

PACS: 81.40.Vw

Я.Е. Бейгельзимер^{1,2}, Р.Ю. Кулагин³

КОГДА ПРОЦЕСС КРУЧЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ПОД ВЫСОКИМ ДАВЛЕНИЕМ ДОПУСКАЕТ ПРОСТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ?

¹Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины

²Laboratory of Excellence on Design of Alloy Metals for low-mAss Structures (DAMAS), Université de Lorraine, Metz, France

³Institute of Nanotechnology (INT), Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Eggenstein-Leopoldshafen, Germany

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2015 года

Путем анализа задачи кручения под высоким давлением (КВД) в жесткопластической постановке показано, что самоподобие в развитии микроструктуры деформируемого материала приводит к простому математическому описанию процесса. Это означает, что параметры КВД пропорциональны β^q , где β – угол поворота наковальни, $q = 0$ – для полей скорости и скорости деформации, $q = 1$ – для деформации сдвига и деформации Мизеса, $q = n$ – для момента вращения (n – показатель степени в законе деформационного упрочнения). Сделан вывод, что в случае, если закон деформационного упрочнения имеет участок степенной зависимости, то самоподобный режим возникает лишь в определенном диапазоне изменения β в случае малого трения на боковой поверхности образца. Промежуточное самоподобие гарантирует простое скейлинговое описание процесса в указанном интервале β . Вне этого интервала задачу КВД необходимо решать для каждого β в отдельности. Полученные результаты важны для корректной обработки экспериментов по КВД.

Ключевые слова: кручение под давлением, самоподобие, скейлинг, напряжение, деформация

Шляхом аналізу проблеми крутіння під високим тиском (КВД) у жорсткопластичній постановці показано, що самоподібність у розвитку микроструктури деформованого матеріалу призводить до простого математичного опису процесу. Це означає, що параметри КВД пропорційні β^q , де β – кут повороту ковадла, $q = 0$ – для полів швидкості та швидкості деформації, $q = 1$ – для деформації зсуву та деформації Мізеса, $q = n$ – для моменту обертання (n – показник ступеня в законі деформаційного зміцнення). Зроблено висновок, що в разі, якщо закон деформаційного зміцнення має інтервал ступеневої залежності, то самоподібний режим виникає лише в певному діапазоні зміни β у разі малого тертя на бічній поверхні зразка. Проміжна самоподібність гарантує простий скейлінговий опис процесу в зазначеному інтервалі β . Поза цього інтервалу проблему КВД необхідно вирішувати для кожного β окремо. Отримані результати важливі для коректної обробки експериментів з КВД.

Ключові слова: кручення під тиском, самоподібність, скейлінг, напруга, деформація

1. Введение

Процесс КВД очень широко применяется для преобразования структуры и свойств различных материалов путем их интенсивной пластической деформации [1]. Общепринятой теоретической основой процесса является допущение о том, что при КВД реализуется однородный по высоте простой сдвиг, величина γ которого в произвольной точке образца определяется соотношением

$$\gamma = \frac{\beta r}{H}, \quad (1)$$

где β – угол поворота наковальни, а r – расстояние точки до оси вращения наковальни.

Эксперименты и численное моделирование последних лет свидетельствуют о том, что реальное пластическое течение при КВД может существенно отличаться от указанных выше простых представлений. Так, например, в работе [2] путем моделирования методом конечного элемента показана неоднородность напряженно-деформированного состояния по высоте образца. Авторами [3] обнаружена зона мертвого металла по краю образца. В работе [4] экспериментально зафиксирован double-swirl pattern в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Эти результаты указывают на очень сложный характер пластического течения при КВД, что, безусловно, нужно учитывать при исследовании материалов, полученных данным методом. В связи с этим обстоятельством возникает вопрос: при каких условиях процесс КВД допускает простое математическое описание?

Назовем процесс КВД простым, если деформация сдвига в каждой точке образца линейным образом зависит от угла поворота наковальни, т.е.

$$\gamma = \beta \Phi(r, z), \quad (2)$$

где $\Phi(r, z)$ – произвольная функция r и z (координата по высоте образца). Соотношение (2) обобщает формулу (1), наследуя при этом ее главное свойство – разделение зависимости деформации от β и координат. Один раз вычислив $\Phi(r, z)$, мы получаем возможность рассчитать γ в каждой точке образца для любого угла поворота наковальни. Именно это обстоятельство делает в данном случае описание процесса КВД простым. Если же зависимости от β и координат не разделяются, т.е. $\gamma = \Gamma(r, z; \beta)$, то для того, чтобы найти γ , необходимо решать задачу пластического течения для каждого угла поворота наковальни β . Это как раз и затрудняет теоретическое описание процесса.

Вопрос о том, при каких условиях сложное физическое явление допускает простое математическое описание, возникает совершенно закономерно, и ответ на него часто связан с понятием самоподобия явления [5,6].

В настоящей работе исследуется пластическое течение при КВД. Показано, что в рамках теории жесткопластического тела задача имеет самоподобное решение при степенном законе упрочнения деформируемого материала. При этом деформация сдвига является линейной функцией угла поворота наковальни и описывается соотношением типа (2). Анализируются особенности самоподобных режимов КВД, в частности условия существования простого сдвига. Важным является то, что самоподобный режим КВД и самоподобие развития микроструктуры деформируемого материала оказываются взаимосвязанными. Численное моделирование в пакете DEFORM демонстрирует возникновение и разрушение самоподобных режимов КВД.

2. Постановка задачи жесткопластического течения при КВД

Схема процесса КВД представлена на рис. 1.

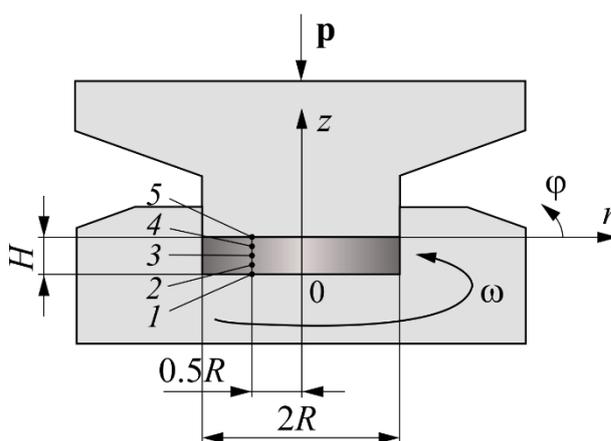


Рис. 1. Схема процесса КВД: 1–5 – точки, в которых ниже рассчитываются характеристики процесса

В рамках теории жесткопластического течения [7] определение напряженно-деформированного состояния образца при КВД сводится к решению системы уравнений (в цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 1)), которая включает:

– систему уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0; \quad (3.3)$$

– соотношения между компонентами вектора скорости и тензора скорости деформации

$$\begin{aligned} \dot{e}_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \dot{e}_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right), \\ \dot{e}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \right), & \dot{e}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \dot{e}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \dot{e}_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right); \end{aligned} \quad (4)$$

– условие пластичности Мизеса

$$\bar{\sigma} = \sigma_s(e_M); \quad (5)$$

– ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{e}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_M}{\bar{\sigma}} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) \quad (i = r, \varphi, z; k = r, \varphi, z); \quad (6)$$

– условие неизменности объема

$$\dot{e}_{rr} + \dot{e}_{\varphi\varphi} + \dot{e}_{zz} = 0, \quad (7)$$

где σ_{ik} и \dot{e}_{ik} ($i = r, \varphi, z; k = r, \varphi, z$) – тензоры соответственно напряжений и скоростей деформаций; v_i ($i = r, \varphi, z$) – вектор скорости; $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ik} \delta_{ik}$

($i = r, \varphi, z; k = r, \varphi, z$) – гидростатическое напряжение;

$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma \delta_{ik} \right) \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma \delta_{ik} \right)}$ – эквивалентное напряжение;

$\dot{e}_M = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{e}_{ik} \dot{e}_{ik}}$ – скорость деформации Мизеса; $\sigma_s(e_M)$ – напряжение течения

металла, которое зависит от деформации Мизеса

$$e_M = \frac{1}{\omega} \int_0^\beta \dot{e}_M d\beta. \quad (8)$$

Система уравнений (3)–(7) решается при следующих граничных условиях:

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0, \text{ когда } z = H, 0 \leq r \leq R;$$

$$v_r = 0, \sigma_{r\varphi} = m\sigma_s, \text{ когда } r = R, 0 < z < H; \quad (9)$$

$$v_r = v_z = 0, v_\varphi = r\omega, \text{ когда } z = 0, 0 \leq r \leq R,$$

где m – коэффициент пластического трения, ω – угловая скорость вращения наковальни.

Угол поворота β не входит явным образом в постановку задачи (3)–(8), но она является нестационарной ввиду зависимости напряжения течения σ_s от деформации Мизеса e_M , которая, в свою очередь, растет с увеличением β согласно соотношению (8).

Общее решение задачи (4)–(9) имеет вид

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(\mathbf{x}, \beta), \quad v_i = v_i(\mathbf{x}, \beta), \quad (10)$$

где \mathbf{x} – радиус-вектор.

3. Самоподобное решение задачи жесткопластического течения при КВД

Пусть $y = f(x, t)$ представляет собой пространственное распределение какой-либо величины y , которое изменяется во времени t . Процесс изменения y называется самоподобным во времени, если пространственное распределение y в любой момент t может быть получено из распределения в момент t_0 путем простого преобразования:

$$f(x, t) = k(t) f(x, t_0), \quad (11)$$

где $k(t)$ – коэффициент, зависящий от времени [5].

Это означает, что пространственное распределение y со временем остается геометрически подобным самому себе с коэффициентом подобия $k(t)$. Это определение обобщает понятие подобия в геометрии.

В работе [5] показано, что $k(t)$ должен быть степенной функцией времени:

$$f(x, t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^k f(x, t_0), \quad (12)$$

где k – параметр.

Отсюда следует, что самоподобное решение задачи КВД должно иметь вид

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^g \sigma'_{ik}(\mathbf{x}, \beta_0), \quad v_i = \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^q v'_i(\mathbf{x}, \beta_0), \quad (13)$$

где g и q – параметры, которые должны быть определены; $\sigma'_{ik}(\mathbf{x}, \beta_0)$ и $v'_i(\mathbf{x}, \beta_0)$ – решения задачи для некоторого угла поворота β_0 .

Покажем, что при определенных условиях соотношения (13) удовлетворяют системе уравнений (3)–(7) и граничным условиям (9), т.е. задача КВД имеет самоподобное решение.

Будем искать самоподобное поле скоростей в следующем виде:

$$v_r \equiv 0; \quad v_z \equiv 0; \quad v_\varphi = \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^q v'_\varphi(r, z; \beta_0). \quad (14)$$

Легко проверить, что такое поле автоматически удовлетворяет условию неизменности объема (7), а также граничным условиям (9) для v_r и v_z . Согласно (9) при $z = 0$ величина v_φ не зависит от β . Отсюда следует, что $q = 0$,

т.е. самоподобное поле скоростей при КВД не должно зависеть от угла поворота наковальни. В этом случае компоненты тензора скоростей деформаций имеют вид

$$\dot{e}_{rr} = \dot{e}_{\varphi\varphi} = \dot{e}_{zz} = \dot{e}_{rz} = 0, \quad (15)$$

$$\dot{e}_{\varphi z} = \frac{1}{2} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\dot{e}_{r\varphi} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right). \quad (17)$$

Скорость деформации по Мизесу определяется соотношением

$$\dot{e}_M = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right) \right)^2}. \quad (18)$$

Подставляя это выражение в соотношение (8), получаем, что при самоподобном развитии процесса КВД деформация Мизеса в каждой точке образца является линейной функцией угла поворота наковальни:

$$e_M = \frac{\beta}{\sqrt{3}\omega} \sqrt{\left(\frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right) \right)^2}. \quad (19)$$

Так как деформация сдвига $\gamma = \sqrt{3}e_M$, то и она линейно зависит от β .

Определим компоненты тензора напряжений для самоподобного течения. Они должны удовлетворять системе уравнений равновесия (3.1)–(3.3), условию пластичности Мизеса (5) и ассоциированному закону пластического течения (6). Из последнего с учетом соотношений (5), (15)–(17) получаем

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma, \quad (20)$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad (21)$$

$$\sigma_{\varphi z} = \sigma_s(e_M) \frac{\frac{\partial v'_\varphi}{\partial z}}{\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right) \right)^2}}, \quad (22)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_s(e_M) \frac{r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right)}{\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right) \right)^2}}. \quad (23)$$

Легко видеть, что правые части соотношений (22) и (23) имеют скейлинговый характер по β лишь в случае, когда материал упрочняется согласно степенному закону

$$\sigma_s(e_M) = Ae_M^n, \quad (24)$$

где A, n – параметры.

Подставляя (24) и (19) в (22) и (23), получаем

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma'_{r\varphi}(r, z; \beta_0) \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^n, \quad (25)$$

$$\sigma_{\varphi z} = \sigma'_{\varphi z}(r, z; \beta_0) \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^n, \quad (26)$$

где

$$\sigma'_{\varphi z} = \frac{A\beta_0^n}{3\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{3}\omega} \sqrt{\left(\frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right) \right)^2} \right)^{n-1} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial z}, \quad (27)$$

$$\sigma'_{r\varphi} = \frac{A\beta_0^n}{3\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{3}\omega} \sqrt{\left(\frac{\partial v'_\varphi}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right) \right)^2} \right)^{n-1} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'_\varphi}{r} \right). \quad (28)$$

Сопоставление соотношений (25) и (26) с выражением (13) показывает, что $g = n$.

С учетом соотношений (20), (21) и осевой симметрии задачи (производные по углу φ равны 0) уравнения (3.1) и (3.3) имеют вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0, \quad (29)$$

т.е. согласно соотношению (20) нормальные напряжения не зависят от координат. Таким образом,

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = P, \quad (30)$$

где P – давление КВД.

В силу осевой симметрии и соотношений (25), (26) уравнение (3.3) принимает вид

$$\frac{\partial \sigma'_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma'_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma'_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (31)$$

После подстановки в это уравнение выражений (27), (28) и простых преобразований получаем дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \quad (32)$$

где $\Phi = r^{n+2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}$, а $u = \frac{v'_\phi}{r}$.

Это уравнение стационарной диффузии [8], роль концентрации в котором играет величина u , а роль коэффициента диффузии – функция Φ , зависящая от модуля градиента концентрации и радиуса r . Согласно (9) граничные условия для решения этого уравнения имеют следующий вид:

$$u = 0, \text{ когда } z = H, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (33)$$

$$u = \omega, \text{ когда } z = 0, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (34)$$

Еще одно граничное условие дает соотношение для напряжения $\sigma_{r\phi}$ на границе $r = R, 0 < z < H$ (см. соотношения (9)). После подстановки в него выражения (23) и простых преобразований получаем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sqrt{3m} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2}, \text{ когда } r = R, \quad 0 < z < H. \quad (35)$$

В работе [8] показано, что существует единственное решение задачи (32)–(35). Из этого следует, что при степенном законе упрочнения деформируемого материала задача жесткопластического течения при КВД имеет самоподобное решение, согласно которому:

– поле скоростей

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\phi = ur; \quad (36)$$

– поле скоростей деформаций

$$\dot{e}_{rr} = \dot{e}_{\phi\phi} = \dot{e}_{zz} = \dot{e}_{rz} = 0, \quad \dot{e}_{\phi z} = \frac{r}{2} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \dot{e}_{r\phi} = \frac{r}{2} \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (37)$$

– деформация Мизеса

$$e_M = \frac{\beta r}{\sqrt{3\omega}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2}; \quad (38)$$

– поле тензора напряжений

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{zz} = \sigma(\beta_0) \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^n, \\ \sigma_{r\phi} = \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^n \frac{A\beta_0^n r^n}{3^{\frac{n+1}{2}} \omega^n} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2} \right)^{n-1} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (39)$$

$$\sigma_{\varphi z} = \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^n \frac{A\beta_0^n r^n}{3^{\frac{n+1}{2}} \omega^n} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2} \right)^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r},$$

где показатель степени самоподобия n равен показателю степени в законе деформационного упрочнения материала, а функция $u = u(r, z)$ является решением задачи (32)–(35).

Из соотношений (39) следует, что при самоподобном развитии процесса момент вращения КВД $M(\beta)$ подчиняется степенному закону:

$$M(\beta) = M(\beta_0) \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^n. \quad (40)$$

Если закон деформационного упрочнения материала отличен от степенного, то самоподобного решения нет.

Обычно принимаемое в расчетах поле скоростей простого сдвига $v_\varphi = \frac{\omega r z}{H}$ является частным случаем самоподобного решения. Действительно, в этом случае $u = \frac{\omega z}{H}$. Легко проверить, что данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (32) и граничным условиям (33) и (34). Условию (35) она удовлетворяет лишь при $m = 0$, т.е. когда нет трения на боковой поверхности образца. Соотношение (38) для деформации Мизеса сводится в этом случае к известной формуле $e_M = \frac{\beta r}{\sqrt{3}H}$.

В заключении раздела обратим внимание на следующее очень интересное, на наш взгляд, обстоятельство. В работе [9] показано, что степенной закон деформационного упрочнения, необходимый для самоподобия КВД на макроуровне, возникает при самоподобном развитии микроструктуры материалов. Таким образом, имеется взаимосвязь самоподобия КВД на разных масштабных уровнях.

4. Анализ процесса КВД на основе численного моделирования. Возникновение и разрушение самоподобных режимов

В предыдущем разделе показано, что в случае степенного закона упрочнения деформируемого материала процесс КВД должен развиваться самоподобным образом, а его характеристики должны быть связаны с углом поворота наковальни степенными зависимостями. При этом показатель степени для полей скорости и скорости деформации равен 0 (правые части соотношений (36), (37) не зависят от β), для деформации сдвига и деформации Мизеса он равен 1 (см. соотношение (38)), а для поля напряжений и силовых параметров процесса – показателю степени в законе деформационного упрочнения (см. соотношения (39), (40)).

В настоящем разделе проиллюстрируем этот вывод путем расчета конкретной задачи КВД методом конечных элементов. Кроме того, с помощью численного моделирования покажем, что в случае, когда кривая упрочнения имеет промежуточный степенной участок, самоподобный режим возникает после некоторого начального угла поворота наковальни, затем какое-то время существует, после чего разрушается.

Расчет выполнен в пакете DEFORM. Применена естественная в данном случае 2D-модель осесимметричного кручения [10]. Расчетная сетка модели содержала 10000 элементов. Выполненные нами в ряде случаев тестовые расчеты с сеткой, содержащей 15000 элементов, дали те же результаты.

Схема процесса представлена на рис. 1. Геометрические параметры $H = 3 \text{ mm}$ и $R = 10 \text{ mm}$ соответствуют установке КВД, имеющейся в Labex DAMAS. Расчеты выполняли на основе модели жесткопластического тела с двумя вариантами кривой деформационного упрочнения, приведенными на рис. 2.

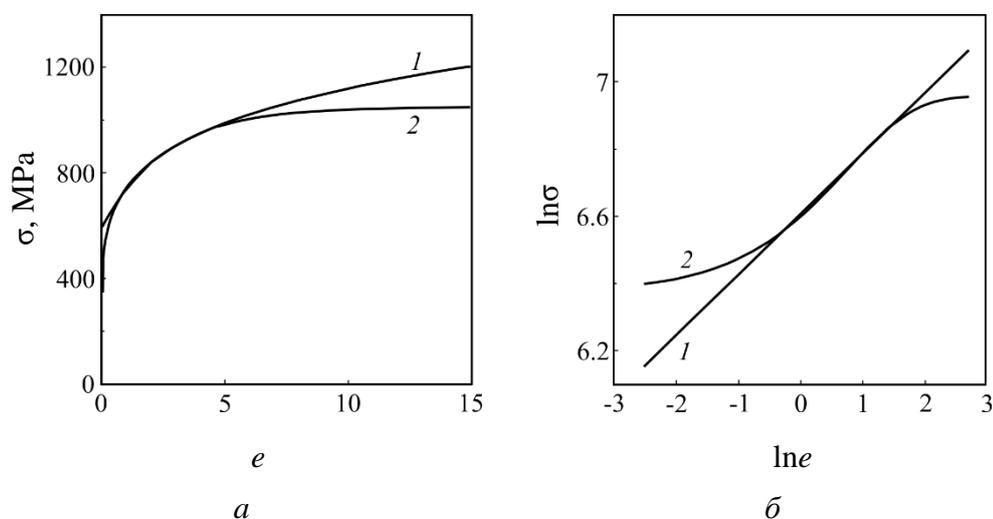


Рис. 2. Кривые деформационного упрочнения материала, принятые в расчете: *а* – в координатах напряжение течения–деформация Мизеса, *б* – в двойных логарифмических координатах. Кривая 2 построена по экспериментальным данным работы [11] для консолидированного порошкового железа; кривая 1 представляет собой степенную функцию $\sigma_s = 740e^{0.18}$ МПа, аппроксимирующую кривую 2 на участке деформации Мизеса от 0.5 до 5.0

Для коэффициента трения m на боковой поверхности нижней наковальни также рассматривали два варианта: $m = 0.25$ и $m = 0$. План численных экспериментов приведен в таблице. Результаты расчетов представлены на рис. 3–5.

План численных экспериментов

Номер эксперимента	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Кривая упрочнения (рис. 2)	1	1	2	2
<i>m</i>	0	0.25	0	0.25

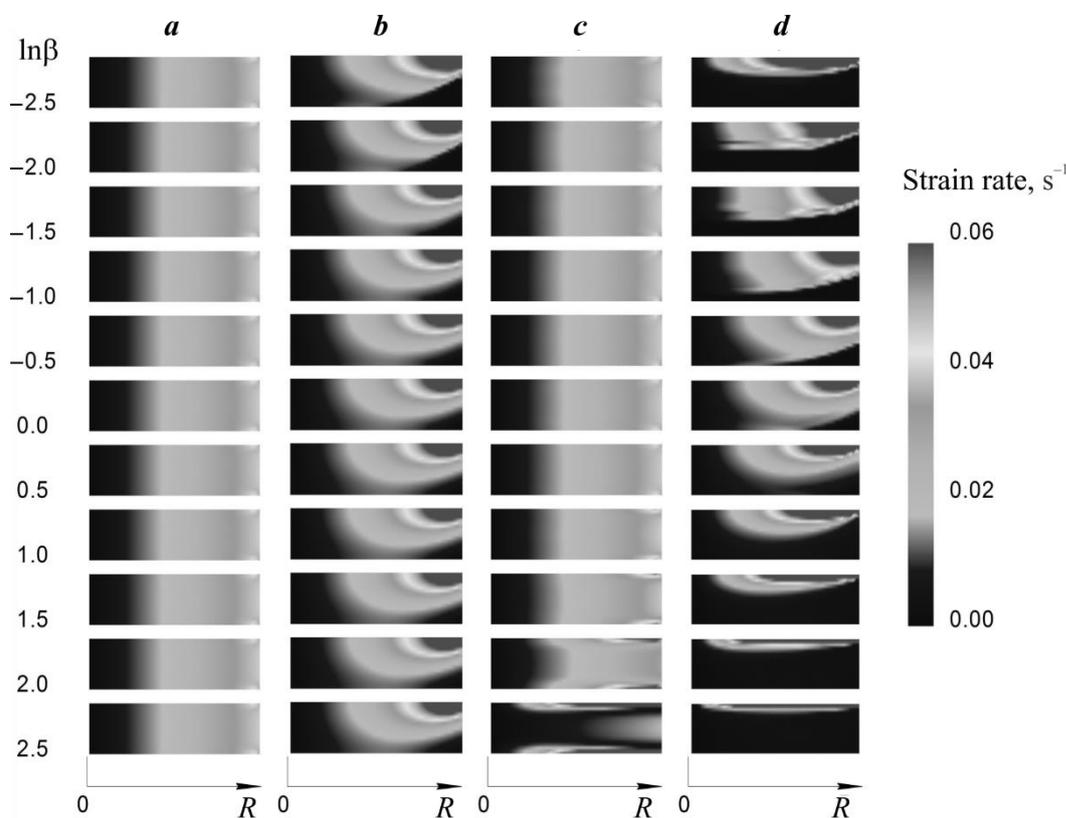


Рис. 3. Поле интенсивности скорости деформации Мизеса в координатах (r, z) при разных углах поворота β ; *a–d* соответствуют номерам эксперимента в таблице

*Анализ результатов численных экспериментов, выполненных на основе степенной кривой деформационного упрочнения (эксперименты *a* и *b*)*

В соответствии с выводами предыдущего раздела эти эксперименты продемонстрировали самоподобные режимы КВД. Действительно, согласно рис. 3 поле скоростей деформации не изменяется при повороте наковальни. Отсюда следует линейная зависимость деформации в любой точке образца от β . Последнее иллюстрирует рис. 4, *a, б* для пяти точек по высоте образца на середине его радиуса. Графики рис. 5 (кривые *a, b*) показывают линейные зависимости логарифма момента от логарифма угла поворота наковальни с тангенсом угла наклона графиков, равным 0.18. То есть момент вращения наковальни является степенной функцией β , причем показатели степени в обоих случаях равны показателю степени кривой деформационного упрочнения.

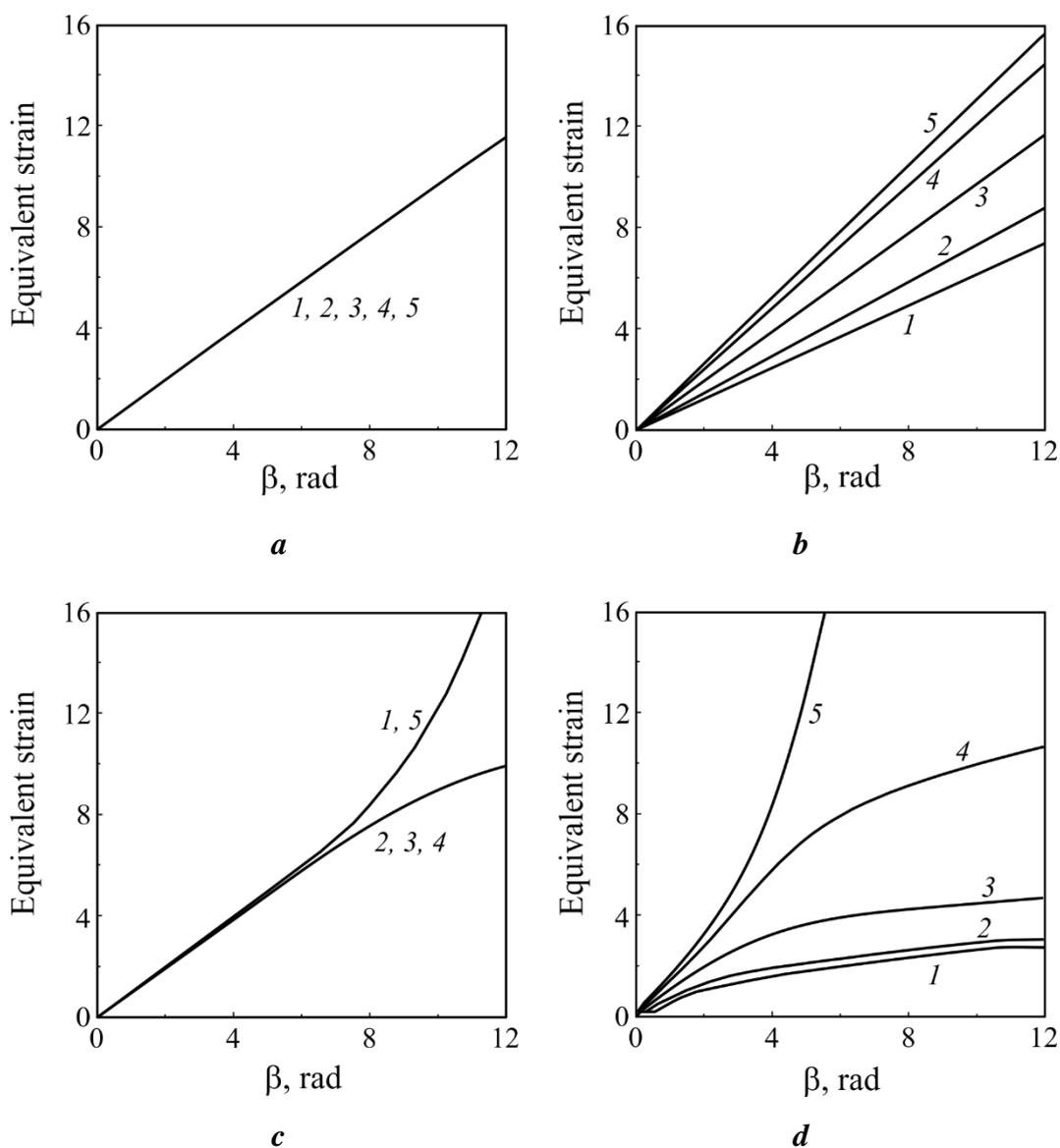


Рис. 4. Зависимость деформации Мизеса на середине радиуса образца в пяти точках по его высоте. Цифры у кривых соответствуют номеру точки на рис. 1; номер графика соответствует номеру эксперимента в таблице

Расчеты подтвердили вывод, сделанный в предыдущем разделе: свойство самоподобия определяется именно степенным характером кривой упрочнения, а трение на боковой поверхности образца влияет лишь на зависимость напряженно-деформированного состояния от пространственных координат (например, на функцию $\Phi(r, z)$ в соотношении (2)). При отсутствии трения (эксперимент **a**) напряженно-деформированное состояние образца однородно по высоте.

Анализ результатов численных экспериментов, выполненных на основе кривой деформационного упрочнения, имеющей участок степенной зависимости (эксперименты *c* и *d*).

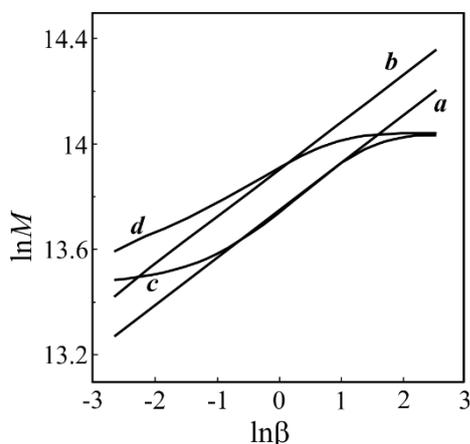


Рис. 5. Момент вращения–угол поворота в двойных логарифмических координатах. Буква у кривой соответствует номеру эксперимента в таблице

свойство сложных процессов, состоящее в том, что самоподобные режимы являются промежуточными асимптотиками [5], т.е. процесс следует им в некотором промежуточном интервале своего развития. Вне данного интервала процесс не допускает простое математическое описание в том смысле, как это было указано во введении.

Заключение

В статье показано, что КВД допускает простое математическое описание, когда деформируемый материал упрочняется по степенному закону. В этом случае процесс развивается самоподобно, а зависимости всех его характеристик от угла поворота наковальни β являются степенными. В частности, деформация сдвига в любой точке образца линейно зависит от β .

В случае, когда кривая упрочнения имеет участок степенной зависимости, КВД может развиваться самоподобно в некотором диапазоне β . Согласно сформулированной в статье гипотезе скейлинга КВД этому диапазону соответствует область прилегания графика зависимости к прямой линии.

Простые скейлинговые зависимости характеристик процесса от угла поворота наковальни справедливы лишь в диапазоне самоподобия. Вне этого диапазона для определения характеристик процесса нужно решать задачу пластической деформации для каждого угла β . В частности, вне диапазона самоподобия для расчета деформации сдвига в каждой точке образца нельзя применять зависимости (1) и (2).

Реальные кривые деформационного упрочнения имеют несколько различных участков, среди которых обязательно имеются такие, где зависимость напряжения течения от эквивалентной деформации является степенной [9]. Характерные черты развития процесса КВД для реальной кривой упрочнения иллюстрируют численные эксперименты *c* и *d*. Рис. 3–5 показывают, что самоподобные режимы возникают лишь в некотором диапазоне углов поворота наковальни, где они проявляются в постоянстве поля скорости деформации, линейной зависимости эквивалентной деформации и степенной зависимости момента вращения от угла поворота наковальни. В этом проявляется общее

Установленная в работе [10] скейлинговая природа степенного участка кривой деформационного упрочнения позволяет заключить, что скейлинг на микроуровне является физической причиной самоподобия КВД на макроуровне.

1. *A.P. Zhilyaev, T.G. Langdon*, Prog. Mater. Sci. **53**, 893 (2008).
2. *R.B. Figueiredo, M.T.P. Aguilar, P.R. Cetlin, T.G. Langdon*, J Mater. Sci. **47**, 7807 (2012).
3. *D.J. Lee, E.Y. Yoon, L.J. Park, H.S. Kim*, Scripta Materialia **67**, 384 (2012).
4. *Yi Huang, M. Kawasaki, T.G. Langdon*, J. Mater. Sci. **49**, 3146 (2014) (DOI: 10.1007/s10853-014-8015-8).
5. *G.I. Barenblatt*, Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
6. *G. Taylor*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **201**, No. 1065 (Mar. 22, 1950), pp. 175–186.
7. *R. Hill*, The mathematical theory of plasticity, Oxford University Press (1998).
8. *J. Crank*, The mathematics of diffusion, Brunel University Uxbridge, Oxford University Press, Ely House, London W.I. (1975).
9. *Y. Beygelzimer, L.S. Toth, J.J. Jonas*, Adv. Eng. Mater. **17**, 1783 2015 (DOI: 10.1002/adem.201500097).
10. DEFORM v11.0 Documentation, Scientific Forming Technologies Corporation, <http://www.deform.com/>
11. *Y.J. Zhao, R. Massion, T. Grosdidier, L.S. Toth*, Adv. Eng. Mater. **17**, 1748 (2015).

Y. Beygelzimer, R. Kulagin

WHEN DOES HIGH PRESSURE TORSION ADMIT A SIMPLE MATHEMATICAL DESCRIPTION?

By analyzing the problem of high pressure torsion (HPT) in the rigid plastic formulation, we show that the power hardening law of the deformed materials leads to self-similarity of HPT, admitting a simple mathematical description of the processes. This means that HPT parameters are proportional to β^q , where β is the angle of the anvil rotation; $q = 0$ for the velocity and strain rate, $q = 1$ for the shear strain and the von Mises strain, $q = n$ for the stress and torque (n is the exponent of the power hardening law). We conclude that when the hardening law has a power law interval, self-similar regimes of HPT can emerge in some range of β in the case of low side wall friction. This intermediate self-similarity guarantees a simple mathematical description of the process only in the corresponding range of β . Outside this range, we still have to solve a plasticity problem for each value of β , since simple power function dependencies are not valid outside the interval. Our results have important practical implications for proper HPT experiment design and analysis.

Keywords: high pressure torsion, self-similarity, scaling, stress, strain

Fig. 1. Scheme of HPT: 1–5 – the points where the characteristics of the process are calculated below

Fig. 2. Curves of the deformation hardening of the material accepted in calculation: a – in coordinates of yield stress and Mises strain, $\bar{\sigma}$ – in double logarithmical coordinates. Curve 2 is plotted by the experimental data reported in [11] for the consolidated powder iron; curve 1 is the power function $\sigma_s = 740e^{0.18}$ МПа, that is an approximant of curve 2, when the Mises strain ranges from 0.5 to 5.0

Fig. 3. Field of intensity of the Mises strain rate in (r, z) coordinates at the varied rotation angle β ; $a-d$ correspond to the experiment indexes listed in the Table

Fig. 4. Sample height dependence of the Mises strain at the half-radius of the sample in five points. The numbers of the curves correspond to the numbers of points in Fig. 1; the number of the plot corresponds to the number of the experiment in the Table

Fig. 5. Rotational moment vs the rotation angle in double logarithmical coordinates. The letter marking the curve corresponds to the number of the experiment in the Table