 + \kappa_2^2)). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Как можно заметить, подобно классическому примеру линейного осциллятора, частота прецессии вихря начинает зависеть от коэффициента диссипации.

### 5.5. Нелинейная прецессия и амплитудно-частотный коэффициент

Рассмотрим слабонелинейную динамику вихря, учитывая кинетические и потенциальные члены в лагранжиане до 4-го порядка по  $|a| \ll 1$  включительно. Продолжая разложение кинетического лагранжиана (5.8) для пробной функции (5.11), получим

$$\begin{aligned} \ell &= \pm(\kappa_2 + \kappa_4(a_X^2(t) + a_Y^2(t))) (a_X(t)\dot{a}_Y(t) - a_Y(t)\dot{a}_X(t)) - \\ &\quad - k_2 (a_X^2(t) + a_Y^2(t)) - k_4 (a_X^2(t) + a_Y^2(t))^2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где  $\kappa_4 = 2 - b^2(23 + b^2((6061 - 6397b^2)/8 - 1152(1 - b^2) \log 2)) / (\gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S)$  как и  $\kappa_2$  измеряется в секундах, а  $k_4$  — следующий коэффициент в разложении потенциальной энергии. Соответствующие уравнения движения становятся нелинейными, но их точное решение совпадает с (5.14), где теперь

$$\omega = \frac{k_2 + 2a_0^2 k_4}{\kappa_2 + 2a_0^2 \kappa_4} \simeq \omega_0 + 2\alpha a_0^2 + \dots \quad (5.20)$$

$$\omega_0 = k_2 / \kappa_2, \quad \alpha = \frac{k_4 \kappa_2 - k_2 \kappa_4}{\kappa_2^2}, \quad (5.21)$$

Подобно другим нелинейным осцилляторам частота вращения вихря начинает зависеть от амплитуды его вращения. Эти выражения просты, но зависимость

коэффициентов разложения потенциальной энергии  $k_2$  и  $k_4$  от геометрических размеров цилиндра может быть достаточно сложной. Вычислим её.

Разложение обменной энергии вычислить проще всего. Для аналогичной пробной функции (4.1) она уже была вычислена точно (4.8), для функции (5.11) она отличается лишь параметризацией и нормировкой

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{EX}} &= \frac{E_{\text{EX}}}{\mu_0 \gamma_{\text{B}} M_{\text{S}}^2 \pi L R^2} = \frac{1}{\rho^2} \left( 2 - \log \frac{2b}{1 + \sqrt{1 - 4|a|^2}} \right) = \\ &= \frac{2 - \log b}{\rho^2} - \frac{|a|^2}{\rho^2} - \frac{3|a|^4}{2\rho^2} - \dots \end{aligned} \quad (5.22)$$

где  $\rho = R/L_{\text{E}}$ . Обменное взаимодействие пытается вытолкнуть вихрь из цилиндра, что проявляется в знаке минус перед степенями  $|a|^2$ .

Вычисление магнитостатической энергии гораздо сложнее. Как обычно, воспользуемся здесь магнитостатическим приближением и методом магнитных зарядов. Это можно обосновать тем, что при характерных частотах порядка нескольких гигагерц у электромагнитных волн вполне достаточно времени для того, чтобы пройти множество раз по всему (суб)микронному цилиндру, а значит стационарное размагничивающее поле отражает мгновенную конфигурацию диполей.

У магнитной текстуры (5.11) отсутствуют боковые заряды. Кроме того, в силу симметрии (заряды на противоположных торцах имеют разные знаки), а значит взаимодействие между торцевыми и объёмными магнитными зарядами отсутствует. Поэтому, энергию торцевых зарядов и объёмных зарядов можно вычислять отдельно.

Энергия торцевых зарядов (в обычной нормировке на  $\mu_0 \gamma_{\text{B}} M_{\text{S}}^2 \pi L R^2$ ) на обоих торцах и их взаимодействие между собой можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{face}} = u(0) - u(g) \text{ с}$$

$$u(\chi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta(\varphi_1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta(\varphi_2)} \frac{m_{\text{Z}}(\eta_1, \varphi_1) m_{\text{Z}}(\eta_2, \varphi_2) \eta_1 \eta_2 d\varphi_1 d\eta_1 d\varphi_2 d\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1 \eta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \chi^2}}, \quad (5.23)$$

где  $g = L/R$  – фактор формы цилиндра, а  $\eta = \theta(\varphi)$  – уравнение границы вихря в полярной системе координат  $\eta, \varphi$  центрированной в его центре  $z_C$ .

При  $|a| = 0$  граница ядра представляет собой окружность радиуса  $b$ . При увеличении  $|a|$  граница ядра деформируется. Чтобы учесть эту деформацию, запишем уравнение для границы ядра в виде  $f(\eta e^{i\varphi} - z_C) = 1$ . Его сложно решить в замкнутом виде для  $\eta$ , но можно получить выражение для  $\eta = \theta(\varphi)$  в виде ряда Тейлора:

$$\frac{\theta(\varphi)}{b} = 1 + b_1|a| + b_2|a|^2 + b_3|a|^3 + b_4|a|^4 + \dots, \quad (5.24)$$

где  $b_1 = b \cos \varphi$ ,  $b_2 = (5b_1^2 + 4 - b^2)/2$ ,  $b_3 = b_1(8b_1^2 + 6 - 3b^2)$ ,  $b_4 = (48 + 200b_1^2 + 231b_1^4 - 2(20 + 63b_1^2)b^2 + 7b^4)/8$ . Плотность поверхностных зарядов тогда равна  $m_Z(\eta, \varphi) = (b^2 - \beta^2)/(b^2 + \beta^2)$ , где

$$\beta^2 = \eta^2(1 - |a|^2(4 - \eta^2)) - 2|a|\eta^3\sqrt{1 - 4|a|^2} \cos \varphi. \quad (5.25)$$

После разложения в ряд Тейлора  $m_Z$  содержит чётные и нечётные степени  $|a|$ , а так же зависит от  $\varphi$ . Интегрируя все коэффициенты разложения, получим следующее выражение для магнитостатической энергии торцевых зарядов

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{face}} = & \frac{b^3}{g} (W_{00}(\frac{g}{b}) + |a|^2 (W_{20}(\frac{g}{b}) + b^2 W_{22}(\frac{g}{b})) + \\ & + |a|^4 (W_{40}(\frac{g}{b}) + b^2 W_{42}(\frac{g}{b}) + b^4 W_{44}(\frac{g}{b}))), \end{aligned} \quad (5.26)$$

где магнитостатические функции  $W_i$  определены в Приложении 5.1. Функция  $W_{00}(\chi)$  при этом совпадает с магнитостатической функцией центрированного вихря (4.15).

Плотность объёмных зарядов пропорциональна дивергенции намагниченности  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{m}$  и, соответственно, имеет различные выражения снаружи и внутри ядра вихря

$$\rho(\eta, \varphi) = \begin{cases} \frac{8|a|\eta b^3 \sin \varphi}{(b^2 + \beta^2)^2} & 0 \leq \eta < \theta(\varphi) \\ \frac{2|a|\eta \sin \varphi}{\beta} & \theta(\varphi) < \eta \leq \Theta(\varphi) \end{cases}, \quad (5.27)$$

где  $\beta$  определено (5.25), а  $\eta = \Theta(\varphi)$  — уравнение границы цилиндра в полярной системе координат, центрированной на вихре (с центром в точке  $z_C$ )

$$\Theta(\varphi) = 1 - c_1|a| - c_2|a|^2 - c_3|a|^3 - c_4|a|^4 + \dots, \quad (5.28)$$

где  $c_1 = \cos \varphi$ ,  $c_2 = (1/2) \sin^2 \varphi$ ,  $c_3 = \cos \varphi$ ,  $c_4 = (17 - \cos(2\varphi) \sin^2 \varphi)/16$ . Энергия объёмных зарядов тогда

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{volume}} = \frac{1}{2g} \int_0^g d\zeta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\Theta(\varphi_1)} d\eta_1 \int_0^g d\zeta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\Theta(\varphi_2)} d\eta_2 w \quad (5.29)$$

$$w = \frac{\varrho(\eta_1, \varphi_1)\varrho(\eta_2, \varphi_2)\eta_1\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}}, \quad (5.30)$$

где коэффициент  $1/2$  возникает потому что при двойном интегрировании по объёму взаимодействие между каждой парой магнитных зарядов учитывается дважды. Раскладывая это выражение по степеням  $|a|$  получим

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{volume}} = |a|^2 V_2(b, g) + |a|^4 V_4(b, g). \quad (5.31)$$

Магнитостатические функции  $V_i$  определены в Приложении 5.2. Хотя магнитостатические функции для объёмных зарядов ненамного сложнее аналогичных функций для торцевых зарядов, они не допускают факторизации зависимостей от  $b$  и  $g$ .

Собирая члены равных порядков в (5.22), (5.26) и (5.31) получим выражения для искомым коэффициентов разложения потенциальной энергии

$$k_2 = -\frac{1}{\rho^2} + V_2 + \frac{b^3}{g} (W_{20} + b^2 W_{22}) \quad (5.32)$$

$$k_4 = -\frac{3}{2\rho^2} + V_4 + \frac{b^3}{g} (W_{40} + b^2 W_{42} + b^4 W_{44}), \quad (5.33)$$

где для краткости аргументы магнитостатических функций опущены.

Члены нулевого порядка приводят к уравнению для равновесного (безразмерного) радиуса ядра центрированного магнитного вихря  $\rho_V = Rb/L_E$

$$-\frac{1}{\rho_V} + \frac{3\rho_V^2 W_{00}(\lambda/\rho_V)}{\lambda} - \rho_V W'_{00}(\lambda/\rho_V) = 0, \quad (5.34)$$

который зависит только от (безразмерной) толщины цилиндра  $\lambda = L/L_E$ . Это уравнение точно совпадает с (4.18).

Выражения (5.32), (5.32), (5.34) и определения магнитостатических функций содержат всю необходимую информацию для вычисления частоты прецессии вихря  $\omega_0$  и её сдвига  $\alpha$  из (5.21). Вычисленные частоты и сдвиги построены на рисунках 5.2 и 5.3, соответственно. Выбор осей координат на этих рисунках обусловлен желанием показать частоты прецессии для наибольшего множества различных геометрий цилиндра. Это означает, что некоторые точки могут оказаться за пределами применимости используемой при вычислениях модели. В некоторых из них магнитный вихрь может не быть основным состоянием цилиндра (см. например фазовую диаграмму основных состояний в §4.4), или может быть нестабильным (см. карту метастабильных состояний в §4.8). При больших толщинах вихрь может развить трёхмерную структуру или его движение может вызвать существенное излучение спиновых волн, делая высокие частоты (у левых концов кривых на рисунке 5.2) недоступными. Кроме того, построение полных зависимостей нивелирует их тонкие детали. К работе [28] прилагается программа для системы компьютерной алгебры MATHEMATICA, которая по приведенным здесь выражениям вычисляет частоты, их сдвиг и коэффициенты разложения потенциальной энергии для любой геометрии цилиндра и параметров материала.

Из рисунков 5.2 и 5.3 можно сделать следующие выводы: 1) частота вихря увеличивается с уменьшением радиуса цилиндра и увеличивается с его толщиной; 2) максимум частоты достигается, когда радиус частицы становится равным радиусу вихря в ней (использованная модель справедлива только если ядро вихря полностью помещается в цилиндре). Можно ожидать, что из-за ограничения, вызванного предполагаемым полным отсутствием боковых зарядов, модель переоценивает частоту прецессии для цилиндров, радиус которых приближается к радиусу ядра, эту частоту следует считать верхним пределом.

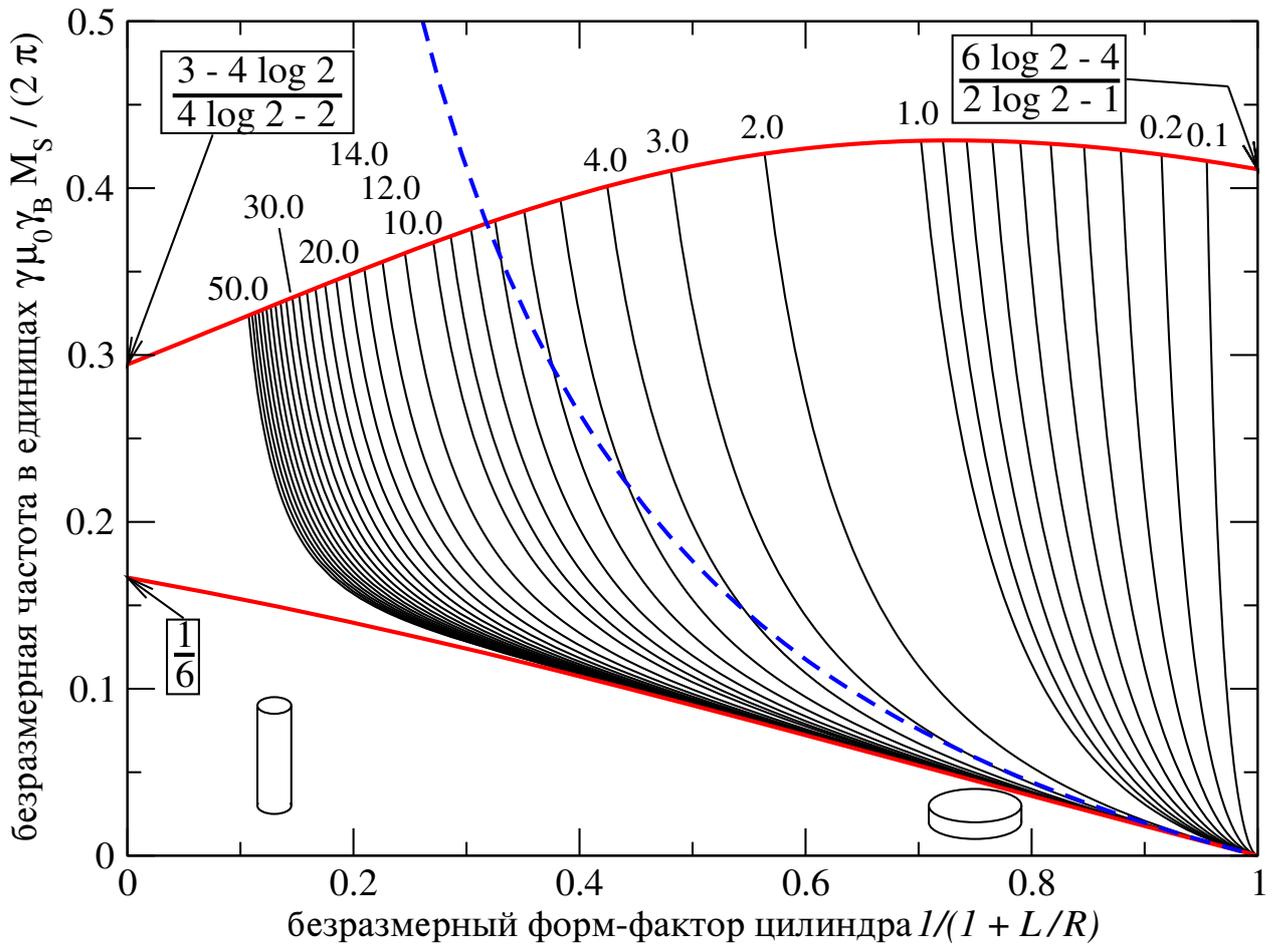


Рисунок 5.2. Частоты свободной прецессии магнитного вихря в круговом цилиндре радиуса  $R$  и толщины  $L$  из магнитомягкого материала с намагниченностью насыщения  $M_S$  и обменной длиной  $L_E$ . По горизонтали отложен фактор формы цилиндра  $g = L/R$  в нелинейном масштабе, чтобы покрыть все его значения. Тонкие сплошные линии соответствуют различным толщинам цилиндра, измеренным в единицах  $L_E$ . Значения толщин брались с равным шагом между каждой парой нанесенных цифровых меток. Нижняя охватывающая толстая линия соответствует пределу больших цилиндров с пренебрежимым ядром, верхняя охватывающая линия соответствует цилиндрам с радиусом, равным радиусу ядра. Пунктирная линия — разложение первого порядка (5.16) нижней охватывающей линии в окрестности  $g = 0$ . Выражения дают точные аналитические выражения для частот в некоторых предельных геометрических конфигурациях цилиндров. Схематические изображения цилиндров иллюстрируют их форму на разных сторонах горизонтальной оси

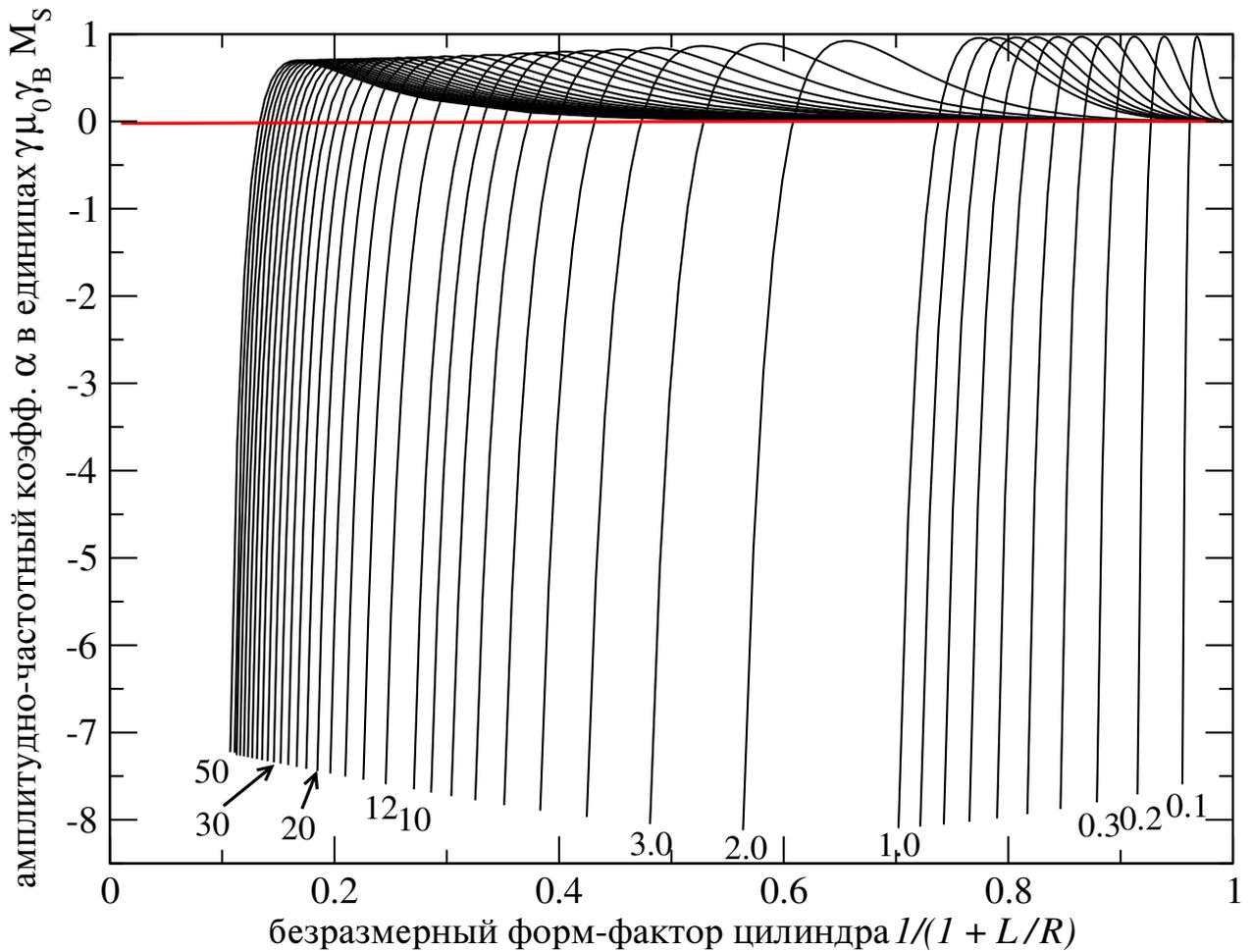


Рисунок 5.3. Амплитудный сдвиг частоты прецессии  $\alpha$  для различных геометрий цилиндра. Горизонтальная ось, параметры и толщины цилиндра, соответствующие различным группам линий, точно такие же как на рисунке 5.2

Для области низких частот существует приближённое аналитическое выражение для частоты, базирующееся на пренебрежении ядром вихря  $\omega_0 = \gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S V_2(0, g)$ , что после перевода в герцы совпадает с формулой (5.16). Замечая, что нижняя охватывающая линия на рисунке 5.2 близка к прямой в выбранной системе координат, можно получить новое простое аналитическое выражение для частоты прецессии вихря

$$\nu_0 \approx \frac{\gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S}{12\pi} \left( 1 - \frac{1}{1+g} \right). \quad (5.35)$$

В отличие от (5.16), показанного на рисунке 5.2 пунктирной линией, это уравнение не содержит предположения  $g \ll 1$  и покрывает как плоские так и вы-

тянутые цилиндры. Оно даёт наибольшую ошибку в 7.91% при  $g \approx 0.72$  или  $1/(1 + 0.72) \approx 0.58$ , уменьшающуюся для меньших и больших  $g$ .

Амплитудно-частотный сдвиг, показанный на рисунке 5.3, тоже покрывает весь диапазон геометрий цилиндра. Из (5.21) можно *a priori* ожидать, что частотный сдвиг может быть отрицательным из-за знака минус перед коэффициентом  $\kappa_4$ , который описывает изменение кинетической энергии вихря вследствие деформации его ядра. Этот эффект не учитывается в подходах, основывающихся на уравнении Тиля [232, 241–244]. Интересно, что геометрию цилиндра можно подобрать так, чтобы амплитудно-частотный сдвиг обратился в нуль. Этот эффект может оказаться полезным при создании микроволновых осцилляторов на магнитных вихрях с повышенной частотной стабильностью. Сдвиг ограничен сверху величиной  $\approx \gamma_p \mu_0 \gamma_B M_S$ , которая достижима в тонких плёнках (толщиной порядка  $L_E$ ). Для более толстых цилиндров максимальный амплитудно-частотный сдвиг меньше.

В работе [244] для измерения амплитудно-частотного сдвига использовался параметр (определённый там как  $\lambda$ ), который можно выразить как

$$v = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{k_4 \kappa_2 - k_2 \kappa_4}{k_2 \kappa_2}. \quad (5.36)$$

В нём нет дополнительного множителя, несмотря на то, что  $\alpha$  связывает сдвиг частоты с амплитудой  $|a|^2$ , тогда как  $v$  связывает его с  $|z_C|^2$ . Множитель отсутствует потому, что в первом порядке  $a$  и  $z_C$  совпадают, что достаточно для получения идентичного разложения в ряд (5.20). В работе [244] было измерено экспериментальное значение  $v$  для единственного цилиндра из FeV. Предполагая, что для FeV  $L_E = 6$  нм и принимая в качестве радиуса цилиндра величину  $R = 250$  нм, которая соответствует половине меньшей оси исследованного эллиптического цилиндра, как можно измерить из правой части вставки на рисунке 1 в [244], уравнение (5.36) даёт относительный сдвиг частоты  $v = 0.38$ , что вполне соответствует измеренному  $v = 0.5 \pm 30\%$ .

Ограничения представленного подхода к описанию (нелинейной) динамики намагниченности следуют из его сильных сторон. Он позволяет получать простые аналитические результаты, но они настолько хороши, насколько точно использованные пробные функции описывают начальное, конечное и (главное) промежуточные состояния намагниченности, возникающие в динамическом процессе. Семейство пробных функций, описанное в Главе 3, достаточно большое и может быть дополнительно обобщено (например, как это было сделано в Главе 4). Это даёт надежду, что представленный лагранжев подход к линейной и нелинейной динамике магнитных вихрей в ограниченной геометрии может оказаться полезным для решения целого ряда интересных задач современного наномagnetизма: о резонансах, динамике зарождения вихрей, динамике заряженных доменных границ в узких полосках, о нелинейном резонансе с внешней подкачкой энергии и о хаосе в наномагнитах.

## Выводы к Главе 5

- 5.1 Разработан подход к описанию линейной и нелинейной динамики намагниченности, который позволяет записать уравнения движения непосредственно в терминах свободных параметров функций комплексной переменной.
- 5.2 Решена задача о малоамплитудной свободной прецессии магнитного вихря в круговом цилиндре. Непротиворечиво, с использованием одних и тех же пробных функций для статической и кинетической части уравнений движения, получено аналитическое выражение для частоты этой прецессии в тонком цилиндре, которое хорошо согласуется с экспериментом.
- 5.3 Получены и решены уравнения нелинейной прецессии вихря с бóльшей ам-

плитудой. Рассчитан амплитудно-частотный коэффициент прецессии во всём диапазоне геометрий цилиндра, где существуют магнитные вихри.

Результаты опубликованы в статьях [27, 28].

## Приложение 5.1

При разложении магнитоэстатической энергии торцевых зарядов по степеням  $|a|$  нужно учитывать, что от  $|a|$  зависит как подынтегральное выражение, так и пределы интегрирования, что вынуждает использовать формулу дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{\partial}{\partial p} \int_{l_1(p)}^{l_2(p)} f(p, x) dx = \int_{l_1(p)}^{l_2(p)} \frac{\partial f(p, x)}{\partial p} dx + f(p, l_2(p))l_2'(p) - f(p, l_1(p))l_1'(p), \quad (5.37)$$

где штрих обозначает производную. Для факторизации оставшихся угловых интегралов, как обычно, использовались интеграл Липшица (4.93) и теорема сложения для функций Бесселя (4.92), которые позволяют выразить магнитоэстатическую энергию торцевых зарядов при помощи функции

$$u(\chi) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-k\chi} (i(\mu, k))^2 dk \quad (5.38)$$

$$i(\mu, k) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} d\eta m_Z(\eta, \varphi) \eta J_n(k\eta) e^{i\mu\varphi}. \quad (5.39)$$

Раскладывая это выражение по степеням  $|a|$  и вычисляя угловые интегралы, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{face}} = & \frac{b^3}{g} (W_{00}(g/b) + |a|^2 (W_{20}(g/b) + b^2 W_{22}(g/b)) + \\ & + |a|^4 (W_{40}(g/b) + b^2 W_{42}(g/b) + b^4 W_{44}(g/b))), \end{aligned} \quad (5.40)$$

с магнитостатическими функциями  $W_i(\chi) = U_i(0) - U_i(\chi)$  и

$$i_0(k) = \int_0^1 \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} J_0(k\eta) \eta \, d\eta \quad (5.41)$$

$$U_{00}(\chi) = \int_0^\infty e^{-k\chi} (i_0(k))^2 \, dk \quad (5.42)$$

$$i_1(k) = \int_0^1 \frac{\eta^3}{(1 + \eta^2)^2} J_0(k\eta) \, d\eta \quad (5.43)$$

$$U_{20}(\chi) = 16 \int_0^\infty e^{-k\chi} i_0(k) i_1(k) \, dk \quad (5.44)$$

$$i_2(k) = \frac{J_0(k)}{2} - 4 \int_0^1 \frac{\eta^5(1 - \eta^2)}{(1 + \eta^2)^3} J_0(k\eta) \, d\eta \quad (5.45)$$

$$i_3(k) = \int_0^1 \frac{\eta^4}{(1 + \eta^2)^2} J_1(k\eta) \, d\eta \quad (5.46)$$

$$U_{22}(\chi) = \int_0^\infty e^{-k\chi} (i_0(k) i_2(k) + 8(i_3(k))^2) \, dk \quad (5.47)$$

$$i_4(k) = J_0(k) + 16 \int_0^1 \frac{\eta^5}{(1 + \eta^2)^3} J_0(k\eta) \eta \, d\eta \quad (5.48)$$

$$U_{40}(\chi) = \int_0^\infty e^{-k\chi} (64(i_1(k))^2 + 4i_0(k) i_4(k)) \, dk \quad (5.49)$$

$$i_5(k) = -6J_0(k) + kJ_1(k) + 32 \int_0^1 \frac{\eta^7(2 - \eta^2)}{(1 + \eta^2)^4} J_0(k\eta) \, d\eta \quad (5.50)$$

$$i_6(k) = J_1(k) - 4 \int_0^1 \frac{\eta^4(1 - 3\eta^2)}{(1 + \eta^2)^3} J_1(k\eta) \, d\eta \quad (5.51)$$

$$i_7(k) = 8i_2(k) i_1(k) - i_5(k) i_0(k) + 8i_3(k) i_6(k) \quad (5.52)$$

$$U_{42}(\chi) = \int_0^\infty e^{-k\chi} i_7(k) \, dk \quad (5.53)$$

$$i_8(k) = (62 - k^2) J_0(k) - 16kJ_1(k) + 128 \int_0^1 \frac{\eta^9(1 - 4\eta^2 - \eta^4)}{(1 + \eta^2)^5} J_0(k\eta) \, d\eta \quad (5.54)$$

$$i_9(k) = kJ_0(k) + 6J_1(k) - 32 \int_0^1 \frac{\eta^8(2 - \eta^2)}{(1 + \eta^2)^4} J_1(k\eta) \, d\eta \quad (5.55)$$

$$i_{10}(k) = \int_0^1 \frac{\eta^7}{(1 + \eta^2)^3} J_2(k\eta) \, d\eta \quad (5.56)$$

$$i_{11}(k) = (J_2(k))^2 + 16i_3(k) i_9(k) + i_0(k) i_8(k) + 8(i_2(k))^2 + 32i_{10}(k)(J_2(k) + 8i_{10}(k)) \quad (5.57)$$

$$U_{44}(\chi) = \frac{1}{32} \int_0^\infty e^{-k\chi} i_{11}(k) dk \quad (5.58)$$

Эти выражения, хоть и компактные, но их непросто вычислить из-за несобственного интеграла по  $k$  от осциллирующих произведений функций Бесселя. Особенно сильно эта проблема проявляется при вычислении  $U_i(0)$ , которые входят в магнитостатические функции  $W_i(\chi)$ . Для устранения этой сложности, в численном счёте (программа приложена к работе [28]) использовались формулы, преобразованные с использованием тождества III 6.612(3) в [218]:

$$\int_0^\infty e^{-k\chi} J_n(k\eta_1) J_n(k\eta_2) dk = \frac{Q_{n-1/2}((\chi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2)/(2\eta_1\eta_2))}{\pi\sqrt{\eta_1\eta_2}}, \quad (5.59)$$

где  $Q_m(x)$  функция Лежандра второго рода. Результат такого улучшения сходимости проверялся сравнением с вышеприведенными выражениями.

## Приложение 5.2

Разложение энергии объёмных зарядов по степеням  $|a|$  можно факторизовать, используя интеграл Липшица (4.93) и теорему сложения для функций Бесселя (4.92), аналогично тому, как это делалось для торцевых зарядов. Интегрирование по  $Z$  можно провести аналитически при помощи тождества (4.96). Вычисление оставшихся угловых интегралов даёт

$$\mathcal{E}_{\text{MS}}^{\text{volume}} = |a|^2 V_2(b, g) + |a|^4 V_4(b, g) \quad (5.60)$$

со следующими магнитостатическими функциями

$$j_0(b, k) = 4b^3 \int_0^b \frac{\eta^2}{(\eta^2 + b^2)^2} J_1(k\eta) d\eta + \int_b^1 \eta J_1(k) dk \quad (5.61)$$

$$V_2(b, g) = 2 \int_0^\infty \frac{f_{\text{MG}}(kg)}{k} (j_0(b, k))^2 dk \quad (5.62)$$

$$j_1(b, k) = -J_2(k) + \int_b^1 \eta^2 J_2(k\eta) d\eta \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} j_2(b, k) = & kJ_0(k) - 5J_1(k) + b^4 J_1(kb) + \\ & + \int_b^1 \eta(16 - \eta^2) J_1(k\eta) d\eta + \\ & + 32b^3 \int_0^b \frac{\eta^4(\eta^4 + 8b^2 + 2\eta^2(4 - b^2)) J_1(k\eta)}{(\eta^2 + b^2)^4} d\eta \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$j_3(b, k) = \int_0^b \frac{\eta^5 J_2(k\eta)}{(\eta^2 + b^2)^3} d\eta \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} j_4(b, k) = & (j_1(b, k))^2 + j_0(b, k)j_2(b, k) + \\ & + 32b^3 j_1(b, k)j_3(b, k) + 256b^6 (j_3(b, k))^2 \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$V_4(b, g) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f_{\text{MG}}(kg)}{k} j_4(b, k) dk. \quad (5.67)$$

## Глава 6. Магнитные солитоны в многосвязных областях

### 6.1. Введение

Для хранения информации достаточно односвязного планарного нанозлемента (например, в форме цилиндра). Но для её обработки, вероятно, потребуются сложные планарные наноструктуры с высокой степенью связности. Это значит, что теорию магнитных текстур необходимо обобщить и на этот случай.

В этой главе подход Главы 3 распространён на случай многосвязных планарных нанозлемента или, другими словами, (цилиндрических) элементов с (цилиндрическими) отверстиями. Получены явные выражения для распределений намагниченности в многосвязных элементах, даны несколько конкретных примеров.

Установлено, что положения вихрей и антивихрей в многосвязных элементах не произвольны, а связаны топологическими ограничениями. Получен явный вид этих ограничений для случая двусвязного элемента (кольца). Проверено, что они с хорошей точностью выполняются в эксперименте.

Топологические ограничения связывают свойства топологических солитонов с топологией нанозлемента (точнее, граничных условий) в которой они существуют. В бесконечной плёнке (хоть она и односвязная) с периодическими граничными условиями топологические ограничения тоже можно обнаружить. Они позволяют провести грань между топологическими солитонами (скирмионами) и магнитными доменами (например, цилиндрическими).

## 6.2. Магнитные состояния многосвязных планарных наноэлементов

Магнитные текстуры можно выразить при помощи функций комплексной переменной, используя метод последовательной минимизации, описанный в Главе 3. Его основным предположением является наличие иерархии энергий, в которой обменная энергия более важна для минимизации, чем магнитостатическая. В наносистемах это предположение выполняется в силу отсутствия магнитных монополей (а значит присутствия в равной мере как положительных, так и отрицательных магнитных зарядов). По мере уменьшения размеров ферромагнетика его магнитостатическая энергия уменьшается не только за счёт изменения возможного количества магнитных зарядов, но и за счёт того, что магнитные заряды разных знаков оказываются всё ближе друг к другу, а их положительная собственная энергия всё больше компенсируется отрицательной энергией их взаимодействия. В конце концов, это приводит к полному доминированию обменного взаимодействия и, соответственно, однородному магнитному состоянию односвязной частицы. Метод последовательной минимизации работает в области размеров частиц, непосредственно примыкающей к области их однодоменности, то есть порядка нескольких (десятков) обменных длин  $L_E$ .

Предельный размер системы, где можно ожидать применимость этого подхода, является не абсолютно определённой величиной, а зависящим от формы частицы следствием частичной компенсации энергии взаимодействия магнитных зарядов. В силу притяжения зарядов разных знаков можно ожидать, что для компенсации зарядов важен наименьший поперечный размер системы. То есть для многосвязных цилиндров (например, кольца) имеет значение уже не полный размер наномангнита, а размер перемычек, состоящих из магнитного материала (ширина кольца), где только магнитные заряды и могут возникнуть. Поэтому, например, кольцо может быть сравнительно большого (микронного и

более) размера, но, если его ширина порядка нескольких (десятков) обменных длин, то можно ожидать, что метод последовательной минимизации к нему так же применим. Как и в случае односвязных систем, из-за нелокальности магнитостатического взаимодействия более точную оценку *a priori* дать вряд ли возможно. Поэтому в данной Главе применимость последовательной минимизации также оценивается *a posteriori*, по тому насколько соответствуют эксперименту полученные с его помощью магнитные текстуры.

Рассмотрим планарный ферромагнитный элемент в виде цилиндра толщиной  $L$ , построенный на многосвязном основании, изображённом на рисунке 6.1. В соответствии с методом последовательной минимизации магнитную текстуру можно представить при помощи стереографической проекции (1.60) в которой функция  $w(z, \bar{z})$  представляет собой шивку солитона и сингулярного мерона (3.4), построенных на базе мероморфной функции комплексной переменной  $f(z)$ , не имеющей нормальных компонент к границе основания цилиндра. Функцию  $f(z)$  можно найти как решение краевой задачи Римана-Гильберта внутри основания цилиндра с соответствующим (отсутствию нормальных компонент) граничным условием.

Как и в односвязном случае, функции  $f(z)$  для некоторой области  $z \in \mathcal{D}$ , можно поставить в соответствие решение  $f(t)$  в любой другой конформно связанной области  $z \in \mathcal{D}'$  по формуле

$$u(t) = f(z)T'(z)|_{z=T^{-1}(t)}, \quad (6.1)$$

где  $t = T(z)$  конформное отображение, связывающее  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}'$ , а  $T^{-1}(t)$  — обратное отображение, которое всегда существует. В односвязном случае конформную связь можно установить между любыми двумя (односвязными) областями. В многосвязном же случае, не любые две области одной и той же связности можно отобразить друг на друга. Например, конформно отобразить друг на друга два концентрических кольца можно только в том случае, если отношение их

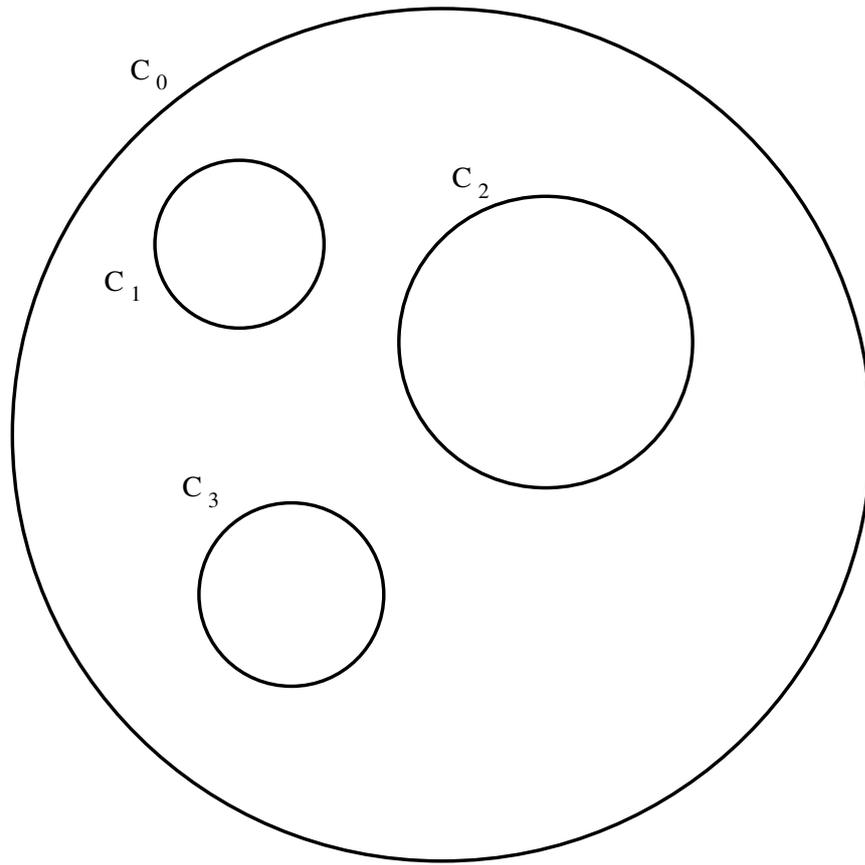


Рисунок 6.1. Пример четырёхсвязной круговой области с внешней границей  $C_0$  и внутренними границами  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3$

внутреннего и внешнего радиусов одно и то же.

Благодаря теоремам Пола Кёбе, известно, что можно определить параметризованные канонические семейства многосвязных областей, на которые (после выбора параметров) можно отобразить любую область той же связности. Диски с вырезанными непересекающимися дисками, параметризованные при помощи радиусов и координат центров (см. рисунок 6.1), представляют собой одно из таких канонических семейств [245]. В частности, любую двусвязную область можно отобразить на единичное концентрическое кольцо с определённым внутренним радиусом. Именно поэтому здесь (без ограничения общности) строятся распределения намагниченности именно в таких круговых областях.

Рассмотрим вначале вопрос о существовании решений в круговой многосвязной области  $\mathcal{D}$  и их общие свойства. Формально задача состоит в нахож-

дении мероморфной в области  $\mathcal{D}$  функции  $f(z)$ , удовлетворяющей граничному условию

$$\operatorname{Re}(f(z)\overline{n(z)}) = 0, \quad z \in \partial\mathcal{D}, \quad (6.2)$$

где  $n(z)$  — комплексная нормаль к границе области  $\mathcal{D}$ . Функция  $f(z)$  в общем случае может иметь нули и сингулярности на границе. Это граничное условие можно переписать следующим образом [246]:

$$\operatorname{Im} \frac{dz}{f(z)} = 0, \quad z \in \partial\mathcal{D}, \quad (6.3)$$

которое обозначает, что мероморфный дифференциал  $(dz)/f(z)$  является действительным на границе области (или, другими словами, на границе этот дифференциал является действительным дифференциалом). Это условие является конформно-инвариантным и, в частности, из него следует (6.1).

Для описания множества всех действительных дифференциалов в  $\mathcal{D}$  удобно использовать понятие дубля области, который является компактной римановой поверхностью  $X(\mathcal{D})$  рода  $g$ , равного связности области (количеству границ в области  $\mathcal{D}$  минус единица). Дубль можно представить себе как две резиновых копии исходной области, положенные друг на друга, склеенные вдоль всех границ и наполненные воздухом как воздушный шарик. На одной половине дубля используется координата  $z$ , а на другой  $\bar{z}$ . Дубль допускает операцию отражения  $\bar{J}$ , которая меняет его копии местами. Эта операция является стационарной точно на границе области  $\mathcal{D}$ . Используя отражение, условия действительности дифференциала  $d\eta$  можно записать следующим образом:

$$\bar{J} d\eta = \overline{d\eta}. \quad (6.4)$$

Простым рецептом получения действительных мероморфных дифференциалов является симметризация: возьмём произвольный мероморфный дифференциал на дубле, тогда  $d\eta + \overline{J d\eta}$  является мероморфным и действительным.

Из этого следует, что

$$\#\{f(z) \text{ poles}\} - \#\{f(z) \text{ zeroes}\} = \#\{\partial\mathcal{D}\} - 2 \quad (6.5)$$

где  $\#\{f(z) \text{ zeroes}\} / \#\{f(z) \text{ poles}\}$  – количество нулей / полюсов (вихрей / антивихрей) в области  $\mathcal{D}$ , а  $\#\{\partial\mathcal{D}\}$  – количество граничных компонент области  $\mathcal{D}$  или её связность. Полюса и нули здесь считаются вместе с их кратностью и для тех из них, которые закреплены на границе, кратность делится пополам.

Выражение (6.5) справедливо потому что степень знаменателя (дивизора) действительного мероморфного (абелева) дифференциала  $d\eta := (dz)/f(z)$  на дубле однозначно выражается через его род и равна  $2g - 2$  (см. раздел 10.4. “Дивизоры” в [247] на с. 294). Так как род дубля равен  $g = \#\{\partial\mathcal{D}\} - 1$ , получим для разности количества нулей и полюсов мероморфного дифференциала  $2\#\{\partial\mathcal{D}\} - 4$ . Отсюда с учётом того, что в симметризованном дифференциале нули и полюса распределены симметрично между копиями дубля, их количество в одной из копий определяется соотношением (6.5). Таким образом, количество нулей и количество полюсов функции  $f(z)$  связаны друг с другом.

Выполнить симметризацию можно, если построить представление дубля  $X(\mathcal{D})$  в виде алгебраической кривой. Такое представление для случая многосвязных круговых областей выражается в виде суммы по элементам соответствующей группы Шоттки [248]. Вычисление таких рядов напрямую является достаточно трудоёмкой операцией, поэтому воспользуемся другим способом построения  $f(z)$ . Сделаем это при помощи главной функции Шоттки-Клейна [249, 250], которая уже включает в себя суммирование по элементам группы Шоттки и для вычисления которой уже существует эффективный численный алгоритм [251]. Функция Шоттки-Клейна полезна при построении конформных отображений произвольной многосвязной многоугольной области на одну из канонических круговых [252], обобщающих формулу Шварца-Кристоффеля на многосвязный случай. Она также имеет ряд приложений в задачах оптими-

зации [253, 254].

Неформально (для формального определения см. [251], где оно занимает весь раздел 2) функцию Шоттки-Клейна  $S(z, \zeta)$  конкретной многосвязной круговой области  $\mathcal{D}$  можно представить себе как обобщение разности

$$S = S_1(z, \zeta) = z - \zeta \quad (6.6)$$

в односвязном случае, которая в многосвязном случае становится функцией Шоттки-Клейна

$$S = S(z, \zeta). \quad (6.7)$$

Произведения таких разностей в односвязном случае позволяют построить рациональные функции комплексной переменной, как обсуждалось в §1.6. Их обобщение в виде функций Шоттки-Клейна было использовано Дарреном Крауди [252] при построении обобщения формулы Шварца-Кристоффеля.

В единичном концентрическом кольце с внешним радиусом 1 и внутренним  $q < 1$  функцию Шоттки-Клейна можно записать в виде произведения

$$S_r(z, \zeta) = (z - \zeta) \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k} z/\zeta)(1 - q^{2k} \zeta/z)}{(\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}))^2} \quad (6.8)$$

или при помощи  $q$ -символов Похгаммера  $(a; q)_n$

$$S_r(z, \zeta) = \frac{z\zeta}{z - \zeta} \frac{(\zeta/z, q^2)_{\infty} (z/\zeta, q^2)_{\infty}}{((q^2, q^2)_{\infty})^2}. \quad (6.9)$$

Эта функция используется в некоторых из следующих примеров.

Для построения решения задачи Римана-Гильберта с заданными положениями вихрей (или антивихрей) определим две вспомогательные функции, введенные в разделе 5 работы [252] при построении аналога формулы Шварца-Кристоффеля:

$$F_1(z; \zeta_1, \zeta_2) = \frac{S(z, \zeta_1)}{S(z, \zeta_2)}, \quad (6.10)$$

$$F_2(z; \zeta) = \frac{S(z, \zeta)S(z, 1/\bar{\zeta})}{S(z, \bar{\zeta})S(z, 1/\zeta)}. \quad (6.11)$$

Эти функции  $z$  при условии, что  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  принадлежат одной и той же внутренней или внешней окружности  $C_j$  (with  $j = 0, 1, 2, \dots$ ) многосвязной круговой области, а  $\zeta$  произвольная точка внутри области, имеют постоянное значение аргумента (комплексной фазы) на всех границах  $C_j$ . Это означает, что произведение этих функций также имеет постоянный аргумент на всех границах рассматриваемой многосвязной круговой области, а значит логарифмическая производная такого произведения

$$u(z) = \frac{\partial}{\partial z} \log \left( \prod_m F_1(z; \zeta_{1,m}, \zeta_{2,m}) \prod_n F_2(z; \zeta_n) \right) \quad (6.12)$$

является мероморфной функцией  $z$  в многосвязной круговой области  $\mathcal{D}$ , удовлетворяющей граничному условию (6.2) на всех граничных компонентах  $\mathcal{D}$ . То есть решением задачи Римана-Гильберта без нормальных компонент к границе области  $\mathcal{D}$ , параметризованное при помощи  $\zeta_{1,m}$ ,  $\zeta_{2,m}$ ,  $\zeta_n$ , указывающих положения его нулей и полюсов. Оно также может иметь некоторые дополнительные нули и полюса в количестве, необходимом для удовлетворения (6.5) и в позициях, необходимых для выполнения топологических ограничений (см. §6.3 ниже). В качестве мероморфной функции, определяющей распределение намагниченности можно выбрать  $f(z) = u(z)$  или  $f(z) = u(1/z)$ . При этом вихри превращаются в антивихри и наоборот.

На рисунках 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 и 6.6 изображены примеры полученных решений для различных положений вихрей и антивихрей. Многие из них воспроизводят аналитически магнитные текстуры, наблюдаемые (посредством натурального и численного эксперимента) в микронных ферромагнитных кольцах.

Таким образом, удалось построить приближённое аналитическое представление для магнитных текстур в планарных многосвязных наномагнитах. Оно параметризовано положениями вихрей или антивихрей (топологических сингулярностей), но при его применении могут возникать новые солитоны в других позициях. Это значит, что невозможно произвольным образом указать положе-

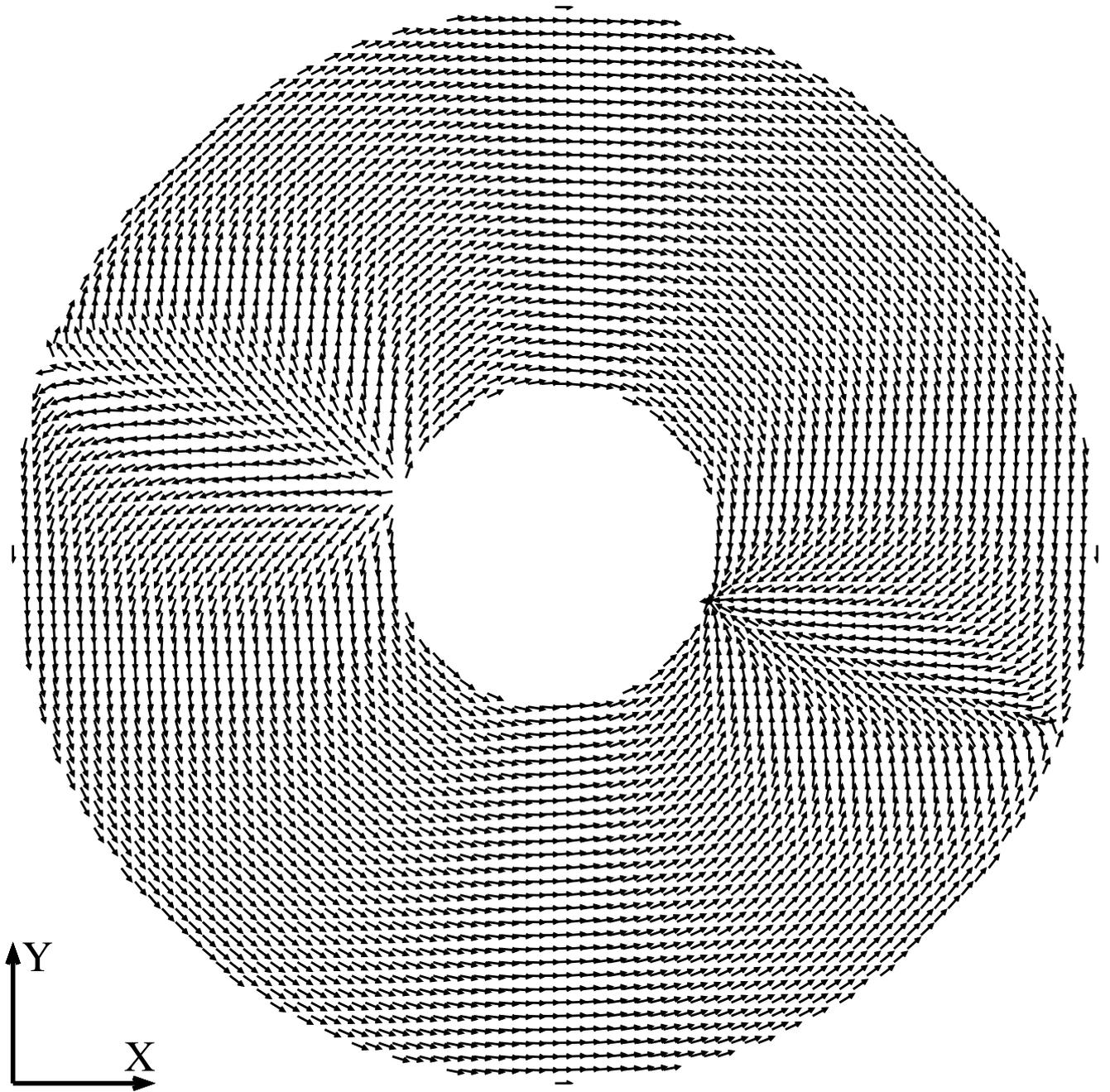


Рисунок 6.2. Конечные доменные границы в кольце с  $q = 0.3$ , вычисленные из (1.60) и (3.4) с  $e_1 = 0$ ,  $e_2 \rightarrow \infty$ ,  $u(z) = (\partial/\partial z) \log F_1(z; e^{-8\pi i/9}, e^{\pi i/9})$  и  $f(z) = u(1/z)$

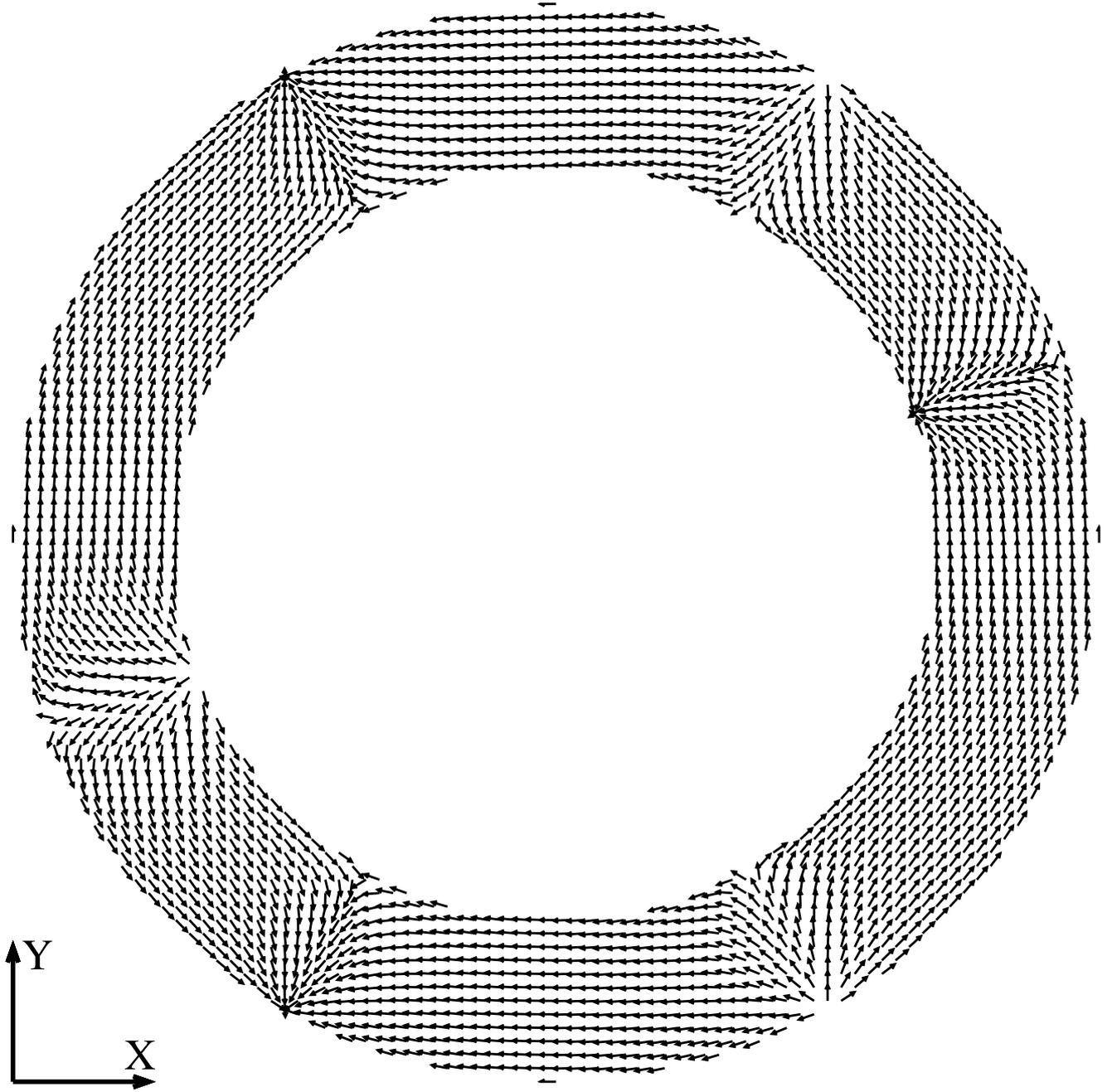


Рисунок 6.3. Доменная структура с несколькими конечными доменными границами в кольце с  $q = 0.7$  и  $u(z)$ , являющейся теперь произведением трёх функций  $F_1$ :  $F_1(z; e^{8\pi i/9}, e^{-\pi i/9})$ ,  $F_1(z; qe^{4\pi i/3}, qe^{-2\pi i/3})$  и  $F_1(z; qe^{\pi i/3}, qe^{-\pi i/3})$ . Остальные параметры такие же как на рисунке 6.2

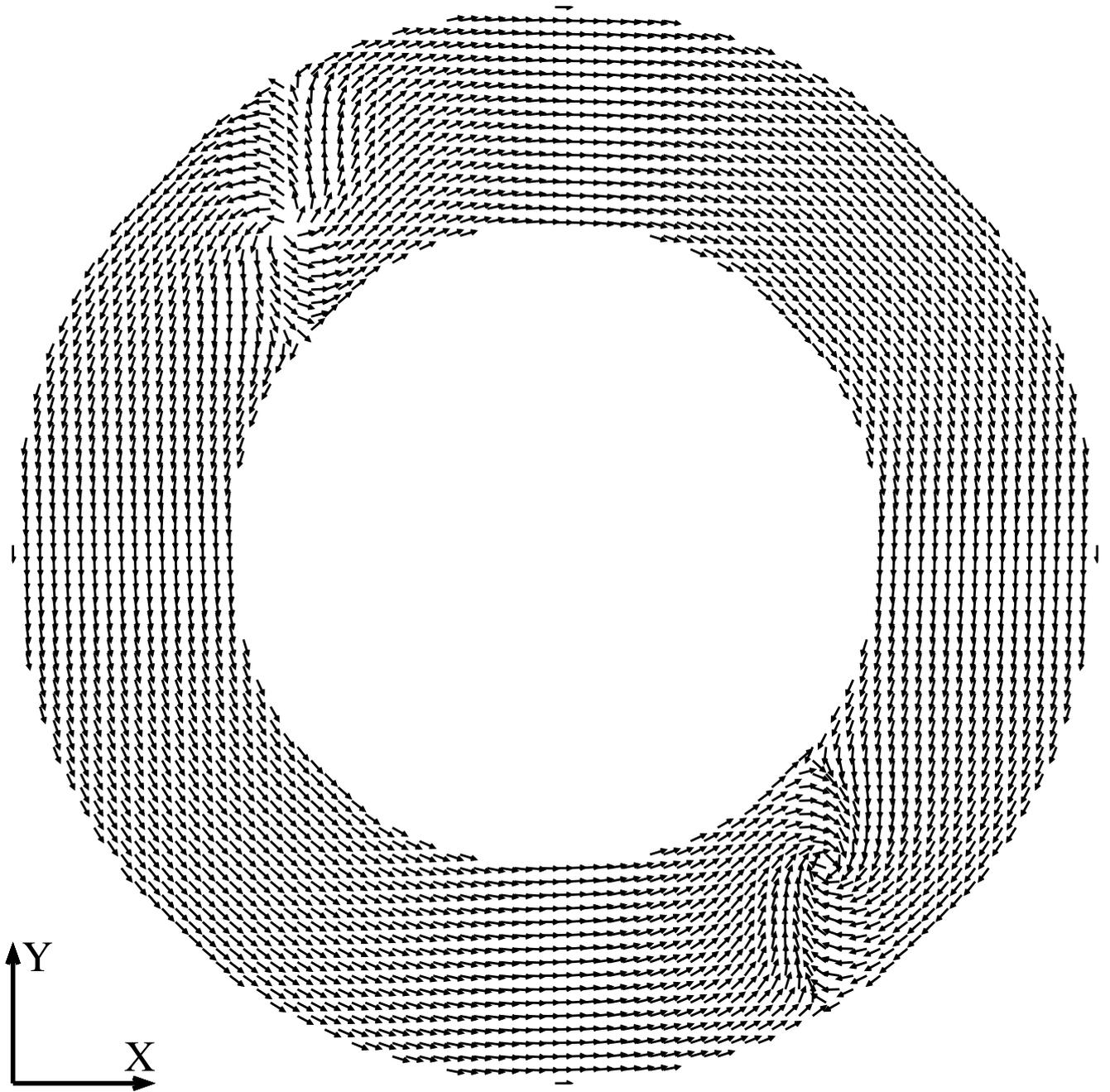


Рисунок 6.4. Вихревая доменная граница в кольце с  $q = 0.6$  и  $u(z)$ , представляющей собой произведение  $F_1(z; e^{4\pi i/3}, e^{\pi i/3})$  и  $F_1(z; qe^{11\pi i/9}, qe^{2\pi i/9})$ . Остальные параметры такие же как на рисунке 6.2

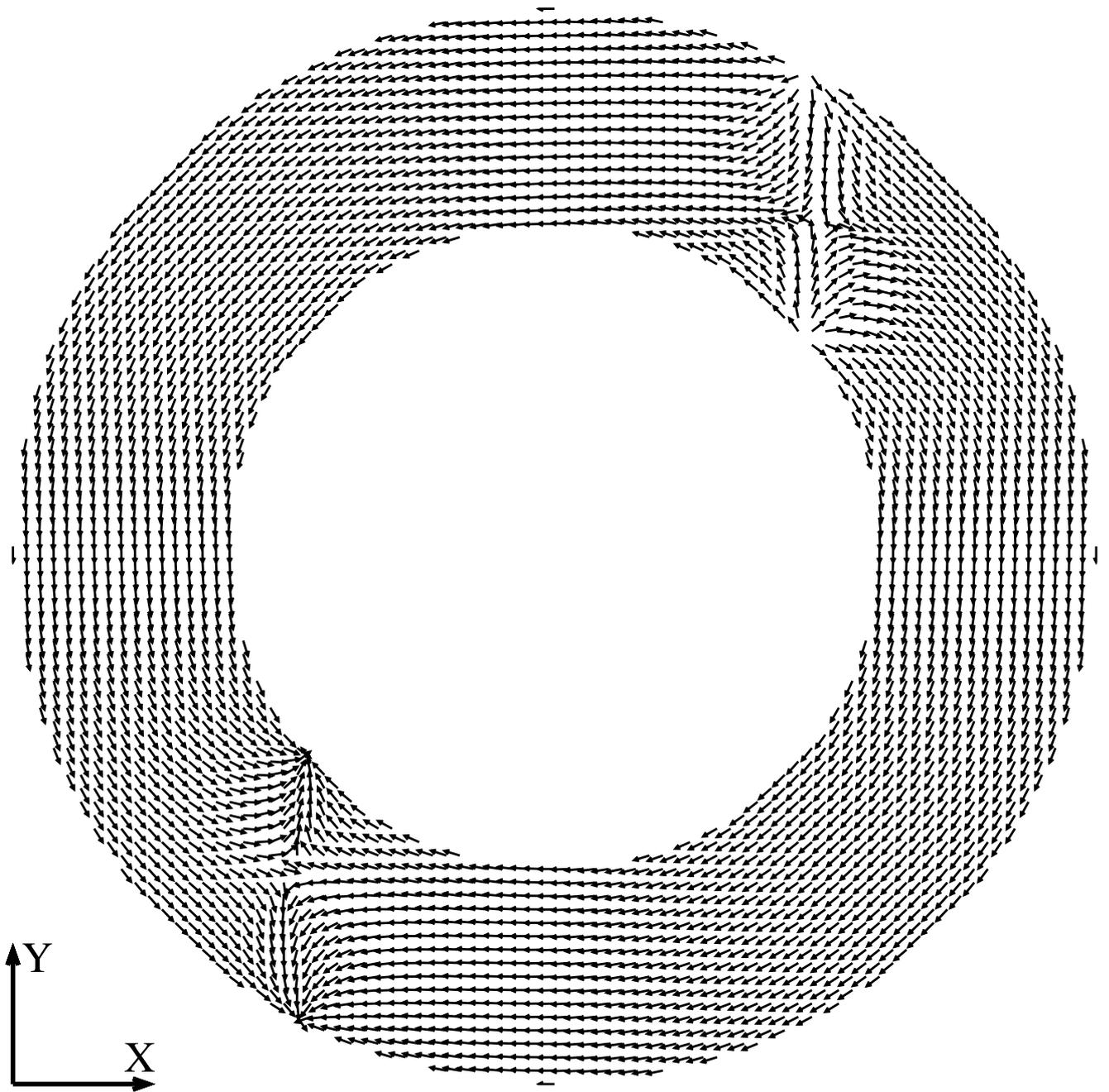


Рисунок 6.5. Антивихревые доменные границы в кольце. Параметры для этого рисунка такие же как и для рисунка 6.4, кроме того, что теперь  $f(z) = u(z)$

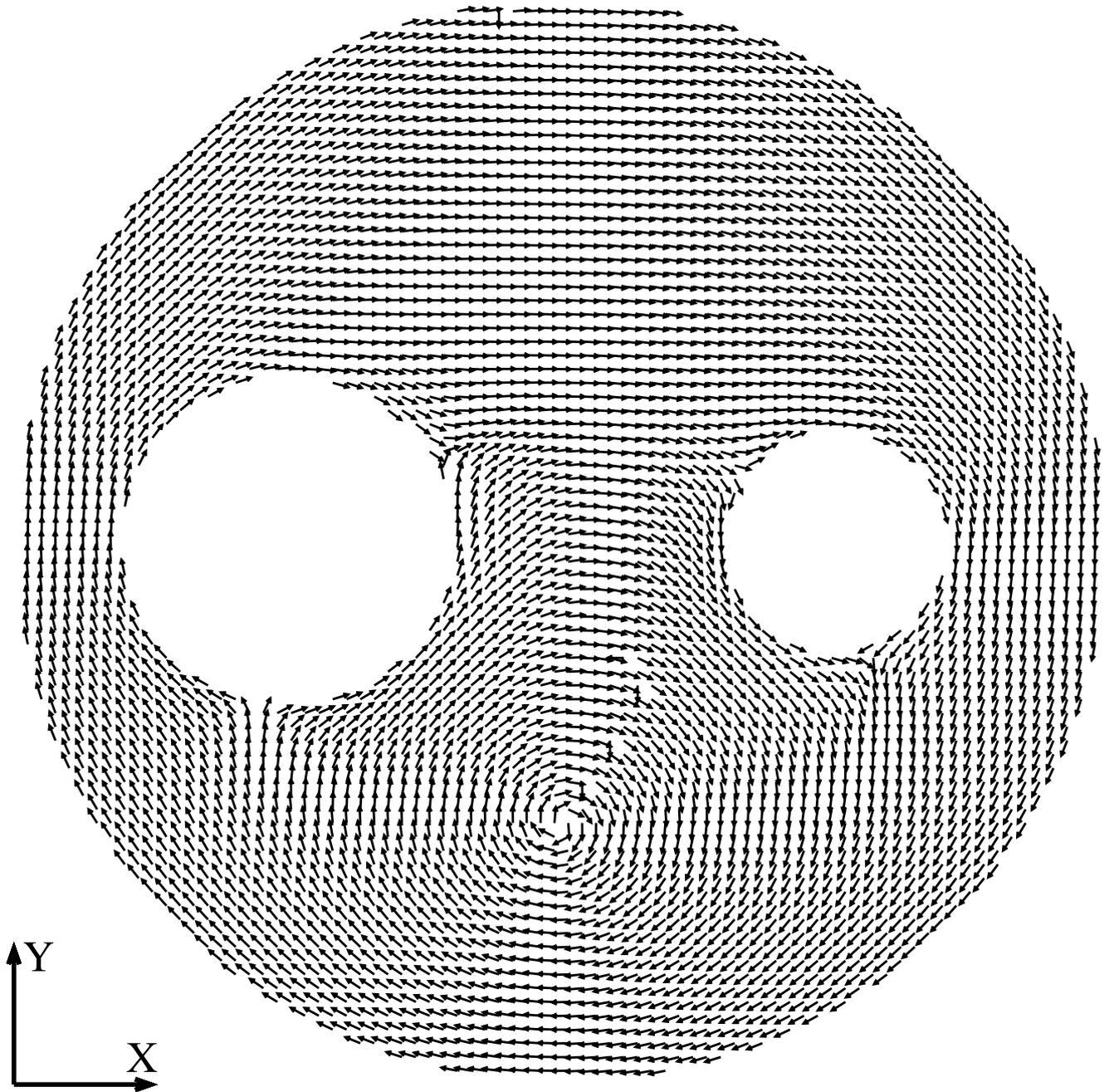


Рисунок 6.6. Вихрь в трёхсвязной области с двумя вырезанными дисками радиусов 0.2 и 0.3, расположенные в  $X = 0.5$  и  $X = -0.5$  соответственно. Функция  $u(z) = (\partial/\partial z) \log F_2(z; -0.52i)$  и  $f(z) = u(z)$ . Функция Шоттки-Клейна вычислялась численно при помощи пакета для Matlab, описанного в [251]

ния всех вихрей и антивихрей в многосвязной области. Конкретный вид этих ограничений получен в следующих параграфах.

### 6.3. Топологические ограничения в кольце

Чтобы получить условие, связывающее положения вихрей и антивихрей рассмотрим простейший случай двусвязной области в виде концентрического кольца  $\mathcal{A}$  с парой встречных вихревых доменных границ в ней, изображённую на рисунке 6.4. Антивихри в данном случае закреплены на границах кольца. Этой магнитной текстуре можно поставить в соответствие действительный мероморфный дифференциал  $d\omega = (dz)/f(z)$ , такой что на боковой границе цилиндра выполняется (6.3) или  $\text{Im } \omega = 0$ .

С другой стороны, существует действительный голоморфный дифференциал  $d\eta = i dz/z$  без нулей и полюсов в концентрическом кольце  $\mathcal{A}$ . Если разделить дифференциал  $d\eta$  на  $d\omega$  получим мероморфную функцию  $v(z) = if(z)/z$ , которая принимает действительные значения на граничных окружностях, а её нули и полюса в точности совпадают с позициями вихрей и антивихрей оригинальной магнитной текстуры, описываемой  $f(z)$ . Поворачивая кольцо, всегда можно добиться того, чтобы функция  $v(z)$  не имела нулей и полюсов на отрезке  $[q, 1]$ , где  $q$  внутренний радиус кольца. Тогда выполняется следующее тождество:

$$0 = \oint_{\partial(\mathcal{A} - (v) - [q, 1])} \log(z) \frac{v'(z)}{v(z)} dz. \quad (6.13)$$

Интегрирование здесь идёт по замкнутому контуру, составленному из границ кольца  $\mathcal{A}$ , двух берегов разреза вдоль отрезка  $[q, 1]$  и замкнутых контуров, обходящих все нули и полюса функции  $v(z)$ , обозначенных  $(v)$ . Пример такого

контура интегрирования для случая вихревой доменной границы показан на рисунке 6.7. Разрез вдоль отрезка  $[q, 1]$  необходим для выделения однозначной ветви  $\log(z)$ . Интеграл (6.13) равен нулю потому, что подынтегральная функция внутри контура аналитическая и не имеет особых точек.

Интеграл вдоль участков контура, стянутых вокруг вихрей и антивихрей (включая те из них, которые расположены на границе), можно вычислить по теореме о вычетах, он даёт

$$2\pi i \sum_{z \in (v)} m(z) \log(z), \quad (6.14)$$

где  $z$  координата каждого нуля или полюса функции  $f(z)$ , а  $m(z)$  его кратность, принимающая отрицательные значения для полюсов и взятая с весом  $1/2$ , если нуль/полюс лежит на границе. Действительная часть этого интеграла пропорциональна разности сумм азимутов вихрей и антивихрей с соответствующими весами.

Интеграл по граничным окружностям с вырезанными малыми симметричными окрестностями вихрей / антивихрей, лежащих на границе, является чисто мнимым. Наконец, интеграл по границам разреза  $[\rho, 1]$  соответствует интегрированию скачка функции при возврате на исходную ветвь, который равен  $-2\pi i d \log(v(z))$  вдоль разреза. В силу того, что функция  $v(z)$  является на концах разреза действительной, действительная часть этого интеграла лежит в решётке  $2\pi^2\mathbb{Z}$ , где  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел. Таким образом, из действительной части тождества (6.13) после деления на  $2\pi$  получим соотношение

$$\text{Arg}(f)_+ - \text{Arg}(f)_- \in \pi\mathbb{Z}, \quad (6.15)$$

где  $\text{Arg}(f)_\pm$  сумма аргументов (азимутов) всех нулей/полюсов  $f(z)$  в концентрическом кольце, вычисленная в единицах  $2\pi$ , взятая с учётом их кратности и с весом  $1/2$ , если нуль/полюс лежит на границе цилиндра. Другими словами: сумма азимутов вихрей, отсчитанная из центра кольца в единицах  $2\pi$ , равна

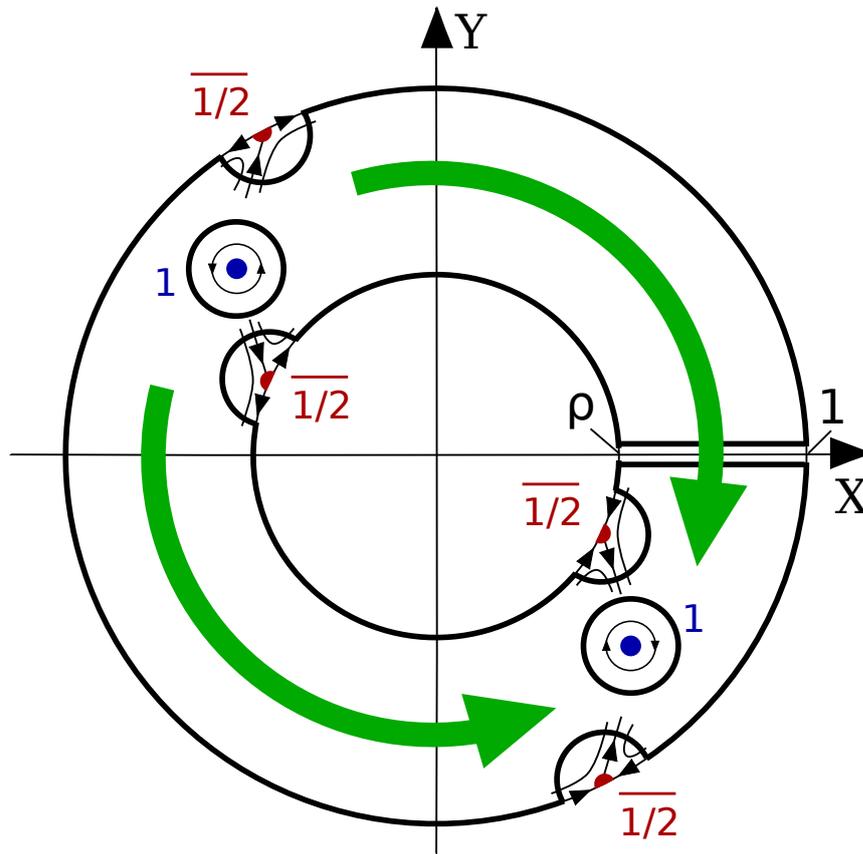


Рисунок 6.7. Контур интегрирования в (6.13) для случая встречных  $180^\circ$  вихревых границ в кольце, показанных на рисунке 6.4. Большие закруглённые стрелки показывают общее направление намагниченности в доменах. Солитоны (вихри и антивихри) показаны схематически, а их центры отмечены жирными точками (и половинками точек, если они лежат на границе). Вихри помечены символом 1, а половинки антивихрей символом  $\overline{1/2}$

сумме азимутов антивихрей по модулю  $\pi$ .

В силу обратимости всех использованных аргументов, можно сказать, что обратное тоже верно: в конкретной многосвязной области, для заданного набора топологических сингулярностей, удовлетворяющих топологическим ограничениям, всегда существует единственное (с точностью до масштаба) решение  $f(z)$  задачи Римана-Гильберта для магнитной текстуры.

Для проверки несложно убедиться, что это топологическое ограничение выполняется для аналитического распределения намагниченности, показанного

на рисунке 6.4 и всех других распределений намагниченности в кольцах, вычисленных в §6.2. Причём выполняются они с любой наперёд заданной точностью, что можно проверить путём численного поиска нулей и полюсов приведенных там же соответствующих аналитических выражений. Экспериментальная проверка сложнее, вследствие неизбежных в эксперименте погрешностей. Особенно, если учесть, что солитоны имеют размер порядка десяти нанометров, а их положение нужно определить ещё точнее.

Тем не менее, эксперимент с достаточной для этого точностью был проведен [255]. В нём изучалась динамика вихревой доменной границы в микронном пермалловом кольце. На полученных стробоскопическим методом изображениях можно разрешить позиции вихрей (сделано авторами [255]) и позиции антивихрей (сделано автором данной работы) как функции времени на протяжении достаточно сложного динамического процесса, соответствующего плавному включению, вращению и плавному выключению магнитного поля. Вычисленная разность фаз  $\delta = (\text{Arg}(f)_+ - \text{Arg}(f)_-) \bmod \pi$  показана на рисунке 6.8. Фильм с отмеченными положениями вихрей и антивихрей на каждом кадре опубликован в качестве дополнительного материала к [30]. Разброс точек получается довольно значительным и имеет как случайную (вследствие пиннинга), так и систематическую (вследствие пространственного разрешения изображений) составляющие. Случайная ошибка была вычислена, считая что при фиксированной величине внешнего поля разброс происходит исключительно за счёт случайных факторов, что даёт  $\sigma_R = 0.0544$ . Систематическая ошибка в  $\sigma_S = 0.0493$  равна половине углового размера пикселя использованного в эксперименте детектора (более точно измерить положение центра вихря на основании одного изображения невозможно). Комбинируя эти два вклада, получим полную погрешность  $\sigma = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \simeq 0.08$ .

Как можно видеть, отклонения от топологического ограничения (6.15) носят случайный характер и близки по своим характеристикам к шуму. Этот шум,

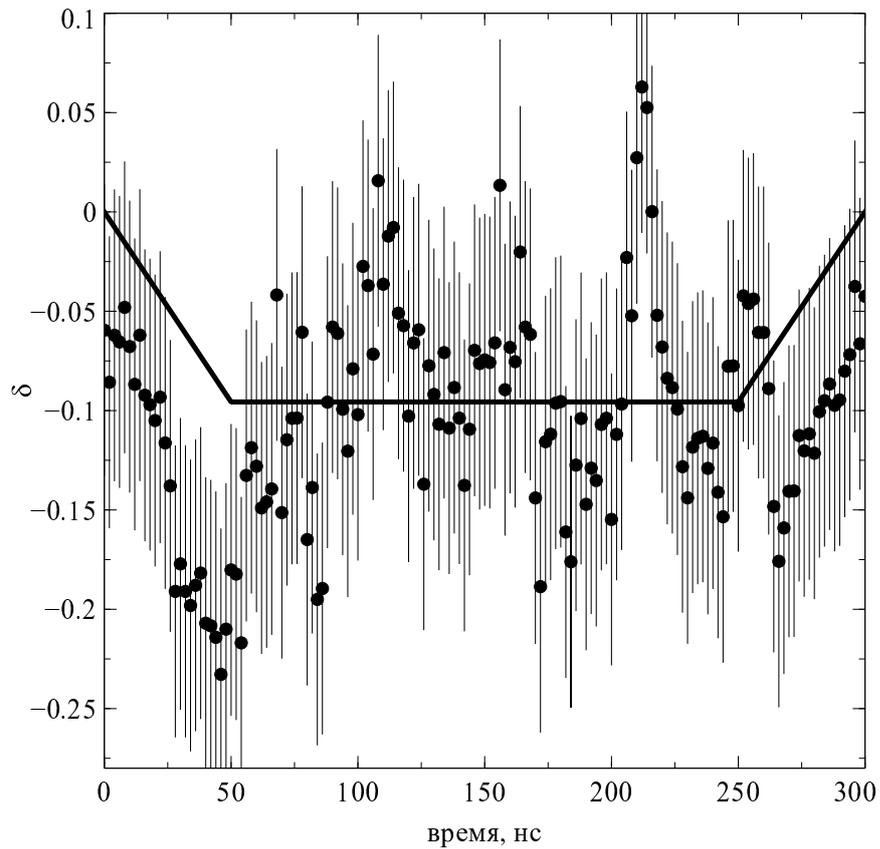


Рисунок 6.8. Точки показывают разность приведенных сумм азимутов вихрей и антивихрей  $\delta$  как функции времени во время сложной динамической эволюции двух вихревых доменных границ в кольце, извлечённую из экспериментальных данных работы [255]. Сплошная линия показывает амплитуду магнитного поля в этом процессе. Погрешности (вертикальные линии) вычислены в тексте

как и небольшое систематическое отставание азимутов вихрей от азимутов антивихрей при вращении поля, можно объяснить несовершенством геометрической формы использованного в эксперименте кольца, приводящим к пиннингу (разному для вихрей и антивихрей) и небольшому гистерезису. Тем не менее, все отклонения приведенной разности азимутов  $\delta$  от нуля на рисунке 6.8 много меньше величины  $\pi$ , а значит однозначно свидетельствуют о том, что топологическое ограничение (6.15) выполняется.

Топологические ограничения являются следствием двух факторов: непрерывности векторного поля намагниченности и необходимости удовлетворить

при этом граничным условиям с нетривиальной топологией. Такая топология возникает в случае многосвязных областей (из которых самый простой случай кольцо). Но существует случай ещё проще: периодические магнитные текстуры в бесконечной плёнке, которые рассмотрены далее.

#### 6.4. Топологические ограничения в периодических текстурах

Магнитным состояниям планарных наноэлементов можно поставить в соответствие функции комплексной переменной. Периодическим магнитным состояниям тогда соответствуют двоякопериодические функции, которые выражаются в терминах эллиптических функций. Получим это представление в явном виде.

С точностью до масштабирования и поворота любую двумерную решётку можно представить как порождённую двумя базисными комплексными векторами:  $1$  и  $\tau$ :

$$L = L(\tau) := \{i + j\tau, \quad i, j \in \mathbb{Z}\}, \quad (6.16)$$

где  $\mathbb{Z}$  множество целых чисел. Без ограничения общности предположим, что  $\text{Im } \tau > 0$ . Существует достаточно большая свобода при выборе элементарной ячейки решётки, которая покрывает всю плоскость после трансляции на все элементы множества  $L$ . Например, элементарная ячейка может быть параллелограммом

$$\Pi := \{z = t_1 + t_2\tau, \quad 0 < t_s < 1, \quad s = 1, 2\} \quad (6.17)$$

или любым его сдвигом, или, в случае гексагональной решётки с  $\tau = e^{i\pi/3}$ , правильным шестиугольником.

Нули и полюса  $f(z)$  соответствуют вихрям и антивихрям (или седлам) в

магнитной текстуре. Хиральность каждого вихря  $\chi_j$  с центром в  $z = z_j$  можно измерить величиной коэффициента разложения Тейлора функции  $f(z)$  в окрестности её нуля:  $f(z) = (z - z_j)/\chi_j + O((z - z_j)^2)$ . Намагниченность в вихре  $j$  вращается против часовой стрелки, если соответствующая  $\text{Im } \chi_j > 0$  (по часовой, если  $< 0$ ).

В терминах этих определений для любой двоякопериодической функции  $f(z)$  должны выполняться следующие ограничения:

- 1) Число вихрей равно числу антивихрей (седел) в каждой элементарной ячейке.
- 2) Сумма положений центров вихрей в ячейке и сумма положений центров антивихрей равны друг другу с точностью до вектора решётки.
- 3) Сумма хиральностей  $\chi_j$  всех вихрей внутри элементарной ячейки равна нулю.

Эти ограничения несложно доказать, исходя из свойств эллиптических функций [256]. Если слегка сдвинуть элементарный параллелограмм  $\Pi$  так, что  $f(z)$  не имеет ни нулей, ни полюсов на его границе (например, как это показано на рисунке 6.9). Тогда ограничение 1) следует из

$$0 = \oint_{\partial\Pi} d \log f(z) = 2\pi i (\#[f(z)] - \#[1/f(z)]), \quad (6.18)$$

где  $\#[f(z)]$  обозначает количество нулей (включая их кратность) функции  $f(z)$  внутри  $\Pi$ , а  $\#[1/f(z)]$ , соответственно, количество полюсов. Действительно, на противоположных сторонах  $\Pi$  одна и та же (в силу периодичности) функцию интегрируется в противоположных направлениях, что даёт первое равенство; второе равенство следует из теоремы о вычетах. Ограничение 2) можно получить [256] из рассмотрения

$$2\pi i L \ni \oint_{\partial\Pi} d(z \log f(z)) = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^n p_j \right), \quad (6.19)$$

где  $z_j$  ( $p_j$ ) положения нулей (полюсов) функции  $f(z)$  внутри  $\Pi$ , повторённые,

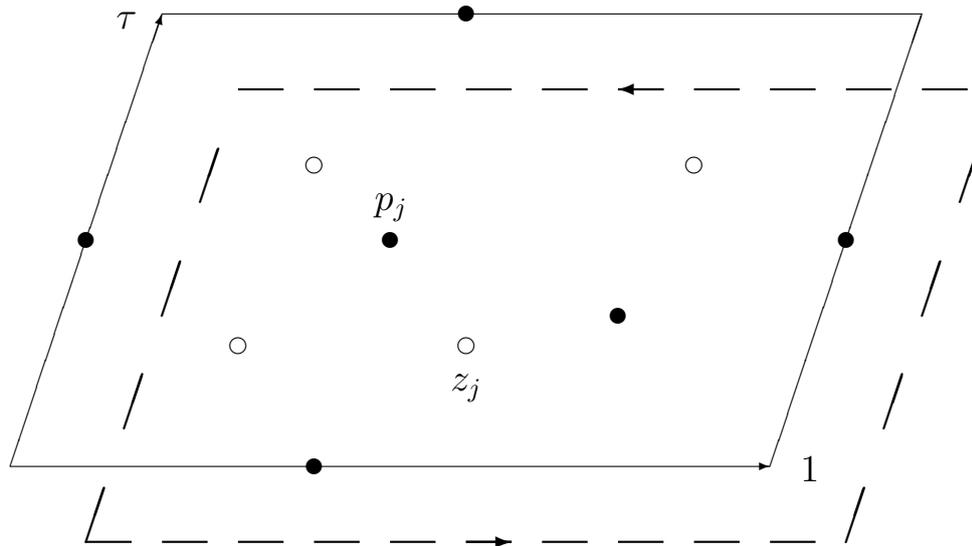


Рисунок 6.9. Путь интегрирования вокруг элементарной ячейки 2-мерной решётки, с базисными векторами  $1$  и  $\tau$ , избегающий нули  $z_j$  и полюса  $p_j$  функции со степенью числителя и знаменателя  $n = 4$

если нуль (полюс) являются кратными. Сумма интегралов по вертикальным (наклонным) сторонам  $\Pi$  на рисунке 6.9 равна длине стороны  $\tau$ , умноженной на приращение  $\log f(z)$  вдоль этой стороны. По той же причине сумма интегралов по горизонтальным сторонам принадлежит множеству  $2\pi i\mathbb{Z}$ . Наконец, по той же схеме, что и (6.18) рассмотрение

$$0 = \oint_{\partial\Pi} \frac{dz}{f(z)} = 2\pi i \sum_{j=1}^n \chi_j, \quad (6.20)$$

доказывает ограничение 3). В частности, из 3) следует, что ситуация, когда на-магниченность внутри всех вихрей вращается по часовой стрелке, невозможна. Кроме того, все вихри не могут иметь положительную дивергенцию в центре. Обязательно должны присутствовать вихри обоих типов (с положительной и отрицательной дивергенцией), либо нейтральные вихри с  $\operatorname{Re} \chi_j = 0$ .

Ограничения 1) и 2) являются необходимыми и достаточными условиями для существования двоякопериодической мероморфной функции с заданным набором нулей и полюсов. С точностью до умножения на ненулевую константу,

такая функция единственна и её можно представить в терминах эллиптической  $\theta$ -функции [256], которую, для справки, можно представить в виде очень быстро сходящегося ряда Фурье

$$\begin{aligned} \theta_1(z|\tau) = & 2 \sin(\pi z) \exp(\pi i \tau / 4) - 2 \sin(3\pi z) \exp(9\pi i \tau / 4) + \\ & + 2 \sin(5\pi z) \exp(25\pi i \tau / 4) - \dots \end{aligned} \quad (6.21)$$

Эллиптическая функция  $\theta_1(z|\tau)$  является нечётной функцией переменной  $z$  и имеет нули в точках, соответствующих элементам решётки  $L$ . Добавление к её аргументу векторов решётки эквивалентно умножению на некоторые простые множители

$$\theta_1(z + 1|\tau) = -\theta_1(z|\tau) \quad (6.22)$$

$$\theta_1(z + \tau|\tau) = -\exp(-i\pi\tau - 2\pi iz)\theta_1(z|\tau). \quad (6.23)$$

Тогда если набор нулей  $\{z_j\}_{j=1}^n$  и полюсов  $\{p_j\}_{j=1}^n$  (координаты некоторых точек в каждом из этих множеств могут совпадать) удовлетворяет условию 2), а именно  $\sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^n p_j = M + N\tau \in L(\tau)$ , то функция

$$f(z) = \exp(-2\pi i N z) \prod_{j=1}^n \frac{\theta_1(z - z_j)}{\theta_1(z - p_j)} \quad (6.24)$$

является периодической относительно решётки и имеет предписанный набор нулей и полюсов внутри каждой элементарной ячейки. Более того, эта функция является единственной. В противном случае, если существует вторая такая функция, то их отношение является двойкопериодической функцией без нулей и полюсов, а значит константой.

С помощью выражения (6.24) можно воспроизвести аналитически полученное недавно экспериментально изображение гексагональной решётки скирмионов [226]. Из свойства 1) следует, что гексагональная решётка не может состоять только из вихрей. Таким образом, чтобы удовлетворить симметрии, вокруг центрального вихря необходимо добавить ещё, как минимум, шесть antivихрей в

углах элементарной ячейки (каждый из них принадлежит нескольким ячейкам, поэтому всего получается три антивихря на ячейку). Чтобы уравновесить эти три антивихря, в соответствии с требованием 1), в элементарную ячейку нужно добавить ещё два полных вихря. Размещая эти вихри симметрично в соответствии с требованием 2), получим магнитную текстуру, показанную на рисунке 6.10а. Относительный размер вихрей, как и их относительные хиральности, не указываются при этом явно. Они получаются автоматически из уравнения (6.24) и предписанных координат нулей и полюсов.

Подобную магнитную текстуру можно представить себе в виде суперпозиции трёх спиралей [68], как показано на рисунке 6.10б, что даёт магнитную текстуру, наверное, самую близкую к экспериментальным наблюдениям [226]. Конкретно, компоненты намагниченности в плоскости  $XOY$  можно представить при помощи комплексной функции  $w_S(z, \bar{z}) = iq_1 \cos(q \operatorname{Re} \bar{q}_1 z) + iq_2 \cos(q \operatorname{Re} \bar{q}_2 z) + iq_3 \cos(q \operatorname{Re} \bar{q}_3 z)$ , где  $q_1 = \exp(i\pi/2)$ ,  $q_2 = \exp(-i5\pi/6)$ ,  $q_3 = \exp(-i\pi/6)$  волновые векторы трёх спиралей, а  $q = 2\pi \cdot 2/\sqrt{3}$ , конкретные углы в  $q_i$  и множитель в  $q$  выбраны так, чтобы получившаяся решётка совпадала с решёткой из предыдущего примера.

Так же решётку скирмионов можно представить в виде плотной гексагональной решётки цилиндрических магнитных доменов (ЦМД), разделённых блоховскими доменными границами. Распределение намагниченности в одной блоховской доменной границе зададим при помощи комплексной функции  $w_B(z, \bar{z}) = iz/|z| \operatorname{sech}(2(|z| - s)/d)$  с параметрами  $s$  и  $d$ , указывающими размер домена и толщину доменной границы. Эта функция спадает экспоненциально, что типично для  $180^\circ$  блоховских доменных границ в одноосных ферромагнетиках. Располагая такие домены в гексагональной решётке, которая идентична используемой в двух предыдущих примерах, получим магнитную текстуру, показанную на рисунке 6.10в.

Можно непосредственно убедиться (из рисунков или численно, с использо-

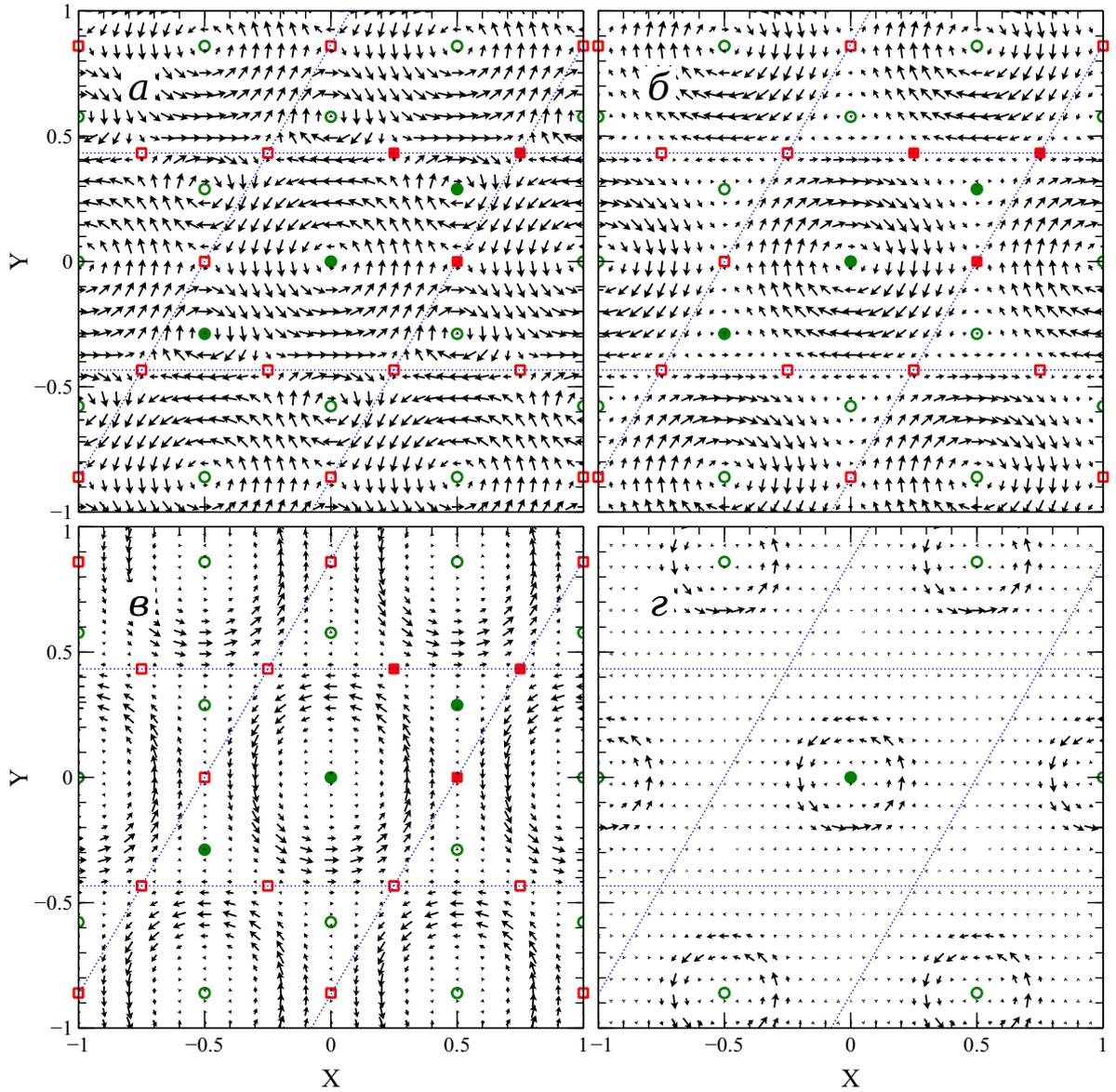


Рисунок 6.10. Распределение проекции компонент намагниченности на плоскость в тонких плёнках с периодическими (в гексагональной решётке с базисом 1 и  $\tau = \exp(i\pi/3)$ ) магнитными текстурами: *a* — уравнение (6.24) с  $n = 3$ , вихрями в  $z_j = 0, 1/3 + \tau/3, 2/3 + 2\tau/3$  и седлами в  $p_j = 1/2, \tau/2, 1/2 + \tau/2$ , показанными заполненными окружностями и квадратами (незаполненные соответствуют их сдвигам на векторы решётки); *б* и *в* — линейная суперпозиция спиралей и плотно упакованная решётка цилиндрических магнитных доменов (ЦМД), описанные в тексте; *г* — разреженная решётка ЦМД, в которой заметные седла отсутствуют. Тонкие линии разделяют ячейки решётки, точками показаны центры вихрей и седел.

ванием приведенных выше выражений), что положения нулей и седел на всех этих трёх распределениях намагниченности в точности совпадают и удовлетворяют условию 2). При этом модели очень отличаются. Явный вид ограничений был получен, используя модель, учитывающую только обменный вклад в магнитный лагранжиан. Тем не менее эти ограничения оказываются универсальными настолько, что им удовлетворяют как плотно упакованная решётка ЦМД, стабилизируемая одноосной анизотропией, так и модель для гексагональной А-фазы в  $\text{MnSi}$ , которая реализуется благодаря наличию хирального взаимодействия Дзялошинского-Мория, и даже модель слабонеоднородного материала со столбчатыми дефектами (см. рисунок 2.6). Эти ограничения также выполняются с большой точностью и в эксперименте. В чём можно убедиться из данных, приведенных в работе [257] для всех типов наблюдаемых там решёток (гексагональной, квадратной и скошенной). Это потому, что главной причиной формирования топологических свойств магнитных текстур является непрерывность векторного поля намагниченности (обусловленная обменным взаимодействием) и наличие нетривиальных граничных условий, которым этому непрерывному векторному полю намагниченности приходится соответствовать. Два этих фактора: непрерывность и граничные условия, приводят к огромному многообразию магнитных текстур с нетривиальными топологическими свойствами.

Как можно видеть из рисунка 6.10, различные магнитные взаимодействия и внешние факторы могут существенно деформировать магнитные текстуры (и, в частности, привести к количественным различиям между скирмионами и ЦМД [62]), но не всегда способны изменить их топологические свойства. Тем не менее, иногда это происходит. В случае гексагональной решётки ЦМД малой плотности, показанной на рисунке 6.10г, ограничения 1)-3) не выполняются. Далеко от центра ЦМД намагниченность почти однородна и направлена перпендикулярно поверхности плёнки, а значит позиции вихрей и седел (кроме одного, соответствующего центру ЦМД) не определены. Это потому, что фаза вектора

намагниченности в плоскости плёнки при этом (далеко от центра ЦМД) становится не определена. Отсутствует необходимость связать эту фазу непрерывно и глобально в масштабах всей решётки, а значит индивидуальные ЦМД по мере уменьшения плотности решётки становятся всё более свободными глобально, что даёт возможность манипулировать ими (создавать, аннигилировать, управлять их хиральностью) независимо (см. рисунки 3b и 3c в работе [258] для примеров таких решёток ЦМД).

Непрерывный переход из более ограниченной динамики к менее ограниченной (более свободной) при изменении масштаба не является новым в физике. Такой переход напоминает переход от квантовой механики к классической. Для квантовых эффектов фаза комплексной волновой функции имеет принципиальное значение, для классических эффектов фаза теряет смысл, а роль играет только амплитуда, указывающая местонахождение частицы. Квантовые эффекты принципиально связаны с непрерывностью фазы волновой функции в статике и динамике. Руководствуясь этой аналогией, можно сказать, что решётка ЦМД с низкой плотностью является классическим объектом, который уже был использован в прошлом веке в качестве основы для реализации классических вычислений [89].

С этой точки зрения, топологические солитоны подобны квантовым объектам со своей собственной версией дальнего действия в виде глобальных топологических ограничений (проистекающих, конечно, из локальных взаимодействий магнитных моментов). Условие 2), например, означает, что перемещение вихря или антивихря в одном месте, должно сопровождаться перемещением где-то в другом, удалённом от первого месте. На практике деформация, нарушающая ограничения, распространяется не мгновенно, а проходит как волна по всей плёнке, пока магнитная текстура не изменит свою конфигурацию так, что ограничения снова будут выполняться. Такой параллелизм (когда все взаимодействуют со всеми) наводит на мысль о потенциальной возможности создания

версии топологического квантового компьютера [259], использующего топологические солитоны для вычислений.

## **Выводы к Главе 6**

- 6.1 Теория магнитных состояний в планарных магнитных нанoelementах расширена для случая высокой связности.
- 6.2 Обнаружены ограничения на положение топологических солитонов в многосвязных элементах, имеющие топологическую природу. Выполнение этих ограничений в двусвязном элементе подтверждено данными независимого эксперимента.
- 6.3 Получен явный вид топологических ограничений для периодических магнитных текстур. Показано, что топологические ограничения приводят к появлению дальнего действия в конденсированном состоянии магнитных солитонов.

Результаты опубликованы в статьях [29–31].

## Заключение

Основные выводы работы уже приведены в конце каждой Главы. Здесь обсудим коротко сегодняшнее состояние, перспективы дальнейших исследований и новые применения топологических солитонов в планарных магнитных нанозементах.

Сегодня магнитные наноземента применяются как основа структурированных сред для традиционной магнитной записи [196], в магнитных туннельных транзисторах [260], в устройствах магнитной записи с произвольным доступом [261–264], в качестве управляемых генераторов микроволн [265, 266], которые нашли своё применение, в том числе, и для аппаратной реализации перцептрона [267]. Активно развиваются приложения скирмионов не только для хранения, но и для обработки информации [268], подобные устройствам на цилиндрических магнитных доменах прошлого века [88, 89], но уже на новом технологическом уровне.

В целом, можно сказать, что возможности магнетизма по надёжному хранению информации остаются на сегодня непревзойдёнными. И, возможно, с совершенствованием и удешевлением устройств магнитной памяти с произвольным доступом, останутся такими ещё долго. Что касается обработки информации, то так же как и устройства на цилиндрических доменах прошлого века, магнитные технологии всё ещё проигрывают электронике, как по плотности информации (переключение современных транзисторов происходит за счёт заряда буквально считанных электронов), так и по скорости её обработки (тактовая частота современных процессоров уже вплотную подбирается к фундаментальному пределу, обусловленному конечностью скорости света). И, скорее всего, такое положение дел сохранится в ближайшей перспективе.

Но всё же есть ряд принципиально новых возможностей, которые открыва-

ются в связи с особыми свойствами магнитных солитонов. Важнейшим из них, является наличие топологических ограничений: законов сохранения, связывающих между собой свойства скирмионов глобально, в масштабе всей системы. Эти ограничения имеют фундаментальную природу с математическими корнями, уходящими к теореме Абеля, и появляются вследствие необходимости согласования фазы полного поворота вектора намагниченности при любом (вокруг отверстий и нет) обходе частицы — фазы Берри. Аналогичные глобальные законы сохранения и фаза Берри встречаются и в квантовой механике.

Другое важное свойство топологических солитонов — сохранение топологического заряда. И хотя, как в случае солитонов Белавина и Полякова, так и в рассмотренном здесь случае ограниченной геометрии, этот закон сохранения выполняется лишь приближённо, есть ряд простых способов увеличить энергетические барьеры, защищающие величину топологического заряда внутри частицы [269].

Вместе эти два свойства теоретически позволяют создать среду, в которой сохранялось бы общее количество солитонов и их свойства были бы связаны искусственно созданными и управляемыми глобальными ограничениями. На базе такой среды кажется возможным создать, если и не топологический квантовый компьютер [259], то, по крайней мере, массивно параллельный (за счёт глобальных ограничений) компьютер с не фон-неймановской архитектурой. При этом достоинство магнитных систем по сравнению с электронными, заключается в возможности контролировать “волновую функцию” системы.

В этом направлении хотелось бы сосредоточить усилия в ближайшем будущем. Принесёт это практические результаты или нет, сложно сказать. Но уже сама возможность существования сложных систем “матрёшек”, которые ведут себя так же, как и привычная нам материя, как элементарные частицы, являясь, на самом деле, лишь сложными состояниями материи в конденсированном состоянии — это само по себе удивительно. Изучая эти системы можно боль-

ше узнать как о самом конденсированном состоянии, так и об элементарных частицах, из которых конденсированные системы в конце концов состоят.

**Благодарности** Благодарю соавторов за плодотворную совместную работу, ведущих семинаров и советов ДонФТИ Филиппова Александра Эльвиновича, Тарасенко Сергея Вадимовича, Малашенко Вадима Викторовича, сотрудников ДонФТИ и всех других, кто участвовал в обсуждении материалов этой работы на семинарах и конференциях. Терехова Сергея Владимировича, Каменева Виктора Ивановича и своего отца Метлова Леонида Семёновича благодарю за множество критических замечаний и вопросов по тексту и оформлению диссертации. Благодарю официальных оппонентов за критику.

Отдельная благодарность моей супруге Ирине за понимание и поддержку на всех этапах работы над диссертацией.

## Список сокращений и условных обозначений

$A$  константа обменной жёсткости  $A$ ,  $[A] = \text{Дж м}^{-1}$ . 23, 198

$\hat{A}$  тензор обменных констант между двумя соседними магнитными моментами,  
 $\hat{A} = \{A_{ij}\}$ . 35, 36

$B$  вектор магнитной индукции поля. 17, 26, 67, 68, 78

$C$  константа обменной жёсткости  $C = 2A$ ,  $[C] = \text{Дж м}^{-1}$ . 23–25, 77, 126, 183, 198

$D$  константа взаимодействия Дзялошинского-Мория в кубическом кристалле,  
 $[D] = \text{Дж м}^{-2}$ . 36, 97, 107

$D$  вектор электрической индукции поля. 17

$E$  полная потенциальная энергии магнетика. 21, 126, 131, 162, 170, 172, 179, 180, 185–187, 192–195, 202, 203, 216, 218

$E_{\text{EX}}$  полная обменная энергия магнетика. 52, 56, 131, 132, 158–162, 170, 172, 179, 183, 185, 193, 202, 203, 222

$E_{\text{MS}}$  магнитостатическая энергия магнетика. 27–29, 46, 47, 131, 132, 162, 170, 172, 173, 177–180, 185, 191, 192, 202, 203, 222–224, 230, 232

$E_Z$  полная энергия Зеемана магнетика. 193

$E$  вектор напряженности электрического поля. 17

$H$  вектор внешнего магнитного поля. 17, 19–21, 26, 41, 69, 74, 76, 78–82, 113, 177, 193

$H^{\text{eff}}$  эффективное магнитное поле, вокруг которого прецессирует магнитный момент в уравнении Ландау-Лифшица. 20–22, 38, 76

$H_D$  вектор размагничивающего поля, созданного распределением намагниченности  $M(\mathbf{r})$  sort. 27, 29, 47, 77, 78, 126

$I_e$  функция, описывающая пространственный профиль неоднородностей квадрата обменной длины. 77, 80, 81, 83, 84

- $I_k$  функция, описывающая пространственный профиль неоднородностей фактора качества. 77, 80–84, 93, 99
- $I_m$  функция, описывающая пространственный профиль неоднородностей намагниченности насыщения, она же универсальная функция распределения неоднородностей  $I = I_m$ . 75, 77, 80–85, 87–89, 93, 97–99, 101, 102, 105, 106, 118
- $J_n$  функция Бесселя первого рода порядка  $n$ . 99, 113, 114, 121, 173, 179, 185, 191, 192, 202, 206, 207, 219, 230–233
- $K$  константа одноосной магнитной анизотропии,  $[K] = \text{Дж м}^{-3}$ . 32, 33, 76, 77
- $K_1$  1-я константа кубической магнитной анизотропии,  $[K_1] = \text{Дж м}^{-3}$ . 33, 34
- $K_2$  2-я константа кубической магнитной анизотропии,  $[K_2] = \text{Дж м}^{-3}$ . 33, 34
- $K(k)$  полный эллиптический интеграл первого рода,  $K(k)$ . 170, 206
- $L$  толщина плёнки (наноэлемента). 43, 44, 46–49, 52, 78, 84, 113, 120, 125–127, 148, 150, 151, 154, 155, 162–164, 166–168, 170, 171, 177, 179–181, 184–187, 190, 191, 193, 196, 197, 199, 201, 202, 215, 216, 218–220, 222, 223, 225, 226, 236
- $L_0$  средняя обменная длина ферромагнетика в случае, если намагниченность насыщения и/или обменная константа зависят от координаты,  $L_0^2 = \langle L_E^2(\mathbf{r}) \rangle$ . 77, 81–83, 89, 91, 94, 97, 98, 102
- $L_D$  длина Дзялошинского-Мории,  $L_D = D/(\mu_0 \gamma_B M_S^2)$ . 96–98, 100–102, 105–107
- $L_E$  обменная длина,  $L_E = \sqrt{C/(\mu_0 \gamma_B M_S^2)}$ . 24, 25, 46, 49, 52, 76, 77, 79, 97, 100, 126, 133, 152, 162, 163, 167, 168, 170, 177, 179–181, 184, 186, 187, 193, 195, 198, 200–202, 219, 222, 224–226, 228, 235
- $\mathcal{L}$  полный лагранжиан магнетика. 216, 218
- $\Lambda$  отношение толщины плёнки к периоду массива магнитных точек,  $\Lambda = L/T$ . 190–192, см.  $L$  &  $T$
- $M$  намагниченность, магнитный дипольный момент единицы объёма. 17–21, 23, 24, 27, 28, 30, 32, 38, 43, 51, 68–71, 74, 76–81, 97, 113, 114, 120, 126, 158,

168, 212

$M_0$  средняя намагниченность насыщения ферромагнетика, в случае, если намагниченность насыщения зависит от координаты,  $M_0 = \langle M_S(\mathbf{r}) \rangle$ . 75, 80–82, 88, 91, 93, 94, 97–99, 105

$M_S$  намагниченность насыщения ферромагнетика, максимальный магнитный дипольный момент единицы объёма. 19, 23–26, 32, 38, 43, 46–48, 51, 52, 59, 69, 70, 75–77, 81, 97, 99, 100, 113, 114, 120, 126, 155, 158, 161, 162, 168–170, 176, 177, 183–185, 189, 191, 193, 195, 202, 212, 214–216, 218, 219, 221, 222, 226–228

$P$  отношение радиуса цилиндра к периоду массива магнитных точек,  $P = R/T$ . 190–192, см.  $R$  &  $T$

$Q$  безразмерный фактор качества – нормированная на магнитостатическую энергию одноосной магнитной анизотропии,  $Q = 2K/(\mu_0\gamma_V M_S^2)$ . 77, 79

$R$  радиус основания круглого цилиндра. 109–116, 120, 160–163, 166–168, 170, 171, 175–178, 180, 184–187, 189, 190, 196, 197, 199, 201, 202, 218–220, 222–224, 226, 228

$R_V$  радиус ядра магнитного вихря – области, где намагниченность выходит из плоскости торца цилиндра. 110, 112, 113, 160–164, 170, 176, 177, 201, 206, 218

$\frac{d\Sigma}{d\Omega}$  макроскопическое дифференциальное сечение рассеяния нейтронов. 63, 64, 67–71, 88, 105, 113, 115

$T$  период структуры (доменной границы или квадратного массива магнитных точек),  $[T] = \text{м}$ . 47, 190–193, 195, 196

$T(t)$  конформное отображение единичного диска  $|t| < 1$  на форму основания цилиндра,  $z = T(t)$ . 137–141, 144, 145, 165, 166, 182, 202, 236

$\mathcal{T}$  полная кинетическая энергия магнетика. 215, 216, 218

$V$  объём пространства, занятый магнетиком (при этом  $\partial V$  – граница магнетика). 30, 52, 61, 66–71, 78, 85, 86, 88, 89, 91, 93, 94, 105, 113, 118, 177,

183–185

$X$  декартова координата  $X$ . 21, 23, 24, 36, 43, 44, 46, 47, 51, 52, 55, 61, 68, 76, 98, 99, 109, 110, 113, 120, 125, 126, 134, 141, 155, 158, 175, 176, 183, 184, 189, 190, 246, 256

$Y$  декартова координата  $Y$ . 21, 23, 24, 36, 43–47, 51, 52, 55, 61, 68, 76, 93, 98, 99, 101, 108, 120, 125, 126, 134, 141, 148, 154, 155, 158, 175–177, 179, 184, 190, 219, 256

$Z$  декартова координата  $Z$ . 21, 23, 24, 36, 43, 44, 47, 51, 52, 55, 61, 68, 76, 80, 93, 98–100, 102, 108, 110, 113, 120, 125, 126, 131, 135, 140, 154, 155, 157, 162, 164, 167, 169, 178, 190, 207, 213, 232

$a$  параметр, характеризующий смещение вихря из центра цилиндра:  $[a] = 1$ . 110, 112–116, 120, 122, 139–143, 145, 149, 158, 160, 161, 165–167, 173, 175–180, 182, 183, 189, 201, 202, 213, 217, 218, 220–224, 228, 230, 232

$a_n$  случайная амплитуда локализованных гауссовских неоднородностей материала. 85–89, 91, 94

$b$  параметр, характеризующий радиус ядра магнитного вихря,  $b = 1/c$ . 158, 160, 161, 175–180, 213, 217–224, 230, 232, 233, см.  $c$

$b_H$  длина рассеяния нейтронов магнитным моментом,  $b_H = 2.906 \times 10^8 \text{ A}^{-1} \text{ м}^{-1}$ . 68–71, 88, 91, 93, 94, 105, 113

$c$  параметр, обратно пропорциональный радиусу ядра магнитного вихря,  $c = 1/b$ . 109–111, 113, 114, 116, 120–122, 139–143, 145, 165–167, 182, 201, см.  $b$

$d$  толщина доменной границы, параметр масштаба,  $[d] = \text{м}$ . 148, 149, 154, 155

$\delta(x)$   $\delta$ -функция Дирака:  $\delta(x \neq 0) = 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ . 30, 47, 65, 79–81, 88, 99, 155, 172, 184, 185

$\delta_{ij}$   $\delta$ -символ Кронекера:  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ,  $\delta_{ii} = 1$ . 68, 69, 99

$\mathbf{d}$  единичный вектор локального направления (директор) одноосной магнитной анизотропии. 76, 77, 79, 82, 83, 88, 99

$e$  плотность потенциальной энергии магнетика. 21, 76

$e_A$  плотность энергии магнитной анизотропии. 31–33, 76

$e_{EX}$  плотность обменной энергии магнетика. 23, 24, 46, 76

$e_{MS}$  плотность магнитостатической энергии. 76, 77

$e_Z$  плотность энергии Зеемана. 21, 76

$e_i$  орт, единичный вектор вдоль одной из осей декартовой системы координат,  
 $i = X, Y, Z$ . 61

$\epsilon$  безразмерная относительная величина флуктуаций обменной константы,  $I_e = \epsilon I_m$ . 84, 93, см.  $I_e$  &  $I_m$

$\eta$  безразмерная радиальная координата в полярной системе координат,  $\eta = r/R$   
или  $\eta = r/R_V$ . 170, 176–179, 184, 185, 189, 190, 206, 207, 219, 222–224,  
230–233, см.  $r$ ,  $R$  &  $R_V$

$f$  мероморфная функция комплексного переменного  $f = f(z)$ . 52–57, 110, 134–140,  
144, 158–161, 165, 169–172, 175, 176, 183, 202, 213–216, 236, 238, 239, 241,  
242, 245–250, 252–255

$f_{MS}$  функция, возникающая при интегрировании плотности магнитостатической энергии по толщине плёнки,  $f_{MS}(x) = 1 - (1 - e^{-x})/x$ . 173, 185, 191,  
192, 202, 207, 219

$g$  соотношение геометрических размеров (фактор формы) цилиндра,  $g = L/R$ .  
166, 167, 170, 171, 173, 178–180, 184–187, 199, 201, 202, 207, 219, 222–224,  
226–228, 230, 232, 233, см.  $L$  &  $R$

$\gamma_B$  числовая константа, задающая систему магнитных единиц:  $\gamma_B = 1$  в системе СИ и СГСэ,  $\gamma_B = 4\pi$  в СГС. 17, 24, 26, 28, 46–48, 52, 76–79, 82, 97, 126,  
127, 151, 155, 162, 170, 176, 177, 183, 185, 191, 193, 195, 202, 218, 219, 221,  
222, 227, 228

$\gamma_{EX}$  плотность обменной энергии на единицу поверхности доменной границы.  
46, 48

$\gamma_M$  плотность магнитостатической энергии на единицу поверхности доменной границы. 47, 48, 151, 155

- $\gamma_e$  гиромагнитное отношение электрона, единица гиромагнитного отношения  
 $\gamma_e = 1.760\,859\,644 \times 10^{11} \text{ рад с}^{-1} \text{ Тл}^{-1}$ . 20
- $\gamma_p$  гиромагнитное отношение, в металлических магнетиках  $\gamma_p = \gamma_e$ . 20, 38, 214–216, 218, 219, 221, 227, 228
- $\mathbf{h}$  безразмерный вектор магнитного поля,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/(\gamma_B M_S)$ . 81, 82, 89–91, 94, 98, 100, 103–107, 176, 177, 179, 180, 193–195, 198
- $\mathbf{h}_D$  безразмерный вектор размагничивающего поля  $\mathbf{h}_D = \mathbf{H}_D/(\gamma_B M_S)$ . 126, *см.*  
 $\mathbf{H}_D$
- $h_q$  безразмерное внутреннее поле, включающее в себя обменную поправку,  $h_q = \mathbf{H}/(\gamma_B M_S) + L_0^2 q^2$ . 82, 83, 88–91, 97
- $j_n$  сферическая функция Бесселя первого рода порядка  $n$ . 102
- $\mathbf{k}$  волновой вектор падающего пучка нейтронов. 61, 62, 64, 65, 69
- $\mathbf{k}'$  волновой вектор рассеянного пучка нейтронов. 62, 64, 65
- $\kappa$  безразмерная относительная величина флуктуаций константы одноосной анизотропии,  $I_k = \kappa I_m$ . 84, 88, 89, 91, 93, 94, 98, 99, 101, 102, 105, 106, 119, *см.*  
 $I_k$  &  $I_m$
- $\ell$  безразмерный полный лагранжиан магнетика,  $\ell = \mathcal{L}/(\mu_0 \gamma_B M_S^2 V)$ . 218, 221, *см.*  
 $\mathcal{L}$
- $\lambda$  отношение толщины плёнки к обменной длине,  $\lambda = 1/\lambda_E = L/L_E$ . 162–166, 169, 224, 225, *см.*  $\lambda_E$ ,  $L_E$  &  $L$
- $\lambda_E$  отношение обменной длины к толщине плёнки (планарного элемента):  $\lambda_E = L_E/L = 1/\lambda$ . 46, 48, 179, 180, *см.*  $\lambda$ ,  $L_E$  &  $L$
- $\lambda_G$  феноменологический параметр диссипации Гильберта. 38
- $\lambda_{LL}$  феноменологический параметр диссипации Ландау-Лифшица. 20, 21, 38
- $\lambda_n$  длина волны де Бройля для нейтрона. 62
- $\Delta$  оператор Лапласа, в декартовой системе координат  $\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2 + \partial^2/\partial Z^2$ . 26, 28, 76, 77, 127
- $\mathbf{m}$  безразмерная намагниченность, нормированная на намагниченность насы-

- щения,  $m = M/M_S$ . 31–33, 35, 36, 43, 44, 47, 51–55, 57, 68, 81–83, 97, 98, 101–106, 108, 126, 127, 134, 154, 155, 158, 161, 175–180, 183, 187, 214, 215, 218, 222, 223, 230
- $m_e$  масса электрона,  $m_e = 9.109\,383\,56(1) \times 10^{-31}$  кг. 68
- $m_n$  масса нейтрона,  $m_n = 1.674\,927\,471(2) \times 10^{-27}$  кг. 62, 65
- $m_p$  масса протона,  $m_p = 1.672\,621\,898(2) \times 10^{-27}$  кг. 67
- $\mu_0$  магнитная проницаемость вакуума:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн м<sup>-1</sup> в системе СИ (точнее, в связи с переходом на новый стандарт килограмма, основывающийся на измерении постоянной Планка,  $\mu_0 = 4\pi(1 + 2.0(2) \times 10^{-10}) \times 10^{-7}$  Гн м<sup>-1</sup>),  $\mu_0 = 1$  в СГС и СГСэ. 17, 21, 24, 25, 27, 28, 46–48, 52, 77, 97, 126, 155, 162, 170, 176, 177, 183, 185, 191, 193, 195, 202, 218, 219, 221, 222, 227, 228
- $\mathbf{n}$  внешняя нормаль к границе магнетика. 30, 175, 176, 178, 238
- $\nabla$  оператор градиента, в декартовой системе координат  $\nabla = \{\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z\}$ . 23, 24, 26–28, 36, 44, 47, 52, 78, 96, 126, 127, 183, 223
- $\omega$  “естественный” безразмерный вариационный параметр, задающий масштаб доменной границы относительно толщины плёнки. 46, 48, 148–152, 155
- $\mathbf{p}_n$  случайные координаты локализованных гауссовских неоднородностей материала. 85–87
- $q$  топологический заряд. 55, 56, 159
- $\mathbf{q}$  вектор рассеяния нейтронов, параметр преобразования Фурье,  $\mathbf{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ . 47, 62, 65–69, 78–83, 85–89, 91–93, 97–99, 101, 102, 105–107, 113, 115, 116, 118, 120, 122, 155, 190, 191
- $\mathbf{r}$  точка в пространстве, радиус вектор; в декартовой системе координат  $\mathbf{r} = \{X, Y, Z\}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . 18, 21, 23, 24, 26–30, 35, 43, 44, 46, 47, 51–53, 65–69, 75–80, 84, 85, 99, 110, 126, 127, 162, 168, 172, 173, 176, 178, 183, 189, 191, 192, 206, 214, 215, 217
- $\rho$  безразмерный радиус основания круглого цилиндра,  $\rho = R/L_E$ . 163, 164, 170,

- 171, 183, 184, 186, 193–195, 202, 222, 224, *см.*  $R$  &  $L_E$
- $\rho_V$  безразмерный радиус ядра магнитного вихря,  $\rho_V = R_V/L_E$ . 162–164, 168–172, 224, *см.*  $R_V$  &  $L_E$
- $\rho_{k'}$  плотность квантовых состояний с волновым вектором  $\mathbf{k}'$ . 64
- $\varrho$  объёмная плотность магнитных зарядов,  $\varrho = \nabla \cdot \mathbf{M}$ . 26–28, 46, 47, 127, 172, 184, 185, 189–192, 223, 224
- $r_V$  безразмерный радиус ядра магнитного вихря, нормированный на радиус цилиндра,  $r = R_V/R$ . *см.*  $R_V$  &  $R$
- $\sigma$  полное сечение рассеяния нейтронов. 63
- $\sigma$  поверхностная плотность магнитных зарядов, равная нормальной компоненте намагниченности на границе магнетика. 30, 161, 162, 189–191
- $\sigma_a$  сечение захвата нейтронов. 63
- $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  дифференциальное сечение рассеяния нейтронов. 62, 63
- $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega \partial E}$  двойное дифференциальное сечение рассеяния нейтронов. 62
- $t$  время. 20, 38, 213–218, 220, 221
- $\tau$  плотность кинетической части магнитного лагранжиана. 38, 212, 214, 215
- $\theta$  полярный угол в сферической системе координат. 32, 38, 62, 86–88, 99, 119, 212, 214–217, *см.*  $\varphi$
- $\theta_1(z|\tau)$  первая эллиптическая тэта-функция аргумента  $z$  с параметром  $\tau$ ,  $\text{Im } \tau > 0$ , определённая по Ахиезеру. 255
- $\theta(x)$   $\theta$ -функция Хевисайда:  $\theta(x < 0) = 0$ ,  $\theta(x > 0) = 1$ ,  $\theta(0) = 1/2$ . 30, 44, 154, 155
- $u$  скалярный потенциал размагничивающего поля,  $\mathbf{H}_D = \nabla u(\mathbf{r})$ . 26, 28, 47
- $\varphi$  азимутальный угол в сферической системе координат. 38, 62, 86–88, 99, 110, 119, 160, 162, 172, 173, 176–179, 184, 185, 188–195, 197, 206, 212, 214, 216, 217, 222–224, 230, *см.*  $\theta$
- $w$  комплексная функция, задающая векторное поле намагниченности, посредством стереографической проекции,  $w = w(z, \bar{z})$ . 51–53, 55–57, 108, 110,

134, 135, 158, 170, 183, 189, 202, 213–216, 236

$z$  комплексная переменная, задающая координату на поверхности плёнки (торце нанозлемента),  $z = X + iY$ . 51–57, 108–110, 134–137, 139, 140, 144, 145, 148, 158–161, 165, 169–171, 175, 176, 182, 183, 189, 201, 202, 213–216, 236, 238–249, 252–256

## Список литературы

1. Hubert, A. Magnetic domains. The analysis of magnetic microstructures [Text] / A. Hubert, R. Schäfer. — Berlin : Springer, 1998. — 720 p.
2. Барьяхтар, В. Г. В мире магнитных доменов [Текст] / В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов. — Киев : Наукова Думка, 1986. — 158 с.
3. Aharoni, A. Introduction to the theory of ferromagnetism [Text] / A. Aharoni. — Oxford : Oxford University Press, 1996. — 315 p.
4. Skyrme, T. H. R. A non-linear theory of strong interactions [Text] / T. H. R. Skyrme // Proc. Roy. Soc. A. — 1958. — Vol. 247. — P. 260–278.
5. Skyrme, T. H. R. A non-linear field theory [Text] / T. H. R. Skyrme // Proc. Roy. Soc. A. — 1961. — Vol. 260. — P. 127–138.
6. Skyrme, T. A unified field theory of mesons and baryons [Text] / T. Skyrme // Nucl. Phys. A. — 1962. — Vol. 31. — P. 556–569.
7. Белавин, А. А. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика [Текст] / А. А. Белавин, А. М. Поляков // Письма в ЖЭТФ. — 1975. — Т. 22, № 10. — С. 503–506.
8. Usov, N. A. Magnetization curling in a fine cylindrical particle [Text] / N. A. Usov, S. E. Peschany // J. Magn. Mater. — 1993. — Vol. 118, no. 3. — P. L290–L294.
9. Magnetic vortex core observation in circular dots of permalloy [Text] / T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf [et al.] // Science. — 2000. — Vol. 289, no. 5481. — P. 930–932.
10. Direct observation of internal spin structure of magnetic vortex cores. [Text] / A. Wachowiak, J. Wiebe, M. Bode [et al.] // Science. — 2002. — Vol. 298, no. 5593. — P. 577–580.

11. Experimental observation of magnetic poles inside the bulk magnets via  $q \neq 0$  Fourier modes of magnetostatic field [Text] / É. Périgo, E. P. Gilbert, K. L. Metlov, A. Michels // *New J. Phys.* — 2014. — Vol. 16. — P. 123031.
12. Metlov, K. L. Third-order effect in magnetic small-angle neutron scattering by a spatially inhomogeneous medium [Text] / K. L. Metlov, A. Michels // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 91, no. 5. — P. 054404.
13. Metlov, K. L. Magnetic neutron scattering by magnetic vortices in thin submicron-sized soft ferromagnetic cylinders [Text] / K. L. Metlov, A. Michels // *Sci. Rep.* — 2016. — Vol. 6. — P. 25055.
14. Effect of Dzyaloshinski-Moriya interaction on spin-polarized neutron scattering [Text] / A. Michels, D. Mettus, D. Honecker, K. L. Metlov // *Phys. Rev. B.* — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 054424.
15. Metlov, K. L. Simple analytical description of the cross-tie domain wall structure [Text] / K. L. Metlov // *Appl. Phys. Lett.* — 2001. — Vol. 79, no. 16. — P. 2609–2611.
16. Metlov, K. L. Two-dimensional topological solitons in magnetic dots. [Text] / K. L. Metlov // *Phys. Stat. Sol. A.* — 2002. — Vol. 189, no. 3. — P. 1015–1018.
17. Metlov, K. L. Cross-tie domain wall ground state in thin films [Text] / K. L. Metlov // *J. Low Temp. Phys.* — 2005. — Vol. 139, no. 1. — P. 207–219.
18. Metlov, K. L. Magnetization patterns in ferromagnetic nano-elements as functions of complex variable [Text] / K. L. Metlov // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105, no. 10. — P. 107201.
19. Metlov, K. L. Micromagnetics and interaction effects in the lattice of magnetic dots [Text] / K. L. Metlov // *J. Magn. Magn. Mater.* — 2000. — Vol. 215–216, no. 8. — P. 37–39.
20. Gusliencko, K. Y. Evolution and stability of a magnetic vortex in small cylindrical ferromagnetic particle under applied field [Text] / K. Y. Gusliencko,

- K. L. Metlov // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 63, no. 10. — P. 100403R.
21. Metlov, K. L. Stability of magnetic vortex in soft magnetic nano-sized circular cylinder [Text] / K. L. Metlov, K. Y. Guslienko // J. Magn. Magn. Mater. — 2002. — Vol. 242–245. — P. 1015–1017.
  22. Metlov, K. L. Quasiuniform magnetization state in soft ferromagnetic nanocylinders [Text] / K. L. Metlov, K. Y. Guslienko // Phys. Rev. B. — 2004. — Vol. 70, no. 5. — P. 052406.
  23. Metlov, K. L. Quasiuniform in-plane magnetization state of thin cylindrical dots in a square array and related anisotropy [Text] / K. L. Metlov // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97, no. 12. — P. 127205.
  24. Metlov, K. L. Map of metastable states for thin circular magnetic nanocylinders [Text] / K. L. Metlov, Y. P. Lee // Appl. Phys. Lett. — 2008. — Vol. 92, no. 11. — P. 112506.
  25. Metlov, K. L. Equilibrium large vortex state in ferromagnetic disks [Text] / K. L. Metlov // J. Appl. Phys. — 2013. — Vol. 113, no. 22. — P. 223905.
  26. Metlov, K. L. Analytical approximations to the core radius and energy of magnetic vortex in thin ferromagnetic disks [Text] / K. L. Metlov // J. Magn. Magn. Mater. — 2013. — Vol. 343. — P. 55–59.
  27. Metlov, K. L. Vortex mechanics in planar nanomagnets [Text] / K. L. Metlov // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 88, no. 1. — P. 014427.
  28. Metlov, K. L. Vortex precession frequency and its amplitude-dependent shift in cylindrical nanomagnets [Text] / K. L. Metlov // J. Appl. Phys. — 2013. — Vol. 114, no. 22. — P. 223908.
  29. Bogatyrev, A. B. Magnetic states in multiply-connected flat nanoelements [Текст] / A. B. Bogatyrev, K. L. Metlov // ФНТ. — 2015. — Т. 41, № 10. — С. 984–988.
  30. Bogatyrev, A. B. Topological constraints on positions of magnetic solitons in multiply-connected planar magnetic nano-elements [Text] / A. B. Bogatyrev,

- K. L. Metlov // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 95, no. 2. — P. 024403.
31. Bogatyřev, A. B. What makes magnetic skyrmions different from magnetic bubbles? [Text] / A. B. Bogatyřev, K. L. Metlov // J. Magn. Magn. Mater. — 2018. — Vol. 465. — P. 743–746.
  32. Metlov, K. L. Zero-field phase transition from nearly uniform in-plane to out-of-plane magnetization state in soft magnetic cylinders [Text] / K. L. Metlov, K. Y. Guslienکو // INTERMAG, April 28 – May 2. — Amsterdam, The Netherlands : [s. n.], 2002. — P. EU14.
  33. Metlov, K. L. Vortices and other two-dimensional topological solitons in magnetic nano-particles [Text] / K. L. Metlov // NATO ARW: Vortex Dynamics in High-Temperature Superconductors, May 17-22. — Tashkent, Uzbekistan : [s. n.], 2002. — P. 31.
  34. Metlov, K. L. Topologically charged states in magnetic nano-elements and media [Text] / K. L. Metlov // NATO ARW: Vortex dynamics in superconductors and other complex systems, September 13-17. — Yalta, Ukraine : [s. n.], 2004. — P. 10.
  35. Metlov, K. L. Metastability regions of magnetic states in thin circular nanocylinder [Text] / K. L. Metlov, Y. Lee // The 5<sup>th</sup> International Conference on Advanced Materials and Devices (ICAMD 2007), December 12 – 14. — Jeju, Republic of Korea : [s. n.], 2007. — P. 206.
  36. Metlov, K. L. Micromagnetics and small-angle neutron scattering by spatially inhomogeneous ferromagnetic media [Text] / K. L. Metlov // III International Workshop on Dzyaloshinskii-Moriya Interaction and Exotic Spin Structures, May 26-30. — Pskov, Russia : [s. n.], 2015. — P. 109.
  37. Метлов, К. Л. Микромагнетизм планарных нанозлементов [Текст] / К. Л. Метлов // 50-я Школа ПИЯФ по Физике Конденсированного Состояния 14-19 марта. — Санкт-Петербург, Зеленогорск : [б. и.], 2016. — С. 10.
  38. Metlov, K. L. Effect of Dzyaloshinski-Moriya interaction on spin-polarized

- neutron scattering [Text] / K. L. Metlov // IV International Workshop on Dzyaloshinskii-Moriya Interaction and Exotic Spin Structures, May 23-26. — Peterhof, Russia : [s. n.], 2017. — P. 116.
39. Метлов, К. Л. Киральность и топологические свойства магнитных текстур [Текст] / К. Л. Метлов // 51-я Школа ПИЯФ по Физике Конденсированного Состояния, 11-16 марта. — Санкт-Петербург : [б. и.], 2017. — С. 22.
40. Метлов, К. Л. Топологические уравнения связи в магнитных текстурах [Текст] / К. Л. Метлов, А. Б. Богатырёв // XXII Международный симпозиум «Нанозифика и нанозлектроника», 12-15 марта. — Нижний Новгород : [б. и.], 2018. — С. 224.
41. Landau, L. D. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies [Text] / L. D. Landau, E. M. Lifshitz // Physik. Z. Sowjetunion. — 1935. — Vol. 8. — P. 153–169.
42. Гаранин, Д. А. Динамика ансамбля однодоменных магнитных частиц [Текст] / Д. А. Гаранин, В. В. Ищенко, Л. В. Панина // ТМФ. — 1990. — Т. 82, № 2. — С. 242–256.
43. Garanin, D. A. Fokker-Planck and Landau-Lifshitz-Bloch equations for classical ferromagnets [Text] / D. A. Garanin // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55, no. 5. — P. 3050–3057.
44. Гуревич, А. Г. Магнитные колебания и волны [Текст] / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков. — М. : Физматлит, 1994. — 464 с.
45. Kittel, C. Introduction to solid state physics [Text] / C. Kittel. — New York : Wiley, 1971. — 766 p.
46. First principles investigation of domain walls and exchange stiffness in ferromagnetic Fe and antiferromagnetic NiMn [Text] / K. Nakamura, T. Ito, A. J. Freeman [et al.] // J. Appl. Phys. — 2003. — Vol. 93, no. 10. — P. 6879–6881.
47. Schreiber, F. Spin-wave resonance in high-conductivity films: The Fe-Co

- alloy system [Text] / F. Schreiber, Z. Frait // Phys. Rev. B. — 1996. — Vol. 54, no. 9. — P. 6473–6480.
48. OOMMF User's Guide, Version 1.0 [Text] : Rep. : 6367 / NISTIR ; Executor: M. Donahue, D. Porter : 1999.
49. Шавров, В. Г. Магнитостатические волны в неоднородных полях [Текст] / В. Г. Шавров, В. И. Щеглов. — М. : Физматлит, 2016. — 359 с.
50. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 3-е, испр. изд. — М. : Наука, 1992. — Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — 656 с.
51. Вонсовский, С. В. Магнетизм: магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро-, и ферримагнетиков [Текст] / С. В. Вонсовский. — М. : Наука, 1971. — 1031 с.
52. Metlov, K. L. Temperature analysis of magnetization processes in soft magnetic materials. Preisach model approach. [Text] : Ph. D. thesis / K. L. Metlov ; Charles University. — Prague, Czech Republic : [s. n.], 1998. — 82 p.
53. Moriya, T. 3 - Weak Ferromagnetism [Text] / T. Moriya // Magnetism / Ed. by G. T. Rado, H. Suhl. — New York : Academic Press, 1963. — P. 85–125.
54. Дзялошинский, И. Е. Термодинамическая теория “слабого” ферромагнетизма антиферромагнетиков [Текст] / И. Е. Дзялошинский // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32, № 6. — С. 1547–1562.
55. Moriya, T. Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism [Text] / T. Moriya // Phys. Rev. — 1960. — Vol. 120, no. 1. — P. 91–98.
56. Arrott, A. Dzialoshinski-Moriya interactions about defects in antiferromagnetic and ferromagnetic materials [Text] / A. Arrott // J. Appl. Phys. — 1963. — Vol. 34, no. 4. — P. 1108–1109.
57. Interaction between the spin chirality and the elastic torsion [Text] / V. I. Fedorov, A. G. Gukasov, V. Kozlov [et al.] // Phys. Lett. A. — 1997. — Vol. 224. — P. 372–378.

58. Chiral magnetic order at surfaces driven by inversion asymmetry [Text] / M. Bode, M. Heide, K. von Bergmann [et al.] // Nature. — 2007. — Vol. 447. — P. 190–193.
59. Дзялошинский, И. Е. Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках. I. Неметаллы [Текст] / И. Е. Дзялошинский // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 46, № 4. — С. 1420–1437.
60. Bak, P. Theory of helical magnetic structures and phase transitions in MnSi and FeGe [Text] / P. Bak, M. H. Jensen // J. Phys. C. — 1980. — Vol. 13, no. 31. — P. L881–L885.
61. Bogdanov, A. Modulated and localized structures in cubic helimagnets [Text] / A. Bogdanov, U. Rössler, C. Pfleiderer // Physica B. — 2005. — Vol. 359-361. — P. 1162–1164.
62. Ivanov, B. Magnetic vortices – The microscopic analogs of magnetic bubbles [Text] / B. Ivanov, V. Stephanovich, A. Zhmudskii // J. Magn. Magn. Mater. — 1990. — Vol. 88, no. 1. — P. 116–120.
63. Богданов, А. Н. Термодинамически устойчивые вихри в магнитоупорядоченных кристаллах [Текст] / А. Н. Богданов, Д. А. Яблонский // ЖЭТФ. — 1989. — Т. 95, № 1. — С. 178–182.
64. Bogdanov, A. Thermodynamically stable magnetic vortex states in magnetic crystals [Text] / A. Bogdanov, A. Hubert // J. Magn. Magn. Mater. — 1994. — Vol. 138, no. 3. — P. 255–269.
65. Rößler, U. K. Spontaneous skyrmion ground states in magnetic metals [Text] / U. K. Rößler, A. N. Bogdanov, C. Pfleiderer // Nature. — 2006. — Vol. 442. — P. 797–801.
66. Binz, B. Theory of the Helical Spin Crystal: A Candidate for the Partially Ordered State of MnSi [Text] / B. Binz, A. Vishwanath, V. Aji // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, no. 20. — P. 207202.
67. Electric Control of Spin Helicity in a Magnetic Ferroelectric [Text] / Y. Ya-

- masaki, H. Sagayama, T. Goto [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98, no. 14. — P. 147204.
68. Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet [Text] / S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz [et al.] // Science. — 2009. — Vol. 323, no. 5916. — P. 915–919.
69. Skyrmion lattices in metallic and semiconducting B20 transition metal compounds [Text] / C. Pfleiderer, T. Adams, A. Bauer [et al.] // J. Phys. Condens. Matter. — 2010. — Vol. 22, no. 16. — P. 164207.
70. Spontaneous atomic-scale magnetic skyrmion lattice in two dimensions [Text] / S. Heinze, K. von Bergmann, M. Menzel [et al.] // Nat. Phys. — 2011. — Vol. 7, no. 9. — P. 713–718.
71. Possible skyrmion-lattice ground state in the *B20* chiral-lattice magnet MnGe as seen via small-angle neutron scattering [Text] / N. Kanazawa, J.-H. Kim, D. S. Inosov [et al.] // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 86, no. 13. — P. 134425.
72. Unwinding of a Skyrmion Lattice by Magnetic Monopoles [Text] / P. Milde, D. Köhler, J. Seidel [et al.] // Science. — 2013. — Vol. 340, no. 6136. — P. 1076–1080.
73. Fert, A. Skyrmions on the track [Text] / A. Fert, V. Cros, J. Sampaio // Nat. Nanotechnol. — 2013. — Vol. 8. — P. 152–156.
74. Rohart, S. Skyrmion confinement in ultrathin film nanostructures in the presence of Dzyaloshinskii-Moriya interaction [Text] / S. Rohart, A. Thiaville // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 88, no. 18. — P. 184422.
75. Kostylev, M. Interface boundary conditions for dynamic magnetization and spin wave dynamics in a ferromagnetic layer with the interface Dzyaloshinskii-Moriya interaction [Text] / M. Kostylev // J. Appl. Phys. — 2014. — Vol. 115, no. 23. — P. 233902.
76. Chiral skyrmions in cubic helimagnet films: The role of uniaxial anisotropy [Text] / M. N. Wilson, A. B. Butenko, A. N. Bogdanov, T. L. Monchesky //

- Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 89, no. 9. — P. 094411.
77. Field-Dependent Size and Shape of Single Magnetic Skyrmions [Text] / N. Romming, A. Kubetzka, C. Hanneken [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114, no. 17. — P. 177203.
78. New Type of Stable Particlelike States in Chiral Magnets [Text] / F. N. Rybakov, A. B. Borisov, S. Blügel, N. S. Kiselev // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115, no. 11. — P. 117201.
79. Blume, M. Polarization Effects in the Magnetic Elastic Scattering of Slow Neutrons [Text] / M. Blume // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 130, no. 5. — P. 1670–1676.
80. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е, испр. изд. — М. : Наука, 1988. — Т. I. Механика. — 216 с.
81. Döring, W. Über die Trägheit der Wände zwischen Weißchen Bezirken [Text] / W. Döring // Z. Naturforschung. — 1948. — Vol. 3a. — P. 373–379.
82. Gilbert, T. A Lagrangian formulation of the gyromagnetic equation of the magnetic field [Text] / T. Gilbert // Phys. Rev. — 1955. — Vol. 100. — P. 1243.
83. Kittel, C. Theory of the Structure of Ferromagnetic Domains in Films and Small Particles [Text] / C. Kittel // Phys. Rev. — 1946. — Vol. 70, no. 11-12. — P. 965–971.
84. Bloch, F. Zur Theorie des Austauschproblems und der Remanenzerscheinung der Ferromagnetika [Text] / F. Bloch // Z. Physik. — 1932. — Vol. 74. — P. 295–335.
85. Хуберт, А. Теория доменных стенок в упорядоченных средах [Текст] / А. Хуберт. — М. : Мир, 1977. — 306 с.
86. Барьяхтар, В. Г. Цилиндрические магнитные домены и их решетки [Текст] / В. Г. Барьяхтар, Ю. И. Горобец. — Киев : Наукова думка, 1988. —

- 164 c.
87. Malozemoff, A. P. Magnetic domain walls in bubble materials [Text] / A. P. Malozemoff, J. C. Slonczewski. Appl. Solid State Sci. — New York, NY : Academic Press, 1979. — 334 p.
  88. Bobeck, A. H. Magnetic bubbles [Text] / A. H. Bobeck, E. Della Torre. — Amsterdam : North-Holland, 1975. — 232 p.
  89. Eschenfelder, A. Magnetic Bubble Technology [Text] / A. Eschenfelder. Springer Series in Solid-State Sciences. — Berlin : Springer-Verlag, 1980. — 340 p.
  90. Néel, L. Théorie des Lois d'Aimantation de Lord Rayleigh. I. Les Déplacements d'une Parois Isolée [Text] / L. Néel // Cahiers de Physique. — 1942. — Vol. 12. — P. 1–20.
  91. Ritz, W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik [Text] / W. Ritz // J. Mathematik. — 1909. — Vol. 135. — P. 1–61.
  92. Dietze, H. D. Bloch- und Néel-Wände in dünnen ferromagnetischen Schichten [Text] / H. D. Dietze, H. Z. Thomas // Z. Physik. — 1961. — Vol. 163, no. 5. — P. 523–534.
  93. Huber Jr., E. E. Domain-Wall Structure in Permalloy Films [Text] / E. E. Huber, Jr., D. O. Smith, J. B. Goodenough // J. Appl. Phys. — 1958. — Vol. 29. — P. 294–295.
  94. Craik, D. J. Magnetic domains [Text] / D. J. Craik, R. S. Tebble // Rep. Prog. Phys. — 1961. — Vol. 24, no. 1. — P. 116–166.
  95. Middelhoek, S. Domain walls in thin Ni-Fe films [Text] / S. Middelhoek // J. Appl. Phys. — 1961. — Vol. 34, no. 4. — P. 1054–1059.
  96. Aharoni, A. Domain walls and micromagnetics [Text] / A. Aharoni // J. de Phys. (Paris) Colloq. — 1971. — Vol. 32, no. C1. — P. 966–971.
  97. Minnaja, N. Evaluation of the energy per unit of surface in a cross-tie

- wall [Text] / N. Minnaja // J. de Phys. (Paris) Colloq. — 1971. — Vol. 32, no. C1. — P. 406–407.
98. Schwee, L. A new model for cross-tie walls using parabolic coordinates [Text] / L. Schwee, J. Watson // IEEE Trans. Magn. — 1973. — Vol. 9. — P. 551–554.
99. Kosiński, R. The structure and the energy of the cross-tie domain wall [Text] / R. Kosiński // Acta Phys. Polon. — 1977. — Vol. A51. — P. 647–657.
100. Thomson, W. VI.—On Vortex Motion [Text] / W. Thomson // Transactions of the Royal Society of Edinburgh. — 1868. — Vol. 25, no. 1. — P. 217–260.
101. Woo, G. Pseudoparticle configurations in two-dimensional ferromagnets [Text] / G. Woo // J. Math. Phys. — 1977. — Vol. 18, no. 6. — P. 1264–1266.
102. Blowing magnetic skyrmion bubbles [Text] / W. Jiang, P. Upadhyaya, W. Zhang [et al.] // Science. — 2015. — Vol. 349, no. 6245. — P. 283–286.
103. Néel-type skyrmion lattice with confined orientation in the polar magnetic semiconductor  $GaV_4S_8$  [Text] / I. Kézsmárki, S. Bordács, P. Milde [et al.] // Nat. Mater. — 2015. — Vol. 14. — P. 1116–1122.
104. von Westenholz, C. Topological and Noether-conservation laws [Text] / C. von Westenholz // Annales de l'I.H.P. Physique théorique. — 1979. — Vol. 30, no. 4. — P. 353–367.
105. Галкина, Е. Г. Квантовое туннелирование в магнитном вихре двумерного легкоплоскостного магнетика [Текст] / Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов // Письма в ЖЭТФ. — 1995. — Т. 61, № 6. — С. 495–498.
106. Gross, D. J. Meron configurations in the two-dimensional  $O(3)$   $\sigma$ -model [Text] / D. J. Gross // Nucl. Phys. B. — 1978. — Vol. 132, no. 5. — P. 439–456.
107. Косевич, А. М. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны [Текст] / А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Кова-

- лев. — Киев : Наукова думка, 1983. — 192 с.
108. Kosevich, A. M. Magnetic solitons [Text] / A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, A. S. Kovalev // Phys. Rep. — 1990. — Vol. 194, no. 3–4. — P. 117–238.
109. Богдан, М. М. Точные многосолитонные решения одномерных уравнений Ландау-Лившица для неизотропного ферромагнетика [Текст] / М. М. Богдан, А. С. Ковалев // Письма в ЖЭТФ. — 1980. — Т. 31, № 8. — С. 453–457.
110. Hirota, R. Bilinearization of Soliton Equations [Text] / R. Hirota // J. Phys. Soc. Jpn. — 1982. — Vol. 51, no. 1. — P. 323–331.
111. Борисов, А. Б. Квазиодномерные магнитные солитоны [Текст] / А. Б. Борисов, В. В. Киселев ; Под ред. Ю. Н. Скрябин. — Екатеринбург : УрО РАН, 2009. — Т. I из Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. — 512 с.
112. Борисов, А. Б. Топологические солитоны, двумерные и трёхмерные «узоры» [Текст] / А. Б. Борисов, В. В. Киселев ; Под ред. А. П. Танкеев. — Екатеринбург : УрО РАН, 2011. — Т. II из Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках. — 417 с.
113. Bloch, F. On the Magnetic Scattering of Neutrons [Text] / F. Bloch // Phys. Rev. — 1936. — Vol. 50, no. 3. — P. 259–260.
114. Bloch, F. On the Magnetic Scattering of Neutrons. II [Text] / F. Bloch // Phys. Rev. — 1937. — Vol. 51, no. 11. — P. 994–994.
115. Schwinger, J. S. On the Magnetic Scattering of Neutrons [Text] / J. S. Schwinger // Phys. Rev. — 1937. — Vol. 51, no. 7. — P. 544–552.
116. Halpern, O. On the Magnetic Scattering of Neutrons [Text] / O. Halpern, M. H. Johnson // Phys. Rev. — 1939. — Vol. 55, no. 10. — P. 898–923.
117. Shull, C. G. Neutron Scattering and Polarization by Ferromagnetic Materials [Text] / C. G. Shull, E. O. Wollan, W. C. Koehler // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 84, no. 5. — P. 912–921.
118. The use of polarized neutrons in determining the magnetic scattering by iron

- and nickel [Text] / R. Nathans, C. Shull, G. Shirane, A. Andresen // J. Phys. Chem. Solids. — 1959. — Vol. 10, no. 2. — P. 138–146.
119. Guinier, A. Small-angle scattering of X-rays [Text] / A. Guinier, G. Fournet. — New York : Wiley, 1955. — 268 p.
120. Свергун, Д. И. Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние [Текст] / Д. И. Свергун, Л. А. Фейгин. — М. : Наука, 1987. — 280 с.
121. Kronmüller, H. Depolarisation und Kleinwinkelstreuung von Neutronen durch Gitterfehler in ferromagnetischen Kristallen [Text] / H. Kronmüller, A. Seeger, M. Wilkens // Zeitschrift für Physik. — 1963. — Vol. 171, no. 1. — P. 291–311.
122. Magnetic Microstructure of a Nanocrystalline Ferromagnet - Micromagnetic Model and Small-Angle Neutron Scattering [Text] / J. Weissmüller, R. D. McMichael, J. Barker [et al.] // MRS Proceedings. — 1996. — Vol. 457. — P. 231–236.
123. Small Angle Neutron Scattering by the Magnetic Microstructure of Nanocrystalline Ferromagnets Near Saturation [Text] / J. Weissmüller, R. McMichael, A. Michels, R. Shull // J. Research NIST. — 1999. — Vol. 104. — P. 261–275.
124. Honecker, D. Theory of magnetic small-angle neutron scattering of two-phase ferromagnets [Text] / D. Honecker, A. Michels // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 87, no. 22. — P. 224426.
125. Néel, L. Loi d'approche à la saturation d'un ferromagnétique à aimantation spontanée irrégulière [Text] / L. Néel // Compt. Rend. — 1945. — Vol. 220. — P. 738–740.
126. Seeger, A. Die einmündung in die ferromagnetische sättigung—I: Allgemeine theorie des einflusses innerer spannungen auf das einmündungsgesetz, mit anwendungen auf zwischengitteratome und abgeschreckte metalle [Text] / A. Seeger, H. Kronmüller // J. Phys. Chem. Solids. — 1960. — Vol. 12,

- no. 3. — P. 298–313.
127. Kronmüller, H. Die einmündung in die ferromagnetische sättigung—II: Theorie des einmündungsgesetzes in plastisch verformten kubisch-flächenzentrierten einkristallen [Text] / H. Kronmüller, A. Seeger // J. Phys. Chem. Solids. — 1961. — Vol. 18, no. 2. — P. 93–115.
128. Schlömann, E. Approach to Saturation in Inhomogeneous Magnetic Materials [Text] / E. Schlömann // J. Appl. Phys. — 1971. — Vol. 42, no. 13. — P. 5798–5807.
129. Newton, R. G. Optical theorem and beyond [Text] / R. G. Newton // American Journal of Physics. — 1976. — Vol. 44. — P. 639–642.
130. Малеев, С. В. О рассеянии поляризованных нейтронов в магнетиках вблизи точки фазового перехода [Текст] / С. В. Малеев // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48, № 5. — С. 1448–1458.
131. Lovesey, S. W. Theory of neutron scattering from condensed matter [Text] / S. W. Lovesey. — Oxford : Clarendon Press, 1984. — 360 p.
132. Sears, V. F. Neutron scattering lengths and cross sections [Text] / V. F. Sears // Neutron News. — 1992. — Vol. 3, no. 3. — P. 26–37.
133. Michels, A. Magnetic small-angle neutron scattering of bulk ferromagnets [Text] / A. Michels // J. Phys. Condens. Matter. — 2014. — Vol. 26, no. 38. — P. 383201.
134. Nanostructures: Scattering beyond the Born approximation [Text] / S. V. Grigoriev, A. V. Syromyatnikov, A. P. Chumakov [et al.] // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 81, no. 12. — P. 125405.
135. Squires, G. L. Introduction to the theory of thermal neutron scattering [Text] / G. L. Squires. — Cambridge : Cambridge University Press, 1978. — 260 p.
136. Малеев, С. В. О поляризации, возникающей при рассеянии медленных нейтронов в ферромагнетиках [Текст] / С. В. Малеев // ЖЭТФ. — 1961. —

- Т. 40, № 4. — С. 1224–1227.
137. Изюмов, Ю. А. О рассеянии поляризованных нейтронов в ферромагнетиках и антиферромагнетиках [Текст] / Ю. А. Изюмов, С. В. Малеев // ЖЭТФ. — 1961. — Т. 41, № 5. — С. 1644–1648.
138. Малеев, С. В. О рассеянии медленных нейтронов на сложных магнитных структурах [Текст] / С. В. Малеев, В. Г. Барьяхтар, Р. А. Сурис // ФТТ. — 1962. — Т. 4, № 12. — С. 3461–3470.
139. Малеев, С. В. Рассеяние поляризованных нейтронов в магнетиках [Текст] / С. В. Малеев // УФН. — 2002. — Т. 172, № 6. — С. 617–646.
140. Moon, R. M. Polarization Analysis of Thermal-Neutron Scattering [Text] / R. M. Moon, T. Riste, W. C. Koehler // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 181, no. 2. — P. 920–931.
141. Schweizer, J. Polarized Neutrons and Polarization Analysis [Text] / J. Schweizer // Neutron Scattering from Magnetic Materials / Ed. by T. Chatterji. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — P. 153–213.
142. Longitudinal polarization analysis in small-angle neutron scattering [Text] / D. Honecker, A. Ferdinand, F. Döbrich [et al.] // Eur. Phys. J. B. — 2010. — Vol. 76, no. 2. — P. 209–213.
143. Origin of Electric-Field-Induced Magnetization in Multiferroic  $\text{HoMnO}_3$  [Text] / B. G. Ueland, J. W. Lynn, M. Laver [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 104, no. 14. — P. 147204.
144. Magnetostriction and Magnetic Heterogeneities in Iron-Gallium [Text] / M. Laver, C. Mudivarthi, J. R. Cullen [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105, no. 2. — P. 027202.
145. Observation of cross-shaped anisotropy in spin-resolved small-angle neutron scattering [Text] / A. Michels, D. Honecker, F. Döbrich [et al.] // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 85, no. 18. — P. 184417.
146. Origin of Surface Canting within  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  Nanoparticles [Text] / K. L. Krycka,

- J. A. Borchers, R. A. Booth [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 113, no. 14. — P. 147203.
147. Polarization analysis in neutron small-angle scattering with a novel triplet dynamic nuclear polarization spin filter [Text] / N. Niketic, B. van den Brandt, W. T. Wenckebach [et al.] // *J. Appl. Crystallogr.* — 2015. — Vol. 48, no. 5. — P. 1514–1521.
148. Chapman, J. N. The investigation of magnetic domain structures in thin foils by electron microscopy [Text] / J. N. Chapman // *J. Phys. D.* — 1984. — Vol. 17, no. 4. — P. 623–647.
149. Hartmann, U. Magnetic force microscopy [Text] / U. Hartmann // *Annu. Rev. Mater. Sci.* — 1999. — Vol. 29, no. 1. — P. 53–87.
150. Schwarz, A. Magnetic sensitive force microscopy [Text] / A. Schwarz, R. Wiesendanger // *Nano Today.* — 2008. — Vol. 3, no. 1-2. — P. 28–39.
151. Oepen, H. P. Scanning electron microscope with polarization analysis: Micromagnetic structures in ultrathin films [Text] / H. P. Oepen, G. Steierl, J. Kirschner // *J. Vac. Sci. Technol. B.* — 2002. — Vol. 20, no. 6. — P. 2535–2538.
152. Schneider, C. Soft X-ray photoemission electron microscopy as an element-specific probe of magnetic microstructures [Text] / C. Schneider // *J. Magn. Magn. Mater.* — 1997. — Vol. 175, no. 1. — P. 160–176.
153. Scanning Hall probe microscopy [Text] / A. M. Chang, H. D. Hallen, L. Harriott [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* — 1992. — Vol. 61, no. 16. — P. 1974–1976.
154. Kirtley, J. R. Scanning SQUID microscopy [Text] / J. R. Kirtley, J. P. Wikswo // *Annu. Rev. Mater. Sci.* — 1999. — Vol. 29, no. 1. — P. 117–148.
155. Bode, M. Spin-polarized scanning tunnelling microscopy [Text] / M. Bode // *Rep. Prog. Phys.* — 2003. — Vol. 66, no. 4. — P. 523–582.
156. Kaiser, U. Magnetic exchange force microscopy with atomic resolution

- [Text] / U. Kaiser, A. Schwarz, R. Wiesendanger // *Nature*. — 2007. — Vol. 446. — P. 522–525.
157. Fitzsimmons, M. Neutron scattering—The key characterization tool for nanostructured magnetic materials [Text] / M. Fitzsimmons, I. K. Schuller // *J. Magn. Magn. Mater.* — 2014. — Vol. 350. — P. 199–208.
158. Eskildsen, M. R. Vortex structures, penetration depth and pairing in iron-based superconductors studied by small-angle neutron scattering [Text] / M. R. Eskildsen, E. M. Forgan, H. Kawano-Furukawa // *Rep. Prog. Phys.* — 2011. — Vol. 74, no. 12. — P. 124504.
159. Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet [Text] / S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz [et al.] // *Science*. — 2009. — Vol. 323, no. 5916. — P. 915–919.
160. Quantitative spatial magnetization distribution in iron oxide nanocubes and nanospheres by polarized small-angle neutron scattering [Text] / S. Disch, E. Wetterskog, R. P. Hermann [et al.] // *New J. Phys.* — 2012. — Vol. 14, no. 1. — P. 013025.
161. Magnetic field dependent small-angle neutron scattering on a Co nanorod array: evidence for intraparticle spin misalignment [Text] / A. Günther, J.-P. Bick, P. Szary [et al.] // *J. Appl. Crystallogr.* — 2014. — Vol. 47, no. 3. — P. 992–998.
162. Dynamics of Field-Induced Ordering in Magnetic Colloids Studied by New Time-Resolved Small-Angle Neutron-Scattering Techniques [Text] / A. Wiedenmann, U. Keiderling, K. Habicht [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97, no. 5. — P. 057202.
163. Relaxation mechanisms in magnetic colloids studied by stroboscopic spin-polarized small-angle neutron scattering [Text] / A. Wiedenmann, R. Gähler, C. D. Dewhurst [et al.] // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Vol. 84, no. 21. — P. 214303.
164. Excitation of Ni nanorod colloids in oscillating magnetic fields: a new

- approach for nanosensing investigated by TISANE [Text] / P. Bender, A. Günther, D. Honecker [et al.] // *Nanoscale*. — 2015. — Vol. 7, no. 40. — P. 17122–17130.
165. Kronmüller, H. *Micromagnetism and the Microstructure of Ferromagnetic Solids* [Text] / H. Kronmüller, M. Fähnle. Cambridge studies in magnetism. — Cambridge : Cambridge University Press, 2003. — 452 p.
166. Néel, L. La loi d'approche en  $a$ : H et une nouvelle théorie de la dureté magnétique [Text] / L. Néel // *J. Phys. Radium*. — 1948. — Vol. 9, no. 5. — P. 184–192.
167. Brown Jr., W. F. *Micromagnetics* [Text] / W. F. Brown Jr. — New York : Wiley, 1963. — 142 p.
168. Nonreciprocal magnon propagation in a noncentrosymmetric ferromagnet  $\text{LiFe}_5\text{O}_8$  [Text] / Y. Iguchi, S. Uemura, K. Ueno, Y. Onose // *Phys. Rev. B*. — 2015. — Vol. 92, no. 18. — P. 184419.
169. Magneto-chiral nonreciprocity of volume spin wave propagation in chiral-lattice ferromagnets [Text] / S. Seki, Y. Okamura, K. Kondou [et al.] // *Phys. Rev. B*. — 2016. — Vol. 93, no. 23. — P. 235131.
170. Microstructural-defect-induced Dzyaloshinskii-Moriya interaction [Text] / A. Michels, D. Mettus, I. Titov [et al.] // *Phys. Rev. B*. — 2019. — Vol. 99, no. 1. — P. 014416.
171. Field Induced Chirality in the Helix Structure of Dy/Y Multilayer Films and Experimental Evidence for Dzyaloshinskii-Moriya Interaction on the Interfaces [Text] / S. V. Grigoriev, Y. O. Chetverikov, D. Lott, A. Schreyer // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100, no. 19. — P. 197203.
172. Magnetic properties of submicron circular permalloy dots [Text] / G. Gubbiotti, G. Carlotti, F. Nizzoli [et al.] // *IEEE Trans. Magn.* — 2002. — Vol. 38, no. 5. — P. 2532–2534.
173. Spin textures induced by quenched disorder in a reentrant spin glass:

- Vortices versus “frustrated” skyrmions [Text] / I. Mirebeau, N. Martin, M. Deutsch [et al.] // Phys. Rev. B. — 2018. — Vol. 98, no. 1. — P. 014420.
174. Michels, A. Magnetic-field-dependent small-angle neutron scattering on random anisotropy ferromagnets [Text] / A. Michels, J. Weissmüller // Rep. Prog. Phys. — 2008. — Vol. 71, no. 6. — P. 066501.
175. Stoner, E. C. A Mechanism of Magnetic Hysteresis in Heterogeneous Alloys [Text] / E. C. Stoner, E. P. Wohlfarth // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. — 1948. — Vol. 240, no. 826. — P. 599–642.
176. Ахиезер, А. И. Спиновые волны [Текст] / А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. — М. : Наука, 1968. — 368 с.
177. Калиникос, Б. А. Наблюдение спин-волновых солитонов в ферромагнитных пленках [Текст] / Б. А. Калиникос, Н. Г. Ковшиков, А. Н. Славин // Письма в ЖЭТФ. — 1983. — Т. 38, № 7. — С. 343–346.
178. Калиникос, Б. А. Солитоны огибающей и модуляционная неустойчивость дипольно-обменных волн намагниченности в пленках железо-иттриевого граната [Текст] / Б. А. Калиникос, Н. Г. Ковшиков, А. Н. Славин // ЖЭТФ. — 1988. — Т. 94, № 2. — С. 159–176.
179. Мамалуй, Ю. А. Особенности неравновесной доменной структуры при спин-переориентационном фазовом переходе в плёнке со слабой одноосной анизотропией [Текст] / Ю. А. Мамалуй, Ю. А. Сирюк, А. В. Безус // ФТВД. — 2011. — Т. 21, № 2. — С. 57–66.
180. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — 4-е изд., перераб. и доп. изд. — М. : Наука, 1973. — 749 с.
181. Koltsov, D. K. Micromagnetics of ferromagnetic equilateral triangular prisms [Text] / D. K. Koltsov, R. P. Cowburn, M. E. Welland // J. Appl. Phys. — 2000. — Vol. 88, no. 9. — P. 5315–5317.
182. Control of the chirality and polarity of magnetic vortices in triangular nan-

- odots [Text] / M. Jaafar, R. Yanes, D. Perez de Lara [et al.] // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 81, no. 5. — P. 054439.
183. О рассеянии поляризованных нейтронов в ферромагнетиках и антиферромагнетиках [Текст] / Д. А. Бизяев, А. А. Бухараев, А. П. Чукланов, Н. И. Нургазизов // ФТТ. — 2018. — Т. 60, № 11. — С. 2152–2157.
184. Hertel, R. Computation of the magnetic domain structure in bulk permalloy [Text] / R. Hertel, H. Kronmüller // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 60, no. 10. — P. 7366–7378.
185. Light-Induced Metastable Magnetic Texture Uncovered by in situ Lorentz Microscopy [Text] / T. Eggebrecht, M. Möller, J. G. Gatzmann [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118, no. 9. — P. 097203.
186. Vortex–antivortex pair driven magnetization dynamics studied by micro magnetic simulations [Text] / K.-S. Lee, B.-W. Kang, Y.-S. Yu, S.-K. Kim // Appl. Phys. Lett. — 2004. — Vol. 85, no. 9. — P. 1568–1570.
187. McMichael, R. Head to head domain wall structures in thin magnetic strips [Text] / R. McMichael, M. Donahue // IEEE Trans. Magn. — 1997. — Vol. 33, no. 5. — P. 4167–4169.
188. Parkin, S. S. P. Magnetic Domain-Wall Racetrack Memory [Text] / S. S. P. Parkin, M. Hayashi, L. Thomas // Science. — 2008. — Vol. 320, no. 5873. — P. 190–194.
189. Investigation of the micromagnetic structure of cross-tie walls in permalloy [Text] / R. Ploessl, J. N. Chapman, A. M. Thompson [et al.] // J. Appl. Phys. — 1993. — Vol. 73, no. 5. — P. 2447–2452.
190. Schneider, M. Magnetic force microscopy of domain wall fine structures in iron films [Text] / M. Schneider, S. Müller-Pfeiffer, W. Zinn // J. Appl. Phys. — 1996. — Vol. 79, no. 11. — P. 8578–8583.
191. Structure of cross-tie wall in thin Co films resolved by magnetic force microscopy [Text] / M. Löhndorf, A. Wadas, H. A. M. van den Berg, R. Wiesen-

- danger // *Appl. Phys. Lett.* — 1996. — Vol. 68, no. 25. — P. 3635–3637.
192. Permalloy cylindrical submicron size dot arrays [Text] / C. Miramond, C. Fermon, F. Rousseaux [et al.] // *J. Magn. Magn. Mater.* — 1997. — Vol. 165. — P. 500–503.
193. Fabrication of large scale periodic magnetic nanostructures [Text] / E. F. Wassermann, M. Thielen, S. Kirsch [et al.] // *J. Appl. Phys.* — 1998. — Vol. 83, no. 3. — P. 1753–1757.
194. Cowburn, R. P. Property variation with shape in magnetic nanoelement [Text] / R. P. Cowburn // *J. Phys. D.* — 2000. — Vol. 33, no. 1. — P. R1–R16.
195. Pokhil, T. Spin vortex states and hysteretic properties of submicron size NiFe elements [Text] / T. Pokhil, D. Song, J. Nowak // *J. Appl. Phys.* — 2000. — Vol. 87, no. 9. — P. 6319–6321.
196. Ross, C. A. Patterned magnetic recording media [Text] / C. A. Ross // *Annu. Rev. Mater. Sci.* — 2001. — Vol. 31, no. 1. — P. 203–235.
197. Cowburn, R. P. Spintronics. Change of direction. [Text] / R. P. Cowburn // *Nat. Mater.* — 2007. — Vol. 6, no. 4. — P. 255–256.
198. Garcia-Martin, A. Light transport in photonic crystals composed of magneto-optically active materials [Text] / A. Garcia-Martin, G. Armelles, S. Pereira // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 71, no. 20. — P. 205116.
199. Magnetic phase shifter for superconducting qubits. [Text] / D. S. Golubović, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92, no. 17. — P. 177904.
200. Antos, R. Simulations of the dynamic switching of vortex chirality in magnetic nanodisks by a uniform field pulse [Text] / R. Antos, Y. Otani // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80, no. 14. — P. 140404.
201. Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating field [Text] / B. Van Waeyenberge, A. Puzic, H. Stoll [et al.] // *Nature.* —

2006. — Vol. 444, no. 7118. — P. 461–464.
202. Quasiballistic Magnetization Reversal [Text] / H. W. Schumacher, C. Chappert, R. C. Sousa [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90, no. 1. — P. 017204.
203. Ultrafast Nanomagnetic Toggle Switching of Vortex Cores [Text] / R. Hertel, S. Gliga, M. Fähnle, C. M. Schneider // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98, no. 11. — P. 117201.
204. Strong Radiation of Spin Waves by Core Reversal of a Magnetic Vortex and Their Wave Behaviors in Magnetic Nanowire Waveguides [Text] / S. Choi, K.-S. Lee, K. Y. Guslienko, S.-K. Kim // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98, no. 8. — P. 087205.
205. Ultrafast vortex-core reversal dynamics in ferromagnetic nanodots [Text] / K.-S. Lee, K. Y. Guslienko, J.-Y. Lee, S.-K. Kim // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76, no. 17. — P. 174410.
206. Guslienko, K. Y. Dynamic Origin of Vortex Core Switching in Soft Magnetic Nanodots [Text] / K. Y. Guslienko, K.-S. Lee, S.-K. Kim // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100, no. 2. — P. 027203.
207. Magnetic vortex core reversal by excitation of spin waves [Text] / M. Kammerer, M. Weigand, M. Curcic [et al.] // Nat. Commun. — 2011. — Vol. 2. — P. 279.
208. Усов, Н. А. Вихревое распределение намагниченности в тонком ферромагнитном цилиндре [Текст] / Н. А. Усов, С. Е. Песчаный // ФММ. — 1994. — Т. 78, № 6. — С. 13–24.
209. Visscher, P. Simple recursive implementation of fast multipole method [Text] / P. Visscher, D. Apalkov // J. Magn. Magn. Mater. — 2010. — Vol. 322, no. 2. — P. 275–281.
210. Guslienko, K. Y. Vortex state stability in soft magnetic cylindrical nanodots [Text] / K. Y. Guslienko, V. Novosad // J. Appl. Phys. — 2004. — Vol. 96,

- no. 8. — P. 4451–4455.
211. Transition from single-domain to vortex state in soft magnetic cylindrical nanodots [Text] / W. Scholz, K. Y. Guslienko, V. Novosad [et al.] // J. Magn. Magn. Mater. — 2003. — Vol. 266. — P. 155–163.
212. Metlov, K. L. Two-dimensional topological solitons in small exchange-dominated cylindrical ferromagnetic particles / K. L. Metlov. — 2000. — [arXiv:cond-mat/0012146](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0012146).
213. Schneider, M. Lorentz microscopy of circular ferromagnetic permalloy nanodisks [Text] / M. Schneider, H. Hoffmann, J. Zweck // Appl. Phys. Lett. — 2000. — Vol. 77, no. 18. — P. 2909–2910.
214. Joseph, R. I. Ballistic demagnetizing factor in uniformly magnetized cylinders [Text] / R. I. Joseph // J. Appl. Phys. — 1966. — Vol. 37, no. 13. — P. 4639–4643.
215. Aharoni, A. Upper bound to a single-domain behavior of a ferromagnetic cylinder [Text] / A. Aharoni // J. Appl. Phys. — 1990. — Vol. 68, no. 6. — P. 2892–2900.
216. Anisotropic magnetic coupling of permalloy micron dots forming a square lattice [Text] / C. Matthieu, C. Hartmann, M. Bauer [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 1997. — Vol. 70, no. 21. — P. 2912–2914.
217. Guslienko, K. Y. Magnetic anisotropy in two-dimensional dot arrays induced by magnetostatic interdot coupling [Text] / K. Y. Guslienko // Phys. Lett. A. — 2001. — Vol. 278. — P. 293–298.
218. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М. : Наука, 1971. — 1108 с.
219. Origin of fourfold anisotropy in square lattices of circular ferromagnetic dots [Text] / G. N. Kakazei, Y. G. Pogorelov, M. D. Costa [et al.] // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 74, no. 6. — P. 060406(R).
220. Spin-wave spectra of perpendicularly magnetized circular submicron dot ar-

- rays [Text] / G. N. Kakazei, P. E. Wigen, K. Y. Guslienko [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2004. — Vol. 85. — P. 443–445.
221. Micromagnetic behavior of electrodeposited cylinder arrays [Text] / C. A. Ross, M. Hwang, M. Shima [et al.] // Phys. Rev. B. — 2002. — Vol. 65. — P. 144417.
222. Single-Domain Circular Nanomagnets [Text] / R. P. Cowburn, D. K. Koltsov, A. O. Adeyeye [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83, no. 5. — P. 1042–1045.
223. Mie, G. Grundlagen einer Theorie der Materie [Text] / G. Mie // Annalen der Physik. — 1912. — Vol. 342, no. 3. — P. 511–534.
224. Yang, C. N. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance [Text] / C. N. Yang, R. L. Mills // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 96, no. 1. — P. 191–195.
225. 't Hooft, G. The Conceptual Basis of Quantum Field Theory [Text] / G. 't Hooft // Philosophy of Physics, Part A. / Ed. by J. Butterfield, J. Earman. — Amsterdam : Elsevier, 2007. — P. 661–730.
226. Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal [Text] / X. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa [et al.] // Nature. — 2010. — Vol. 465, no. 7300. — P. 901–904.
227. Thiele, A. A. Steady-State Motion of Magnetic Domains [Text] / A. A. Thiele // Phys. Rev. Lett. — 1973. — Vol. 30, no. 6. — P. 230–233.
228. Звездин, А. К. О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках [Текст] / А. К. Звездин // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 29, № 10. — С. 605–610.
229. Звездин, А. К. О динамике изолированной блоховской линии [Текст] / А. К. Звездин, А. Ф. Попков // Письма в ЖЭТФ. — 1985. — Т. 41, № 3. — С. 90–92.
230. Звездин, А. К. Сила Магнуса и инерционные свойства магнитных вихрей в

- слабых ферромагнетиках [Текст] / А. К. Звездин, К. А. Звездин // ФНТ. — 2010. — Т. 36, № 8-9. — С. 1034–1040.
231. Huber, D. L. Dynamics of spin vortices in two-dimensional planar magnets [Text] / D. L. Huber // Phys. Rev. B. — 1982. — Vol. 26, no. 7. — P. 3758–3765.
232. Magnetic Vortex Core Dynamics in Cylindrical Ferromagnetic Dots [Text] / K. Y. Guslienko, X. F. Han, D. J. Keavney [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, no. 6. — P. 067205.
233. Usov, N. Magnetodynamics of vortex in thin cylindrical platelet [Text] / N. Usov, L. Kurkina // J. Magn. Magn. Mater. — 2002. — Vol. 242–245 (2), no. 0. — P. 1005–1008.
234. Dynamics of Domain Walls in Magnetic Nanostrips [Text] / O. A. Tretiakov, D. Clarke, G.-W. Chern [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100, no. 12. — P. 127204.
235. Magnon modes and magnon-vortex scattering in two-dimensional easy-plane ferromagnets [Text] / B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. G. Mertens, G. M. Wysin // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 58, no. 13. — P. 8464–8474.
236. Excitations in vortex-state permalloy dots [Text] / C. E. Zaspel, B. A. Ivanov, J. P. Park, P. A. Crowell // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 72, no. 2. — P. 024427.
237. Скроцкий, Г. В. Еще раз об уравнении Ландау — Лифшица [Текст] / Г. В. Скроцкий // УФН. — 1984. — Т. 144, № 4. — С. 681–686.
238. Schlömann, E. Structure of Moving Domain Walls in Magnetic Materials [Text] / E. Schlömann // Appl. Phys. Lett. — 1971. — Vol. 19, no. 8. — P. 274–276.
239. Vortex Core-Driven Magnetization Dynamics [Text] / S.-B. Choe, Y. Acremann, A. Scholl [et al.] // Science. — 2004. — Vol. 304, no. 5669. — P. 420–422.

240. Kamberský, V. Spin-orbital Gilbert damping in common magnetic metals [Text] / V. Kamberský // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76, no. 13. — P. 134416.
241. Ivanov, B. A. Excitation of spin dynamics by spin-polarized current in vortex state magnetic disks. [Text] / B. A. Ivanov, C. E. Zaspel // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99, no. 24. — P. 247208.
242. Guslienko, K. Y. Nonlinear gyrotropic vortex dynamics in ferromagnetic dots [Text] / K. Y. Guslienko, R. H. Heredero, O. Chubykalo-Fesenko // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82, no. 1. — P. 014402.
243. Field dependence of spin-transfer-induced vortex dynamics in the nonlinear regime [Text] / A. Dussaux, A. V. Khvalkovskiy, P. Bortolotti [et al.] // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 86, no. 1. — P. 014402.
244. Probing the Anharmonicity of the Potential Well for a Magnetic Vortex Core in a Nanodot [Text] / O. V. Sukhostavets, B. Pigeau, S. Sangiao [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 111, no. 24. — P. 247601.
245. Koebe, P. Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung [Text] / P. Koebe // Acta Mathematica. — 1914. — Vol. 41. — P. 305–344.
246. Богатырёв, А. Б. Вещественные мероморфные дифференциалы: язык для описания меронных конфигураций в планарных магнитных наноэлементах [Текст] / А. Б. Богатырёв // ТМФ. — 2017. — Т. 193, № 1. — С. 162–176.
247. Спрингер, Д. Введение в теорию римановых поверхностей : Пер. с англ [Текст] / Д. Спрингер. — М. : Издательство иностранной литературы, 1960. — 344 с.
248. Schottky, F. Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. [Text] / F. Schottky // J. Reine Angew. Math. — 1877. — Vol. 83. — P. 300–351.
249. Schottky, F. Über eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt [Text] / F. Schot-

- tky // *J. Reine Angew. Math.* — 1887. — Vol. 101. — P. 227–272.
250. Klein, F. Zur Theorie der Abel'schen Functionen [Text] / F. Klein // *Math. Ann.* — 1890. — Vol. 36. — P. 1–83.
251. Crowdy, D. G. Computing the Schottky-Klein Prime Function on the Schottky Double of Planar Domains [Text] / D. G. Crowdy, J. S. Marshall // *Comput. Meth. Funct. Theor.* — 2007. — Vol. 7, no. 1. — P. 293–308.
252. Crowdy, D. The Schwarz–Christoffel mapping to bounded multiply connected polygonal domains [Text] / D. Crowdy // *Proc. R. Soc. A.* — 2005. — Vol. 461, no. 2061. — P. 2653–2678.
253. Bogatyrev, A. B. Computations in moduli spaces [Text] / A. B. Bogatyrev // *Comput. Meth. Funct. Theor.* — 2007. — Vol. 7, no. 2. — P. 309–324.
254. Bogatyrev, A. B. Prime form and Schottky model [Text] / A. B. Bogatyrev // *Comput. Meth. Funct. Theor.* — 2009. — Vol. 9, no. 1. — P. 47–55.
255. Correlation between spin structure oscillations and domain wall velocities [Text] / A. Bisig, M. Stärk, M.-A. Mawass [et al.] // *Nat. Commun.* — 2013. — Vol. 4. — P. 8.
256. Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций [Текст] / Н. И. Ахиезер. — изд. 2-е, перераб изд. — М. : Наука, 1970. — 304 с.
257. Transformation between meron and skyrmion topological spin textures in a chiral magnet [Text] / X. Z. Yu, W. Koshibae, Y. Tokunaga [et al.] // *Nature.* — 2018. — Vol. 564, no. 7734. — P. 95–98.
258. Nagaosa, N. Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions. [Text] / N. Nagaosa, Y. Tokura // *Nat. Nanotechnol.* — 2013. — Vol. 8, no. 12. — P. 899–911.
259. Kitaev, A. Y. Fault-tolerant quantum computation by anyons [Text] / A. Y. Kitaev // *Annals of Physics.* — 2003. — Vol. 303, no. 1. — P. 2–30.
260. Jansen, R. The spin-valve transistor: a review and outlook [Text] / R. Jansen // *J. Phys. D.* — 2003. — Vol. 36, no. 19. — P. R289–R308.

261. Slaughter, J. M. Materials for magnetoresistive random access memory [Text] / J. M. Slaughter // *Annu. Rev. Mater. Sci.* — 2009. — Vol. 39. — P. 277–296.
262. Kent, A. D. A new spin on magnetic memories [Text] / A. D. Kent, D. C. Worledge // *Nat. Nanotechnol.* — 2015. — Vol. 10. — P. 187–191.
263. Apalkov, D. Magnetoresistive Random Access Memory [Text] / D. Apalkov, B. Dieny, J. M. Slaughter // *Proceedings of the IEEE.* — 2016. — Vol. 104, no. 10. — P. 1796–1830.
264. Spintronics based random access memory: a review [Text] / S. Bhatti, R. Sbiaa, A. Hirohata [et al.] // *Materials Today.* — 2017. — Vol. 20, no. 9. — P. 530–548.
265. Large microwave generation from current-driven magnetic vortex oscillators in magnetic tunnel junctions [Text] / A. Dussaux, B. Georges, J. Grollier [et al.] // *Nat. Commun.* — 2010. — Vol. 1. — P. 8.
266. Magnetic vortex oscillators [Text] / G. Hrkac, P. S. Keatley, M. T. Bryan, K. Butler // *J. Phys. D.* — 2015. — Vol. 48, no. 45. — P. 453001.
267. Vowel recognition with four coupled spin-torque nano-oscillators [Text] / M. Romera, P. Talatchian, S. Tsunegi [et al.] // *Nature.* — 2018. — Vol. 563, no. 7730. — P. 230–234.
268. Zhang, X. Magnetic skyrmion logic gates: conversion, duplication and merging of skyrmions [Text] / X. Zhang, M. Ezawa, Y. Zhou // *Scientific Reports.* — 2015. — Vol. 5. — P. 9400.
269. Bogatyrev, A. B. Metastable states of sub-micron scale ferromagnetic periodic antidot arrays [Text] / A. B. Bogatyrev, K. L. Metlov // *ArXiv e-prints.* — 2018. — P. arXiv:1810.06011.