Физика и техника высоких давлений 2016, том 26, № 3–4

PACS: 02.10.De, 02.30.Tb, 45.20.–d, 45.50.–j

С.В. Терехов

ФИЗИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВА. IV. СОЛИТОН ХАСИМОТО. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦЕЛЛЫ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина

Статья поступила в редакцию 11 января 2016 года

Рассмотрена изменчивость базиса сопутствующего трехгранника в обобщенной модели Серре–Френе, в которой учтен поворот локальной системы координат относительно вектора бинормали. Переменная траектория движения материальной частицы описана с учетом двухпараметрической зависимости базиса от времени и пройденного пути. Получены различные варианты нелинейного уравнения Шредингера, соответствующие областям скейлинга и трансформации солитона Хасимото. В рамках кватернионной модели установлены уравнения движения локальной области среды. Показано, что внутренняя энергия этой области расходуется на совершение работы и выделение тепла. Установлено, что в неподвижной области обратимые процессы формируют вихревые структуры.

Ключевые слова: солитон Хасимото, нелинейное уравнение Шредингера, локальная область, сила, движение

Розглянуто мінливість базису супутнього тригранника в узагальненій моделі Серрі–Френе, в якій враховано поворот локальної системи координат відносно вектора бінормалі. Мінливу траєкторію руху матеріальної частки описано з урахуванням двопараметричної залежності базису від часу та пройденого шляху. Отримано різні варіанти нелінійного рівняння Шредінгера, які відповідають областям скейлінга й трансформації солітону Хасімото. У рамках кватерніонів моделі встановлено рівняння руху локальної області середовища. Показано, що внутрішня енергія цієї області витрачається на здійснення роботи й виділення тепла. Встановлено, що в нерухомій області оборотні процеси формують вихрові структури.

Ключові слова: солітон Хасімото, нелінійне рівняння Шредінгера, локальна область, сила, рух

1. Солитон Хасимото

Движение физической частицы осуществляется вдоль экстремали, которая согласно модели Эйлера–Лагранжа [1] отличается от других траекторий движения тем, что на ней действие достигает экстремального значения [2]. Кроме того, экстремаль расположена под определенным углом к силовым линиям поля (трансверсалям, см. рис. 1 из [3]), т.е. неизменность экстремали задается постоянством силовых полей. При изменении потенциальной поверхности будет меняться и геометрия экстремали, что может быть воспринято как изменение физических свойств движущейся частицы. В этой связи возникает проблема описания движения частицы в переменном потенциальном поле. С другой стороны, данную проблему можно свести к изучению влияния временной и естественной параметризации на поведение сопутствующего трехгранника (определение трехгранника см. в [4, с. 602–608]).

В этой связи следует указать на решение аналогичной задачи японским ученым Хасимото [5] в 1972 г. Он продемонстрировал связь системы уравнений Серре–Френе [6, с. 190–191; 7, с. 23–36] с нелинейным уравнением Шредингера (см., например, [8, с. 574–578]). Тем самым было показано, как физико-геометрические характеристики пространства (кривизна и кручение) определяют волновую функцию уединенной волны (солитона) при временной и естественной параметризациях пространства.

В работе [3] исследована система уравнений типа Серре–Френе с учетом поворота сопутствующего трехгранника относительно бинормали. Применим методику Хасимото к системе уравнений (1) из [3] для случая, когда тройка ортов **A**, **B** и **C** образуют декартов базис, т.е. взаимно перпендикулярны друг другу. Математически это означает выполнение равенств: $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = 1$ и $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = 0$. В данной постановке задачи орты **A**, **B**, **C** и характеристики пространства кривизна K_1, поворот вокруг бинормали K_2 (для системы Серре–Френе $K_2 = 0$) и кручения K_3 зависят от двух параметров: времени t и пройденного вдоль экстремали пути s.

Домножим третье уравнение системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} = K_1\mathbf{B} - K_2\mathbf{C}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial s} = K_3\mathbf{C} - K_1\mathbf{A}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial s} = K_2\mathbf{A} - K_3\mathbf{B} \end{cases} \tag{1}$$

на мнимую единицу Эйлера $i = \sqrt{-1}$ и прибавим результат ко второму уравнению системы (1). Получим уравнение

$$\frac{\partial(\mathbf{B}+i\mathbf{C})}{\partial s} = -iK_3(\mathbf{B}+i\mathbf{C}) - (K_1 - iK_2)\mathbf{A}. \tag{2}$$

Вводя обозначения $\mathbf{B}+i\mathbf{C} = \mathbf{N}\exp(-i\varphi)$, $\varphi = \int_0^s K_3(q,t)\,\mathrm{d}q$ и $\psi = (K_1 - iK_2)\exp(i\varphi)$, перепишем (2) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = -\psi\mathbf{A}. \tag{3}$$

Орты **B** и **C** связаны с новыми комплексными векторами **N** и $\mathbf{N}^*$ соотношениями

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{N}\exp(-i\varphi) + \mathbf{N}^*\exp(i\varphi)\Big), \tag{4}$$

$$\mathbf{C} = -\frac{i}{2}\Big(\mathbf{N}\exp(-i\varphi) - \mathbf{N}^*\exp(i\varphi)\Big). \tag{5}$$

При этом векторы нового базиса **A**, **N** и $\mathbf{N}^*$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = 1,\\ |\mathbf{N}|^2 = \left|\mathbf{N}^*\right|^2 = \mathbf{N}\cdot\mathbf{N}^* = 2,\\ \mathbf{A}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{N}^*\cdot\mathbf{N}^* = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Подстановка (4) и (5) в первое уравнение (1) и учет равенства (3) (и к нему комплексно-сопряженного равенства) приводит к системе уравнений для базиса векторов **A**, **N** и $\mathbf{N}^*$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial s} = \dfrac{1}{2}\Big(\psi^*\mathbf{N} + \psi\mathbf{N}^*\Big),\\ \dfrac{\partial\mathbf{N}}{\partial s} = -\psi\mathbf{A},\\ \dfrac{\partial\mathbf{N}^*}{\partial s} = -\psi^*\mathbf{A}.\end{cases} \tag{7}$$

Вычислим вторую производную от векторной функции $\mathbf{A}(s,t)$ по параметру s с учетом двух других уравнений системы (7), получим

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial s^2} = -|\psi|^2\,\mathbf{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial s}\mathbf{N} + \frac{\partial\psi}{\partial s}\mathbf{N}^*\right). \tag{8}$$

Из уравнения (8) видно, что в случае независимости функции ψ от параметра s оно принимает осцилляторный вид с частотой $\omega = |\psi| = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$.

Для исследования противоположного случая введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{Z} = -\frac{i}{2}\Big(\psi^*\mathbf{N} - \psi\mathbf{N}^*\Big), \tag{9}$$

производная от которого по параметру s равна

$$\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s} = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial s}\mathbf{N} - \frac{\partial\psi}{\partial s}\mathbf{N}^*\right). \tag{10}$$

Из определения вектора **Z** следует, что $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}$, значит **Z** является вещественным вектором. Из первого уравнения (7) и определения (9) следует, что

$$\begin{cases} \psi^*\mathbf{N} = \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} + i\mathbf{Z}, \\ \psi\mathbf{N}^* = \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} - i\mathbf{Z}. \end{cases} \tag{11}$$

Уравнение (11) показывает, что в качестве базиса можно выбирать векторы **A**, $\partial\mathbf{A}/\partial s$ и **Z**. Аналогично можно выбрать векторы **A**, $\partial\mathbf{A}/\partial s$ и $\partial\mathbf{Z}/\partial s$, тогда выполняются равенства

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial|\psi|^2}{\partial s}\mathbf{N} = \dfrac{\partial\psi}{\partial s}\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial s} + i\psi\dfrac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial|\psi|^2}{\partial s}\mathbf{N}^* = \dfrac{\partial\psi^*}{\partial s}\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial s} - i\psi^*\dfrac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s}. \end{cases} \tag{12}$$

С учетом (9) перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial s^2} - \kappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial s} + |\psi|^2\mathbf{A} = \lambda\mathbf{Z}, \tag{13}$$

где вещественные параметры $\kappa = \dfrac{\partial \ln|\psi|}{\partial s}$, $\lambda = \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial \ln\left(\psi^*/\psi\right)}{\partial s}$. Уравнение (13) описывает «осциллятор» с «затуханием» (при $\kappa < 0$ или «раскачкой» при $\kappa > 0$) и «внешним возбуждением» (вектор **Z** определяется векторами **N** и $\mathbf{N}^*$, т.е. векторами **B** и **C**), которое задается правой частью (13). Умножим первое уравнение (12) на функцию ψ, а второе – на ψ^*, вычтем из первого результата второй, после несложных преобразований получим соотношение

$$\lambda\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial s} = \kappa\mathbf{Z} - \frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s}. \tag{14}$$

С учетом (14) уравнение (13) принимает вид

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial s^2} + |\psi|^2\mathbf{A} = \frac{\lambda^2+\kappa^2}{\lambda}\mathbf{Z} - \frac{\kappa}{\lambda}\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{Z}, \frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s}, \kappa, \lambda\right). \tag{15}$$

Из (15) вытекает, что «свободные колебания» орта **A** на экстремали будут наблюдаться при выполнении равенства $\mathbf{Q}\left(\mathbf{Z}, \dfrac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s}, \kappa, \lambda\right) = 0$, т.е.

$$\kappa\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s} = \left(\lambda^2+\kappa^2\right)\mathbf{Z}. \tag{16}$$

Так как параметры κ и λ из уравнения (13) (а также (15)) зависят от естественного параметра s, вид правой части будет меняться в зависимости от их значений. Например,

$$\mathbf{Q}\left(\mathbf{Z}, \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial s}, \kappa, \lambda\right) = \begin{cases} \lambda \mathbf{Z}, \ \kappa = 0, \\ 0, \ \text{формула (16)}, \\ \mp i \dfrac{\partial \mathbf{Z}}{\partial s}, \quad \kappa = \pm i\lambda, \end{cases}$$

что можно интерпретировать как воздействие переменного потенциала на сопутствующий трехгранник.

Изменения нового базиса векторов **A**, **N** и $\mathbf{N}^*$ с течением времени описывают локальные производные от этих векторов по времени. Выполним разложение этих производных по базису векторов **A**, **N** и $\mathbf{N}^*$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = a\mathbf{A} + b\mathbf{N} + c\mathbf{N}^*, \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{N} + \chi\mathbf{N}^*, \end{cases} \tag{17}$$

где коэффициенты a, b, c, α, β и χ являются комплексными величинами. В силу вещественности вектора **A** выполняются равенства: $a^* = a$, $b^* = c$, $c^* = b$. Используя соотношения (6), продифференцированные по времени, можно показать, что $a = 0$, $\chi = 0$, $\beta^* = -\beta$ (следовательно, $\beta = iF$, где F – вещественная функция), $b = -\alpha^*/2$. Таким образом, система уравнений (17) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\left(\alpha^*\mathbf{N} + \alpha\mathbf{N}^*\right), \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \alpha\mathbf{A} + iF\mathbf{N}, \end{cases} \tag{18}$$

причем скорости изменения базисных векторов **A**, **N** и $\mathbf{N}^*$ связаны между собой равенством

$$F\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{i}{2}\left(\alpha^* \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \mathbf{N}^*}{\partial t}\right).$$

Так как векторы $\partial\mathbf{A}/\partial s$, **Z**, $\partial\mathbf{Z}/\partial s$ и $\partial\mathbf{A}/\partial t$ определяются только базисными векторами **N** и $\mathbf{N}^*$, можно предположить, что между ними существует линейная зависимость вида

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = B_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} + B_2\mathbf{Z} + B_3 \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial s}, \tag{19}$$

где коэффициенты B_i (i = 1, 2, 3) являются вещественными и не зависящими от параметризации пространственно-временного континуума. Из равенства (19) находим, что проективный коэффициент

$$\alpha = -\left[\left(B_1 + iB_2\right)\psi + iB_3\frac{\partial\psi}{\partial s}\right]. \tag{20}$$

Дифференцируя уравнения системы (18) по естественному параметру s, а первые два уравнения системы (7) – по времени t, приравнивая соответствующие смешанные производные и коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получаем после несложных преобразований следующие уравнения:

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = i\dfrac{\partial\alpha}{\partial s} + F\psi, \\ i\dfrac{\partial F}{\partial s} = \dfrac{1}{2}\left(\alpha^*\psi - \alpha\psi^*\right). \end{cases} \tag{21}$$

Рассмотрим частные случаи полученных соотношений:

1. *Солитон Хасимото* ($B_1 = B_2 = 0$, $B_3 = 1$). Решение Хасимото имеет место в том случае, когда $\alpha = -i\partial\psi/\partial s$, что соответствует реализации равенства $\partial\mathbf{A}/\partial t = \partial\mathbf{Z}/\partial s$, которое отображает *локальное индукционное приближение* (см., например, [9, с. 101]) в модели Хасимото ([9, с. 268–270]), при этом величина $2\partial F/\partial s = \partial|\psi|^2\big/\partial s$ ($F = \frac{1}{2}|\psi|^2 + C(t)$), а функция ψ удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера (см. первое уравнение из системы (21)):

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{2}|\psi|^2 + C(t)\right)\psi. \tag{22}$$

Отметим, что систему (21) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial s} = i\mathbf{N}\dfrac{\partial\mathbf{Z}}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial s} = \mathbf{Z}\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \end{cases}$$

2. *Солитон, подобный солитону Хасимото* ($B_2 = 0$). Иное решение системы (21) получим, если положить $\alpha = -B_1\psi - iB_3\partial\psi/\partial s$. Такой выбор проективных коэффициентов отвечает выполнению равенств

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = B_1\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial s} + B_3\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s},$$

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -iB_1\dfrac{\partial\psi}{\partial s} + B_3\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + F\psi, \\ F = \dfrac{B_3}{2}|\psi|^2 + C(t). \end{cases} \tag{23}$$

3. *Солитон, неподобный солитону Хасимото* (B_1 = 0). В этом случае проективный параметр $\alpha = -i\left(B_2\psi + iB_3\partial\psi/\partial s\right)$, следовательно, получим

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = B_2\mathbf{Z} + B_3\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial s},$$

$$\begin{cases} -i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = B_2\dfrac{\partial\psi}{\partial s} + B_3\dfrac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + F\psi, \\ F = B_2\displaystyle\int_0^s|\psi(q)|^2\,\mathrm{d}q + \dfrac{B_3}{2}|\psi|^2 + C(t). \end{cases} \tag{24}$$

Отметим, что решение Хасимото вытекает из решения системы (23) (или (24)) при B_1 = 0 (или B_2 = 0) и B_3 = 1. Из приведенных решений следует, что вид солитона и нелинейного уравнения Шредингера существенно зависит от параметра-функции α, определяющего разложения локальных скоростей изменения базисных векторов по этим векторам (система (18)).

Таким образом, возникновение квантового объекта связано с изменчивостью траектории движения (кривизна, кручение и поворот пространственной кривой), что можно описать с помощью зависимости базисных векторов сопутствующего трехгранника от двух параметров – времени t и пройденного трехгранником пути s. Другими словами, квантовый объект – это материальная частица, которая движется вдоль изменяющейся траектории. *CL*(*change line*)-движение описывается нелинейным уравнением Шредингера, вид которого задается связью между проективным коэффициентом α и волновой функцией ψ. При определенных значениях коэффициентов B_i (i = 1, 2, 3) (формула (19)) солитон попадает в область фрактальности (сохраняется подобие солитону Хасимото) или трансформации (нарушение подобия). Следовательно, перемещение материальной частицы по *CL* приводит к замене классических законов модели Эйлера–Лагранжа на законы модели Серре–Френе–Шредингера–Хасимото.

Переход с уровня квантовых объектов на уровень движения материальных сред приводит к качественному и количественному изменению параметров движения, основными из которых являются энергоимпульсные закономерности и уравнение для сил, действующих на выделенную локальную область (*целлу*) материала. В этой связи рассмотрим закономерности изменения состояния неподвижной и подвижной целл.

2. Механическое движение целлы

1. Механика целлы при отсутствии внешних сил. При исследовании сплошных сред материальной точкой считают математическую точку, положение которой в выбранной системе координат задается радиус-вектором **r** в момент времени t (или $\tau = ct$, где c – характерная скорость движения в данной среде), и ее малую окрестность. Совокупность материальных точек выделенной из среды области, размеры которой значительно меньше размеров исследуемой системы, принято называть *локальной областью* (*целлой*).

Неподвижность целлы внутри той или иной субстанции обеспечивается протеканием внутренних процессов, которые не вызывают смещения центра масс целлы (скорость центра масс выделенной области $\mathbf{u} = 0$). Взаимодействие области с внешним окружением компенсируется появлением локальных сил. Их равнодействующая сила **X** задается частной производной по времени от импульса целлы **p**, градиентом энергии ε (gradε) и вихрем импульсного поля (rot**p**). Если сила **X** и скорость движения центра масс целлы **u** отличны от нуля, то целла будет терять энергию за счет производства работы и реализации необратимых процессов, например рассеивания тепла.

Изменение физических величин внутри локальной области с неподвижным центром масс при отсутствии внешних сил описывается формулами гипераналитичности (10) из [10]. В случае движения центра масс целлы со скоростью **u** надо рассматривать действие субстанционального оператора D (см. формулу (6) из [10]) на кватернион энергии (ε)-импульса (**p**), который задается формулой (18) $\mathrm{P} = E/E_0 + \gamma P(m_0c) = \varepsilon + \gamma\mathbf{p}$ из [11]. Тогда условия отсутствия субстанционального градиента движения локальной области (сохранение кватерниона энергии-импульса) сводятся к уравнениям

$$\mathrm{DP} = 0: \begin{cases} \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} + \operatorname{div}\mathbf{p} = \mathbf{X}\cdot\mathbf{u}, \\ -\operatorname{grad}\varepsilon + \operatorname{rot}\mathbf{p} - \mathbf{u}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} - [\mathbf{u}\times\mathbf{X}] - \{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{p} - \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{p}\} = \mathbf{F}, \end{cases} \tag{25}$$

где $\mathbf{f} + \operatorname{grad}\varepsilon - \operatorname{rot}\mathbf{p} = -\mathbf{X}$ – равнодействующая всех локальных сил, побуждающая к движению выделенную область; $\partial\mathbf{p}/\partial\tau = \mathbf{f}$ – локальная, а $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}\tau = \mathbf{F}$ – глобальная реакции материальной точки на изменение ее импульса. Отметим, что при компенсации градиента энергии вихрем импульсного поля ($\operatorname{grad}\varepsilon = \operatorname{rot}\mathbf{p}$) соблюдается третий закон Ньютона для локальной реакции: $\mathbf{f} = -\mathbf{X}$. Кроме того, по теореме 5 из [10] выражение, стоящее в фигурных скобках во втором уравнении системы (25), равно нулю ($(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{p} - \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{p} = 0$) в силу сохранения кватерниона энергии-импульса.

Закон локального сохранения энергии целлы (первое уравнение системы (25) с нулевой правой частью) наблюдается при:

а) отсутствии локальной равнодействующей реакции ($\mathbf{X} = 0$). Отсутствие локальной ($\mathbf{X} = 0$) и глобальной ($\mathbf{F} = 0$) реакций для подвижной целлы приводит к выполнению равенства (с учетом первого уравнения системы (25)):

$$\operatorname{grad}\varepsilon = \operatorname{rot}\mathbf{p} + \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{p}\,, \tag{26}$$

которое вытекает из второго уравнения системы (25). Уравнение (26) является аналогом теоремы Гельмгольца (см., например, [12, с. 209–220; 13, с. 177–178]), которая на физическом языке означает разложение любого механического движения на прямолинейное (слагаемое $\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{p}$) и вращательное ($\operatorname{rot}\mathbf{p}$). При нулевой расходимости импульсного поля целлы ($\operatorname{div}\mathbf{p} = 0$ – соленоидальное поле или несжимаемая субстанция при постоянном значении массы целлы) выполняется локальный закон противодействия ($\mathbf{f} = -\mathbf{X}$), а покой и движение локальной области становятся неразличимыми. Таким образом, инерциальные системы отсчета являются следствием отсутствия локальной и глобальной реакций тел отсчета на состояния покоя или равномерного прямолинейного движения, а также нулевой расходимости импульсного поля.

Аналогичное поведение локальной области при наличии локальной ($\mathbf{X} \neq 0$) и глобальной ($\mathbf{F} \neq 0$) реакций целлы, а также при условии $\operatorname{div}\mathbf{p} \neq 0$ согласно системе (25) наблюдается при выполнении соотношений: $\mathbf{X}\cdot\mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{X} \perp \mathbf{u}$), $\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{p} - [\mathbf{u} \times \mathbf{X}] = \mathbf{F}$. Если отсутствует локальная реакция целлы ($\mathbf{X} = 0$), а импульсное поле задается равенством $\mathbf{p} = -K\operatorname{grad}\varepsilon$, то при постоянном кинетическом коэффициенте K между глобальной $\mathbf{F}$ и локальной $\mathbf{f}$ реакциями материальной точки устанавливается соотношение $\mathbf{F} = \mathbf{f} - \mathbf{u}K\Delta\varepsilon$, а энергия ε подчиняется уравнению параболического типа (см. первое уравнение системы (25)). Из полученного равенства следует совпадение локальной и глобальной реакций материальной точки для неподвижной целлы;

б) неподвижности целлы ($\mathbf{u} = 0$), когда ее энергия сохраняется во времени ($\partial\varepsilon/\partial\tau = 0$ по первому уравнению системы (25)), а в пространстве (по второму уравнению системы (25)) выполняется равенство $-\operatorname{grad}\varepsilon + \operatorname{rot}\mathbf{p} = \mathbf{F}$, т.е. в материальной среде возникают градиент энергии и вихрь импульсного поля, компенсирующие действие глобальной реакции;

в) перпендикулярности локальной силы к скорости движения центра масс локальной области ($\mathbf{X}\cdot\mathbf{u} = 0$ или $\mathbf{X} \perp \mathbf{u}$), что соответствует, например, движению материальных точек по окружности (эллипсу) вокруг притягивающего центра.

В перечисленных случаях локальная область является консервативной системой с неизменной энергией.

Учитывая определение локальной силы $\mathbf{X}$, перепишем первое уравнение системы (25) в виде

$$\mathrm{d}\varepsilon + \delta A = [\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{p} - \operatorname{div}\mathbf{p}]\mathrm{d}\tau\,, \tag{27}$$

где введено обозначение $\delta A = \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}\tau$ для изменения работы силы $\mathbf{f}$. Так как сила $\mathbf{f}$ задается *локальной производной по времени* от импульса $\mathbf{p}$, изменение работы не является полным дифференциалом ($\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} \neq \mathrm{d}A/\mathrm{d}\tau$), поэтому обозначение изменения работы δA указывает на данный факт. Сравнивая (27) с первым законом термодинамики [14, с. 41] (количество «частиц» в целле будем считать неизменным), можно записать, что изменение тепла в локальной области, вызванное ее механическим движением, равно

$$\delta Q = \left[\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{p} - \operatorname{div}\mathbf{p}\right]\mathrm{d}\tau\,. \tag{28}$$

Теорема 6. Для неподвижной целлы расходимость импульсного поля не возрастает.

Доказательство. Так как выделяемое тепло (28) связано с хаотизацией движения частиц, т.е. с изменением энтропии dS ($\delta Q = T\mathrm{d}S$, где T – температура целлы), равной нулю для обратимого процесса и положительной – для необратимого, то с ростом времени величина $\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{p} - \mathrm{div}\mathbf{p}$ не убывает. Следовательно, для неподвижной целлы ($\mathbf{u} = 0$) расходимость импульсного поля не возрастает ($\mathrm{div}\mathbf{p} \le 0$).

Следствие из теоремы 6: обратимый термодинамический процесс в неподвижной целле сопровождается возникновением вихревого поля. Поскольку в этом случае расходимость импульсного поля равна нулю, то импульс представим в виде $\mathbf{p} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ ($\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \equiv 0$), где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал, порождающий локальный вихрь. Возникающие в целлах локальные вихри формируют вихревые структуры в термодинамической системе в целом.

2. Влияние внешних сил на механическое движение целлы. Действие окружающей среды на выделенную локальную область вызывает нарушение закона сохранения кватерниона энергии-импульса ($\mathrm{DP} \ne 0$), что может приводить к замене системы (25) на систему уравнений

$$\mathrm{DP} = \Phi = \varphi - \gamma\boldsymbol{\Phi}: \begin{cases} \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} + \operatorname{div}\mathbf{p} - \mathbf{X}\cdot\mathbf{u} = \varphi, \\ \mathbf{F} + \operatorname{grad}\varepsilon - \operatorname{rot}\mathbf{p} + \mathbf{u}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} + \left[\mathbf{u}\times\mathbf{X}\right] + \left\{\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{p} - \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{p}\right\} = -\boldsymbol{\Phi}, \end{cases} \tag{29}$$

причем величина $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{p} - \mathbf{u}\mathrm{div}\mathbf{p} \ne 0$ из-за невыполнения условий теоремы 5 из [10]. Из приведенных формул видно, что при действии внешней силы, компоненты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = \varphi, \\ (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{p} - \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{p} = -\boldsymbol{\Phi}, \end{cases} \tag{30}$$

нарушаются условия теоремы 5 из [10], тем не менее выполняются уравнения (25). Система уравнений (30) указывает на то, что в глобальном масштабе кватернион энергии-импульса не сохраняется, но может оставаться неизменным на локальном уровне ($\mathrm{DP} \ne 0$, но $\Diamond\mathrm{P} = 0$) при специфическом виде внешней кватернионной силы $\Phi = 0 - \gamma\boldsymbol{\Phi}$, где векторная часть определяется вторым уравнением системы (30).

Взаимодействие подвижных локальных областей между собой изменяет как локальные силы, так и импульсы частиц в каждой из целл. В этой связи для получения закона изменения энергии для всей термодинамической системы надо проводить осреднение выражения (27) с учетом (28) по ансамблю целл или по времени. В результате получим эмпирически установленный первый закон термодинамики для средних величин. Следовательно, представленный подход не только демонстрирует скейлинговое подобие при переходе от уровня целл к уровню термодинамических систем, но и указывает на выполнение первого закона термодинамики для уровня локальных областей. Кроме того, в рамках данной модели выполнение первого закона термодинамики не определяет статус целлы, т.е. он не связан с термодинамической равновесностью или неравновесностью локальной области, а также с протеканием в целле обратимых и необратимых процессов. В этой связи возникает необходимость разработки термодинамической концепции неравновесности и выявления связи состояния термодинамической системы с протекающими в ней процессами.

3. Заключение

Движение материальных частиц и интерпретация их физических свойств существенно зависят от поведения полей, в которых они перемещаются. Если поля формируют неизменный потенциальный «ландшафт», то при отсутствии инерциальных и диссипативных сил частица движется вдоль экстремали Эйлера–Лагранжа. Изменяющийся «ландшафт» формирует переменную траекторию, которая приобретает новый вид в каждой точке пространственно-временного континуума. Это непостоянство траектории движения можно охарактеризовать параметрами самого пространства-времени (кривизна, кручение и поворот), влияющих на базисные векторы сопутствующего трехгранника (уравнения Серре–Френе). Уравнения эволюции базисных векторов в качестве коэффициентов содержат проективные величины, связанные с волновой функцией, описывающей поведение квантового объекта, называемого солитоном Хасимото (нелинейное уравнение Шредингера).

В работе данная проблема рассмотрена на основе ранее предложенной автором обобщенной модели Серре–Френе, которая учитывает дополнительно поворот сопутствующего трехгранника вокруг вектора бинормали. Получены эволюционные соотношения, зависящие от проективных коэффициентов, и указано на существование солитонов иного вида, чем уединенная волна Хасимото. Кроме того, продемонстрировано наличие областей фрактальности и трансформации этого солитона в зависимости от связи скорости изменения одного из базисных векторов с двумя другими векторами и естественными скоростями изменения указанных в работе векторных функций.

Переход с уровня движения индивидуальных частиц вдоль изменяющейся траектории движения на уровень локальных областей термодинамической системы сопровождается изменением приоритетных величин (осуществляется путем перехода от векторов сопутствующего трехгранника к кватерниону энергии-импульса). Перемещение материальной частицы может происходить в покоящейся или движущейся локальной области под воздействием внутренних и внешних сил. В случае протекания обратимых термодинамических процессов в неподвижной целле возможно формирование вихревых структур. Действие специфических внешних сил может приводить к сохранению кватерниона энергии-импульса на локальном масштабном уровне.

1. *В.Ф. Гантмахер*, Лекции по аналитической механике, Физматлит, Москва (2001).
2. *К. Ланцош*, Вариационные принципы механики, Мир, Москва (1965).
3. *С.В. Терехов*, ФТВД **25**, № 1–2, 5 (2015).
4. *М.Я. Выгодский*, Справочник по высшей математике, Наука, Москва (1977).
5. *H. Hasimoto*, Journal of Fluid Mechanics **51**, 477 (1972).
6. *А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов*, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, Вища школа, Харьков (1986).
7. *В. Блашке*, Введение в дифференциальную геометрию, Удмуртский университет, Ижевск (2000).
8. *Дж. Уизем*, Линейные и нелинейные волны, Мир, Москва (1977).
9. *С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов*, Введение в теорию концентрированных вихрей, Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск (2003).
10. *С.В. Терехов*, ФТВД **26**, № 1–2, 106 (2016).
11. *С.В. Терехов*, ФТВД **25**, № 3–4, 112 (2015).
12. *Н.Е. Кочин*, Векторное исчисление и начала тензорного анализа, Наука, Москва (1965).
13. *Г. Корн, Т. Корн*, Справочник по математике, Наука, Москва (1973).
14. *И.С. Квасников*, Термодинамика и статистическая физика, Т.1. Теория равновесных систем: термодинамика, Едиториал УРСС, Москва (2002).

S.V. Terekhov

PHYSICAL AND GEOMETRICAL CHARACTERISTICS OF HYPERSPACE. IV. HASHIMOTO SOLITON. MECHANICAL MOVEMENT OF A CELLA

We consider the variability of the basis of a moving trihedral in a generalized model by Serre–Frene. The model takes into account the rotation of the local coordinate system with respect to the binormal vector. Variable trajectory of motion of a particle is described with regard to a two-parameter basis depending on the time and the distance covered. We get different versions of nonlinear Schrödinger equation corresponding to the areas of scaling and transformation of Hashimoto soliton. Within the frameworks of quaternion model, the equations of motion of a local area of the medium vere developed. It is shown that the internal energy of the field is spent to the work and the heat. It is found that in the non-movable area, the reversible processes form vortex structures.

Keywords: Hashimoto soliton, nonlinear Schrödinger equation, local area, force, movement