PACS: 02.10.De, 02.30.Tb, 45.20.–d, 45.50.–j

С.В. Терехов

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА. VI. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ЕЕ ПОТОКА

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2017 года

Исследована взаимосвязь кинетического и динамического уравнений, определяющих условия гипераналитичности кватерниона Гамильтона–Гиббса. Выявлены случаи субстанционального и локального сохранения скалярной составляющей этой гиперкомплексной функции. Показано, что при установленных в работе ограничениях на вид потока физической величины априори выполняются законы Фика, Фурье и им подобные.

Ключевые слова: локальная область, кватернион, гипераналитичность, закон сохранения, поток, стационарность

1. Законы сохранения характеристик физических величин

Отсутствие внешнего воздействия на локальную область (*целлу*) сопровождается сохранением той или иной характеристики физического объекта, причем наблюдается идентичность вида законов сохранения. Приведем ряд примеров:

а) *калибровка Лоренца* [1, с. 228]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0\,, \tag{1}$$

где φ и **A** – соответственно скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, t – время. Если отсутствует расходимость векторного поля **A** ($\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$), то уравнение (1) соответствует *локальному закону сохранения* скалярной функции φ ($\partial\varphi/\partial t = 0$). Если векторная функция **A** отвечает за конвективный перенос скалярного потенциала ($\mathbf{A} = \varphi\mathbf{u}$, **u** – скорость перемещения центра масс целлы в локальной точке в выбранный момент времени t), то для несжимаемой среды ($\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$) уравнение (1) описывает *субстанциональный закон сохранения* потенциала φ ($\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = 0$). Если векторная функция **A** задает потенциальное поле ($\mathbf{A} = -\alpha\nabla\varphi$, $\mathrm{rot}\mathbf{A} = 0$, α – постоянный коэффициент пропорциональности), то уравнение (1) определяет *дифференциальный закон сохранения* скалярной функции φ;

б) *закон сохранения заряда* [2, с. 36]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0\,, \tag{2}$$

где ρ – объемная плотность электрического заряда, **j** – плотность тока;

в) *закон сохранения массы* [3, с. 10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{u} = 0\,, \tag{3}$$

здесь ρ – плотность вещества, **u** – массовая скорость в данной точке в момент времени t;

г) *уравнение неразрывности* (*уравнение Фоккера–Планка*) [3, с. 53]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0\,, \tag{4}$$

здесь w – плотность вероятности, **j** – поток частиц в момент времени t;

д) *модель Шредингера* [4, с. 124]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{J} = 0\,, \tag{5}$$

где распределение вероятности $P = \Psi \cdot \Psi^*$ задается волновой функцией Ψ, а поток в локальной точке в момент времени t равен $\mathbf{J} = \mathrm{Re}\left[\Psi^* \frac{\hbar}{\mathrm{i}m} \nabla\Psi\right]$ ($\hbar$ – приведенная постоянная Планка, i – мнимая единица, m – масса частицы).

Несмотря на разное физическое содержание величин (1)–(5), все они удовлетворяют одному и тому же уравнению. Это уравнение является одним из условий, определяющих локальную гипераналитичность кватерниона Гамильтона–Гиббса $F(\tau, \mathbf{r}) = f(\tau, \mathbf{r}) + \gamma \frac{\mathbf{F}(\tau, \mathbf{r})}{V_0}$ (см. формулу (10) из [5, с. 108]), которые запишем в размерных единицах:

$$\Diamond F = 0: \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{F} = 0, \\ \dfrac{1}{V_0^2}\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathrm{grad}f - \dfrac{1}{V_0}\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\tau = \frac{V_0 t}{L_0}$ и $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{L_0}$ – соответственно безразмерные время и радиус-вектор положения центра тяжести локальной области; L_0 и V_0 − характерные длина и скорость для исследуемой задачи (в последующих формулах величины L_0 и V_0 положим равными единице); f и **F** – скалярная и векторная составляющие кватерниона F.

Легко показать, что функции f и **F** удовлетворяют уравнениям

$$\Box f = 0\,, \tag{7}$$

$$\Box\mathbf{F} = -2\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) \qquad (8)$$

($\Box = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Даламбера, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа). Если вектор-функция **F** задает потенциальное (безвихревое) векторное поле, т.е. $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$ ($\mathbf{F} = \mathrm{grad}\phi$, так как $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) \equiv 0$ [1, с. 179], ϕ – произвольный скалярный потенциал), то кватернион F удовлетворяет уравнению Даламбера (формула (19) из [6]), т.е. является *гипергармоническим*.

Система уравнений (6) содержит два уравнения: первое из них соответствует выполнению закона сохранения скалярной функции f, а второе – задает изменение потока этой функции. Определенный интерес представляют случаи априорного выполнения второго уравнения системы (6), которым соответствуют классические модели Фика, Фурье и им подобные кинетические теории. Поэтому цель данной работы – выявление вариантов не только локального или субстанционального сохранения функции f, но и обращения второго уравнения системы (6) в тождество. Это позволит выяснить границы применимости вышеуказанных построений.

2. Субстанциональное сохранение скалярной составляющей кватерниона

Если центр масс целлы движется со скоростью **u**, то, умножив скалярно эту скорость на второе уравнение (6) и прибавив результат к первому уравнению, получим соотношение для субстанциональной производной по времени df/dt от скалярной функции f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \mathbf{u}\cdot\left(\mathrm{rot}\mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\right) - \mathrm{div}\mathbf{F}\,. \qquad (9)$$

При обращении в нуль правой части уравнения (9) величина f остается неизменной в каждый момент времени в любой точке исследуемого объекта.

Рассмотрим ряд частных случаев субстанционального сохранения скалярной составляющей кватерниона F, когда выполняется равенство

$$\mathbf{u}\cdot\left(\mathrm{rot}\mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\right) - \mathrm{div}\mathbf{F} = 0\,. \qquad (10)$$

1. Скорость $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathrm{rot}\mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} \neq 0$, $\mathbf{u} \not\perp \left(\mathrm{rot}\mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\right)$ и $\mathrm{div}\mathbf{F} \neq 0$, тогда уравнение (10) служит для определения векторного поля **F**:

а) ***потенциальное (безвихревое)*** векторное поле **F**, т.е. $\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$ ($\mathbf{F} = \mathrm{grad}\phi$, так как $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) \equiv 0$ [1, с. 179], ϕ – произвольный скалярный потенциал). Равенство (10) принимает вид уравнения Пуассона [7, с. 56]:

$$\Delta\phi = -\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \qquad (11)$$

Следовательно, правую часть уравнения (11) можно трактовать как плотность ρ некоторых «зарядов» (в единицах системы СГС):

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \qquad (12)$$

Если целла покоится ($\mathbf{u} = 0$) или скорость движения ее центра масс перпендикулярна градиенту скорости изменения скалярного потенциала ($\mathbf{u}\perp\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$), то внутри локальной области «заряды» отсутствуют. В том случае, когда вектор $\mathbf{F}$ является потоком величины f ($\mathbf{F} = -\gamma\,\mathrm{grad}f$, γ – постоянный кинетический коэффициент, т.е. $\phi = -\gamma f$), перемещение целлы порождает внутри нее «заряды» с плотностью

$$\rho = -\frac{\gamma}{4\pi}\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right), \qquad (13)$$

причем эти «заряды» противоположны по знаку величине $\mathbf{u}\cdot\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$ (кинетический коэффициент $\gamma > 0$);

б) ***стационарное*** векторное поле $\mathbf{F}$ ($\partial\mathbf{F}/\partial t = 0$, т.е. векторная функция $\mathbf{F}$ явно не зависит от времени t и является функцией только пространственных переменных). Из второго уравнения системы (6) имеем $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathrm{grad}f$, и уравнение (10) принимает вид

$$\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}f - \mathrm{div}\mathbf{F} = 0 \qquad (14)$$

или

$$f\mathrm{div}\mathbf{u} + \mathrm{div}(\mathbf{F} - f\mathbf{u}) = 0. \qquad (15)$$

При конвективном переносе величины $f \neq 0$ ее поток $\mathbf{F} = f\mathbf{u}$, поэтому уравнение (15) сводится к условию несжимаемости локальной области, т.е.

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0. \qquad (16)$$

2. **Соленоидальное** векторное поле **с калибровкой Кулона** $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$ ($\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{W}$ [1, п. 4.10], $\mathbf{W}$ – произвольное векторное поле, при этом $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{W}) \equiv 0$; отметим, что по первому уравнению системы (6) имеет место локальное сохранение скаляра f):

– *неподвижная целла* ($\mathbf{u} = 0$);

– *подвижная локальная область* ($\mathbf{u} \neq 0$):

а) выполняется равенство

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} - \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} = 0. \qquad (17)$$

Если искать общее решение этого уравнения методом разделения переменных [8, с. 133], то получим решение вида $\mathbf{F}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{r})\exp(\lambda t)$, а векторная функция $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению $\mathrm{rot}\mathbf{G} = \lambda\mathbf{G}$. Это уравнение разрешимо [8, с. 44], так как из $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$ следует $\mathrm{div}\mathbf{G} = 0$. Используя теорему Стокса [8, с. 21] (контур C ограничивает ориентированную поверхность $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности), получим

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{G}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{G}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \lambda\int_S \mathbf{G}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \mathbf{G}\cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S = \lambda\int_S G_n \mathrm{d}S. \quad (18)$$

Формула (18) показывает, что циркуляция вектора $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ по контуру C определяется проекцией векторного поля $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ на нормальный вектор $\mathbf{n}$;

б) полю Лапласа ($\mathrm{rot}\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \mathrm{grad}\phi$ ($\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) \equiv 0$), где ϕ – произвольный скалярный потенциал, и так как $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$, то выполняется уравнение Лапласа $\Delta\phi = 0$) отвечает равенство

$$\mathbf{u}\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = 0, \quad (19)$$

которое означает взаимную перпендикулярность этих векторов, т.е. движение локальной области осуществляется перпендикулярно к векторным линиям поля скорости изменения вектора $\mathbf{F}$. Если вектор $\mathbf{F}$ не изменяется с течением времени, то уравнение (9) обращается в тождество;

в) перпендикулярность векторов $\mathbf{u} \perp \left(\mathrm{rot}\mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\right) = \mathrm{grad}f$. Иная форма записи этого условия имеет вид

$$f\mathrm{div}\mathbf{u} - \mathrm{div}(f\mathbf{u}) = 0\cdot \quad (20)$$

Из уравнения (20) следует, что *в несжимаемой среде* ($\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$) *конвективный поток* ($f\mathbf{u}$) *является вихрем* ($f\mathbf{u} = \mathrm{rot}\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}$ – произвольное векторное поле, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{Q}) \equiv 0$).

3. Кинетические модели Фика, Фурье и им подобные (дифференциальное сохранение скалярной составляющей кватерниона)

Согласно первому закону Фика (см., напр., [9, с. 8]) диффузионный поток $\mathbf{j}$ связан с градиентом концентрации вещества $\nabla c = \mathrm{grad}c$ соотношением

$$\mathbf{j} = -D\nabla c, \quad (21)$$

где D – коэффициент диффузии, m^2/s. Закон теплопроводности по Фурье (см., напр., формулу (1.2.10а) из [10, с. 18]) содержит поток тепла $\mathbf{j}_T$, который описывается формулой

$$\mathbf{j}_T = -k\nabla\theta, \quad (22)$$

здесь k – коэффициент теплопроводности, $\nabla\theta$ – градиент температуры θ.

В общем случае кинетические коэффициенты указанных и им подобных необратимых процессов зависят от местоположения точки в среде при заданном моменте времени. Таким образом, в *безразмерных величинах* кинетические явления этого класса характеризуются следующей зависимостью между векторной и скалярной составляющими кватерниона:

$$\mathbf{F} = -\gamma\nabla f\,, \tag{23}$$

где γ – переменный кинетический коэффициент. Следует заметить, что зависимость коэффициента γ от времени и пространственных аргументов задается механизмом протекания процесса.

С учетом того, что $\mathrm{rot}(\nabla f) \equiv 0$, второе уравнение системы (6) является уравнением для определения функции $\nabla f = \mathbf{g}$ при известной зависимости коэффициента γ от пространственно-временных координат:

$$\left(1-\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\mathbf{g} - \gamma\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} + \left[\nabla\gamma\times\mathbf{g}\right] = 0\,. \tag{24}$$

После подстановки

$$\mathbf{g} = \mathbf{z}(t,\mathbf{r})\exp\left(\int\limits_0^t \frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\right) \tag{25}$$

уравнение (24) принимает вид ($\nabla(\ln\gamma) = \mathbf{h}$):

$$\gamma\frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} = \left[\nabla\gamma\times\mathbf{z}\right] \Rightarrow \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} = \left[\nabla\left(\ln\gamma\right)\times\mathbf{z}\right] \Rightarrow \frac{\partial\mathbf{z}}{\partial t} = \left[\mathbf{h}\times\mathbf{z}\right]. \tag{26}$$

В проекциях векторное уравнение (26) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial t} = h_2 z_3 - h_3 z_2, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} = h_3 z_1 - h_1 z_3, \\ \dfrac{\partial z_3}{\partial t} = h_1 z_3 - h_3 z_1, \end{cases} \tag{27}$$

которая аналогична системе уравнений (1) из [11], и ее анализ приведен там же. Поэтому здесь рассмотрим лишь частные случаи явного обращения уравнения (26) в тождество. Они априори приводят к решению второго уравнения системы (6) в виде законов Фика, Фурье и им подобных (выражение (23)):

1. Стационарность вектора **z** (отсутствие явной зависимости этого векторного поля от времени, т.е. $\partial\mathbf{z}/\partial t = 0$) и его коллинеарность градиенту логарифма кинетического коэффициента ($[\mathbf{h}\times\mathbf{z}] = 0 \Rightarrow \mathbf{z} \parallel \mathbf{h}$ могут быть направленными в одну или противоположные стороны).

2. Стационарность вектора **z** и зависимость кинетического коэффициента γ только от времени ($\gamma = \gamma(t)$, $\mathbf{h} \equiv 0$).

3. Стационарность вектора **z** и постоянство кинетического коэффициента γ ($\gamma = \mathrm{const}$, $\mathbf{h} \equiv 0$).

Отметим, что в двух последних случаях векторное поле **g** представляется произведением двух функций, одна из которых зависит только от времени *t*, а вторая – только от пространственных координат **r**, что является основанием для применения метода разделения переменных.

4. Заключение

Универсальность вида для законов сохранения различных физических величин является следствием их кватернионной природы. Рассмотренные типы законов сохранения (локальный, субстанциональный и дифференциальный) реализуются при определенных условиях. Они связаны с формированием того или иного состояния синергетической системы. Особый интерес представляют классические кинетические модели, так как условия их реализации указывают на образование в системе вихревых и других структур. Таким образом, алгебра гипердвойных кватернионов Гамильтона–Гиббса является вспомогательным инструментом для выяснения физической сущности сложных систем.

1. *А.И. Борисенко*, *И.Е. Тарапов*, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, Высшая школа, Москва (1966).
2. *О.И. Фальковский*, Техническая электродинамика, Лань, Москва (2009).
3. *И.П. Базаров*, *Э.В. Геворкян*, *П.Н. Николаев*, Неравновесная термодинамика и физическая кинетика, Изд-во МГУ, Москва (1989).
4. *А. Мессиа*, Квантовая механика, Т. 1, Наука, Москва (1978).
5. *С.В. Терехов*, ФТВД **26**, № 1–2, 106 (2016).
6. *С.В. Терехов*, ФТВД **27**, № 3, 69 (2017).
7. *А.В. Астахов*, *Ю.М. Широков*, Курс физики. Том 2. Электромагнитное поле, Наука, Москва (1980).
8. *В. Босс*, Лекции по математике. Т. 11. Уравнения математической физики, Либроком, Москва (2009).
9. *Б.С. Бокштейн*, Диффузия в металлах, Металлургия, Москва (1978).
10. *М. Био*, Вариационные принципы в теории теплообмена, Энергия, Москва (1975).
11. *С.В. Терехов*, ФТВД **26**, № 3–4, 129 (2016).

S.V. Terekhov

PHYSICAL AND GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF HYPERSPASE. VI. THE LAW OF CONSERVATION OF A PHYSICAL QUANTITY AND THE LAW OF VARIATION OF THE FLUX

Interrelation of kinetic and dynamic equations determining the terms of hyperanalyticity of the Hamilton–Gibbs quaternion is investigational. The cases of substantial and local conservation of scalar component of this hypercomplex function are elucidated. It is shown that at the limitations of the form of the flux of a physical quantity, the laws of Fick, Fourier etc. are valid a priori.

Keywords: local area, quaternion, hyperanalyticity, law of conservation, flux, stationarity