

PACS: 73.40.-c, 73.50.-h

И.В. Бойло

ЭФФЕКТ РЕЗИСТИВНЫХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ В МАНГАНИТАХ ЛАНТАНА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ВО ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ЛОКАЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ И ДЕФИЦИТОМ КИСЛОРОДА

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина

Статья поступила в редакцию 27 сентября 2017 года

Представлено моделирование переключения электрического сопротивления в гетероструктурах металл–манганит–металл на основе уравнения непрерывности. Исследовано влияние квадратичного слагаемого в зависимости локального сопротивления от концентрации вакансий на величину эффекта резистивных переключений в легированном кальцием манганите лантана. Обнаружено, что с уменьшением коэффициента перед нелинейным слагаемым эффект возрастает и становится более стабильным.

Ключевые слова: резистивные переключения, манганиты, локальное сопротивление, кислородные вакансии, нелинейность

1. Введение

Редкоземельные манганиты, легированные щелочноземельными элементами Sr и Ca, отличаются многообразием магнитных и электрических свойств, представляющих интерес для исследования. В настоящее время значительное внимание уделяется вопросу влияния дефицита кислорода на электрические и другие свойства манганитов, которое оказывается существенным. К примеру, легированные манганиты редких земель, магнитные свойства которых связаны с введением ионов другой валентности, при изменении температуры демонстрируют фазовый переход полупроводник–металл. В частности, исследования манганитов лантана, легированных серебром, с избытком кислорода $\text{La}_{0.8}\text{Ag}_{0.2}\text{MnO}_{3.1}$ [1] показали, что в этом соединении с понижением температуры наблюдается переход парамагнитный полупроводник–ферромагнитный металл, сопровождающийся резким возрастанием намагниченности материала с переходом в состояние спинового стекла.

В последнее десятилетие активно исследуется роль донорных дефектов (вакансий кислорода O^{2-}), приводящих к резкому изменению электросопротивления, обусловленного как наличием, так и миграцией подвижных кислородных вакансий в манганитах, в формировании вольт-амперных характеристик гетероструктур [2–6]. К примеру, известно, что у легированного строн-

цием Sr нестехиометрического по кислороду манганита $\text{La}_{0.6}\text{Sr}_{0.4}\text{MnO}_{3-\delta}$ с концентрацией вакансий кислорода $\delta = 0.13, 0.2$ удельное сопротивление ρ на несколько порядков выше, чем у образца со стехиометрическим составом ($\delta = 0$). Это является результатом того, что электроны с донорных энергетических уровней, образованных вакансиями кислорода, переходят на нижние акцепторные уровни ионов Sr^{2+} и соединение становится компенсированным полупроводником, который находится в изолирующем магнитно-двухфазном состоянии, в отличие от ферромагнитного (благодаря взаимодействию двойного обмена) соединения $\text{La}_{0.6}\text{Sr}_{0.4}\text{MnO}_3$ [7,8]. Для эпитаксиальных пленок $\text{La}_{0.7}\text{Sr}_{0.3}\text{MnO}_{3-\delta}$ с различной величиной дефицита кислорода, вызывающего рост электросопротивления, в пределах δ от 0.066 до 0 изучена динамика как транспортных, так и оптических характеристик в зависимости от содержания кислородных вакансий в образце [9].

С точки зрения практических приложений подобного рода исследования важны для моделирования работы электронных устройств памяти на основе эффекта переключений электрического сопротивления, в частности энергонезависимой цифровой резистивной памяти с произвольным доступом ReRAM, работающей при комнатной температуре. С помощью одной гетероструктуры металл–манганит–металл, которая представляет собой ячейку памяти ReRAM, может быть записан один бит информации. Для этого структуру переводят в состояние с низким (R_{ON}) или высоким (R_{OFF}) сопротивлением, каждое такое состояние соответствует 1 или 0. Для организации памяти используют поперечную структуру в виде сетки – матрицы со строками и столбцами.

Благодаря возможности практического применения резистивных переключений в электронных устройствах возник интерес к моделированию данного эффекта с учетом свойств и особенностей манганитов. Поскольку из экспериментальных результатов [10,11] очевидно, что в манганитах наблюдается нелинейная зависимость локального сопротивления от концентрации кислородных вакансий, целесообразно учитывать влияние этой нелинейности на величину эффекта резистивных переключений. В настоящей работе предполагается выяснить влияние нелинейного слагаемого в зависимости сопротивления от концентрации вакансий на резистивные переключения и смоделировать указанный эффект с учетом этой особенности материала.

На основе уравнения непрерывности и идеи о формировании ударной волны кислородных вакансий [12] в работе [13] было проведено исследование эффекта резистивных переключений при условии как линейной, так и нелинейной взаимосвязи между локальной концентрацией вакансий кислорода в образце и локальным сопротивлением материала. Необходимо отметить, что анализ резистивных переключений выполнялся при наличии квадратичного слагаемого в зависимости $\rho(\delta)$, но при этом детального изучения влияния его величины на эффект не проводилось. В продолжение данных исследований в настоящей работе рассматривается влияние нелинейного слагаемого в зависимости локального сопротивления манганитов от концен-

трации подвижных кислородных вакансий на величину и стабильность эффекта переключений электрического сопротивления.

2. Моделирование эффекта резистивных переключений в допированном кальцием манганите лантана

Для моделирования явления выбран допированный кальцием манганит лантана $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ (LCMO), в котором наблюдаются резистивные переключения при комнатной температуре [14–17]. На сегодняшний день хорошо известно, что на проводящие свойства манганитов сильно влияют наличие и движение вакансий кислорода. Пространственное перераспределение кислородных вакансий, экспериментально наблюдаемых в приповерхностной области манганитов [4], их диффузия к интерфейсу металл–манганит и от него, как полагают, связаны с переключением сопротивления гетероструктуры металл–манганит–металл соответственно в высоко- и низкорезистивное состояния. Следуя идее авторов [12] о том, что резкие изменения в сопротивлении манганитов являются результатом образования ударной волны концентрации вакансий, перемещение во времени t подвижных вакансий кислорода c вдоль пространственной координаты x , направленной по нормали к поперечному сечению гетероструктуры, моделируем с помощью уравнения непрерывности

$$\partial_t c(t, x) + \nabla j(t, x) = 0. \quad (1)$$

Здесь полный поток вакансий кислорода $j(t, x)$ состоит из двух потоков: течение кислородных вакансий из областей с высокой в области с низкой концентрацией под действием градиента концентрации, которое можно описать с помощью первого закона Фика: $j_{\text{diff}} = -D\partial_x c$; дрейф заряженных вакансий под действием электрического поля E : $j_{\text{drift}} = c\mu E$. При допировании редкоземельного манганита кальцием частичная замена трехвалентного лантана двухвалентным элементом и возникающий при этом дисбаланс локального заряда отчасти компенсируются изменением валентности марганца, а отчасти – появлением заряженных вакансий кислорода [18]. Таким образом, полный поток вакансий с зарядом q , подвижность которых μ соответствует соотношению Эйнштейна: $\mu = qD/(k_B T)$ (где D – коэффициент диффузии заряженных частиц, k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, К), можно представить в виде

$$j(t, x) = j_{\text{diff}} + j_{\text{drift}}.$$

Вероятность r того, что за единицу времени вакансия переместится на расстояние a из узла 1 в соседний узел 2 (или, наоборот, из 2 – в 1), преодолев потенциальный барьер ΔE , равна

$$r_{\leftrightarrow} = \frac{1}{2} v \exp\left(-\frac{E_A \mp \Delta E}{k_B T}\right),$$

где v – частота попыток преодолеть барьер с энергией активации E_A . Если снижения барьера активации нет ($\Delta E = 0$), тогда $r_{\rightarrow} = r_{\leftarrow}$. Однако во внеш-

нем поле E возникает перекося барьеров ($\Delta E = qaE$), и тогда прыжки в одном из направлений (скажем, $1 \rightarrow 2$) происходят с большей вероятностью, чем прыжки в обратном направлении. При комнатной температуре имеет место заметное движение вакансий в определенном направлении [19], и в результате средняя скорость дрейфа заряженных вакансий ($v = \mu E$) имеет вид

$$v = a(r_{\rightarrow} - r_{\leftarrow}) = a v \exp\left(-\frac{E_A}{k_B T}\right) \sinh\left(\frac{qaE}{k_B T}\right).$$

В дальнейшем рассмотрим случай достаточно малых электрических полей ($qaE \ll k_B T$), когда усредненная подвижность кислородных вакансий

$$\mu = \frac{qa^2 v}{k_B T} \exp\left(-\frac{E_A}{k_B T}\right).$$

Взаимосвязь между локальной напряженностью электрического поля E и электрическим током I определяется законом Ома: $E = \rho(c)I$, где ρ – локальное значение удельного сопротивления образца. Как правило, в современных моделях, описывающих эффект резистивных переключений в манганитах, используют линейную зависимость локального сопротивления от концентрации кислородных вакансий [12,20,21]. Но на самом деле данная зависимость более сложная: электрическое сопротивление связано с локальной концентрацией подвижных вакансий кислорода нелинейным образом. В частности, как следует из экспериментальных данных, для образцов $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_{3-\delta}$ с концентрацией кислородных вакансий (которая включает в себя как подвижные вакансии c , так и те, которые не вносят вклад в сопротивление металлического образца) $\delta = 0, 0.01, 0.025$ [10]:

$$\rho(c) = \rho_0 (\alpha_1 c - \alpha_2 c^2), \quad (2)$$

где ρ_0 , α_1 , и α_2 – константы, определяемые из экспериментальной зависимости $\rho(c)$.

Таким образом, можно определить дрейф заряженных частиц со средней подвижностью μ и коэффициентом диффузии $D = D_0 \exp(-E_A/k_B T)$ (где $D_0 = a^2 v/2$) следующим образом:

$$J_{\text{drift}} = \frac{2qD}{k_B T} c \rho(c) I.$$

Здесь электрический ток I – периодическая по времени t функция с периодом T_0 , определяемая с помощью полного эллиптического интеграла первого рода $K(m)$ как $I(t) = I_{\text{max}} \text{sn}(4(t/T_0)K(m)|m)$, где $\text{sn}(u|m)$ – эллиптическая функция Якоби. Такое представление позволяет легко варьировать форму сигнала от синусоидальной (при $m = 0$) до прямоугольной (при $m = 1$).

Далее, используя уравнение непрерывности для подвижных кислородных вакансий (1), получаем уравнение движения кислородных вакансий

$$\partial_t c + \frac{2qDI(t)}{k_B T} \partial_x (c\rho(c)) = D\partial_{xx}c,$$

которое можно записать в безразмерном виде, введя безразмерные переменные $t \rightarrow t/T_0$, $x \rightarrow x/d$ и $I(t) \rightarrow I(t)/I_{\max}$ с амплитудой электрического тока $I_{\max}$:

$$\partial_t c + 2\gamma_1\gamma_2 I(t)f(c) \partial_x c = \gamma_1 \partial_{xx}c, \quad (3)$$

где $f(c) = 2\alpha_1 c - 3\alpha_2 c^2$, $\gamma_1 = DT_0/d^2$, $\gamma_2 = dq\rho_0 I_{\max}/k_B T$.

Миграцию заряженных частиц в тонкой пленке манганита толщиной d перпендикулярно интерфейсу металл/LCMO можно моделировать с помощью следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} j(t, x)|_{x=0} &= 0, \\ c(t, x)|_{x=d} &= c_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь предполагается, что концентрация $c(x, t)$ на поверхности $x = d$ поддерживается равной исходному значению c_0 благодаря процессам десорбции–сорбции кислорода на поверхности лантан-кальциевого манганита [4,22,23], тогда как поток вакансий $j(x, t)$ через интерфейс $x = 0$ между подложкой и LCMO полагается равным нулю. В результате впоследствии с изменением полярности электрического сигнала I на нем накапливаются положительно заряженные кислородные вакансии.

В [13] представлено численное решение такой задачи: пространственное распределение концентрации вакансий кислорода и формирование ударной волны вблизи непрозрачного интерфейса металл–манганит (на границе $x = 0$ поток вакансий равен нулю).

3. Электрическое сопротивление гетероструктуры металл–манганит–металл

Взаимосвязь между профилем концентрации кислородных вакансий в пленке LCMO и переключением сопротивления гетероструктуры R определяется следующим образом. С появлением электрического тока I вакансии кислорода увлекаются электрическим полем вперед или назад в зависимости от полярности электрического сигнала. Такое движение обуславливает соответствующие изменения полного сопротивления, которое можно вычислить, интегрируя локальное сопротивление $\rho(c(t, x))$ по пространственной координате x :

$$R(t) = \int_0^d \rho(c(t, x)) dx.$$

При этом локальное сопротивление есть нелинейная функция концентрации вакансий $\rho(c)$ (см. формулу (2)), и при изменении концентрации кислородных вакансий меняется соответственно и локальное сопротивление материала.

В настоящей работе исследуется влияние коэффициента при квадратичном слагаемом α_2 в формуле (2) на величину эффекта резистивных переключений. Численный расчет проводится при достаточно малом начальном значении концентрации вакансий $c_0 = 0.004$, которое позволяет не превышать экспериментальную область значений $\rho(c)$.

Выберем определенное сочетание параметров γ_1 и γ_2 , включающих в себя свойства материала, геометрические параметры образца и параметры подаваемого электрического сигнала, таким образом, чтобы получить стабильные переключения сопротивления образца. Первый безразмерный параметр γ_1 непосредственно связан с периодом T_0 , в течение которого длится процесс переключения сопротивления, и коэффициентом диффузии D , который, как правило, полагается константой при заданной температуре T и может быть определен с помощью анализа экспериментальных данных (например, из временной зависимости кислородного индекса в процессе отжига пленки LCMO). Но в общем случае, как показано в работе [24], коэффициент диффузии может быть пространственно-неоднородным. В качестве параметра γ_2 используем значение, полученное на основе экспериментальных данных о том, что эффект переключений в допированном кальцием манганите лантана при комнатной температуре наблюдается при напряжении порядка нескольких вольт [15–17].

Моделируем зависимость локального сопротивления от содержания кислородных вакансий с помощью коэффициента при нелинейном слагаемом α_2 разной величины в зависимости $\rho(c)$ (2). Зафиксировав коэффициент при линейном слагаемом $\alpha_1 = 52.2411$, будем менять значение коэффициента α_2 (300, 400, 504.505, 550, 700). Значения коэффициентов $\alpha_1 = 52.2411$ и $\alpha_2 = 504.505$ соответствуют зависимости $\rho(c)$ для лантан-кальциевого манганита, полученной из экспериментальных данных [10].

Гистерезисные петли электрическое сопротивление–электрический ток (R – I) для гетероструктур, соответствующие пяти различным значениям коэффициента при нелинейном слагаемом α_2 , полученные для разных зависимостей локального сопротивления от концентрации, приведены на рис. 1. Сплошная кривая 3 на рис. 1,а показывает расчет для зависимости $\rho(c)$, полученной из экспериментальных данных [10]. Электрическое сопротивление R демонстрирует резкое переключение между высоко- (OFF) и низкорезистивным (ON) состояниями. Период времени, в течение которого происходит переключение электрического сопротивления из OFF- в ON-состояние, равен T_0 . На графиках видно, что если параметр α_2 возрастает, то петля гистерезиса становится заметно меньше.

Характерной особенностью эффекта является наличие стабилизации переключений в продолжение нескольких электрических циклов. Из временной зависимости полного сопротивления гетероструктуры металл–манганит–металл для случаев $\alpha_2 = 400$ (рис. 2,а) и $\alpha_2 = 700$ (рис. 2,б) следует: чем больше коэффициент, тем менее стабильны начальные циклы переключе-

ний. При $\alpha_2 = 400$ стабильные резистивные переключения устанавливаются сразу после первого поданного электрического сигнала.

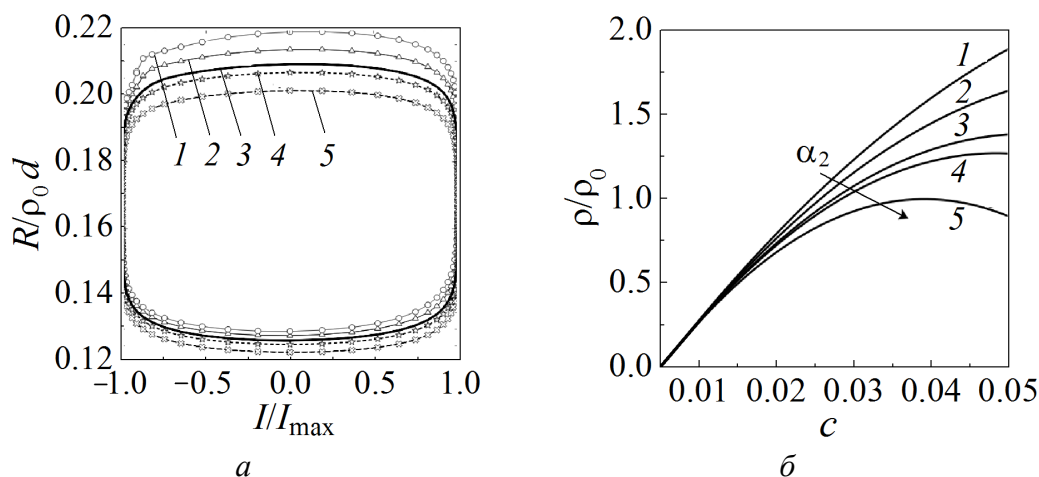


Рис. 1. Зависимость полного электрического сопротивления R от подаваемого электрического сигнала I (а) и взаимосвязь локального сопротивления ρ и концентрации вакансий кислорода c , определяемая формулой $\rho(c) = \rho_0(\alpha_1 c - \alpha_2 c^2)$, где $\alpha_1 = 52.2411$ (б): 1 – $\alpha_2 = 300$, 2 – 400, 3 – 504.505, 4 – 550, 5 – 700. Стрелкой показано возрастание коэффициента α_2

Во втором случае при $\alpha_2 = 700$ наблюдается неустойчивость первых нескольких циклов. На момент, с которого переключения становятся стабильными, указывает кривая OFF. Время стабилизации переключений – несколько периодов подаваемого электрического сигнала. Можно видеть (см. также рис. 1,а), что в данном случае разница между высоким и низким сопротивлением существенно меньше и переключения являются стабильными только после нескольких циклов подаваемого электрического сигнала.

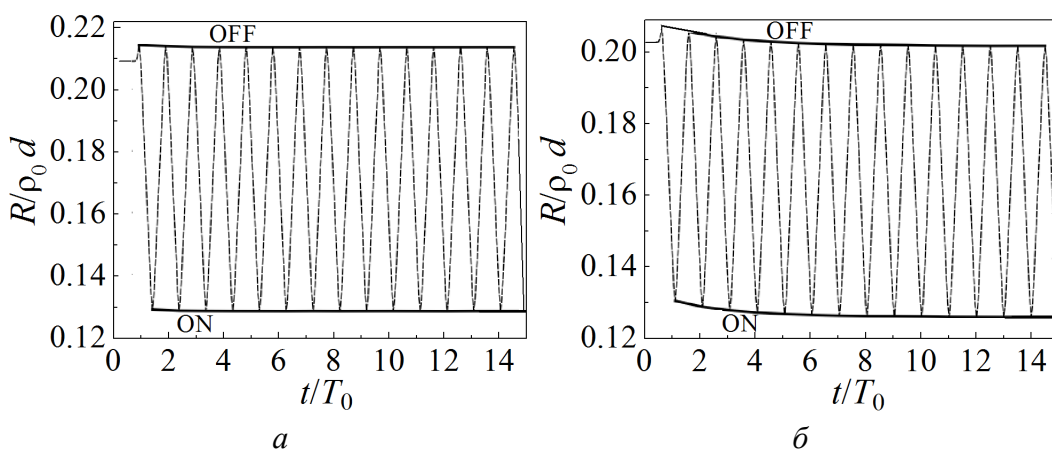


Рис. 2. Стабилизация во времени t переключений электрического сопротивления R (в единицах $\rho_0 d$) из высокорезистивного состояния OFF (сплошная линия сверху) в низкорезистивное состояние ON (сплошная линия снизу) для случая $\alpha_2 = 400$ (а) и $\alpha_2 = 700$ (б)

Таким образом, на графиках видно, что с ростом коэффициента α_2 (в направлении, указанном стрелкой на рис. 1,б) переключения становятся менее стабильными и величина эффекта соответственно уменьшается.

4. Заключение

Приведенный выше анализ свидетельствует о том, что величина и стабильность гистерезиса, которые имеют существенное значение для практического применения резистивных переключений в электронных устройствах, чувствительны к величине коэффициента при квадратичном слагаемом в зависимости локального сопротивления от концентрации кислородных вакансий. Результаты численных расчетов, представленные на рисунках, подтверждают вывод о том, что нелинейность оказывает сильное влияние на исследуемый эффект.

Важным является то, что система демонстрирует стабильные переключения между двумя резистивными состояниями после нескольких электрических циклов. Это следствие нелинейной зависимости $\rho(c)$. Даже если коэффициент при нелинейном слагаемом достаточно большой, гистерезис R – I -характеристик отчетливо виден. Каждое окно гистерезиса в действительности является наложением нескольких петель, что иллюстрирует высокую стабильность переключений. Когда коэффициент α_2 в зависимости $\rho(c)$ возрастает, R – I -характеристики демонстрируют небольшие петли. Чем меньше величина параметра α_2 , тем больше петля гистерезиса. Можно сделать вывод о том, что рост коэффициента при нелинейном слагаемом в зависимости локального сопротивления от концентрации кислородных вакансий приводит к существенным изменениям в размере петли гистерезиса и его стабилизации.

1. Ю.М. Байков, Е.И. Никулин, Ю.П. Степанов, ФТТ **54**, 131 (2012).
2. R. Waser, M. Aono, Nature Mater. **6**, 833 (2007).
3. A. Sawa, Mater. Today **11**, 28 (2008).
4. B. Bryant, C.H. Renner, Y. Tokunaga, Y. Tokura, G. Aeppli, Nature Commun. **2**, 212 (2011).
5. Y.B. Nian, J. Strozier, N.J. Wu, X. Chen, A. Ignatiev, Phys. Rev. Lett. **98**, 146403 (2007).
6. Z.-H. Wang, Y. Yang, L. Gu, H.-U. Haberman, R.-C. Yu, T.-Y. Zhao, J.-R. Sun, B.-G. Shen, Nanotechnology **23**, 265202 (2012).
7. Л.И. Королева, Д.М. Зацуринский, Т.М. Хапаева, Л.И. Гурский, Н.А. Каланда, В.М. Трухан, Р. Шимчак, Б. Крзуманска, ФТТ **50**, 2201 (2008).
8. Д.П. Козленко, С.В. Труханов, Е.В. Лукин, И.О. Троянчук, Б.Н. Савенко, В.П. Глазков, Письма в ЖЭТФ **85**, 123 (2007).
9. В.Н. Варюхин, Ю.В. Медведев, Ю.М. Николаенко, А.Б. Мухин, Б.В. Беляев, В.А. Грицких, И.В. Жихарев, С.В. Кара-Мурза, Н.В. Корчикова, А.А. Тихий, Письма в ЖТФ **35**, 19 (2009).
10. L. Malavasi, M.C. Mozzati, P. Ghigna, G. Chiodelli, C.B. Azzoni, G. Flor, Role of Point Defects on the Properties of Manganite (2004), arXiv:cond-mat. mtrl-sci/0412606.
11. D. Baskar, High Temperature Magnetic Properties of Transition Metal Oxides with Perovskite Structure, Ph.D. thesis, University of Washington, United States (2008).

12. S. Tang, F. Tesler, F.G. Marlasca, P. Levy, V. Dobrosavljević, M. Rozenberg, Phys. Rev. **X6**, 011028 (2016).
13. I.V. Boylo, Phys. Status Solidi **B254**, 1600698 (2017).
14. D.S. Shang, L.D. Chen, Q. Wang, W.Q. Zhang, Z.H. Wu, X.M. Li, Appl. Phys. Lett. **89**, 172102 (2006).
15. R. Dong, W.F. Xiang, D.S. Lee, S.J. Oh, D.J. Seong, S.H. Heo, H.J. Choi, M.J. Kwon, M. Chang, M. Jo, M. Hasan, H. Hwang, Appl. Phys. Lett. **90**, 182118 (2007).
16. R. Yang, X.M. Li, W.D. Yu, X.D. Gao, D.S. Shang, L.D. Chen, J. Appl. Phys. **107**, 063703 (2010).
17. X.J. Liu, X.M. Li, Q. Wang, R. Yang, X. Cao, W.D. Yu, L.D. Chen, Phys. Status Solidi **A207**, 1204 (2010).
18. Z.L. Wang, J.S. Yin, Y.D. Jiang, Jiming Zhang, Appl. Phys. Lett. **70**, 3362 (1997).
19. K.H. Warnick, Y. Puzyrev, T. Roy, D.M. Fleetwood, R.D. Schrimpf, S.T. Pantelides, Phys. Rev. **B84**, 214109 (2011).
20. M.J. Rozenberg, M.J. Sánchez, R. Weht, C. Acha, F. Gomez-Marlasca, P. Levy, Phys. Rev. **B81**, 115101 (2010).
21. N. Ghenzi, M.J. Sánchez, F. Gomez-Marlasca, P. Levy, M.J. Rozenberg, J. Appl. Phys. **107**, 093719 (2010).
22. A. Grill, W. Kane, J. Viggiano, M. Brady, R. Laibowitz, J. Mater. Res. **7**, 3260 (1992).
23. B.J. Choi, D.S. Jeong, S.K. Kim, C. Rohde, S. Choi, J.H. Oh, H.J. Kim, C.S. Hwang, K. Szot, R. Waser, B. Reichenberg, S. Tiedke, J. Appl. Phys. **98**, 033715 (2005).
24. Yu.M. Nikolaenko, A.N. Artemov, Yu.V. Medvedev, N.B. Efros, I.V. Zhikharev, I.Yu. Reshidova, A.A. Tikhii, S.V. Kara-Murza, J. Phys. D: Appl. Phys. **49**, 375302 (2016).

I.V. Boylo

RESISTIVE SWITCHING EFFECT IN LANTHANUM MANGANITES CHARACTERIZED BY NONLINEARITY IN THE RELATIONSHIP BETWEEN THE LOCAL RESISTIVITY AND THE OXYGEN DEFICIENCY

In this paper, a continuity equation-based modeling of switching of the electrical resistance in metal–manganite–metal heterostructures is presented. The influence of the quadratic term in the vacancy concentration dependence of the local resistivity on the magnitude of the resistive switching effect in the calcium-doped lanthanum manganite is investigated. It is found that the effect rises and becomes more stable with lowering the coefficient before the nonlinear term.

Keywords: resistive switching, manganites, local resistivity, oxygen vacancy, nonlinearity

Fig. 1. Dependence of the total resistance R on the electrical signal applied I (a) and relationship between the local resistivity ρ and the oxygen-vacancy concentration c , defined by the formula $\rho(c) = \rho_0(\alpha_1 c - \alpha_2 c^2)$, where $\alpha_1 = 52.2411$ ($\bar{\delta}$): $1 - \alpha_2 = 300$, $2 - 400$, $3 - 504.505$, $4 - 550$, $5 - 700$. Arrow indicates increasing of the coefficient α_2

Fig. 2. Time stabilization of the electrical resistance R (in units of $\rho_0 d$) switching from the high-resistance state OFF (solid line above) to the low-resistance state ON (solid line below) for the cases of $\alpha_2 = 400$ (a) and $\alpha_2 = 700$ ($\bar{\delta}$)