

PACS: 62.40.+i

В.В. Токий¹, И.К. Носолев², Н.Г. Тарасенко¹

НЕУПРУГИЕ ЯВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ДВУСВЯЗНОЙ ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА

¹Донецкий институт социального образования
83000, г. Донецк, ул. Университетская, 2

²Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
83114, г. Донецк, ул. Р. Люксембург, 72

Статья поступила в редакцию 11 июня 2003 года

С целью обработки экспериментальных результатов, полученных при исследовании нанокристаллической керамики на основе диоксида циркония методом двойного составного вибратора, предложена теоретическая модель описания неупругих явлений с помощью двусвязной петли гистерезиса двух типов. Получены аналитические выражения для внутреннего трения (ВТ) и дефекта модуля упругости (ДМУ). Проведен анализ отношения величины ВТ к соответствующему ДМУ для различных типов петли гистерезиса.

Введение

Исследование неупругих эффектов – важный способ познания структуры литосферы. Неупругость как свойство реального твердого тела, вследствие которого напряжение и деформация связаны неоднозначно, проявляется в виде двух эффектов: внутреннего рассеяния энергии и ДМУ. Приложение к твердому телу внешнего знакопеременного напряжения способно вызвать действие различных механизмов, однако вклад их в общее затухание неравноценен и зависит от условий нагружения. Исследование амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) может быть источником информации о типах механизмов неупругих явлений, что достигается путем параллельного изучения ВТ и ДМУ [1,2]. Амплитудная зависимость ДМУ в дислокационных моделях в рамках гипотезы Давиденкова [3] и причины, привлекающие в последнее время внимание исследователей к этой проблеме, рассмотрены в [4,5].

Известно, что для возникновения ВТ в случае колебаний необходим сдвиг по фазе между напряжением и деформацией. Угол сдвига фазы ϕ при этом является подходящей мерой ВТ [6]. Упругая деформация и напряжение связаны законом Гука через модуль упругости M' . Наличие неупругой деформации может лишь увеличить составляющую деформации, совпадающую по

фазе с напряжением. Поэтому в данном случае динамический модуль упругости M будет меньше M' . Такое снижение модуля упругости обозначают $\Delta M/M$ [2,6–8].

Рассмотрим основные соотношения, описывающие ВТ (угол сдвига фазы φ между напряжением и деформацией) и ДМУ (степень релаксации) при циклическом нагружении. Количество энергии, рассеянной за цикл, стремится к нулю, если φ приближается к нулю. Фазовые соотношения принято выражать в комплексной форме. Так, циклическое изменение напряжения во времени выражается соотношением [6]:

$$\sigma = \sigma_1 \exp(i\omega t), \quad (1)$$

где σ_1 – амплитуда напряжения; ω – угловая частота колебаний, $\omega = 2\pi f$ (f – число колебаний в секунду).

Если напряжение (или его основная гармоника) представлено уравнением (1), то упругая деформация ε' выразится [6]:

$$\varepsilon' = \varepsilon'_1 \exp(i\omega t), \quad (2)$$

где ε'_1 – амплитуда упругой деформации.

Неупругую деформацию ε'' , обусловленную внутренней перестройкой и непропорциональную напряжению, можно разложить на две составляющие: ε''_1 – совпадающую по фазе с напряжением и ε''_2 – отстающую от него на 90° [6]:

$$\varepsilon'' = (\varepsilon''_1 - i\varepsilon''_2) \exp(i\omega t), \quad (3)$$

где амплитуды ε'_1 , ε''_1 и ε''_2 – вещественные положительные величины.

В рамках нашего рассмотрения представлений величины φ и $\Delta M/M$ можно представить в виде:

$$\varphi \approx \varepsilon''_2 / \varepsilon'_1, \quad (4)$$

$$\Delta M/M = (M' - M)/M = \varepsilon''_1 / \varepsilon'_1, \quad (5)$$

где $M' = \sigma/\varepsilon'$.

Из (4) и (5) видно, что каждая из величин φ и $\Delta M/M$ прямо пропорциональна одной из составляющих неупругой деформации – ε''_2 и ε''_1 соответственно.

Как известно [6], феноменологически неупругие явления в материалах любого типа можно описать с помощью петли механического гистерезиса $\varepsilon''[\sigma]$. Таким путем ранее [9] нам удалось объяснить аномальное поведение отношения r амплитудно-зависимого декремента колебаний к соответствующему ДМУ, наблюдавшемуся нами в монокристаллах цинка различных ориентаций.

Чтобы вычислить φ и $\Delta M/M$ для петли гистерезиса, достаточно рассмотреть только петлю неупругой деформации ε'' в функции напряжения. Если $\sigma = \sigma_1 \cos(\omega t)$ (где σ_1 – амплитуда), то $\varepsilon''[\sigma(\omega t)] = \varepsilon''(\omega t)$ – периодическая функция, но в общем случае несинусоидальная. Нужно найти основные ее

компоненты, совпадающие по фазе с σ и отстающие от него на 90° . Эти компоненты (соответственно ε_1'' и ε_2'') можно получить из формул для коэффициентов разложения в ряд Фурье:

$$\varepsilon_2'' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon''(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (6)$$

$$\varepsilon_1'' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon''(\theta) \cos \theta d\theta, \quad (7)$$

где $\varepsilon''(\theta)$ – зависимость неупругой деформации от фазы колебаний упругих напряжений θ .

Двойная однопараметрическая петля гистерезиса для случая амплитудно-независимых ВТ и ДМУ

Различные способы описания петли гистерезиса обсуждаются в ряде работ [6,10–13], рассматривающих модели отрыва, трения и стандартного линейного тела. В настоящей статье рассмотрим иную модель, которой соответствует двусвязная петля гистерезиса с параметром M_d , характеризующим поведение материала при разгрузке. Чтобы вычислить φ и $\Delta M/M$ для этой петли, рассмотрим петлю неупругой деформации ε'' как функцию от напряжения. Учитывая, что петля гистерезиса является симметричной, в дальнейшем при описании процессов нагружения–разгрузки будем рассматривать только верхнюю половину ее контура.

Для такой петли, изображенной на рис. 1, при нагружении, когда в материале возникает только упругая деформация ε' , поведение материала в зависимости от фазы колебаний упругих напряжений θ описывается уравнением

$$M\varepsilon' = \sigma_1 \cos \theta, \quad (8)$$

где $-\pi/2 < \theta < 0$.

При разгрузке наблюдаются две стадии: участок мгновенного появления пластической деформации $\varepsilon_m'' = \sigma_1/M_d$ при достижении максимального напряжения σ_1 (при $\theta = 0$), который сменяется участком монотонного уменьшения неупругой деформации при снижении приложенного напряжения:

$$M_d \varepsilon'' = \sigma_1 \cos \theta, \quad (9)$$

где $0 < \theta < \pi/2$, а M_d – параметр, характеризующий поведение материала при разгрузке.

Определим значения соответствующих компонент неупругой деформации: ε_1'' – совпадающей по фазе с приложенным напряже-

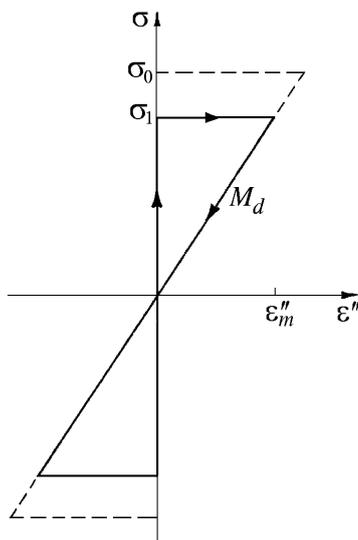


Рис. 1. Двойная однопараметрическая (параметр M_d) петля гистерезиса

нием и ε_2'' – отстающей от него на 90° . Для этого подставим ε'' из (9) в уравнения (6) и (7), откуда

$$\varepsilon_1'' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon'' \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_1}{M_d} \cos^2 \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sigma_1}{M_d} \cos^2 \theta \, d\theta \right] = \frac{\sigma_1}{2M_d} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon_2'' &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon'' \sin \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_1}{M_d} \cos \theta \sin \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sigma_1}{M_d} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right] = \frac{\sigma_1}{\pi M_d}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (10) в (5), получим выражение для ДМУ

$$\Delta M/M = M'/2M_d, \quad (12)$$

а подставляя (11) в (4), – выражение для ВТ

$$\varphi = M'/\pi M_d. \quad (13)$$

Из выражений (12), (13) следует, что в рамках рассматриваемой модели как φ , так и $\Delta M/M$ не зависят от амплитуды деформации. При этом их отношение $r = (\pi\varphi)/(\Delta M/M)$ – величина постоянная, равная 2. Исследование отношения АЗВТ к соответствующему ДМУ является важным источником информации о типах механизмов неупругости и значениях параметров, контролирующих их действие. Этой проблеме в последнее время посвящено достаточное количество экспериментальных и теоретических работ, основные из которых рассмотрены в [5]. Оказывается, что в большинстве случаев отношение r не является величиной постоянной и равной единице, как это следует из дислокационной теории внутреннего трения Гранато и Люкке [7]. Таким образом, в общем случае ВТ и ДМУ нельзя считать тождественными характеристиками процесса неупругости, поскольку каждая из них описывает самостоятельную сторону процесса – степень раскрытия петли механического гистерезиса и нелинейность ее средней линии. Это указывает на необходимость одновременного измерения ВТ и ДМУ при исследовании неупругих явлений.

Двойная трехпараметрическая петля гистерезиса для случая амплитудно-зависимого ДМУ

Рассмотрим случай, когда двусвязная петля гистерезиса описывается тремя параметрами: критическим напряжением σ_0 , деформационным упрочнением M_D при нагрузке и параметром M_d , характеризующим поведение материала при разгрузке.

Для такой петли, изображенной на рис. 2, поведение материала в поле циклического знакопеременного напряжения при нагрузке (верхний полуцикл) описывается уравнениями:

– в области упругого нагружения ($\sigma < \sigma_0$)

$$M\varepsilon' = \sigma_1 \cos\theta, \quad (14)$$

где $-\pi/2 < \theta < \theta_-$; $\theta_- = -\arccos(\sigma_0/\sigma_1)$;

– в области неупругого нагружения ($\sigma > \sigma_0$) после достижения критического напряжения σ_0 наблюдается деформационное упрочнение, при котором

$$\sigma_0 + M_D \varepsilon'' = \sigma_1 \cos\theta, \quad (15)$$

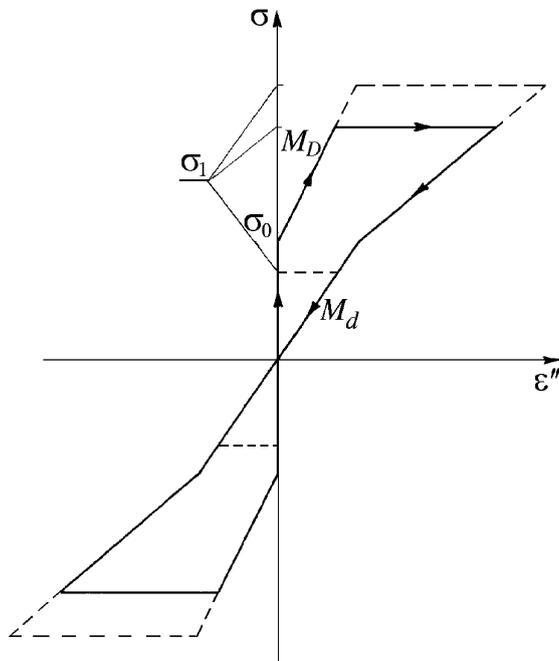
где M_D – деформационное упрочнение; $\theta_- < \theta < 0$.

В области разгрузки за полуцикл имеют место три стадии. При достижении максимальной амплитуды напряжения σ_1 в верхнем полуцикле наблюдается первая стадия (при $\theta = 0$), и происходит мгновенное появление дополнительной пластической деформации

$$\varepsilon_m'' = \sigma_1 / M_d. \quad (16)$$

Первая стадия сменяется второй ($\sigma_1 > \sigma > \sigma_0$), для которой характерно монотонное уменьшение неупругой деформации при снижении приложенного напряжения, что описывается уравнением

$$\sigma_1 \cos\theta = \frac{M_d M_D}{M_d + M_D} \varepsilon'' + \frac{\sigma_0 M_d}{M_d + M_D}, \quad (17)$$



где $0 < \theta < \theta_+$; $\theta_+ = +\arccos(\sigma_0/\sigma_1)$.

Третья стадия ($\sigma_0 > \sigma > 0$), для которой монотонное уменьшение неупругой деформации при снижении приложенного напряжения характеризуется параметром M_d , описывается уравнением

$$M_d \varepsilon'' = \sigma_1 \cos\theta, \quad (18)$$

где $\theta_+ < \theta < \pi/2$.

Определим значения соответствующих компонент неупругой деформации: ε_1'' – совпадающей по фазе с приложенным напряжением и ε_2'' – отстающей от него на 90° .

Рис. 2. Двойная трехпараметрическая (параметры σ_0 , M_D , M_d) петля гистерезиса

Для этого подставим ε'' из (15), (17), (18) в уравнения (6) и (7), откуда

$$\varepsilon_1'' = \frac{\sigma_1}{2M_d} + \frac{2\sigma_1}{\pi M_D} \arccos\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) - \frac{2\sigma_0}{\pi M_D} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2} \quad (19)$$

и

$$\varepsilon_2'' = \sigma_1 / \pi M_d. \quad (20)$$

Подставляя (19) в (5), получаем выражение для ДМУ

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{M'}{2M_d} + \frac{2M'}{\pi M_D} \arccos\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) - \frac{2\sigma_0 M'}{\pi M_D \sigma_1} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2}, \quad (21)$$

а подставляя (20) в (4) – выражение для ВТ:

$$\varphi = M' / \pi M_d. \quad (22)$$

На рис. 3 показаны теоретические зависимости от σ_1/σ_0 амплитудно-независимого ДМУ (12), полученного в модели двойной однопараметрической петли гистерезиса, и амплитудно-зависимого ДМУ (21) для двойной трехпараметрической петли гистерезиса. Здесь же представлена кривая $\varphi(\sigma_1/\sigma_0)$, которая, как следует из (13) и (22), не зависит от амплитуды упругих колебаний и является одинаковой для двух рассмотренных выше типов петли гистерезиса. Отметим, что рассматриваемые теоретические зависимости хорошо совпадают с полученными нами ранее экспериментальными кривыми ВТ и ДМУ в керамических образцах на основе диоксида циркония [14]. Кроме того, они позволяют оценить для каждой модели такой важный параметр неупругости, как отношение r .

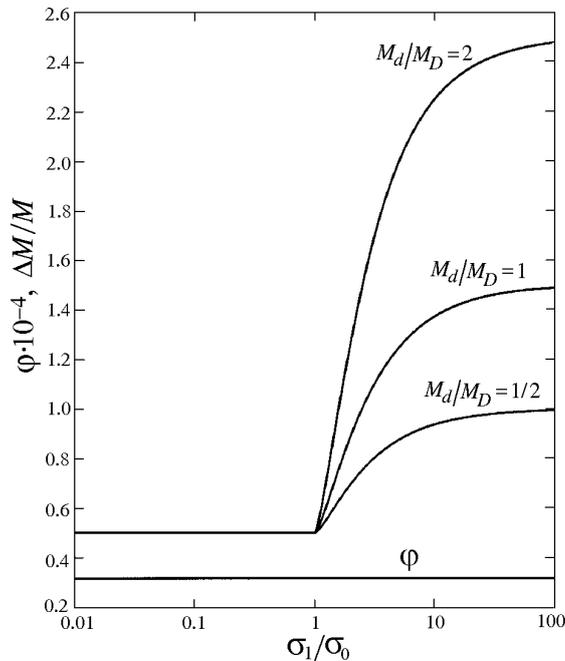


Рис. 3. Теоретические зависимости амплитудно-независимого и амплитудно-зависимого ДМУ $\Delta M/M$ от σ_1/σ_0 в области амплитудно-независимого ВТ φ

В настоящей работе рассмотрены две модели петли гистерезиса. Как уже было отмечено выше, для двойной однопараметрической петли гистерезиса это отношение r является величиной постоянной, равной 2. В модели двойной трехпараметрической петли гистерезиса, как следует из выражений (21) и (22), отношение r зависит от амплитуды колебаний σ_1 , и эта зависимость носит довольно сложный характер, приближаясь по абсолютному значению к 2 в области критических напряжений:

$$r = \frac{\pi\varphi}{\Delta M/M} = \frac{2}{1 + \frac{4M_d}{\pi M_D} \arccos\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) - \frac{4\sigma_0 M_d}{\pi\sigma_1 M_D} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^2}}. \quad (23)$$

В рассмотренной нами ранее третьей модели (модели двойной двухпараметрической петли гистерезиса [15]) отношение r не является величиной постоянной и достигает значения, равного 2, вблизи критических напряжений.

Как видим, в рамках рассмотренных моделей отношение r по величине и характеру зависимости от амплитуды напряжения существенно отличается от полученного в теории дислокационного внутреннего трения Гранато и Люкке [7].

Выводы

1. В модели двусвязной петли гистерезиса разработан феноменологический подход для описания неупругих явлений в нанокристаллической керамике.
2. Получены аналитические выражения для основных параметров неупругости гистерезисного типа (ВТ и ДМУ), описываемой в модели одно- и трехпараметрической петли гистерезиса.
3. Проведен анализ величины отношения ВТ к соответствующему ДМУ для двух рассмотренных типов петли гистерезиса. Установлено, что в обоих случаях величина отношения r не равна единице, а для двойной трехпараметрической петли гистерезиса это отношение зависит от амплитуды возбуждающего напряжения σ_1 .

Заключение

В заключение хотелось бы отметить плодотворность рассмотренного нами феноменологического подхода к описанию неупругости гистерезисного типа, что позволило установить причину аномального поведения отношения r в цинке и выявить природу физических механизмов, контролирующих такое поведение отношения r в материалах с ярко выраженной дислокационной структурой.

Авторы надеются, что предложенные ими модели описания неупругих явлений с помощью двойных петель гистерезиса трех различных типов окажутся полезными для анализа и интерпретации экспериментальных зависимостей ВТ и ДМУ от амплитуды колебаний, полученных в различного рода материалах, включая и такие, в которых дислокаций нет или их вкладом в не-

упругие явления можно пренебречь.

1. *V.V. Tokiy, I.K. Nosolev, V.Ya. Platkov*, *Functional Materials* **7**, 98 (2000).
2. *V.Ya. Platkov, I.K. Nosolev*, *Chin. J. Met. Sci. Technol.* **8**, № 3, 173 (1992).
3. *Н.Н. Давиденков*, *ЖТФ* **8**, 483 (1938).
4. *А.Б. Лебедев*, *ФТТ* **41**, 1214 (1999).
5. *A.B. Lebedev*, *Phil. Mag.* **A74**, 137 (1996).
6. *А.С. Новик*, *Успехи физики металлов*, Т. 1, Металлургиздат, Москва (1956).
7. *A. Granato, K. Lücker*, *J. Appl. Phys.* **27**, 583, 789 (1956).
8. *А. Новик, Б. Бери*, *Релаксационные явления в кристаллах*, Атомиздат, Москва (1975).
9. *В.В. Токий, И.К. Носолев*, *ФТВД* **10**, № 3, 102 (2000).
10. *В.В. Хильчевский, В.Г. Дубенец*, *Проблемы прочности* № 9, 38 (1970).
11. *S. Asano*, *J. Phys. Soc. Jpn.* **29**, 952 (1970).
12. *A.B. Lebedev*, *J. de Physique* **6**, C8–325 (1996).
13. *B. Nakanishi, T. Mori, S. Miura, Y. Murakami, S. Kachi*, *Phil. Mag.* **28**, 277 (1973).
14. *Н.Г. Тарасенко, И.К. Носолев, В.В. Токий, Е.И. Бугаева, Т.Е. Константинова, И.А. Даниленко*, *Тезисы докладов XIII Петербургских чтений по проблемам прочности* (2002), с. 53.
15. *И.К. Носолев, И.А. Даниленко, В.В. Токий, Т.Е. Константинова*, XXXVII международный семинар «Актуальные проблемы прочности». Тезисы докладов, Киев, Украина, 3–5 июля (2001), с. 7.

V.V. Tokii, I.K. Nosolev, N.G. Tarasenko

INELASTIC PHENOMENA IN THE MODEL OF DOUBLY BOUND HYSTERESIS LOOP

A phenomenological model describing the inelastic phenomena by the doubly bound hysteresis loop of two types has been proposed for the the processing of experimental results for zirconia-based nanocrystalline ceramics by the method of double composite vibrator. Analytical expressions for the internal friction (IF) and defect of the modulus of elasticity (DME) have been obtained. IF value-to-DME ratio has been analysed for hysteresis loop of different kinds.

Fig. 1. Double one-parameter (M_d) hysteresis loop

Fig. 2. Double three-parameter (σ_0, M_D, M_d) hysteresis loop

Fig. 3. Theoretic dependences of the amplitude-independent and of the amplitude-dependent DME $\Delta M/M$ on σ_1/σ_0 in the region of amplitude-independent IF φ