

PACS: 42.70.Qs, 73.21.Cd, 78.67.Pt, 71.36.+c

М.К. Галинский, В.В. Румянцев

## ФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ КАРТИНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИСТОЧНИКА

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина

Статья поступила в редакцию 14 августа 2018 года

*Теоретически исследованы возможности формирования задаваемой интерференционной картины в выделенной области пространства путем управления параметрами поля волны (электрического или магнитного) на границе этой области. Сформулирована и решена обратная краевая задача, в которой задано распределение амплитуд колебаний поля внутри выделенной области пространства и ведется поиск необходимых граничных условий. Получено уравнение, описывающее параметры поля волны на границе задаваемой интерференционной картины, найдено необходимое условие существования последней. Проведены численные расчеты с целью проверки полученных результатов на известных интерференционных картинах.*

**Ключевые слова:** интерференционная картина, распределенное фокусирование, распределение амплитуд, распределение фаз, уравнение Гельмгольца

### Введение

В настоящее время использование точечного фокусирования света является традиционным для различных практических применений. Фокусирование света в точку используется, к примеру, в таких технологиях, как резка [1], гравировка [2], сканирование [6], а также в лазерных скальпелях [3,4], пинцетах [5] и т.д. Однако для работы некоторых лазерных пинцетов применяются пучки Бесселя [7], в которых фокусирование происходит вдоль некоторого прямолинейного отрезка, что является частным случаем распределенного фокусирования. Теоретическое описание и возможность создания распределенного фокусирования лазерного излучения в масштабах, необходимых для лучевой оптики, рассматривались, например, в работе [8]. Потенциальные области применения такого типа фокусирования включают в себя: лазерную хирургию, гравировку, резку, информационные технологии, создание лазерно-индуцированных плазменных каналов и т.д.

Распределенное фокусирование в масштабах, сопоставимых с длиной волны излучения, может найти свое применение в микроскопии [9], микробиологии [10], информационных [11], микро- [12] и нанотехнологиях [9].

В указанных областях пространства невозможно ввести такое же понятие «лезвия», как в работе [8], т.е. бесконечно тонкого прямолинейного отрезка

с некоторым распределением мощности проходящего через него излучения. Возникает необходимость задать ширину отрезка с целью получить определенную интерференционную картину. В расчетах вместо распределения интенсивности излучения предпочтительнее рассматривать распределение в пространстве амплитуд колебаний поля (электрического или магнитного). Поскольку распределение мощности однозначно определяется распределением амплитуд в пространстве, задача сводится к поиску возможности создания заранее заданного распределения амплитуд колебаний поля в выделенной области пространства.

В рамках данной работы приведено решение задачи получения необходимой интерференционной картины от протяженного источника. При этом не вводилось ограничение в виде «формы» распределения амплитуд, например прямолинейность. Среда, заключенная в выделенной области пространства, подразумевается как линейная, однородная и изотропная. Полученные результаты применимы для создания любой возможной интерференционной картины в выделенном участке пространства при соблюдении необходимого условия ее существования.

### 1. Теоретическая модель

Поскольку в масштабах, где требуется применение волнового описания распространения волн, невозможно использовать лучевое приближение (как, например, в работе [8]), необходимо задействовать другую математическую модель, учитывающую волновые свойства света. Как известно, распространение любой волны описывается волновым уравнением [13]. Для электрического поля электромагнитной волны в однородной изотропной линейной среде при отсутствии источников это уравнение выглядит следующим образом

$$[13]: \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \mathbf{E} \text{ – напряженность электрического поля волны,}$$

$c$  – фазовая скорость волны в рассматриваемой среде.

В случае устоявшегося волнового процесса, т.е. при отсутствии зависимости распределения амплитуд и фазовых задержек в пространстве от времени, решение можно искать в виде  $E \exp[i\omega t]$  [14]. Подставляя это выражение в волновое уравнение, получаем уравнение Гельмгольца [14]:  $\Delta E + k^2 E = 0$ , где  $E$  – комплексная амплитуда,  $k = \omega/c$  – волновое число.

Обозначение вектора здесь и далее опущено, поскольку рассматривается проекция электрического поля волны на некоторую выделенную ось. Поиск решения уравнения Гельмгольца в виде  $E(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})]$ , как это делается при выведении эйконального [15] и антиэйконального [15] приближений, приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta A + [k^2 - (\Delta\varphi)^2]A = 0, \\ A\Delta\varphi + 2(\nabla\varphi \cdot \nabla)A = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $A(\mathbf{r})$  – распределение амплитуд колебаний,  $\varphi(\mathbf{r})$  – распределение фазового сдвига колебаний в пространстве;  $A(\mathbf{r})$  и  $\varphi(\mathbf{r})$  являются функциями пространственных координат. В дальнейшем предполагаем, что эти функции непрерывны на всей рассматриваемой области со своими производными до третьего порядка включительно. Прделанная подстановка применима для рассмотрения установившегося гармонического волнового процесса. Поэтому в полученной системе уравнений нельзя использовать зависящие от времени функции распределения амплитуд и фаз в пространстве, если основные члены их фурье-образа по времени содержат частоты, большие или сопоставимые с параметром  $2\pi c/L$ , где  $L$  – характерный размер рассматриваемого участка среды. Иными словами, применяется адиабатическое приближение в том смысле, что изменения амплитуд и фаз во времени происходят с пренебрежимо малой временной задержкой во всей рассматриваемой области пространства.

При дальнейшем использовании системы уравнений (1) никаких дополнительных приближений в работе не применяли. Эту систему можно интерпретировать не только как связь между локальными характеристиками распределения амплитуд и фаз в пространстве, но и как систему уравнений для одной искомой функции, а другую функцию рассматривать как задаваемый параметр. Иными словами, можно искать решение распределения поля (электрического или магнитного) в пространстве в том виде, в котором один из параметров (амплитуда или фаза) является заданным изначально.

При таком подходе получение заранее заданной интерференционной картины переходит в поиск распределения фаз в пространстве, которое при заданном распределении амплитуд удовлетворяет уравнениям (1). Однако благодаря отсутствию в выделенном объеме источников излучения нет необходимости рассматривать характеристики источников. Следовательно, эту задачу можно отнести к краевой задаче, где создание заданной интерференционной картины обусловлено исключительно выполнением на границе рассматриваемой области соответствующих граничных условий, а именно распределения амплитуд, фаз и их производных по нормали к границе. Так как распределение амплитуд в рассматриваемой области пространства, включая границу, задано заранее, для нахождения граничных условий необходимо определить распределение фаз на границе области.

Очевидно, что создание заранее заданного распределения амплитуд в пространстве возможно только в случае соблюдения необходимого условия его существования. Из системы (1) следует: чтобы функция распределения амплитуд в пространстве совпадала с заданной изначально, требуется выполнение условия

$$(\nabla\varphi)^2 = \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{A}}{A^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \geq 0. \quad (2)$$

При несоблюдении этого условия функция распределения фаз в пространстве становится комплексной, что равносильно локальному изменению ам-

плитуды по абсолютной величине в  $\exp[-\text{Im}(\varphi)]$  раз. Кроме того, необходимо, чтобы амплитуда колебаний приближалась по абсолютной величине к нулю при удалении волны на бесконечность.

Применяя вышеуказанные рассуждения, рассмотрим границу выделенного объема. Поскольку вся среда рассматривается как линейная, однородная и изотропная без источников и поглощения, система уравнений (1) остается корректной на границе рассматриваемой области пространства.

Пусть оператор градиента будет представлен в виде  $\nabla = \nabla_n + \nabla_s$  (где  $\nabla_n = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$ ), т.е. в виде суммы нормальной и поверхностной составляющих. Выбираем направление нормали внутрь рассматриваемой области. Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} + k^2 - (\nabla_s \varphi)^2}.$$

Знак «+» указывает на то, что волна движется к границе рассматриваемой области и выходит из нее, а знак «-» наоборот, что волна движется от границы в глубь области, т.е. входит в рассматриваемую область пространства. Поэтому на тех интервалах границы, где планируется вход или выход волны из рассматриваемой области пространства, необходимо использовать соответствующий знак производной фазы по нормали к границе. Очевидно, что на границе входа и выхода производная фазы по нормали будет равна нулю.

Разделение градиента на нормальную и поверхностную составляющие приводит к  $\Delta = \Delta_s + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}^2}$ . Находя вторую производную фазы по нормали и принимая во внимание, что  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \nabla_s \varphi = \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$ , получаем

$$2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 \Delta \varphi = 2 \left[ \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} + k^2 \right] \Delta_s \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} \right) - \nabla_s \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} \right) \nabla_s \varphi. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) во второе уравнение системы (1), получаем дифференциальное уравнение в частных производных для границы рассматриваемой области

$$2\mathbf{A} \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Delta_s \varphi + \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} \right) - \mathbf{A} \left( \nabla_s \varphi \cdot \nabla_s \left( \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} \right) \right) + 4 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} + (\nabla_s \varphi \cdot \nabla_s) \mathbf{A} \right) = 0. \quad (4)$$

При выводе уравнения (4) предполагается, что на границе нет источников излучения. Это уравнение применимо в случае использования пространственных модуляторов света (фазовых и амплитудных) или при достаточной

близости границы к протяженному источнику, повторяющему ее форму, чтобы поле в каждой точке границы совпадало с полем, создаваемым источником в каждой своей точке.

Из анализа уравнения (4) следует, что поиск распределения фаз на границе рассматриваемой области представляет собой решение 2-мерной краевой задачи.

## 2. Результаты и обсуждение

Полученное уравнение (4) можно подвергнуть проверке уже известными решениями уравнения Гельмгольца, например соответствующего плоской волне. В таком случае распределение амплитуд в пространстве примет вид  $A = A_0 = \text{const}$ . Подстановка этого выражения в уравнение (4) даст  $\Delta_s \varphi = 0$ .

Квадрат градиента фазы при этом  $(\nabla \varphi)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , а производная по нормали

$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - (\nabla_s \varphi)^2}$ . Пусть для определенности волна распространяется

вдоль оси  $OX$ , а рассматриваемая область пространства имеет вид цилиндра с осью, совпадающей с осью  $OX$ . Тогда очевидно, что на одном из основ-

аний цилиндра  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\omega}{c}$  волна входит в рассматриваемую область простран-

ства, а на другом  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\omega}{c}$  волна выходит из этой области. Для обоих основа-

ний цилиндра  $(\nabla_s \varphi)^2 = 0$ . На боковой поверхности цилиндра  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0$  и, сле-

довательно,  $(\nabla_s \varphi)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ . С учетом непрерывности распределения фаз в

пространстве и на границе решение для боковой поверхности примет вид

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\omega}{c}$ . Итоговые распределения амплитуд и фаз на границе рассматри-

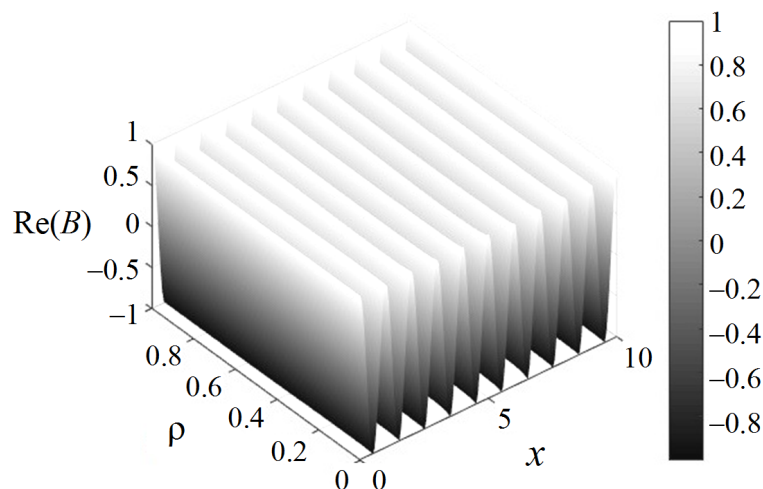
ваемой области соответствуют таковым для плоской волны.

Использование полученных граничных условий при решении уравнения Гельмгольца дает плоскую волну.

График зависимости реальной части комплексной амплитуды, содержащей в себе фазу, приведен на рис. 1. Численное решение проведено с использованием математического пакета Matlab. Амплитуда и длина волны нормированы на единицу. Длина цилиндра принята за 10 длин волн, а радиус – за одну.

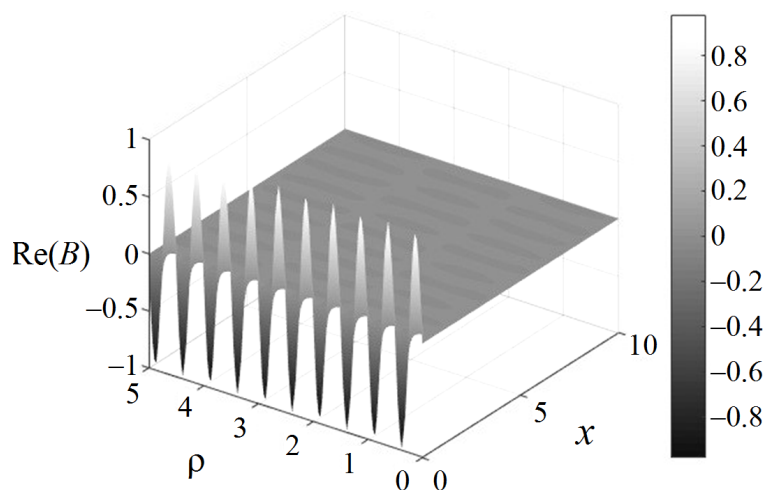
Также была проведена проверка с помощью расчета эванесцентных волн. Например, предположим, что функция распределения амплитуд в пространстве является периодической в направлении, перпендикулярном распространению волны. Пусть при этом в нарушение необходимого условия существования задаваемой интерференционной картины (2) период амплитуды будет меньше длины волны в два раза. Выделенным участком пространства пусть также будет цилиндр, но с радиусом в 5 и длиной в 10 длин волн.

Волна распространяется вдоль цилиндра, а амплитуда периодична вдоль радиуса. Решение уравнения (4) в таком случае на входе и выходе (торцах цилиндра) даст константу, а производная фазы вдоль оси  $Ox$ , т.е. на поверхности цилиндра, станет мнимой величиной.



**Рис. 1.** Изображение плоской волны, полученной при использовании в решении уравнения Гельмгольца граничных условий, найденных с помощью уравнения (4)

Используя при решении уравнения Гельмгольца полученные параметры границы исследуемой области, находим распределение поля (рис. 2). На рисунке, демонстрирующем следствие невыполнения необходимого условия существования задаваемой интерференционной картины, видно влияние комплексной фазы, вызывающей экспоненциальное отклонение амплитуды от изначально заданного, – вместо неизменности амплитуды вдоль оси  $Ox$  имеем ее экспоненциальное снижение.



**Рис. 2.** Распределение поля в цилиндрической области пространства при невыполнении необходимого условия существования задаваемой интерференционной картины

### Заключение

Задача о получении требуемой интерференционной картины в некоторой 3-мерной области пространства сведена к решению 2-мерной краевой задачи (4) о нахождении распределения фаз колебаний поля на границе этой области пространства. Для того чтобы полученная интерференционная картина совпадала с заранее заданной, необходимо, чтобы требуемое распределение амплитуд не вызывало появления комплексной фазы. Условие существования задаваемой интерференционной картины выражается неравенством (2). Полученное условие является необходимым, но не достаточным.

Построенная теоретическая модель применима для устоявшихся волновых процессов, а также для процессов, скорость изменения которых достаточно мала, чтобы в каждый момент времени волновой процесс можно было считать устоявшимся с достаточно большой точностью.

Полученные в данной работе результаты могут найти свое применение не только в оптике, но и в акустике, а также в информационных [11] и медицинских технологиях. В частности, они могут быть использованы для поиска оптимальной структуры фотонных кристаллов при создании фотонных интегральных схем, поскольку задачи о прохождении или отражении света через фотонную структуру, а также о фокусировании света в масштабах, сопоставимых с длиной волны, могут быть рассмотрены как задачи о получении заранее заданной интерференционной картины.

1. *H. Ozaki, H. Kawakami, J. Suzuki, M.Q. Le, Y. Uemura, Y. Doi, M. Mizutani, Y. Kamahito*, Journal of Materials Processing Technology **237**, 181 (2016).
2. *G.M. Martinov, A.I. Obuhov, L.I. Martinova, A.S. Grigoriev*, Procedia CIRP **41**, 998 (2016).
3. *F.W. Neukam, F. Stelzle*, Physics Procedia **5**, 91 (2010).
4. *J. Bellows*, Veterinary Clinics of North America: Small Animal Practice **43**, 651 (2013).
5. *T.A. Nieminen, N. du Preez-Wilkinson, A.B. Stilgoe, V.L.Y. Loke, A.A.M. Bui, H. Rubinsztein-Dunlop*, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **146**, 59 (2014).
6. *Wei-Chin Liu, Meng-Hao Chou, Kuang-Yao Chang, Da-Wei Liu, Jim-Wey Wu, Li-Chen Fu*, IFAC-PapersOnLine **50**, 3221 (2017).
7. *F.G. Mitri, R.X. Li, L.X. Guo, C.Y. Ding*, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer **187**, 97 (2017).
8. *М.К. Галинский*, Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки № 2, 83 (2017).
9. *Nano-Optics and Near-Field Optical Microscopy*, A. Zayats, D. Richards (eds.), Artech House, Boston–London (2008).
10. *S. Diziain, P.M. Adam, J.L. Bijeon, M. Lamy de la Chapelle, P. Royer*, Synthetic Metals **139**, 557 (2003).
11. *В.В. Румянцев*, Проблемы искусственного интеллекта № 3, 50 (2017).
12. *J.H. Bruning*, SPIE **6520**, 652004 (2007).
13. *M. Born, E. Wolf*, Principles of Optics, Pergamon Press (1970).

14. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, Уравнения математической физики, ФИЗМАТ-ЛИТ, Москва (2004).
15. L. Vázquez, S. Jiménez, A.B. Shvartsburg, Modern Electronic Materials 2, 51 (2016).

*M.K. Galinsky, V.V. Rummyantsev*

## FORMATION OF THREE-DIMENSIONAL INTERFERENCE PATTERN OF LASER SOURCE RADIATION

Possibility of formation of a preset interference pattern in selected area by controlling the parameters of the wave field (electric or magnetic) at the boundary is theoretically studied. The inverse boundary value problem is formulated and solved. In this problem the distribution of the amplitude of field oscillations within the selected area is given and it is necessary to calculate the boundary conditions. The equation is obtained that describes the parameters of the wave field at the boundary of the interference pattern. A necessary condition of existence of a desired interference pattern is found. To verify the correctness of the equations obtained, numerical calculations were made for the known interference patterns.

**Keywords:** interference pattern, distributed focusing, amplitude distribution, phase distribution, Helmholtz equation

**Fig. 1.** Flat wave obtained by the solution of Helmholtz equation with using boundary conditions which derived from equation (4)

**Fig. 2.** Field distribution within a cylindrical area when the existence condition of the given interference pattern is not fulfilled