

Терехов С.В.



Введение в синергетику



Донецк – 2009

УДК 510; 516.15; 517(023); 517.5; 517.9; 530.1(075.8); 53.072.11;
532.5; 532.517; 532.527; 532.59; 536.75; 541.13; 541.1(07)
PACS 02.30.Oz; 03.75.-b; 47.32.-y; 47.32.Ef; 47.50.Ef; 61.43.Nv; 83.10.Rs
Т35

**Донецкий физико-технический институт им. А.А.Галкина
НАН Украины**

Рецензенты:

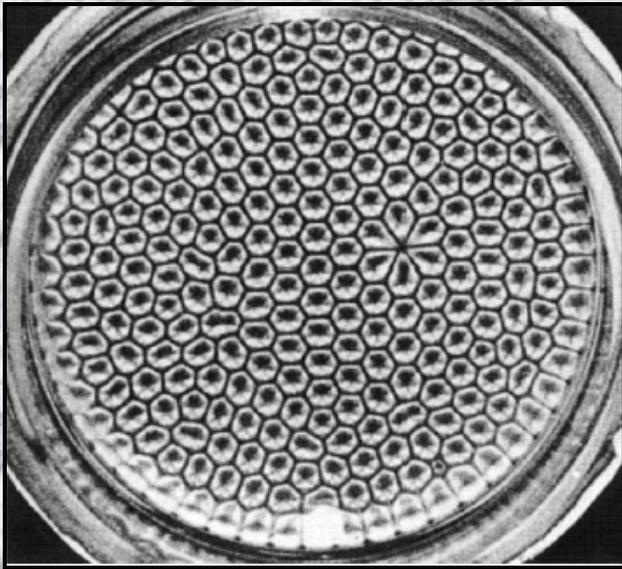
доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Донецкого физико-технического института им. А. А. Галкина НАН Украины *Филиппов А.Э.*
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математических и компьютерных дисциплин Европейского университета *Смирнов Л.И.*
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры “Нанозифика”
Донецкого национального университета *Петренко А.Г.*

Т35 *Терехов С. В.* Введение в синергетику. – Донецк: “Цифровая типография”, 2009. – 187 с.

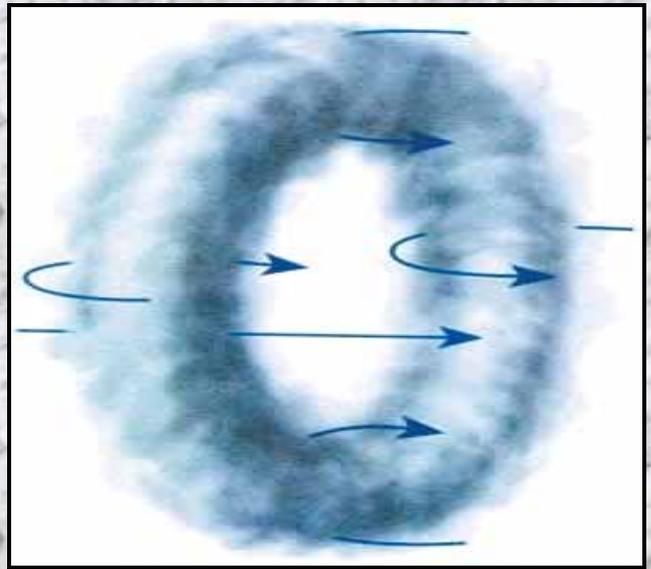
Синергетика является наукой об общих закономерностях строения, развития и эволюции материи на различных уровнях её организации. Она устанавливает взаимозависимость между энтропией и информацией, детерминированными и стохастическими процессами в открытых диссипативных системах, проводит количественный и качественный анализ динамических объектов. Синергетика использует теорию нелинейных динамических систем, термодинамику необратимых, неравновесных процессов, вейвлет-анализ и фрактальную геометрию, исследует вихревые образования, причины возникновения катастроф, конкурентные химические реакции с отбором и другие нелинейные явления и процессы. В изложенном материале отображены основные положения физической теории различных организационных уровней материи и методов исследования самоорганизующихся структур.

Для студентов специальностей “Теоретическая физика”, “Физика твёрдого тела”, “Физика конденсированного тела” и “Нанозифика”, молодых преподавателей и исследователей, интересующихся синергетическим подходом к решению задач в различных областях научного знания.

Терехов С.В.



Ячейки Бенара



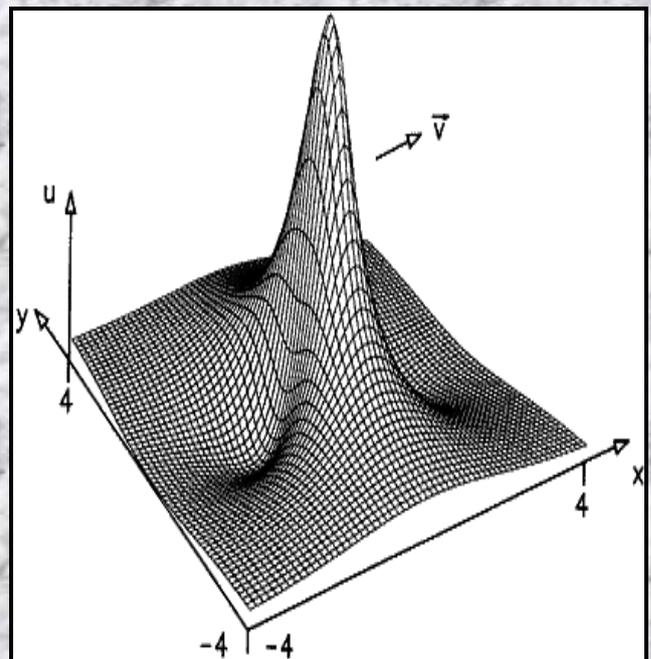
Вихревое кольцо

ВВЕДЕНИЕ В СИНЕРГЕТИКУ

(Синергетика – наука о неожиданной самоорганизации диссипативных систем)



Трёхмерный фрактал



Солитон

Терехов С.В. “Введение в синергетику”



(Barclay Shaw)

...И нет, и не будет иного,
Сверх бытия ничего.

“О природе” Парменид

...Ведь наш безжизненный язык,
Наш разум в суете напрасной
Природы искажают лик,
Разъяв на части мир прекрасный.
Искусств не надо и наук.
В стремлении к подлинному знанию
Ты сердце научи, мой друг,
Вниманию и пониманию...

У. Вордсворт (Перевод И. Меламеда)



(Escher)

Там, где окружающий нас мир перестаёт быть ареной личных надежд и желаний, где мы как свободные существа, сомневаясь и размышляя, созерцаем его в изумлении, там мы вступаем в царство искусства и науки. Если мы описываем увиденное и известное по опыту на языке логики – это наука; если же представляем в формах, внутренние взаимосвязи которых недоступны нашему сознанию, но которые интуитивно воспринимаются как осмысленные, – это искусство. И для искусства, и для науки общим является увлечение чем-то стоящим выше личного, свободным от условного.

Альберт Эйнштейн



(Gervasio Gelardo)

Что такое красота науки? Ведь это по сути то же самое, что и красота музыки Бетховена. В беспорядочном нагромождении событий и фактов Вы вдруг видите взаимосвязь. Это проявляется сложное взаимное влияние различных, но глубоких волнующих Вас идей, которое позволяет объединить то, что всегда было в Вас, но никогда не было связано друг с другом.

В.Ф. Вайскопф



§ 1. Основные понятия синергетики

1. Синергетика как новое мировоззрение.
2. Понятие неустойчивости.
3. Неравновесные системы и нелинейная динамика.



8



§ 2. Динамические системы и хаос

1. Двоичная система исчисления.
2. Динамические системы: хаос, информация, обратимость, циклы.
3. Стационарные состояния и устойчивость.



24

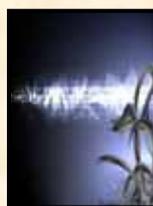


§ 3. Осцилляторы и аттракторы

1. Общая характеристика осцилляторов.
2. Явления, порождённые нелинейностью.
3. Нелинейные маятники.



33



§ 4. Коллективные движения

1. Волны.
2. Колебания гитарной струны и звук.
3. Поверхностные волны.



41



§ 5. Взаимодействие нелинейных элементов

1. Нелинейные эффекты.
2. Нелинейные волны: кноидальные и уединённые (солитоны).
3. Стохастические движения вещества.



50



§ 6. Вейвлет-анализ

1. Солитоноподобное преобразование.
2. Вейвлет-образы модельных сигналов.
3. Применение вейвлетного анализа.



59



§ 7. Катастрофы

1. Складка и равновесие.
2. Сборка и фазовые переходы.
3. Галопирование, флаттер и вихри.



68



§ 8. Теория вихрей

1. Возникновение и свойства вихря.
2. Сферические вихри Хилла и Хикса.
3. Спиральный солитон Хасимото.

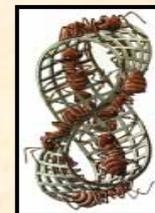


77



§ 9. Информация и динамика

1. Информация в классической механике.
2. Неопределённость квантовой динамики.
3. Квантовый компьютер и когерентность состояний.

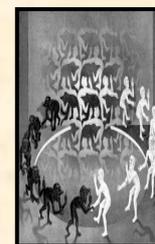


86



§ 10. Энтропия – мера хаоса

1. Силы и обобщённое уравнение энергии.
2. Адиабатические инварианты динамической системы.
3. Энтропия и перемешиваемость.



95



§ 11. Фракталы – геометрия природы

1. Самоподобие.
2. Фрактальные множества.
3. Различие и размерность Реньи.



104



§ 12. Перенормировки и клеточные автоматы

1. Степенные законы и скейлинг.
2. Перенормировки.
3. Клеточные автоматы.



114



§ 13. Синергетические системы

1. Ячейки Рэля-Бенара и модель Лоренца.
2. Брюсселятор (модель Пригожина-Лефевра).
3. Хищник-жертва (модель Лотки-Вольтерра).



120



§ 14. Необратимые процессы

1. Стационарное состояние.
2. Модель Онсагера.
3. Диссипативные структуры.



130



§ 15. Конкуренция и отбор

1. Химическое равновесие.
2. Элементы теории жизни.
3. Детерминизм, случайность и отбор.



141



§ 16. Самоорганизация биосистем

1. Формирование и устойчивость биоструктур.
2. Уровни организации живых организмов.
3. Фрактальное строение биосферы.



149

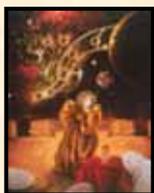


§ 17. Социум

1. Модели количественного роста населения.
2. Социально-экономические процессы.
3. Подготовка управленческих кадров.



158



§ 18. Компьютерный эксперимент

1. Копирование оригиналов.
2. Программное обеспечение.
3. Кибернетическая эволюция.



168

Список использованных источников

180

Толковый словарь

184

Собственноручно о себе

186



(Rodney Matthews)

При написании этой книги автор не преследовал цели полного и объёмного изложения тех результатов, которые были получены исследователями в областях нелинейной динамики и неравновесной термодинамики и нашли своё отражение в многочисленных учебниках и монографиях. Необходимо было обратить внимание физиков на *синергетические* идеи, которые

- позволяют с единой точки зрения анализировать поведение материи на её различных организационных уровнях;
- устанавливают соотношения между хаосом и упорядоченностью;
- указывают на спонтанную самоорганизацию в диссипативных системах;
- демонстрируют необходимость выработки нового подхода к исследованию дискретных и распределённых; детерминированных и стохастических объектов.

Основателями *синергетики* по праву считают И. Пригожина и Г. Хакена, чьи биографии приведены ниже.



ПРИГОЖИН Илья (Илья Романович) (25.I.1917 - 28.V.2003) – родился 25 января 1917 г. в Москве, в 1921 г. его семья эмигрировала в Литву, затем в Германию, с 1929 г. – проживал в Бельгии. Разносторонний мальчик получил там образование, занимался музыкой, интересовался историей и археологией, но в итоге – пошёл по стопам своего отца: он выбрал химию, увлёкся термодинамикой. Поступил в Открытый университет Брюсселя и уже там добился первых серьёзных результатов, Илья закончил университет в 1942 г. В 1943 г. стал бакалавром естественных наук. За диссертацию о значении времени и химических превращений в термодинамических системах был удостоен докторской степени (с 1947 г. – профессор физической химии). С 1953 г. член Королевской академии Бельгии, затем её президент (с 1960 г.). В 1961 г. Пригожин женился на Марине Прокопович. У них родились два сына. С 1962 г. – директор Международного института физики и химии (г. Сольве, Бельгия), с 1967 г. – Центра статистической механики и термодинамики Техасского университета (США). За работы по термодинамике необратимых процессов и их использование в химии и биологии удостоен в 1977 г. Нобелевской премии по химии, получил также премию Э. Сольве (1965 г.), золотую медаль С. Аррениуса (1969 г.), медаль Б. Румфорда (1976 г.) и др. Был членом ряда зарубежных академий наук и научных обществ, в частности, иностранный член АН СССР (1982 г.). Основные научные интересы лежали в области неравновесной термодинамики и физической химии. Внёс существенный вклад в феноменологическую теорию необратимых процессов и термодинамику нелинейных необратимых процессов.

Илья Пригожин ушёл из жизни 28 мая 2003 г.



ХАКЕН Герман (Hermann Haken, род. 12 июля 1927 г.) – немецкий физик-теоретик, основатель синергетики. Изучал физику и математику в университетах Галле (1946–1948 г.г.) и Эрлангена (1948–1950 г.г.), получив степени доктора философии и доктора естественных наук. С 1960 г. является профессором теоретической физики университета Штутгарта. До ноября 1997 г. был директором Института теоретической физики и синергетики университета Штутгарта. С декабря 1997 г. является почётным профессором и возглавляет Центр синергетики в этом институте, а также ведёт исследования в Центре по изучению сложных систем в университете Флориды (Бока Рэтон, США). Он является издателем шпрингеровской серии книг по синергетике, в рамках которой к настоящему времени опубликовано уже 69 томов.



§ 1. Основные понятия синергетики

“Неизбежна критика классических доказательств, однако это отнюдь не означает принижения великолепных достижений мастеров науки, чья интуиция вывела нас на правильный путь – нужно только отвести в сторону мусор, который не отваживалась удалить чересчур почитательная традиционность.”

М. Борн

“В мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.”

Л. Эйлер

1. Синергетика как новое мировоззрение

Теория неравновесных, хаотических состояний с рассеиванием энергии, вещества и энтропии (информации) возникла в результате развития следующих научных направлений:

1. Исследование *необратимых процессов* с помощью методов статистической физики и линейной теории Онсагера.
2. Построение *теории открытых систем*, которые находятся в стационарном состоянии и сохраняют устойчивость в определенном спектре внешних воздействий.
3. Выяснение условий *возникновения из хаоса самоорганизующихся, упорядочивающихся структур*.
4. Качественный и количественный анализ *нелинейных динамических систем* (бифуркации, фракталы, катастрофы, солитоны и др.).

Объединение этих направлений привело к созданию совершенно нового общего подхода к устройству природы и общества. Новая наука имеет разные названия: *теория о самоорганизации, синергетика, теория открытых систем, теория диссипативных структур, термодинамика необратимых процессов, теория нелинейных динамических систем*.

Синергетика – это наука об общих закономерностях возникновения, существования, устойчивости и эволюции самоорганизующихся диссипативных структур, возникающих в разных по природе открытых системах при протекании необратимых процессов (рис.1.1).

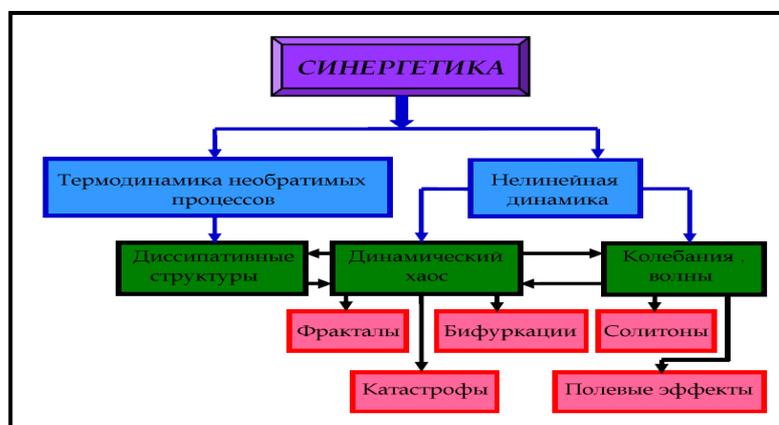


Рис. 1.1. Составные части синергетики.

Синергетика состоит из исследований в области термодинамики неравновесных процессов, нелинейной динамики, хаоса, фракталов, катастроф, бифуркаций,

волн, солитонов, полевых и других эффектов; она использует математические методы, которые отображены на рис. 1.2.

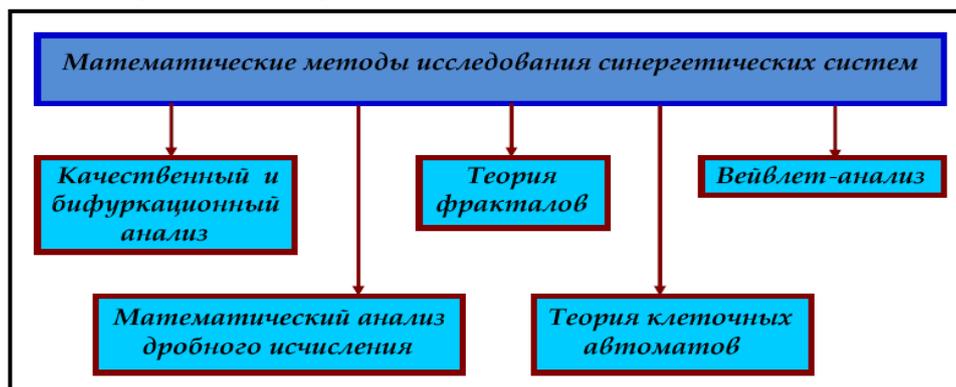


Рис. 1.2. Моделирование стохастических явлений и процессов.

Объектом исследования в синергетике является диссипативная система, которая обменивается с окружающей средой веществом, энергией и энтропией (информацией) (рис. 1.3).

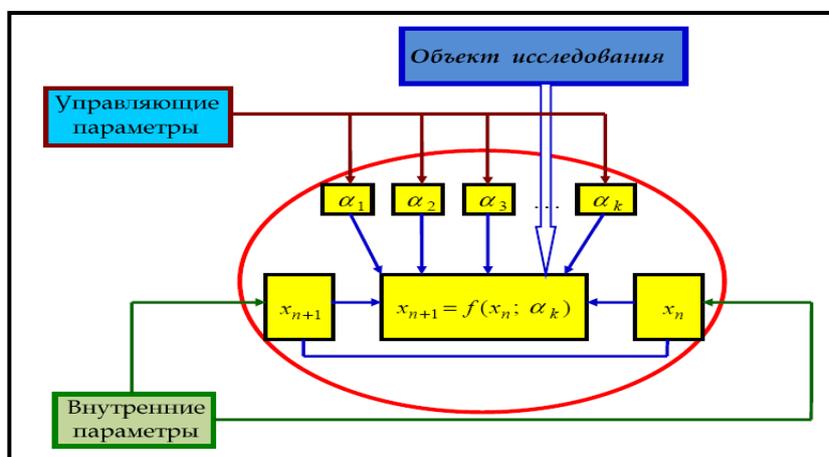


Рис. 1.3. Объект исследования и его параметры.

Диссипативная система может быть многокомпонентной и многопараметрической. Под компонентами системы могут пониматься атомы (молекулы) того или иного вещества, субъекты рынка, члены коллектива и другие объекты. Параметры системы разделяют на *внутренние*, между которыми устанавливается детерминированная связь, и *управляющие* (или *самоуправляющие*, см. рисунок Эшера на рис. 1.4), которые приводят систему к самоорганизации при их определённых значениях. В качестве примера рассмотрим *локализацию Андерсена*. Перемещение электрона с достаточно большой энергией в пространственно-периодическом потенциале приводит к тому, что он воспринимается как волна. Роль частоты играет его квазиэнергия, а роль волнового вектора – квазиимпульс. В случае же хаотического потенциала электрон локализуется. Это свидетельствует о том, что разброс параметров на одном уровне восприятия приводит к упорядоченности на другом. Диффузия отображает хаотичность перераспределения частиц по объёму системы, но в химической кинетике этот процесс является определяющим в формировании периодических в пространстве и времени структур. Следовательно, синергетический подход приводит к следующему выводу: хаос и порядок – близнецы-братья, так как возникновение хаоса на одном уровне материального мира ведёт к появлению

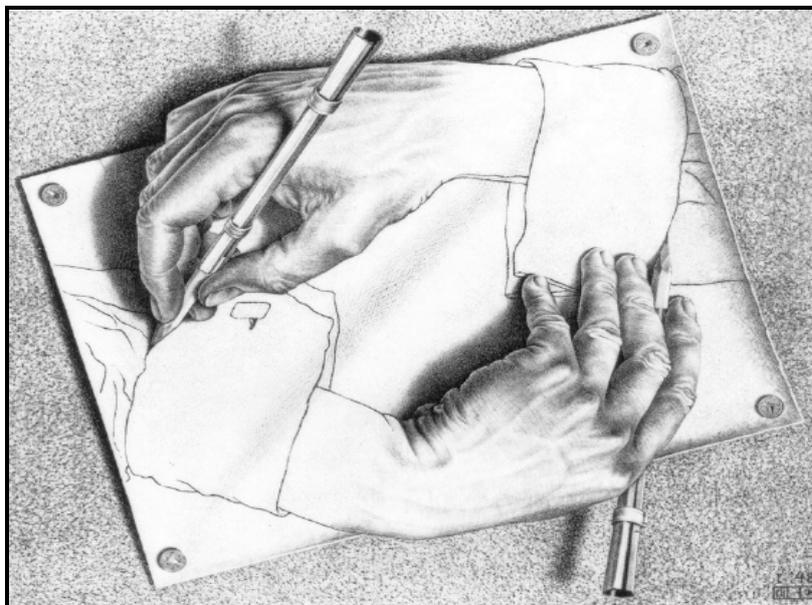


Рис. 1.4. Саморисующие руки М. Эшера (Escher, Drawing hands).

параметров порядка на другом (например, гипотезы Гильдебранда о “газоподобности” и Френкеля-Дебая о “квазикристалличности” вещества – физический аналог философского закона единства и борьбы противоположностей). Иными словами: если какие-либо параметры диссипативной системы ведут себя случайным образом, то на определённых стадиях того или иного процесса и определённых характерных временах его протекания это может привести к возникновению новых образований. К ним могут быть приложимы такие понятия как структура, параметр порядка, фазовый переход, частица-волна и др. Это структуры нового уровня, поэтому их можно называть *сверхструктурами*. Для описания поведения сверхструктур можно предложить некоторое усреднённое макродинамическое описание, реализуемое в моделях *нелинейной динамики*. При моделировании сверхструктур вводят ряд случайных величин, подчиняющихся вероятностным законам (*детерминизм-стохастика*). При исследовании *жёсткой турбулентности (триггерной перемежаемости)* на фоне хаотического поведения жидкого потока возникают пространственно-локализованные пики с гигантской амплитудой, которые не могут быть смоделированы без введения хаотических переменных. Основы исследования диссипативных систем в термодинамике неравновесных процессов были заложены И.Р. Пригожиным, при этом он называл новое направление в физике *наукой о сложном (наукой о самоорганизации диссипативных структур)*. Методы, которые были использованы И.Р. Пригожиным, были успешно применены немецким физиком Г. Хакеном при изучении явлений в квантовых генераторах. Именно он предложил современное название “*синергетика*” для обозначения *науки о неожиданной самоорганизации диссипативных систем при протекании хаотических процессов*. Г. Хакен так объясняет свой выбор: “Я выбрал тогда слово “*синергетика*”, потому что за многими дисциплинами в науке были закреплены греческие термины. Я искал такое слово, которое выражало бы совместную деятельность, общую энергию что-то сделать... Я преследовал цель привести в движение новую область науки... Уже тогда я видел, что существует поразительное сходство между совершенно различными явлениями, например, между излучением лазера и социологическими процессами или эволюцией, что должно быть только вершиной

айсберга. Правда, в то время я не подозревал, что эта область может оказать влияние на столь многие и отдалённые области исследования, как, например, психология и философия”.

До появления *синергетики* классическая физика занималась изучением поведения *изолированных, закрытых и открытых* систем, состояние которых находилось в малой окрестности положения равновесия. В этой области законы физики описываются линейными зависимостями между внутренними параметрами системы (например, *связь между потоком и термодинамическими силами в теории Онсагера; закон Ома* и другие) и при увеличении внешнего воздействия происходит только количественное изменение внутренних параметров. Это говорит о том, что количественные изменения не приводят к качественной перестройке объекта. Диапазон применения линейных теорий достаточно широк, он включает практически все разделы физики. Однако в настоящее время зачастую приходится иметь дело с явлениями и процессами, которые связаны с возникновением качественно нового поведения диссипативной системы. В этой связи были разработаны нелинейные модели, которые позволяют не только выявить общие закономерности хаотической самоорганизации, но и охватить более широкий круг проблем: от физических до социально-экономических.

Решение фундаментальных научных проблем (например, *общая теория Вселенной*) и развитие новых технологических приёмов (например, *нанотехнологии*) приводит к необходимости изучения явлений и процессов, которые лежат в различных областях научного знания (например, *физики, химии, биологических организмов, социально-экономических систем и кибернетических структур*). Следовательно, современная наука стремится к объединению всех своих ветвей для всестороннего исследования неожиданно возникающих из хаоса структур, т.е. занимается проблематикой, которая лежит на разных уровнях научного творчества.

Другой отличительной стороной реального мира является изменение закономерностей, моделей и способов описания при переходе с одного уровня организации материи к другому. Примерами могут служить переходы от теории элементарных частиц к ядерной физике, от неё к атомным процессам, далее к возникновению химических соединений, биологических видов и социальных сообществ. От того насколько нелинейные модели смогут продвинуть наше понимание в вопросе возникновения, самоорганизации и эволюции диссипативных систем; выявления межуровневых связей и влияния уровней друг на друга зависит будущее синергетики. Это связано с тем, что реально существующие в природе объекты характеризуются устойчивостью в широком спектре внешних воздействий, самообновляемостью, способностью эволюционировать с течением времени, сосуществованием казалось бы антагонистических частей. Все перечисленные признаки отличают созданное природой от вещей, созданных человеком. Для последних присущи резкие ухудшения функционирования даже при малых изменениях или ошибочных значениях управляющих параметров. Таким образом, синергетика побуждает учёных к заимствованию природного опыта и использованию его для реализации общечеловеческих задач по решению глобальных энергетических, экологических и других ресурсосберегающих проблем. Поэтому недооценка значения выявляемых синергетикой закономерностей саморазвития систем может привести к катастрофи-

ческим последствиям для всей человеческой цивилизации.

Неоднозначность восприятия синергетики учёными связана как с появлением новой *парадигмы* естествознания (*наука о сложном, о самоорганизации*), так и с использованием в синергетике хорошо разработанных методов нелинейной динамики и теории нелинейных колебаний. Синергетика не возникла на стыке двух (или более) наук, когда одна даёт предмет, а другая – методы исследования. Она применяет методы и приёмы исследования, которые одинаково приложимы к различным системам вне их природного уровня. Отличие синергетики от других наук состоит в том, что она изучает не статику, не равновесное или стационарное состояния системы (как, например, *термодинамика* и *теория информации*), а её поведение вдали от таких состояний. Она изучает не алгоритмы и механические атрибуты, с помощью которых можно поддерживать правильное функционирование системы (как, например, *кибернетика*), а устанавливает принципы самоорганизации и эволюционных преобразований, приводящих к длительному, безотказному существованию системы. Синергетика учитывает флуктуации в точках ветвления (*бифуркации*) в отличие от *теории динамических систем*. В целом, синергетика занимается изучением *стохастических (вероятностных)* систем с зависящими от времени управляющими параметрами. Изменяя управляющие параметры, можно менять поведение системы неожиданным образом, причём предугадать как поведёт себя система до проведения эксперимента невозможно, что связано с неполнотой *информации* о составных частях диссипативной системы. Неопределённость и непредсказуемость в поведении составляющих диссипативной системы, наличие *резонансных* явлений приводит к необходимости введения понятия *информации (энтропии)*. Недостаток информации приводит к отказу от индивидуального описания “частиц”, переходу к разным усреднениям при исследовании свойств системы в целом (например, *ансамбли подсистем, временное усреднение* и т.п.), неизбежным квантовым флуктуациям и зависимости эволюции некоторых систем от начальных или граничных условий.

Стохастичность диссипативной системы связана также с возможной потерей устойчивости при некоторых значениях управляющих факторов, одни из которых меняются быстрее других. Медленные параметры состояния диссипативной системы принято называть *параметрами порядка*. Быстрые переменные состояния системы обычно выражаются через параметры порядка, в результате чего число независимых переменных, необходимых для описания состояния системы, значительно снижается. Зависимость быстрых переменных от параметров порядка отображает синергетический *принцип подчинённости*. Проиллюстрируем принцип подчинённости на примере оврага (рис. 1.5).

Очевидно, что минимум функции, описывающей овраг, будет соответствовать самой низкой точке на поверхности земли, расположенной на дне оврага. Все точки, которые лежат на осевой линии оврага, определяются медленными переменными (*параметрами порядка*). Двигаясь вдоль осевой линии можно найти самую низкую точку оврага, а следовательно, и устойчивое состояние системы. Если двигаться вдоль линии, которая проходит по стенкам оврага, то можно найти локальный минимум, соответствующий определённому значению параметра порядка. Если параметр порядка определяет локально устойчивое состояние диссипативной

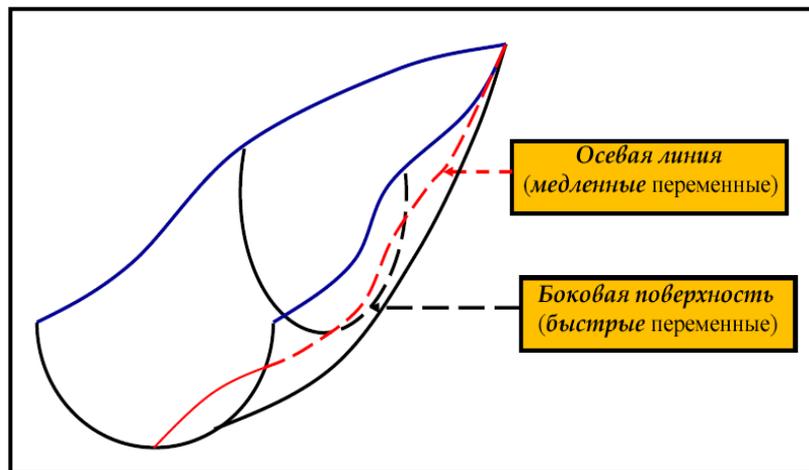


Рис. 1.5. Овраг: медленные и быстрые переменные.

системы (рис. 1.6), то возникает самоорганизующаяся структура.

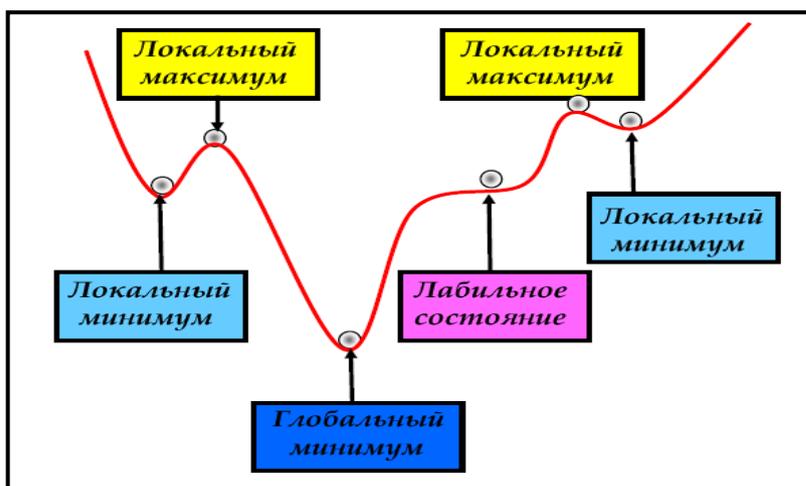


Рис. 1.6. Различные состояния диссипативной системы.

Эта структура существенно зависит от значения параметра порядка. Если такой управляющий параметр выходит за границы локально устойчивого состояния, то система переходит в новое состояние. Отметим, что с течением времени возврат системы в исходное состояние является необязательным. Особенно ярко эта необязательность возврата в предыдущее положение наблюдается вблизи точек ветвления (точек *бифуркации*). В окрестности точки бифуркации достаточно малое внешнее воздействие может привести к значительным последствиям, которые невозможно предвидеть: возникают корреляции в состояниях месторасположения и движения составных частей, которые наблюдаются на макроскопических расстояниях в течение продолжительного времени. *Кооперативное* поведение компонентов приводит к возникновению из хаоса упорядоченных областей, которые самоорганизуются и эволюционируют. Возникающая нелинейность в поведении системы приводит к появлению обратных связей и связанных с ними возможностей управления свойствами и характеристиками системы.

Хаотичность и нелинейность динамической модели порождают стохастические алгоритмы управления в *многомерном фазовом пространстве*. Пример с оврагом показывает, что в этом пространстве существуют малоразмерные подпространства, которые были названы *руслами*. Русла используются для построения простых и эффективных теорий, позволяющих с помощью небольшого числа пере-

менных описывать наблюдаемые явления и протекающие процессы, рассчитывать возможные варианты, прогнозировать будущее поведение системы. В окрестности конечных точек русла, определение которых само по себе является важной теоретической задачей, происходит быстрое нарастание числа переменных для описания поведения системы. Область детерминированного прогноза значительно сужается, растёт вероятность резких изменений как во внутреннем устройстве системы (вплоть до её распада), так и её свойств. Возникающие закономерности получили название *джокеров (области стохастичности)*. Джокер характеризует недостаток информации и возрастание энтропии, при этом он может быть связан с точкой бифуркации, где малые случайные шумы вызывают резкие изменения в системе. В областях джокеров приходится прибегать к следующим мерам:

- *использовать вероятностные вычисления;*
- *статистические экспериментальные данные;*
- *отыскивать асимптотики при стремлении параметров порядка к определённым значениям;*
- *учитывать влияние других уровней организации материального мира.*

Переход от русла к области стохастичности может приводить к манипуляциям данными и созданию лженаучных теоретических построений (например, *эфирный ветер, теплород*). В этом случае возможно появление казалось бы псевдонаучных положений, которые могут в дальнейшем стать основными понятиями той или иной науки (например, *кибернетика* или *генетика*). Способами избавления от них являются следующие подходы:

- отыскание нового русла, где джокеры преобразуются в параметры порядка (*осознание нового уровня организации материи*);
- накопление новых экспериментальных данных и построение на их основе новой теоретической модели (*формирование новой научной парадигмы*). Эта модель должна не только описывать результаты экспериментов, включать в себя признанные теоретические построения, но и предсказывать появление новых фактов.

При создании новых моделей большую роль играют “*здоровый смысл*” и “*интуиция*”. “Здоровый смысл” консервативен по самой своей сути, использует логику и накопленный опыт, остаётся в рамках старых представлений и пытается путём их ревизии создать новое знание. “Интуиция” базируется на случайном озарении при использовании подсознательного и надсознательного осмысления поставленной проблемы и большого опыта работы с различными научными знаниями. Таким образом, системы, созданные природой, интуитивно (*хаотически*) отыскивают русла и детерминированно (принцип: *причина-следствие*) ищут выход из областей джокеров.

Подобное поведение природных систем, по-видимому, связано с принципом *самосохранения* (например, *сила действия равна силе противодействия, принцип Ле Шателье-Брауна*). Обеспечение самосохранения должно приводить к узости областей джокеров между руслами. Следовательно, джокеры должны описываться “компактными” распределениями, чтобы их выход за границы этих областей был бы ограничен малым временем существования вне собственной области. Однако число таких систем мало, чаще в практических условиях наблюдаются системы с

распределениями, которые имеют “длинные хвосты”, которые убывают по степенному закону, т.е. очень медленно (*области масштабных джокеров*). Поэтому наибольшую опасность для существования системы представляют как редкие, так и наиболее часто происходящие события. Они могут привести к развитию резонансных процессов и, как следствие, к разрушению системы на данном уровне организации материи и её самоорганизации на другом уровне. Если “компактные” распределения могут быть охарактеризованы малым количеством числовых параметров, то “хвостатые” распределения должны описываться с помощью размеров областей редких и наиболее часто происходящих событий. Эти области имеют другие статистические параметры, которые называются *масштабами (scales)* и характеризуют *области масштабных джокеров*.

2. Понятие неустойчивости

Если диссипативная система располагается в локальном или глобальном минимуме, то при малых внешних воздействиях она находится в окрестности устойчивого состояния (рис. 1.6). С нарастанием амплитуды внешних воздействий система может перейти в новое и возможно неустойчивое состояние (локальный максимум или *лабильное* состояние на рис. 1.6). В природных системах всегда возникают случайные процессы, которые обусловлены изменениями во внешней среде. Эти изменения могут перевести систему в неустойчивые состояния, которые различаются по виду и по своей природе. Зачастую возникающие неустойчивости могут способствовать переходу открытой системы в состояние с качественно новыми характеристиками (например, *фазовый переход газ-жидкость; возникновение областей упорядоченности при хаотическом перемещении частиц*).

В качестве примера возникновения неустойчивости рассмотрим переливание воды из одного сосуда в другой с помощью равноплечного сифона (рис. 1.7).

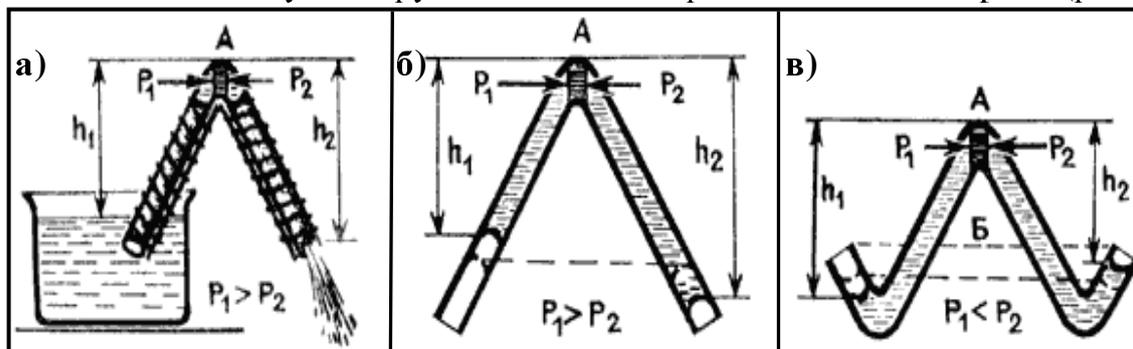


Рис. 1.7. Опыт с равноплечным сифоном: а) работа сифона; б) возникновение неустойчивости; в) W-образный сифон.

Для проведения эксперимента в домашних условиях достаточно изготовить сифон из любой гибкой трубки, например, полихлорвиниловой. Для удержания формы сифона следует обмотать гибкую трубку медной проволокой определённой толщины. Согнув трубку в виде греческой буквы Λ и опустив один конец в сосуд с водой, создайте разрежение в другом конце трубки, удалив с помощью отсоса воздух из этого плеча сифона. После выполненных действий вода сама потечёт через сифон. Для объяснения этого явления изучим поведение системы в окрестности вершины сифона (объём A). В левом плече сифона давление равно $P_1 < P_{атм.}$, ко-

торое меньше атмосферного давления $P_{атм.}$ на давление водяного столба высотой h_1 . Аналогично, в правом плече давление $P_2 < P_{атм.}$ на величину давления, создаваемого столбом воды высотой h_2 (рис. 1.7а). В силу того, что $h_2 > h_1$, то давление $P_1 > P_2$ (*градиент давления*). Именно это различие давлений и заставляет воду подниматься вверх по сифону и переливаться через край сосуда. Если зажать правое плечо сифона пальцем и поднять вертикально вверх, например, на высоту $h_1 / 2$, то вода будет удерживаться в сифоне до тех пор, пока будет закрыто правое плечо. Если открыть правое плечо, то вода вытечет из сифона (рис. 1.7б). Следовательно, такое состояние системы является неустойчивым и существенно зависит от внешних условий (закрыто или открыто правое плечо сифона). Неустойчивость возникает из-за малых изменений давления справа и слева от объёма A , так как после подъёма Λ -образного сифона из воды давление по обе стороны от объёма A одинаково. Снижение давления с одной из сторон объёма A приводит к возникновению разности давлений, которое и вызывает течение жидкости. Чем больше вытекает воды, тем быстрее возрастает разность давлений и сифон освобождается от жидкости со всё возрастающей скоростью. При загибании плеч сифона возникает W -образная структура, которая стабилизирует состояние системы (рис. 1.7в). При случайных перемещениях воды давление в другом плече сифона нарастает и возникающая разность давлений возвращает воду в исходное положение. Рассмотренный эксперимент показывает, что изначально устойчивое состояние имеет свои пределы: при достижении внешними изменениями определённых величин происходит переход системы в новое состояние. Если же система изменяет свою структуру, то она может вновь обрести устойчивое положение. Для выведения из положения равновесия системы надо вновь изменить внешние условия. Например, если подуть в левое плечо W -образного сифона (вам потребуется приложить некоторое усилие для преодоления инерционности системы) и заставить воду подняться до среза правого плеча B , то устойчивость снова исчезнет: вода полностью выльется из сифона. Таким образом, даже такой простой эксперимент демонстрирует, что подстройка системы под изменяющиеся внешние условия имеет свои ограничения. Кроме того, достижение нового устойчивого состояния возможно за счёт изменения структуры системы, которое имеет иные ограничения своей устойчивости.

Другой эксперимент, который показывает возникновение новой структуры при достижении системой неустойчивого положения, можно проделать с одинаково намагниченными иголками. Воткнув иголки в кусочки пробок (пробки следует покрыть парафином, чтобы они не впитывали воду, т.е. сделать из пробок поплавки), поместите их на поверхность воды (рис. 1.8).

Из школьного курса физики известно, что одноимённые магнитные полюса отталкиваются (*градиент напряжённости магнитного поля*). Поэтому одинаково ориентированные, намагниченные иголки заставят поплавки двигаться в разные стороны, заставляя их удалиться друг от друга на максимально возможное расстояние (к стенкам стакана). При данных условиях эксперимента разбегание поплавков приводит к понижению энергии системы магнитных иголок. В зависимости от

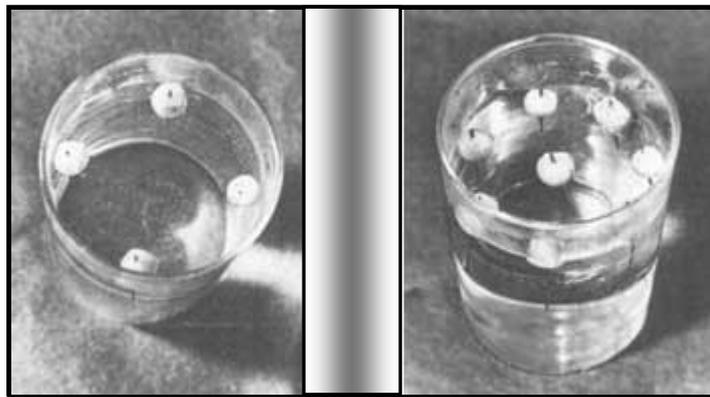


Рис. 1.8. *Распределение магнитных поплавок.*

количества поплавков исследуемая магнитная система принимает разные геометрические, правильные фигуры: три иголки – поплавки образуют равносторонний треугольник; четыре иголки – квадрат; шесть иголок – правильный шестиугольник. При увеличении числа иголок возникает несколько устойчивых расположений поплавков, в частности, при некотором числе иголок один из поплавков займёт положение в центре водной поверхности (*самостоятельно проведите эксперимент и определите минимальное количество магнитных поплавков, при котором наблюдается указанное распределение*).

Возникновение упорядоченности при достижении системой неустойчивого положения можно продемонстрировать и в эксперименте с лампадой (керосиновая лампа, рис. 1.9) или зажжённой свечой накрытой стеклянной частью лампады.



Рис. 1.9. *Лампа-насос.*

Разделим горловину стеклянной части лампады T -образной, картонной перегородкой. По истечении некоторого времени картон нагреется и начнёт тлеть, сосуд наполнится дымом. Течение дыма покажет, что с одной стороны перегородки происходит втягивание свежего воздуха, а дым выходит из сосуда с другой стороны перегородки. После извлечения перегородки упорядоченное движение воздушных потоков исчезает, движение воздуха в горловине лампады становится хаотичным. При возвращении перегородки на место вновь наблюдается разделение потоков воздуха, при этом дым может пойти с другой стороны перегородки, нежели он двигался вначале. Это говорит о неопределённости, присущей всем хаотическим динамическим системам: до проведения эксперимента невозможно предугадать случайное перераспределение потоков внутри системы. С другой стороны, введение перегородки вносит дополнительную информацию в систему, которая вынуждает потоки двигаться упорядоченным образом.

Ещё один синергетический эксперимент с возникновением упорядоченных структур в диссипативной системе можно провести в домашних условиях на кухне. Налейте на сковороду машинное масло и сверху посыпьте сухой серебрянной краской (можно также использовать тальк или мучной клейстер, рис. 1.10). При нагревании сковороды возникает разность температуры между дном сковороды и поверхностью масла (*градиент температуры*). До достижения критической раз-

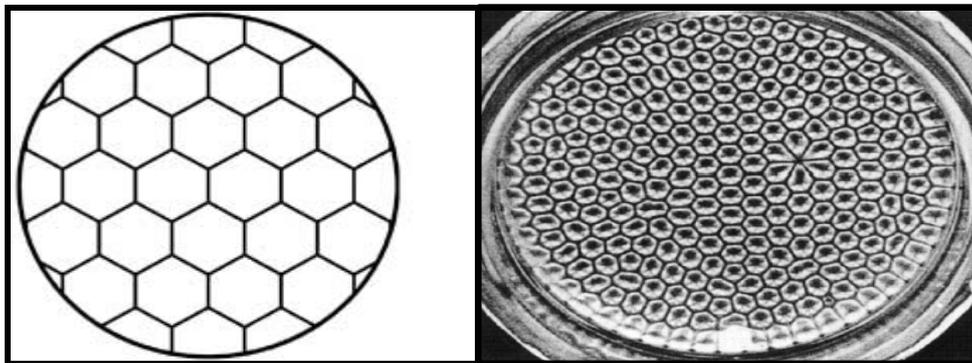


Рис. 1.10. Ячейки Бенара, возникающие в подогреваемом слое жидкости.

ности температур жидкость неподвижна. При критической разности температур вся поверхность жидкости разбивается на правильные шестигранники (ячейки Бенара, см. § 13), внутри которых жидкость поднимается к поверхности, а по граням шестигранников остывшая жидкость опускается на дно. Размер ячеек Бенара практически не зависит от формы и размеров сковороды, однако их форма определяется граничными поверхностями жидкого слоя. Ячейки Бенара возникают при высыхании озёр (градиент концентрации соли, рис. 1.11), при застывании лавы и в других природных явлениях.



Рис. 1.11. Гексагональные солевые структуры, возникающие при высыхании озера.

Более сложные и необычные структуры возникают в химических и биологических системах (рис. 1.12, см. также §§ 15 и 16).

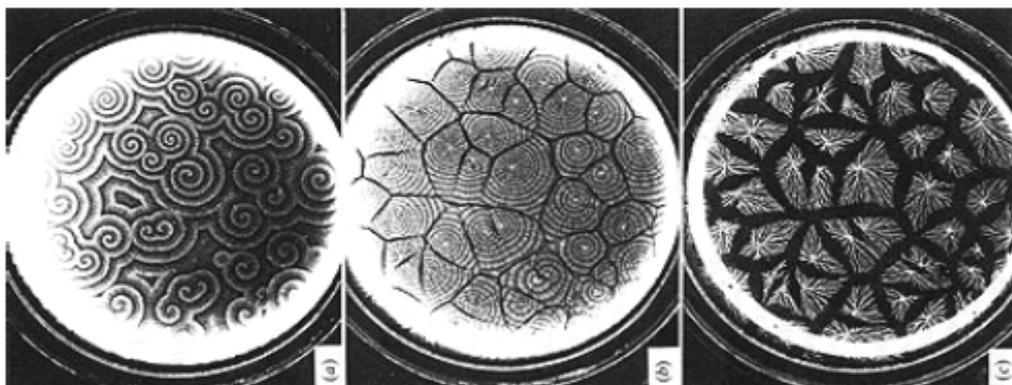


Рис. 1.12. Последовательность структурирования популяции амёб *Dictyostelium*.

Рассмотренные эксперименты показывают, что возникновение неустойчивости обусловлено достижением теми или иными потоками критических значений (

кинетические переходы). В хаотических системах при этом возможно появление упорядоченных областей или происходит изменение внутреннего устройства.

3. Неравновесные системы и нелинейная динамика

Изолированные и закрытые термодинамические системы с течением времени переходят в равновесное состояние. Оно характеризуется постоянством интенсивных величин (давления P , температуры T и химических потенциалов компонентов μ_i ($i=1 \div l$, l – число компонентов в системе)), изменения которых вызывает возникновение потоков интенсивных величин (внутренней энергии U , объема V и числа частиц N_i). В изолированных системах число частиц неизменно, поэтому происходит сохранение всех интенсивных параметров системы. Возникающие термодинамические силы и соответствующие им потоки стремятся вернуть систему в положение равновесия. Закрытая система обменивается с внешней средой энергией, однако протекающие процессы приводят к уравниванию энергетических потоков, которые исходят из системы и возвращаются в неё. Закрытая система переходит в стационарное равновесное состояние. В этом состоянии частицы совершают броуновские движения, которые определяют тепловой хаос. Снижение температуры до критической T_c приводит к выделению подсистемы с частичной упорядоченностью (*фазовый переход*), которая характеризуется возникновением *ближнего порядка* в некоторых областях системы. Эти подсистемы стремятся к объединению, что приводит к выделению новой *фазы*. Новое состояние системы отличается от предыдущего состояния как по виду, так и по физико-химическим свойствам. Дальнейшее снижение температуры приводит к *появлению дальнего порядка* и скоррелированному поведению частиц (*эффект когерентности*). Когерентность поведения связана с проявлением пространственно-временной или периодической структуры системы, которая присуща материи в любом агрегатном состоянии, но нивелируется тепловыми и другими процессами. Кооперативные явления объясняются возникновением дальнедействующих сил. Так в реакции Белоусова-Жаботинского они проявляются в виде колебаний концентраций реагентов, несмотря на то, что радиус взаимодействия между молекулами в миллиард раз меньше линейных размеров самой системы. Возникновение порядка в изначально хаотической среде является проявлением неравновесности, неустойчивости и нелинейности динамического поведения исследуемой системы.

Ещё более наглядно эти эффекты проявляются в открытых системах, которые обмениваются с термостатом не только энергией, но и частицами. Чем дальше такая система уходит от равновесия, тем больше гармонических мод проявляется в её поведении. Внешние воздействия способствуют усилению одних и подавлению других гармоник. Как пишут Е.Н. Князева и С.П. Курдюмов: “поведение любой системы может быть представлено бесконечным рядом гармоник (мод) с временным коэффициентом перед каждой. Если в модели линейной системы различные виды гармонических колебаний (гармоник, или мод) независимы, то в модели нелинейной – устанавливается вполне определённая связь между ними. Причём характер этой связи всецело определяется нелинейностью. Дело может обстоять таким образом, что один вид колебаний (одна гармоника) энергетически поддержи-

вается в силу открытости системы, т.е. туда накачивается энергия. В таком случае поступающая энергия перераспределяется – в силу нелинейности – не по всему спектру колебаний (мод), а сугубо избирательно. То есть в нелинейной среде могут поддерживаться, подпитываться энергией лишь определённые виды колебаний, определённые гармоники.” Это приводит к обмену информацией (энтропией S) с окружающей средой. Возникновение порядка в таких системах связано с возрастанием энтропии (*экстремальный принцип производства энтропии* И. Пригожина). В связи с этим такой хаос в открытой системе принято называть *детерминированным хаосом* (*динамическим хаосом*, рис. 1.13).

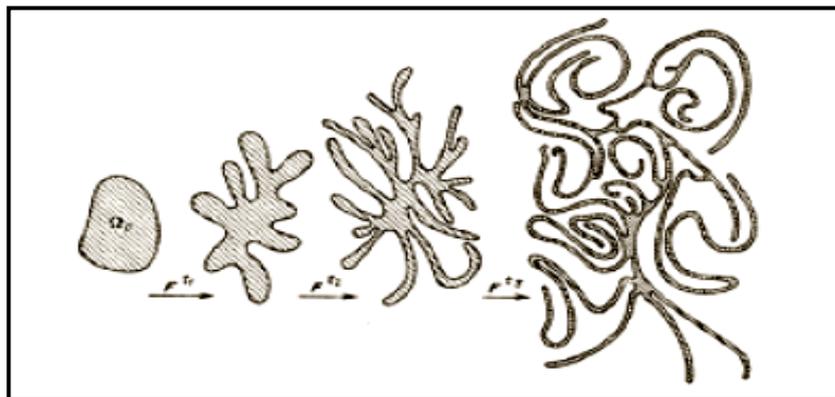


Рис. 1.13. Эволюция в сторону динамического хаоса (Корсин (1959)).

Разупорядоченность, неустойчивость и нелинейность динамического портрета системы вынуждает её к постоянному поиску в пространстве своих состояний устойчивого положения (*принцип поиска энергетического и других минимумов*), что приводит к созданию и накоплению информации. Открытая система выступает в роли сепаратора целой последовательности равновероятных состояний, большинство из которых она отсеивает из-за неустойчивости тех или иных своих параметров. Такая система, изменяя свою структуру, ищет новое *русло с медленно меняющимися* характеристиками, которые совместимы с динамикой изменений в самой системе (*принцип совместимости с внешними условиями существования*). Борьба двух противоположных процессов: поглощение и отток энергии, частиц и информации приводит к возникновению *диссипативных структур*. Избирательность или чувствительность системы по отношению к отдельным гармоникам воздействия внешнего мира связана с наличием у системы *собственных частот* колебаний. Например, электроны на уровнях Ландау в однородном магнитном поле реагируют на квантовую электромагнитную волну только той частоты, которая соответствует переходу электрона с одного энергетического уровня на другой. В первую очередь, этот процесс связан с наличием диссипации (рассеивания) энергии, частиц и информации (энтропии): происходит подавление тех гармоник (колебаний), которые не соответствуют собственным частотам колебаний. Однако внешние воздействия большой амплитуды и частоты могут привести к разрушению спектра собственных частот, что ведёт к переходу системы на новый уровень сопротивления внешней агрессии. Таким образом, возникновение возрастающего хаоса в системе приводит к её устремлению к новому устойчивому состоянию, которое имеет ограниченное число *собственных мод* (*принцип избирательности*). Малые внешние послы с собственной частотой системы могут вызвать значите-

льные изменения внутренних параметров (явление *резонанса*, рис. 1.14), а широкополостные по частоте воздействия – лишь к движениям вблизи устойчивого состояния.

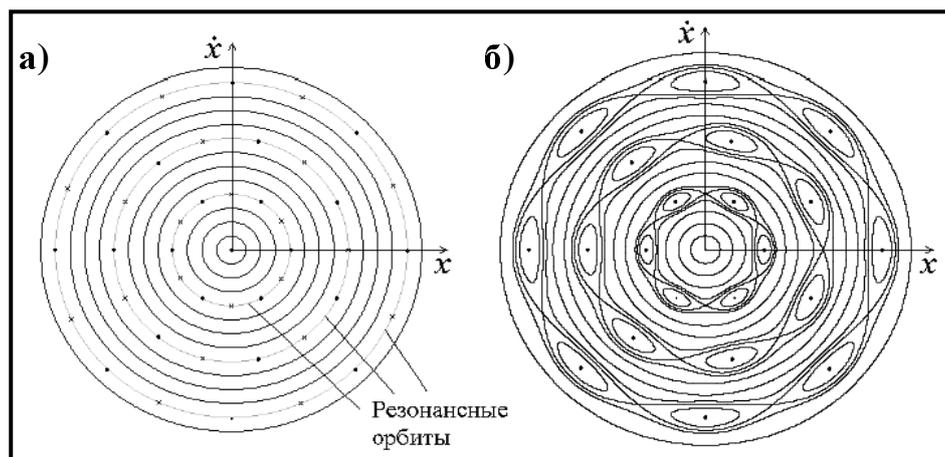


Рис. 1.14. Резонансные орбиты нелинейного маятника:

- а) при бесконечно малой амплитуде периодического внешнего воздействия;
 б) при конечной амплитуде.

Наличие *обратных связей* (положительных или отрицательных) между системой и внешней средой порождает возникновение хаоса, нестабильности и нелинейности в динамической картине объекта исследования. Например, в автокаталитических реакциях *катализатор* (*ингибитор*) не только ускоряет (замедляет) скорость протекания реакции, но и увеличивает своё содержание в системе за счёт оттока продуктов реакции. Протекание экзотермических (эндотермических) реакций с выделением (поглощением) тепла приводит к оттоку (притоку) тепла извне, что вызывает торможение или ускорение химической реакции. Следовательно, обратные связи формируют термодинамические потоки и силы, которые вынуждают систему искать новое устойчивое равновесие.

Известно, что в равновесии параметры системы принимают некоторые усреднённые тем или иным образом значения. Однако исследование этих параметров на микроскопическом уровне покажет их спонтанные отклонения от этих значений. В этом случае говорят о появлении *флуктуаций* тех или иных величин, т.е. наличие флуктуаций свидетельствует о постоянной самопроверке системой своего состояния (*принцип самоконтроля*). Вероятностный характер возникновения флуктуаций лишь подчёркивает несомненный факт информационного взаимодействия объекта с внешним окружением, который основан на *методе проб и ошибок*. Отметим, что в равновесных системах флуктуации затухают, так как не имеют соответствующей подпитки извне. В неравновесных системах некоторые из флуктуаций начинают нарастать, что заставляет систему эволюционировать (*принцип развития*) в сторону нового динамического режима существования. Переход к этому режиму описывается уравнениями *нелинейной динамики*.

Уравнения нелинейной динамики могут иметь качественно различающиеся решения, отображающие множественность путей эволюции *диссипативной системы*. Для отображения поведения решений было введено понятие *фазового прост-ранства*, в котором положение системы отображается пространственно-времен-ными координатами и скоростями движения. Если в фазовом пространстве

изучаемого объекта присутствуют неподвижные точки и траектории, которые образуют *фазовый портрет* системы, то говорят о структуре фазового портрета (например, диссипативного осциллятора рис. 1.15). Отображением периодических движений является наличие в фазовом портрете *предельных циклов* (рис. 1.16), вокруг которых происходит скопление фазовых траекторий.

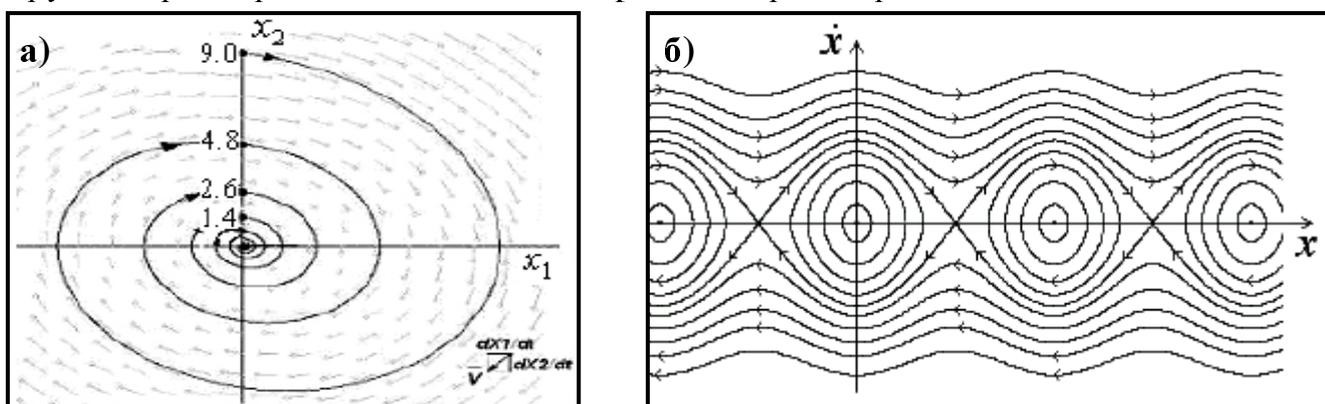


Рис. 1.15. Фазовые портреты диссипативного (а) и обычного (б) осцилляторов.

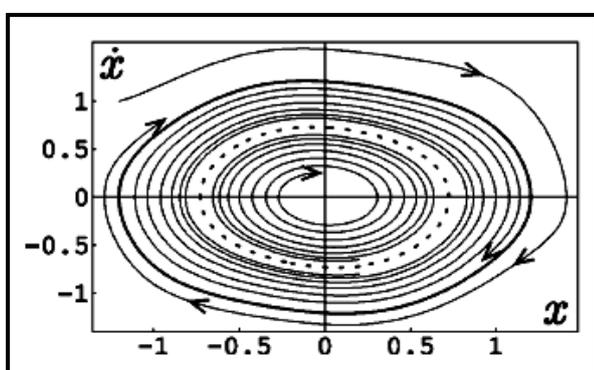


Рис. 1.16. Предельный цикл.

Устойчивые состояния изображаются точкой (*устойчивым фокусом*), к которой по спиралям сходятся фазовые траектории (рис. 1.15а). Неустойчивые состояния отображаются точкой, от которой по спиралям фазовые траектории расходятся. Предельные циклы и устойчивые фокусы Пуанкаре назвал *аттракторами*. При попадании системы в область притяжения аттрактора она обязательно эволюционирует в его сторону, а внутреннее строение системы начинает изменяться в соответствии со сценарием, заложенным в аттракторе. Другими словами, аттракторы являются эволюционными целями на соответствующем уровне мироздания, к которым стремятся все системы под воздействием изменяющихся во времени потоков энергии, количества вещества и информации. Аттракторы определяют относительно устойчивое состояние объекта, вынуждая геометрией фазового портрета смещение объекта в свою сторону. Поэтому их иногда называют “воронками” или “жерлами”. Если система находится в окрестности аттрактора, то она испытывает асимптотическую устойчивость: выходя из данного состояния под воздействием внешних сил, система через определённый промежуток времени вновь возвращается к аттрактору по другой фазовой траектории.

Помимо аттракторов в фазовом пространстве встречаются точки *бифуркации* (*ветвления*) и *странные аттракторы* (например, *странный аттрактор Лоренца*, рис. 1.17). Вблизи точки ветвления величины флуктуаций резко возрастают: система проводит среди них естественный отбор по их соответствию внешним условиям и своему внутреннему состоянию. Выбор того или иного направления эволюции определяется не по детерминированным канонам, а стечением обстоятельств. Перемещение по новому пути развития может привести как к более прогрессивным свойствам системы, так и развить в ней деградиционные процессы. Здесь чёт-

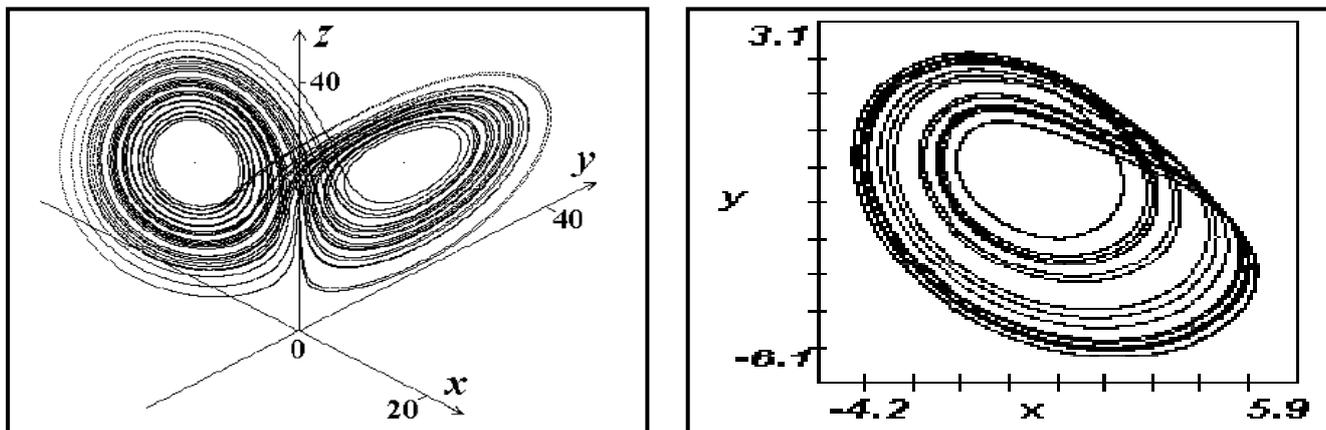


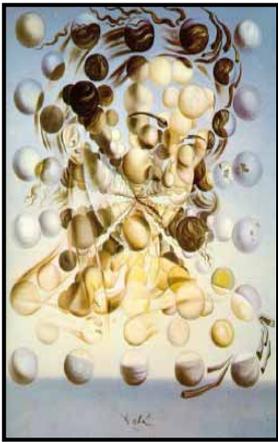
Рис. 1.17. Странные аттракторы Лоренца.

ко прослеживается зависимость от управляющих параметров, определяющих вид фазового портрета исследуемого объекта. Странный аттрактор изображается в фазовом пространстве в виде области с хаотическим нагромождением фазовых траекторий. В этих областях динамические системы не являются полностью устойчивыми, по-видимому, эти области являются областями *джокеров*. Система может находиться только в определённых состояниях, ограниченных областью странного аттрактора (возможно странный аттрактор отвечает *лабильным* равновесиям, которые неустойчивы и имеют ограниченную область существования).

Исследователи нелинейных динамических систем много внимания уделяют структуре фазового портрета, однако умалчивают о следующем:

- сколько в системе может быть простых и странных аттракторов, а также точек бифуркации;
- в каких областях фазового пространства следует ожидать их появления;
- как зависят эти образования от выбранных управляющих параметров, начальных и граничных условий;
- как влияют значения управляющих параметров на выбор нового устойчивого состояния;
- как видоизменяется фазовый портрет при протекании кинетических фазовых переходов;
- протекание каких внутренних процессов в системе формируют те или иные изменения внешних условий;
- при каких обстоятельствах возникает новая информация;
- как влияет возникающая и запоминаемая информация на дальнейшую эволюцию системы;
- каковы принципы отбора ценной для самосохранения или переструктурирования информации;
- присуща ли нелинейным динамическим средам какая-либо иерархия;
- существует ли глобальный эволюционный минимум?

На эти и аналогичные им вопросы синергетика пока не ответила, поэтому необходимы дальнейшие исследования как динамики нелинейных систем, так и неравновесных нелинейных процессов на всех уровнях организации неорганической и живой материи.



§ 2. Динамические системы и хаос

“Вся наука записана в этой великой книге, – я имею в виду Вселенную, – которая *всегда открыта для нас*, но которую нельзя понять, не научившись понимать язык, на котором она описана. А написана она *на языке математики*, и её буквами являются треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых человеку невозможно разобрать ни единого её слова; *без них он подобен блуждающему во тьме.*”

Г. Галилей

“... истинная, единственная цель науки – *раскрытие не механизма, а единства.*”

А. Пуанкаре

1. Двоичная система исчисления

Двоичный код применяется в электронике и вычислительных машинах для представления десятичных чисел. Для записи чисел используются только две цифры: 0 и 1. Записать число в двоичной системе исчисления означает представить его в виде суммы степеней числа два. Схема перевода осуществляется путём последовательного деления числа на 2 с записью остатка деления (0 или 1), например, переведём в двоичный код число 25. Результаты деления записываем под число справа налево:

<i>делимое</i>	1	3	6	12	25
<i>остаток деления (двоичный код)</i>	1	1	0	0	1.

Таким образом, десятичное число 25 задаётся двоичным кодом 11001. Для обратного перехода от двоичной записи к десятичному виду числа поступают так:

– под двоичным кодом записывают слева направо степени числа 2 (табл. 2.1)

<i>двоичный код</i>	1	1	0	0	1
<i>степени числа 2</i>	4	3	2	1	0;

– число 2 возводят в степени, которые стоят под 1 в двоичном коде, и результаты суммируют : $2^4 + 2^3 + 2^0 = 16 + 8 + 1 = 25$.

Таблица 2.1.

Положительные степени числа 2.

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	10	1 024	20	1 048 576
1	2	11	2 048	21	2 097 152
2	4	12	4 096	22	4 194 304
3	8	13	8 192	23	8 388 608
4	16	14	16 384	24	16 777 216
5	32	15	32 768	25	33 554 432
6	64	16	65 536	26	67 108 864
7	128	17	131 072	27	134 217 728
8	256	18	262 144	28	268 435 456
9	512	19	524 288	29	536 870 912

Дробное число переводят в двоичную запись путём вычитания из числа последовательности отрицательных степеней 2 (табл. 2.2). Процесс продолжается до полного исчерпания десятичного числа. Например, число 0,40625 переводится в двоичный код следующим образом:

– если вычитание 0,5 (степень $n = -1$) невозможно, то после запятой ставим 0 и пе-

Таблица 2.2.

Отрицательные степени числа 2.

n	2^n	n	2^n
-1	0,5	-11	0,00048828125
-2	0,25	-12	0,000244140625
-3	0,125	-13	0,0001220703125
-4	0,0625	-14	0,00006103515625
-5	0,03125	-15	0,000030517578125
-6	0,01562	-16	0,0000152587890625
-7	0,0078125	-17	0,00000762939453125
-8	0,00390625	-18	0,000003814697265625
-9	0,001953125	-19	0,0000019073486328125
-10	0,0009765625	-20	0,00000095367431640625

реходим к следующей степени (0,25 при $n = -2$); если вычитание возможно, то ставим 1;

– описанный процесс представления десятичной дроби в двоичной системе исчисления продолжается до тех пор, пока в остатке не получится 0, или до достижения установленной точности представления:

$$\begin{array}{r}
 \quad \underline{0,40625} \\
 (n=-1) \quad \underline{0,5} \quad (\text{нельзя} - \text{после запятой ставим } 0) \\
 \quad \underline{0,40625} \\
 (n=-2) \quad \underline{0,25} \quad (\text{можно} - \text{ставим } 1) \\
 \quad \underline{0,15625} \\
 (n=-3) \quad \underline{0,125} \quad (\text{можно} - \text{ставим } 1) \\
 \quad \underline{0,03125} \\
 (n=-4) \quad \underline{0,0625} \quad (\text{нельзя} - \text{ставим } 0) \\
 \quad \underline{0,03125} \\
 (n=-5) \quad \underline{0,03125} \quad (\text{можно} - \text{ставим } 1)
 \end{array}$$

Двоичный код

0,01101

Обратный переход осуществляется также как и для целых чисел, пишутся отрицательные степени под числом слева направо; затем 2 возводится в те степени, которые расположены под единицами;

$$\begin{array}{r}
 \text{двоичный код} \quad 0, \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\
 \text{степени числа } 2 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5;
 \end{array}$$

результаты складываются: $2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} = 0,25 + 0,125 + 0,03125 = 0,40625$.

Представление десятичных чисел в двоичном коде очень удобно при исследовании возникновения хаоса в простых динамических системах, представленных математически в виде рекуррентных соотношений.

2. Динамические системы: хаос, информация, обратимость, циклы

Динамические системы характеризуются набором переменных, значения которых могут быть определены из уравнений её движения. Мгновенное положение системы определяется местоположением и скоростью движения, которые отображаются в фазовом пространстве в виде точки.

Среди динамических систем выделяют два вида динамических систем: консервативные и диссипативные. Состояние вторых в отличие от первых систем за-

висит от начальных условий. При достижении равновесного состояния консервативные системы могут оставаться в нем бесконечно длительное время при неизменных внешних условиях. Диссипативные системы достигают установившегося режима вблизи аттракторов. Однако в диссипативных системах могут возникать хаотические движения при сколь угодно малом изменении начальных условий, в результате чего невозможно предсказывать поведение системы на больших интервалах времени. Такие изменения приводят к возникновению *хаоса из порядка* и *порядка из хаоса* (см., например, картину Эшера на рис. 2.1). Впервые явление воз-

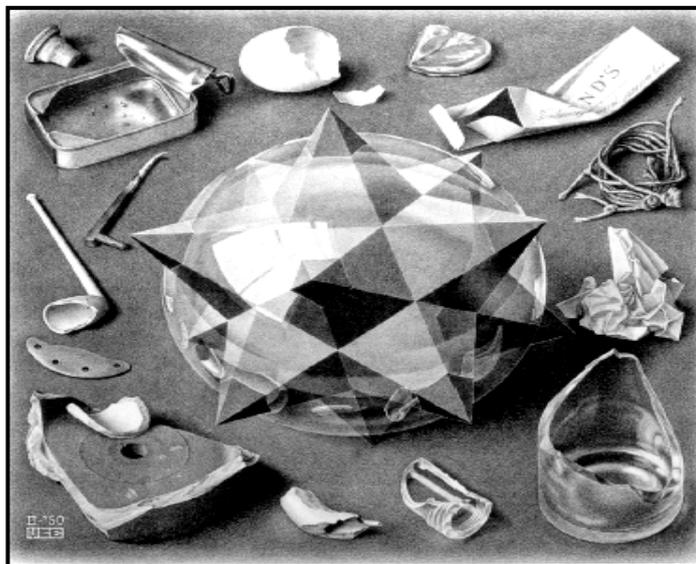


Рис. 2.1. *Порядок и Хаос Эшера (Escher, Order and Chaos).*

никновения хаоса в механической системе было обнаружено Пуанкаре (1892) при изучении динамики движения трёх тел. Он писал: “Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать представление о сложности задачи трёх тел, в которой нет однозначного интеграла и ряды расходятся...”. Впервые экспериментальное наблюдение хаоса было осуществлено при изучении генератора Ван дер Поля, который демонстрировал нелинейные периодические автоколебания. Другим примером проявления хаотического движения является возникновение турбулентности при течении жидкости в параллельных каналах, которое впервые наблюдал О. Рейнольдс (1883).

Термодинамическая система, которая приближается к равновесию, проходит в фазовом пространстве по одной траектории, заполняющей практически все точки энергетической поверхности (*эргодическая теорема Больцмана-Эренфеста*). Однако более важной проблемой является устойчивость этой траектории по отношению к сколь угодно малым изменениям начальных условий. Исследования в этой области привели к введению более сильного свойства нелинейной динамической системы, чем эргодичность, – *перемешиваемость*.

Отличие консервативных систем от диссипативных состоит в том, что энергия консервативных систем не изменяется с течением времени, а энергия диссипативных систем рассеивается и переходит в другие формы. Кроме того, объём фазового пространства, соответствующий консервативной системе, не изменяется с течением времени, а лишь меняет свою форму. Фазовый объём диссипативной си-

стемы с течением времени уменьшается и концентрируется вблизи аттракторов (устойчивое состояние равновесия или предельный цикл). Множество точек фазового пространства, из которых фазовые траектории приближаются к аттрактору, называется его *бассейном*. Третье отличие консервативных систем от диссипативных состоит в следующем: флуктуации, возникающие в консервативной системе, подавляются, а в диссипативной системе они могут усиливаться и приводить к появлению динамического хаоса (на фазовой плоскости он соответствует *странному аттрактору*). Несмотря на то, что динамический хаос вроде бы противоречит детерминированному предсказанию поведения системы, но это противоречие является кажущимся. Для его снятия рассмотрим ряд простых *дискретных* динамических моделей:

1. “*Зуб пилы*”. Рассмотрим отображение $x_{n+1} = \{2x_n\}$, где фигурные скобки означают дробную часть числа $2x_n$ (итерационная диаграмма этого отображения представлена на рис. 2.2).

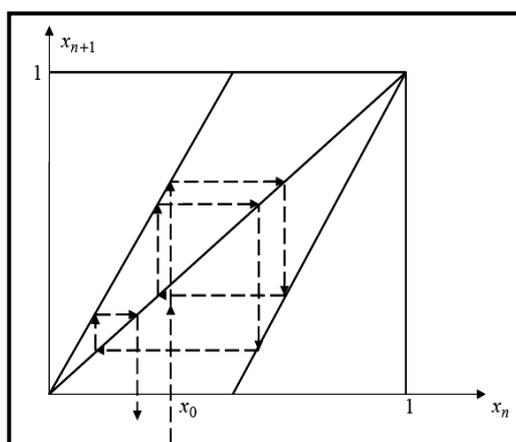


Рис. 2.2. Итерационная диаграмма динамической системы “зуб пилы”.

Пусть в качестве начального значения выбрано некоторое число x_0 из интервала от 0 до 1, которое запишем в двоичной системе исчисления:

$$x_0 = 0,010100\dots,$$

причём ноль после запятой указывает, что число находится в левой половине интервала $[0; 1]$. Следующий шаг итерации приводит к переходу этого числа в правую половину этого интервала и сдвигу цифр влево в выбранном числе. Число, оказавшееся слева от запятой отбрасывается. Таким образом, цифра после запятой фиксирует расположение числа x_{n+1} в той или иной половине интервала $[0; 1]$. Если число x_0 рациональное, то оно будет представлено в двоичном коде периодическим выражением. В результате нескольких шагов итерации вновь возвращаемся к значению исходного числа (*проверьте самостоятельно*). Это утверждение справедливо для любого рационального числа. Следовательно, динамическая система “зуб пилы” имеет бесконечное, но счётное множество циклов. Для иррациональных чисел, представляемых непериодическим двоичным кодом, бесконечное множество будет несчётным (имеет мощность *континуума*), что ведёт к появлению *динамического хаоса*. Задание последовательности нулей и единиц произвольным образом приводит к хаотическому изменению начальных условий для детерминированно определённого отображения $x_{n+1} = \{2x_n\}$, что и порождает *хаос*.

Знание первых n цифр после запятой позволяет исследователю уверенно предсказывать поведение системы до n -ой итерации, но дальнейшее поведение системы может коренным образом измениться в результате отсутствия информации о чередовании нулей и единиц после n -ой цифры исходного числа. Этот эффект связан с изменением начальных условий: знание цифр до n -ой включительно. Увеличение информации о цифрах после запятой до бесконечности для субъекта (*исследователя*) абсурдно в виду конечности времени его существования. Поэтому *недостаток информации о начальных условиях должен компенсироваться введением непротиворечивых, физически обоснованных гипотез.*

2. “Логистическое отображение” задаётся формулой $x_{n+1} = 1 - a x_n^2$ и изображено на рис. 2.3.

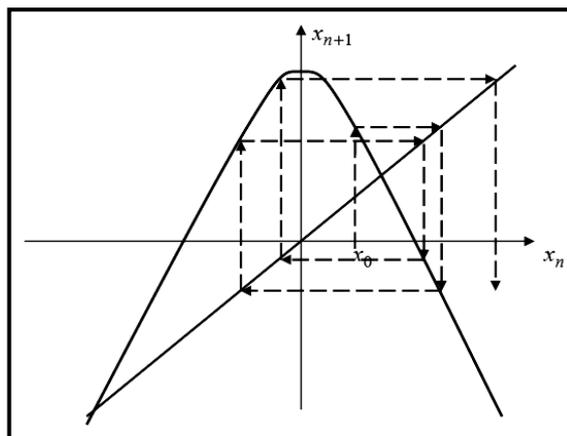


Рис. 2.3. “Логистическое отображение” при значении параметра $a = 2$.

Следуя Уламу и фон Нейману при значении параметра $a = 2$ проведём замену переменной $x_n = -\cos(2\pi y_n)$. Тогда логистическое отображение примет вид:

$$-\cos(2\pi y_{n+1}) = 1 - 2\cos^2(2\pi y_n) \text{ или } \cos(2\pi y_{n+1}) = 2\cos^2(2\pi y_n) - 1.$$

Согласно школьной тригонометрической формуле $2\cos^2\alpha - 1 = \cos(2\alpha)$, следовательно, $\cos(2\pi y_{n+1}) = \cos(4\pi y_n)$. Одним из решений этого уравнения является отображение “зуб пилы”. В предыдущем примере было показано возникновение хаоса, следовательно, и для этого изображение он возникает для иррациональных начальных условий. Если рассматривать обратную во времени эволюцию системы согласно уравнению $x_n = \pm\sqrt{\frac{1-x_{n+1}}{2}}$. Присутствие знаков “+” и “-” перед квадратным корнем поражает неоднозначность при обратном отображении. Если указать правило отбора знаков, то можно обеспечить *обратимость эволюционного процесса во времени.*

3. “Симметричный и косой тенты” описываются формулами:

$$\text{“косой тент”} - x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{a}, & 0 < x_n < a \\ \frac{1-x_n}{1-a}, & a < x_n \leq 1 \end{cases}.$$

При значении параметра $a = 1/2$ “косой тент” вырождается в “симметричный тент” (рис. 2.4).

Тенты и ранее рассмотренные отображения не только демонстрируют нали-

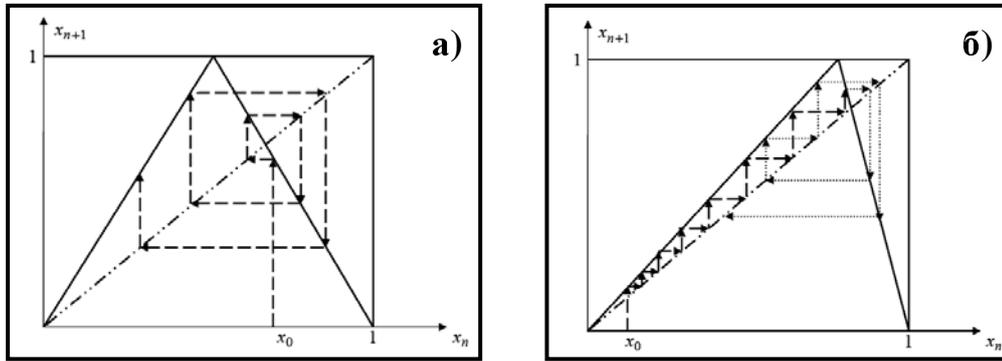


Рис. 2.4. “Симметричный” (а) и “косой тенгты” (б).

чие хаоса, но и показывают, что в таких системах происходит периодический возврат к состоянию, достаточно близко расположенному к исходному положению (наличие *циклов*).

Таким образом, можно говорить о том, что:

- для рациональных чисел рассмотренные отображения осуществляют возврат системы в исходное равновесие (энергия системы сохраняется и при выходе из состояния равновесия система снова в него возвращается по истечении некоторого времени, необходимого для релаксации системы);
- для иррациональных чисел рассмотренные отображения демонстрируют возникновение динамического хаоса, зависимость от начальных условий (недостаток информации) и переход системы в качественно новое состояние (энергия рассеивается; система устойчива вблизи некоторого установившегося состояния; возникают квазипериодические движения).

Помимо одномерных непрерывных отображений вида $x_{n+1} = f(x_n)$ рассмотрим двумерное “*отображение пекаря*”, которое определяется формулами:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \{2x_n\} \\ y_{n+1} = (y_n + [2x_n]) / 2 \end{cases}$$

где фигурные скобки означают дробную часть, а квадратные скобки – целую часть числа $2x_n$. “*Отображение пекаря*” описывает консервативную систему, так как оно сохраняет площадь фигуры на плоскости $(x; y)$. Это отображение демонстрирует одно из важных свойств динамической системы – *перемешивание (перемежаемость)*. Если взять квадрат, разрезать его пополам, окрасить левую половину в тёмный цвет, затем наложить темную половину на светлую и раскатать до первоначального размера, то при достаточно длительном раскатывании квадрат внешне станет однородно серым (процесс показан на рис. 2.5). Из перемешивания следует

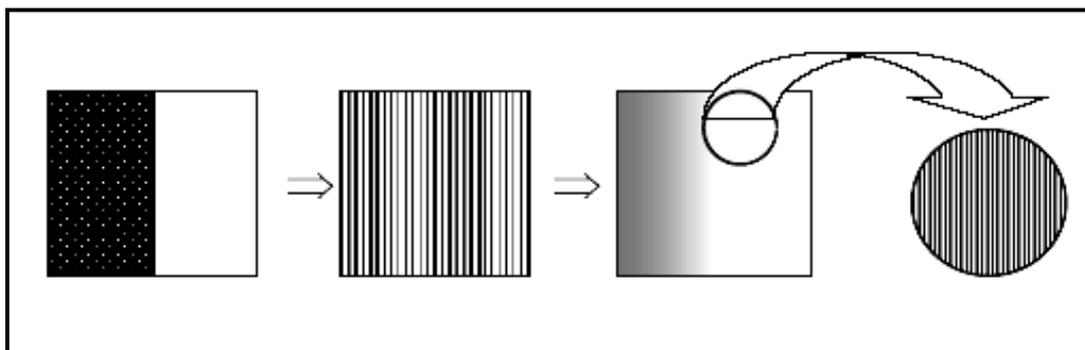


Рис. 2.5. “Отображение пекаря” – демонстрация перемешивания.

свойство *эргодичности*: вычисление статистических средних по ансамблю эквивалентно усреднению по времени вдоль индивидуальной фазовой траектории.

В заключение отметим, что наличие в фазовом пространстве притягивающих множеств со сложной структурой порождает странные аттракторы. В этих множествах наблюдается устойчивость в притяжении к аттрактору и неустойчивость, проявляющаяся в разбегании фазовых точек по странному аттрактору.

3. Стационарные состояния и устойчивость

Пусть исследуемый объект описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка вида $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$ ($i=1 \div n$) (*непрерывная* динамическая система). Если функции $f_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$ аналитичны и не имеют общего множителя, то согласно теореме Коши система дифференциальных уравнений первого порядка имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_i(0) = x_{i0}$. Однако возникает вопрос: “Как будут изменяться решения системы дифференциальных уравнений при малом изменении начальных условий?” или “Будут ли эти решения устойчивы при малом изменении начальных условий?”

Если динамические переменные $x_i(t)$ не зависят от времени, то система находится в *стационарном* режиме. Исследуем устойчивость стационарного состояния динамической системы, которое определяется уравнениями $f_i(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0$. Решения этих уравнений определяют *особые* точки фазового пространства, в отличие от других точек, которые называются *регулярными* или *обыкновенными*. Совокупность динамических переменных, обеспечивающих переход системы в стационарное состояние, обозначим через x_{is} . Устойчивость этого состояния определяется малым отклонением динамических переменных от их значений в стационарном режиме $\delta x_i(t) = x_i(t) - x_{is}$, которые удовлетворяют линеаризованным динамическим уравнениям вида:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta x_j, \quad (1)$$

где коэффициенты в правой части уравнения $a_{ij} = \left. \partial f_i / \partial (\delta x_j) \right|_{\delta x_j = \delta x_j(0)}$, а начальные условия имеют вид $\delta x_i(0) = x_{i0} - x_{is}$, причём величины $\delta x_i(0)$ называются *числами* или *показателями Ляпунова*. Решение этого уравнения будем искать стандартным образом, представив решения в виде:

$$\delta x_i(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} e^{x_{ks} t}, \quad (2)$$

здесь величины $\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(\delta x_1(0); \delta x_2(0); \dots; \delta x_n(0))$. Тогда система уравнений (1) принимает вид однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{ik} x_{ks} e^{x_{ks} t} = \sum_{j,k=1}^n a_{ij} \lambda_{jk} e^{x_{ks} t}, \quad (3)$$

которая имеет решение только в том случае, когда её главный детерминант равен

нулю, т.е. $\det|a_{ij} - \delta_{ij} x_{is}| = 0$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ – символ Кронекера. Из вида решения (2)

следует, что k -ая составляющая этого решения будет затухать с течением времени, если $\operatorname{Re} x_{ks} < 0$, и нарастать если $\operatorname{Re} x_{ks} > 0$. Если хотя бы для одного из показателей Ляпунова его реальная часть будет положительной, то стационарное состояние будет неустойчивым. Если для k -ой компоненты выполняется равенство $\operatorname{Re} x_{ks} = 0$, то состояние системы будет нейтральным (*лабильным*), а для анализа устойчивости динамической системы надо вводить в рассмотрение нелинейные поправки, возникающие при учёте, например, квадратичных слагаемых в разложении функции

$f_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в ряд Тейлора, т.е. величин $\sum_{j=1}^n b_{ijk} \delta x_j \delta x_k$, где коэффициенты разложения $b_{ijk} = \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial(\delta x_j) \partial(\delta x_k)} \right|_{\delta x_i(t) = \delta x_i(0)}$.

Рассмотрим поведение фазовых траекторий в малой окрестности особой точки. Через обыкновенную точку фазового пространства проходит одна и только одна траектория. В особой точке эти траектории могут пересекаться. Однако это невозможно наблюдать за конечный промежуток времени в силу единственности решения уравнений движения.

Для простоты рассуждений исследуем поведение одномерной динамической системы, которая описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Предположим, что правая часть уравнения пересекает ось абсцисс в трёх точках (рис. 2.6). Линеаризуем уравнение

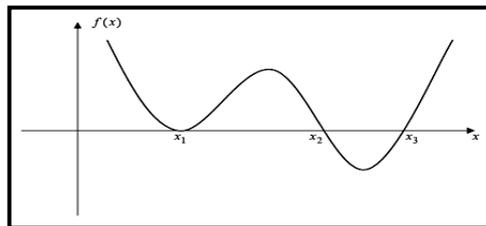


Рис. 2.6. График правой части одномерного уравнения движения.

движения в окрестности особых точек x_1 , x_2 и x_3 , получим:

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)} \right) \Big|_{\delta x = \delta x(0)} \delta x.$$

Для точек x_1 , x_2 и x_3 показатели Ляпунова равны

$$x_{1s} = \left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)} \right) \Big|_{\delta x = \delta x(0)} = 0, \quad x_{2s} = \left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)} \right) \Big|_{\delta x = \delta x(0)} < 0 \quad \text{и} \quad x_{3s} = \left(\frac{\partial f}{\partial(\delta x)} \right) \Big|_{\delta x = \delta x(0)} > 0,$$

соответственно. Следовательно, вблизи точки x_2 фазовые траектории с течением времени экспоненциально сходятся, а вблизи x_3 – расходятся. Для анализа поведения фазовых траекторий вблизи точки x_1 надо привлекать квадратичные члены.

В этом случае решение имеет вид: $\delta x(t) = \frac{\delta x(0)}{1 - b \delta x(0)t}$, где $b = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial(\delta x)^2} \right|_{\delta x(t) = \delta x(0)}$. Из этого решения видно, что оно зависит от начальных условий. Устойчивость состоя-

ния x_1 зависит от знака начального значения $\delta x(0)$, при этом все траектории, которые начинаются справа от точки x_1 ($\delta x > 0$), расходятся, а слева ($\delta x < 0$) – сходятся. Все случаи динамического поведения одномерной системы полностью описываются указанными тремя точками.

В двумерном случае характеристическое уравнение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к квадратному уравнению. Анализ корней этого уравнения приводит к 6 типам поведения фазовых траекторий, которые показаны на рис. 2.7:

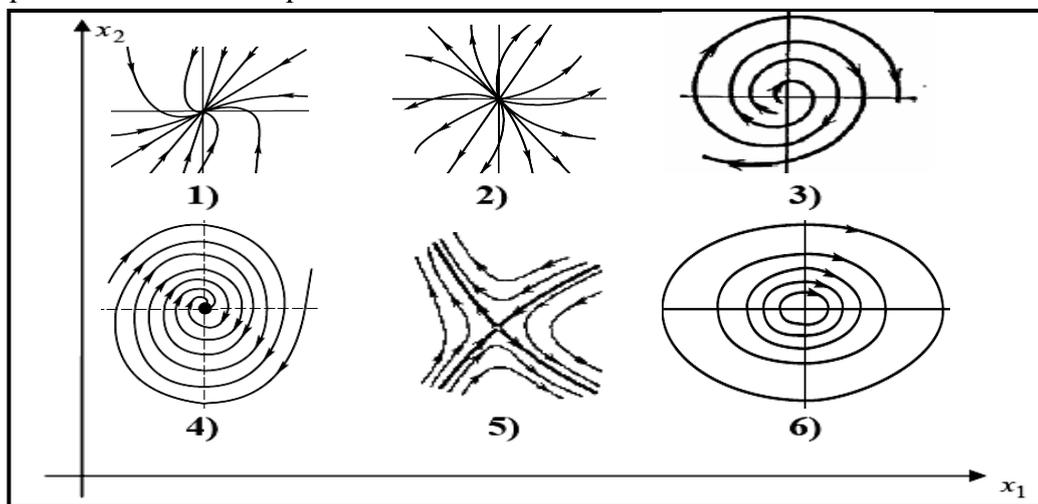


Рис. 2.7. Особые точки двумерной динамической системы:

- 1) $\operatorname{Re} x_{1s} < 0, \operatorname{Im} x_{1s} = 0; \operatorname{Re} x_{2s} < 0, \operatorname{Im} x_{2s} = 0$ – устойчивый узел;
- 2) $\operatorname{Re} x_{1s} > 0, \operatorname{Im} x_{1s} = 0; \operatorname{Re} x_{2s} > 0, \operatorname{Im} x_{2s} = 0$ – неустойчивый узел;
- 3) $\operatorname{Re} x_{1s} < 0, \operatorname{Im} x_{1s} \neq 0; \operatorname{Re} x_{2s} < 0, \operatorname{Im} x_{2s} \neq 0$ – неустойчивый фокус;
- 4) $\operatorname{Re} x_{1s} > 0, \operatorname{Im} x_{1s} \neq 0; \operatorname{Re} x_{2s} > 0, \operatorname{Im} x_{2s} \neq 0$ – устойчивый фокус;
- 5) $\operatorname{Re} x_{1s} \cdot \operatorname{Re} x_{2s} < 0$ – седловая точка (числа Ляпунова имеют разные знаки);
- 6) $\operatorname{Re} x_{1s} = 0; \operatorname{Re} x_{2s} = 0$ – центр.

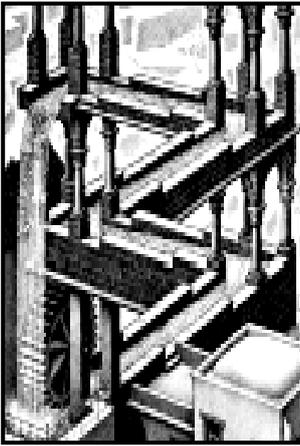
Вблизи каждой особой точки линеаризованная система дифференциальных уравнений имеет вид: $\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ и $\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$. Разделив первое уравнение

на второе, получим $\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}$. Если определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ отли-

чен от нуля, то можно доопределить производную $\frac{dx_1}{dx_2}$ в особой точке. Однако эта

точка всё равно остаётся точкой разрыва направлений движения во времени.

Любая фазовая траектория, которая начинается в обыкновенной точке фазового пространства, будет обязательно приближаться к какой-либо из особых точек или замкнутому циклу (периодическое движение). Это приводит к тому, что всё фазовое пространство динамической системы разбивается на области притяжения к особой точке или предельному циклу. Границы этих областей, которые разделяют бассейны особых точек, называют сепаратрисами (на сепаратрисе период колебаний бесконечен).



§ 3. Осцилляторы и аттракторы

“Хорошо известно, что для тела в состоянии покоя наиболее устойчиво то состояние, при котором его центр тяжести находится в самом низшем положении (соответствующем минимуму потенциальной энергии), а при динамическом равновесии наиболее устойчиво то состояние, при котором центр тяжести занимает наиболее высокое положение (соответствующее максимуму потенциальной энергии).”

П.Л. Капица

“Вот части все в его руках, однако им – увы и ах! – недостаёт духовной связи.”

В. Гёте

1. Общая характеристика осцилляторов

Осцилляторы, ротаторы и другие физические объекты, состояние которых с течением времени описывается *периодической* или *квазипериодической* функцией, относятся к *колебательным системам* (рис.3.1). Колебания в них разделяют на *пе-*

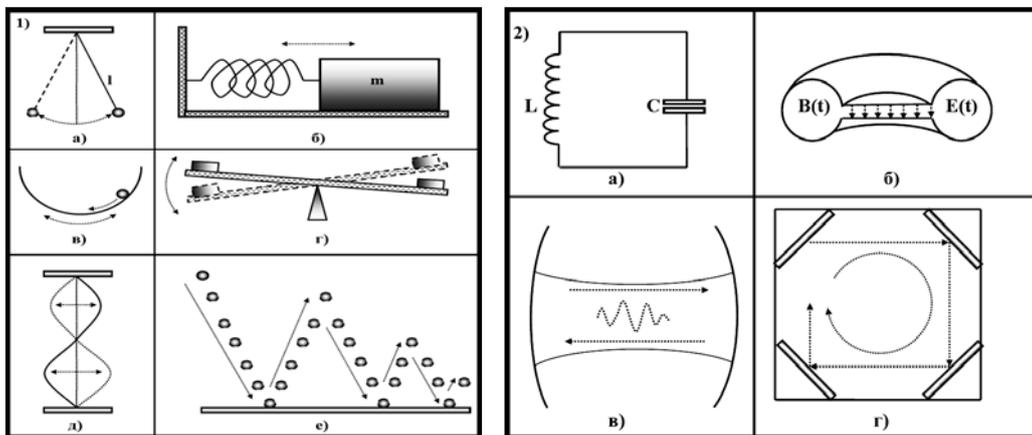


Рис. 3.1. Примеры периодических движений:

- 1) *механические*: а) маятник; б) пружинный осциллятор; в) шарик в ямке; г) качели; д) струна; е) прыгающий мячик;
- 2) *электрические и оптические*: а) колебательный контур; б) резонатор; в) волновой пакет между параболическими зеркалами; г) световой луч в системе четырёх зеркал.

риодические и *апериодические*. К первому типу относятся *синусоидальные*, *ангармонические* и *релаксационные* колебания. Апериодические изменения происходят при *затухающих*, *квазипериодических* и *хаотических* колебаниях.

Состояние колебательной системы характеризуется *динамическими переменными*, т.е. величинами, которые изменяются с течением времени t . Например, для механических колебаний такими характеристиками являются координата $x(t)$ и скорость перемещения $\dot{x}(t)$ в выбранной системе координат. Задание набора динамических переменных и закона их изменения определяет детерминированное поведение системы. Они описывают состояние колебательной системы в любой момент времени. В этой связи колебательные системы ещё называют *динамическими*. С геометрической точки зрения динамические переменные образуют фазовое пространство, а их изменения во времени задают фазовые траектории.

Обычно колебания протекают в строго определённом диапазоне динамичес-

ких переменных. Если колебания происходят в малой окрестности положения равновесия и описываются уравнением линейной динамики (*свободные колебания*): $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (\ddot{x} – ускорение, $\omega = 2\pi/T$ – круговая частота, T – период колебаний), то говорят о *малых колебаниях*. Решением линейного уравнения колебаний является синусоида: $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$, где A – амплитуда колебаний, δ – начальная фаза. Амплитуда колебаний A и начальная фаза δ определяются начальными значениями координаты и скорости движения. Для малых колебаний характерна амплитудная инвариантность, т.е. малые колебания с одной и той же частотой свободных колебаний различаются только амплитудой колебаний. Величина амплитуды определяет размер области, в которой справедлива линейная динамика. За пределами области малых колебаний возникают явления, описываемые *нелинейной динамикой*, в частности, могут появляться хаотические движения.

Колебательные системы разделяют на *консервативные* (сохраняют полную энергию системы) и *диссипативные* (часть полной энергии рассеивается и переходит в другие формы существования). Консервативные системы “хранят” информацию о начальных условиях возникновения колебаний, которые определяют амплитуду и начальную фазу колебаний. Диссипативные системы, которые предоставлены длительное время самим себе, “страдают потерей памяти” (“амнезией”) по отношению к источнику своего возникновения. Переходя в установившийся режим существования, они локализуются вблизи *аттракторов* (*состояние равновесия, предельный цикл или устойчивый фокус*). Например, наличие предельного цикла приводит к возникновению *автоколебаний* в диссипативных системах (рис. 3.2). Их появление не может быть объяснено в рамках линейной модели, в которой

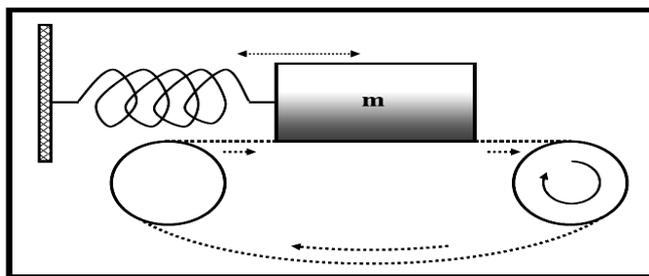


Рис. 3.2. Пружинный маятник на подвижной ленте транспортёра.

отсутствует характерный масштаб амплитуды. Наличие такого масштаба и поражает независимость установившегося состояния диссипативной системы от момента её “рождения”.

По своей протяжённости в пространстве колебательные системы разделяются на *сосредоточенные* (конечномерные) и *распределённые*. Сосредоточенные динамические системы характеризуются конечным (дискретным) числом динамических переменных, а распределённые – непрерывными величинами в некоторой части системы (например, плотностью). Поэтому колебательный процесс в распределённой динамической системе называется *волной*, и он может быть описан конечным числом переменных только достаточно грубо. Возникновение турбулентности, автоволн и уединённых волн (*солитонов*) описывается в рамках единой теории нелинейной динамики. Множество частиц, образующих распределённые системы, взаимодействуют между собой специфическим образом, что приводит к возникновению таких структур как волны. Появление пространственно-временных образо-

ваний в динамических системах получило название *самоорганизации*. Исследование законов самоорганизации или возникновения диссипативных структур и является *предметом* синергетики.

2. Явления, порождённые нелинейностью

Любая сложная система состоит из *элементов* (*компонентов* или *составляющих*), взаимодействие которых определяет свойства системы в целом. Компоненты разделяют на *линейные* и *нелинейные*. Для первых компонентов характерна линейная связь между внешним воздействием и откликом системы (рис. 3.3), напри-

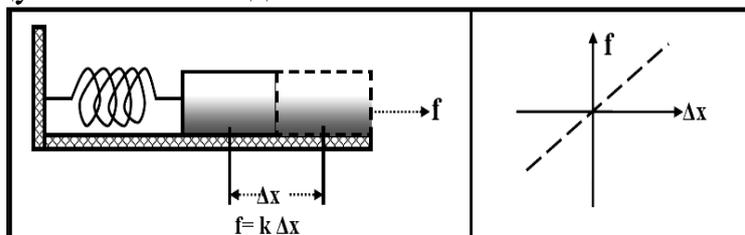
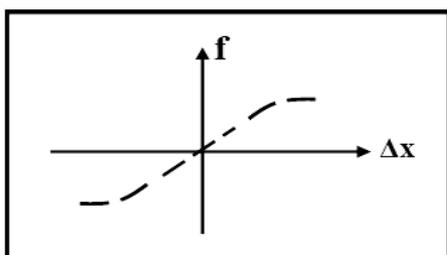


Рис. 3.3. *Линейный элемент.*

мер, упругая сила f для идеально упругой пружины прямо пропорциональна смещению Δx при его малых значениях: $f = k \Delta x$ (k – коэффициент упругости). При превышении приложенной силой определённой (*критической*) величины линейный закон сменяется нелинейной зависимостью (рис. 3.4). В некотором диапазоне



новую связь можно описать равенством:

$$f = k \Delta x + \alpha (\Delta x)^2,$$

которое содержит квадратичное по смещению слагаемое. Наличие в системе нелинейного элемента может приводить к таким явлениям как *неизохорность*, *ангармоничность*, *автоколебания*, *бифуркации*, *мультистабильность*, *динамический хаос* и *резонанс*.

Рис. 3.4. *Нелинейная связь.*

Период колебаний практически постоянен только при углах, которые значительно меньше π ($\alpha \ll \pi$), и зависит от амплитуды вне области малых колебаний. *Неизохорность* колебательной системы связана именно с зависимостью периода колебаний от амплитуды. В качестве примера рассмотрим вращение электрона с зарядом e и массой покоя m_0 в постоянном магнитном поле с напряженностью B . Движение электрона со скоростью v по окружности радиуса r происходит под действием силы Лоренца evB , причём угловое ускорение $\varepsilon = v^2 / r$: $m\varepsilon = evB$, где релятивистская масса электрона $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Скорость движения v связана с круговой частотой формулой: $v = \omega r$. Следовательно, период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi m_0}{eB} \sqrt{1 + \left(\frac{eBr}{m_0 c}\right)^2}.$$

Таким образом, период колебаний будет возрастать с увеличением радиуса орбиты (амплитуды колебаний).

Если периодические движения системы описываются уравнением отличным

от уравнения свободных колебаний $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, то они описываются периодической функцией, которая отличается от синусоиды $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$. Возникновение таких колебаний говорит об *ангармоничности* системы. Из курса классической математики известно, что любую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье (разложить по гармоникам с разными амплитудами, начальными фазами и частотами, кратными круговой частоте $\omega = 2\pi/T$):

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \delta_k)$$

Выбрав специальным образом систему координат, можно добиться того, что постоянная составляющая A_0 будет равна нулю. Если первая амплитуда $A_1 \neq 0$, а остальные амплитуды равны нулю, то ангармонизм отсутствует и протекает обычный синусоидальный процесс. Для большинства осцилляций первая амплитуда является самой большой, поэтому *первая гармоника* является *основной*. Остальные слагаемые ряда Фурье с амплитудами A_k , отличными от нуля, называются *k-тыми гармониками*. Следовательно, *ангармоничность* колебательной системы связана с наличием в колебательном процессе гармоник с частотами $2\omega, 3\omega, 4\omega, \dots$. Для характеристики отклонения колебательного процесса от синусоидального в технических приложениях вводят *коэффициент нелинейных искажений* по формуле:

$$\chi = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2 / A_1^2}$$

Ещё одним проявлением нелинейности является самопроизвольное возникновение в ряде диссипативных системах *автоколебаний*, которые определяются свойствами колебательной системы и не зависят от стартовых условий процесса. В качестве примера рассмотрим появление автоколебаний в электронном генераторе, который схематично показан на рис. 3.5.

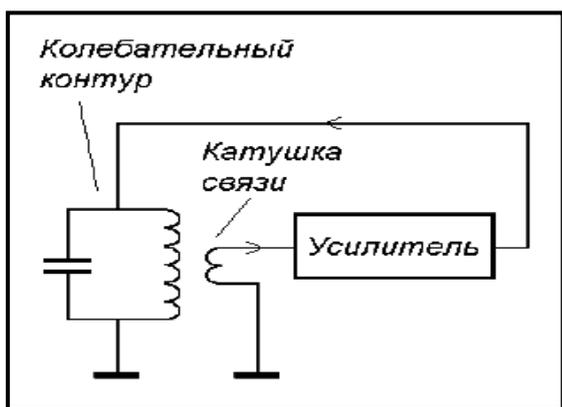


Рис. 3.5. Электронный генератор. Присутствующие в колебательном контуре осцилляции за счёт электромагнитной индукции вызывают ток в катушке связи. Его амплитуда увеличивается с помощью усилителя. Новый сигнал подаётся в колебательный контур (*положительная обратная связь*) так, чтобы происходила “раскачка” колебаний. Рост амплитуды колебаний приводит к возрастанию диссипации (рассеивания) энергии. Стабилизация амплитуды колебаний происходит тогда, когда мощность потерь становится равной мощности, которую усилитель подаёт в колебательный контур. Отметим, что энергия для поддержания автоколебаний черпается из внешнего источника.

Помимо динамических переменных состояние колебательной системы определяется рядом параметров, значения которых не изменяются с течением времени. Задавая тот или иной уровень параметров, можно реализовать тот или другой режим существования системы: равновесие, стационарное состояние, периодические

или ангармонические колебания. Переход системы на качественно новый уровень существования в зависимости от величин управляющих параметров называется *бифуркацией*. Изменение управляющих параметров должно происходить достаточно медленно (*медленные* переменные), чтобы система успевала подстраиваться к новым условиям за счёт изменения динамических переменных (*быстрые* переменные). Рассмотрим бифуркацию, возникающую в случае автоколебаний в электронном генераторе. До тех пор, пока коэффициент усиления мал (потери преобладают над поступлением энергии в колебательный контур), колебания с течением времени затухают. Если медленно увеличивать коэффициент усиления, то происходит бифуркация: колебания начинают наращивать амплитуду. Это означает, что любая малая “затравка” приведёт к возникновению колебательного процесса. Амплитуда осцилляций будет нарастать до уровня стабилизации (*бифуркация Андронова-Хопфа*): существовавшая в фазовом пространстве неподвижная точка теряет устойчивость, а фазовые траектории системы замыкаются вокруг предельного цикла (аттрактора). При наличии нескольких аттракторов система притягивается к ближайшему энергетически более выгодному состоянию, так как каждому аттрактору соответствуют свои значения динамических переменных и бассейн притяжения. Наличие такой ситуации приводит к *мультистабильности*, возникающей в результате нелинейности осцилляций. В результате изменения управляющих параметров может произойти слияние устойчивого и неустойчивого состояний колебательной системы (*бифуркация слияния*). После такого слияния исчезает локальный минимум (одно из равновесных состояний), при этом состояние системы изменяется скачком при медленном изменении параметров (*жесткая бифуркация* или *катастрофа*). В зависимости от того, как менялись управляющие параметры система занимает то или иное стационарное состояние (рис. 3.6). Таким образом, нелиней-

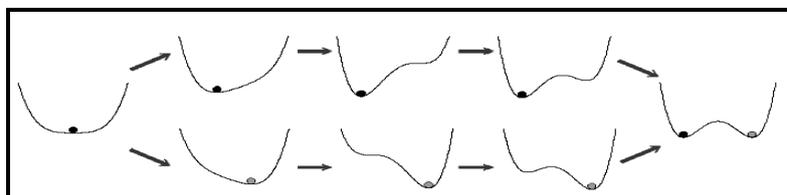


Рис. 3.6. Переход в новое состояние при движении по различным траекториям в параметрическом пространстве.

ность связи между воздействием и откликом приводит к мультистабильности состояний колебательной системы. Отметим свойство *универсальности* бесконечной цепочки *бифуркаций удвоения*: интервал изменения управляющего параметра b , внутри которого существует цикл периода 2^n , с ростом n уменьшается по закону Фейгенбаума, т.е. $(b_n - b_{n-1}) / (b_{n+1} - b_n) = \eta$, где $\eta = 4,66920 \dots$ – *постоянная Фейгенбаума*.

Ещё одной особенностью нелинейных систем является тот факт, что колебания с разными амплитудами происходят по-разному. В фазовом пространстве им соответствуют разные фазовые траектории, а, следовательно, и разные виды динамического поведения. Если число динамических переменных больше или равно трём, то возможна следующая ситуация: существуют такие движения, при которых две близко расположенные фазовые траектории (достаточно близкие значения начальных условий) с течением времени расходятся. Если таким свойством обла-

дают все возможные фазовые траектории, то говорят о возникновении *динамического хаоса*. Такие области притягивают в свой бассейн все фазовые траектории и называются *странными аттракторами*. В качестве примера рассмотрим систему уравнений Эдварда Лоренца, которая описывает конвекцию жидкости в вертикально расположенной кольцевой трубке, подогреваемой снизу и охлаждаемой

сверху:
$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - y - xz \\ \dot{z} = -cz + xy \end{cases}$$
 В этой системе динамические переменные описывают сле-

дующие величины: x соответствует скорости движения жидкости по кольцу; y и z пропорциональны отклонениям температуры от среднего значения в правой и нижней частях кольца. Параметр a равен отношению коэффициентов вязкости и теплопроводности, коэффициент b описывает степень подогрева, а константа c характеризует геометрию данной задачи (для кольца $c = 1$). Э. Лоренц решил систему дифференциальных уравнений на компьютере при значениях параметров $a=10$, $b=28$ и $c=8/3$. Результат расчёта показан на рис. 3.7. Из рис. 3.7 видно, что в исследуемой колебательной системе отсутствует стремление к установлению стационарного или периодического режимов, т.е. наблюдается динамический хаос.

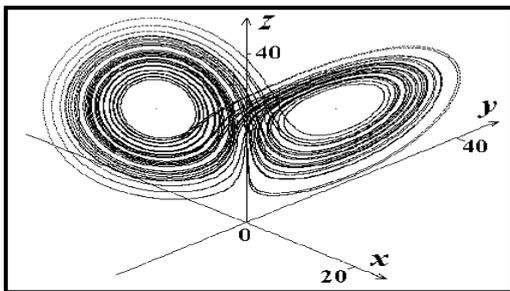


Рис. 3.7. Странный аттрактор Э. Лоренца.

В реальных осцилляторах всегда происходит рассеивание энергии колебаний за счёт трения, которое возникает при движении в среде, вследствие чего происходит затухание колебаний. Следовательно, для поддержания колебаний надо добавлять энергию в систему путём воздействия на неё периодической внешней силой $F = F_0 \cos(\omega t)$.

Динамическое уравнение имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t),$$

где β – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – круговая частота собственных колебаний, k – коэффициент упругости, m – масса маятника $f_0 = F_0 / m$, ω – круговая частота внешнего воздействия. Решение приведенного уравнения даёт для амплитуды колебаний следующее выражение: $A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$. Так как

амплитуда зависит от частоты внешнего воздействия ω , то при некоторой частоте $\omega = \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ наблюдается пикообразное нарастание амплитуды колебаний (рис. 3.8). Это явление называется *резонансом*.

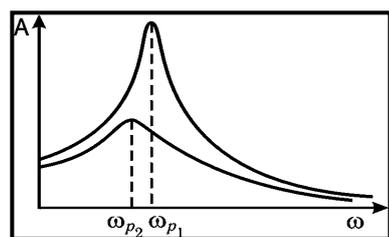


Рис. 3.8. Эффект резонанса.

Таким образом, в нелинейных динамических системах наблюдается целый ряд физически интересных явлений и процессов, теоретическое и экспериментальное исследование которых пока недостаточно развиты.

3. Нелинейные маятники

Консервативные колебания описываются уравнением $\ddot{x} + f(x) = 0$, а диссипативные осцилляции уравнением $\ddot{x} + \mu \dot{x} + f(x) = 0$, где параметр μ является коэффициентом диссипации, а $f(x)$ – нелинейная функция. Следует понимать, что динамическая переменная x наполняется различным физическим (или иным) смыслом:

а) колебания в потенциальной яме (нелинейный консервативный осциллятор). Пусть на частицу с массой m действует сила $F(x)$ ($F(x) = -\partial U(x)/\partial x$, U – потенциальная энергия), перемещающая частицу в направлении оси абсцисс. Согласно второму закону Ньютона $F(x) = m\ddot{x}$ или $\ddot{x} + f(x) = 0$, где $f(x) = -F(x)/m$. Умножив полученное уравнение на $m\dot{x}$, перепишем его в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0.$$

Следовательно, полная энергия осциллятора $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = const$ не изменяется с течением времени (консервативная система). Если потенциальная энергия имеет минимум в точке x_0 (в этой точке $\partial U(x)/\partial x|_{x=x_0} = 0$), то возможны колебания в малой окрестности этой точки. Разложим потенциальную энергию в ряд Тейлора вблизи точки x_0 : $U(x) = U(x_0) + \frac{U''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{U'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$. Если ограничиться только первыми двумя членами ряда Тейлора, то получим уравнение свободных колебаний. Нелинейность возникает при учёте третьего и последующих слагаемых в приведенном ряде.

В общем случае уравнение колебаний записывают в динамических переменных фазового пространства: $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -f(x) \end{cases}$, а динамику системы отображают фазовыми портретами в переменных $(x; \dot{x} = v)$. При сохранении полной энергии системы можно записать, что $\dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))/m}$. Знак “+” отвечает фазовым траекториям в верхней, а знак “–” – в нижней полуплоскостях фазового пространства (рис 3.9).

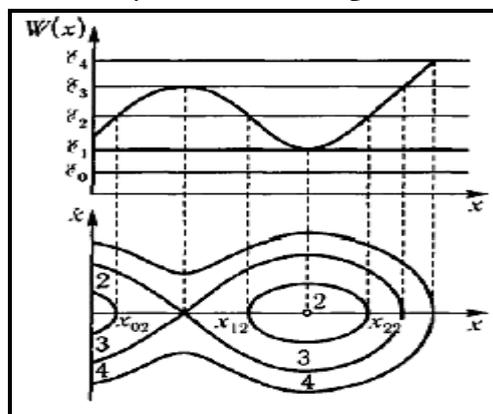


Рис. 3.9. Функциональная зависимость потенциальной энергии и фазовый портрет нелинейного осциллятора.

Интегрируя полученное равенство в пространственных пределах наблюдения колебаний, получим период колебаний $T = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))/m}}$. Для случая ли-

нейной динамики функция $U(x) = U(x_0) + \frac{k}{2}(x-x_0)^2$. Выбрав систему отсчета так, чтобы её начало совпало с нижней точкой потенциальной ямы, получим $U(\tilde{x}) = \frac{k\tilde{x}^2}{2}$.

В новых переменных выражение для периода принимает вид:

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{(2E - k\tilde{x}^2)/m}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^a \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{a^2 - \tilde{x}^2}} = \frac{4}{\omega_0} \arcsin\left(\frac{\tilde{x}}{a}\right) \Big|_0^a = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

здесь параметры $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ и $a = \sqrt{2E/k}$.

б) физический маятник. Пусть груз массой m , расположенный на конце стержня длиной l с пренебрежимо малой массой, может свободно вращаться в вертикальной плоскости. На тело действует сила тяжести $F = mg$ (ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$). После отклонения стержня на угол x и освобождения, маятник начинает колебаться, при этом его вращательный момент равен $M_1 = mgl \sin x$. Этот момент равен по абсолютной величине, но противоположно направлен моменту груза $M_2 = ml^2 \ddot{x}$. Уравнение динамики после введения нового времени $\tau = t\sqrt{g/l}$ примет вид $\ddot{x} + \sin x = 0$. Фазовый портрет физического маятника показан на рис. 3.10а. Если маятник движется в сопротивляющейся среде, то уравнение колебаний имеет вид $\ddot{x} + \mu\dot{x} + \sin x = 0$, а его фазовый портрет при малой диссипации энергии отображён на рис. 3.10б. Такими же уравнениями описываются вращательные движения по окружности.

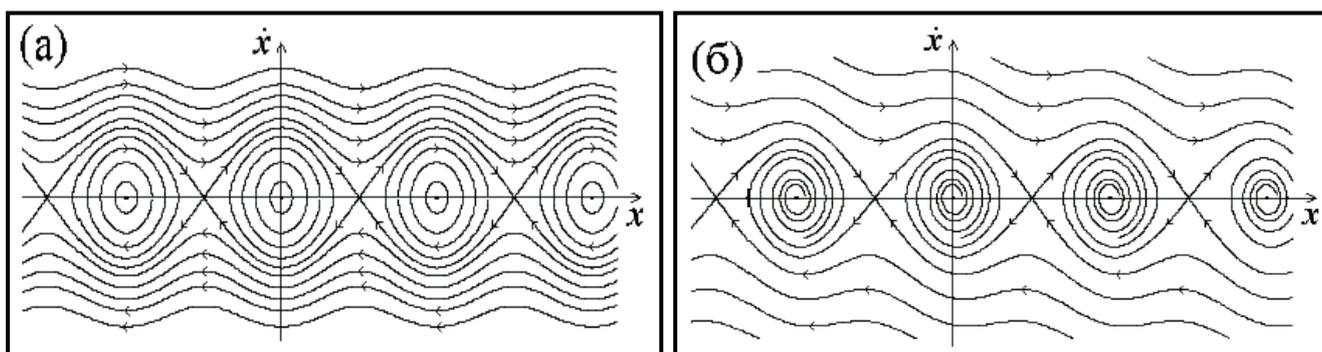


Рис. 3.10. Фазовые портреты консервативного (а) и диссипативного (б) физического маятника.

Уравнение с нелинейностью синуса встречается довольно часто при решении различных физических задач: исследование контакта Джозефсона в теории сверхпроводимости; самоиндуцированной прозрачности в нелинейной оптической модели; решение задачи об изгибе упругой балки и в других задачах. Этот факт указывает на то, что методы нелинейной динамики могут использоваться в самых различных областях знания в силу идентичности математического описания периодических процессов.



§ 4. Коллективные движения

“Если приравнять скорость частицы и скорость волны, то мы столкнёмся с неприятным фактом: эти две скорости по-разному войдут в формулировку принципов Мопертюи и Ферма, соответственно. И хотя эти трудности были хорошо известны, но появление... новых идей... придавало волнующую остроту мысли о том, что... формальная аналогия между траекториями частиц и световыми лучами устанавливается через посредство понятия действия, т.е. в точности того самого понятия, которое послужило основой для введения квантов. Не подтверждает ли это... ту мысль, что *квант действия* служит *соединительным звеном между корпускулярным и волновым представлениями о материальных частицах?*”

Л. де Бройль

1. Волны

В предыдущих лекциях были рассмотрены индивидуальные качества отдельно взятой динамической системы. Объединение несвязанных между собой осцилляторов в “сообщество” приводит к тому, что оно характеризуется набором собственных частот и не обладает новыми качествами (*идеальная* система). Если осцилляторы одинаковы (*тождественны*), то отклик системы на внешнее воздействие равен отклику одного осциллятора умноженному на их число. Если же осцилляторы незначительно отличаются своими частотами, то с течением времени в системе на любой внешний сигнал найдётся гасящий его антисигнал. Это приводит к тому, что отклик системы почти тождественных колебательных систем будет равен нулю. Включение взаимодействия между значительным числом элементов (*реальная* система) порождает новые свойства динамической системы: синхронизация движений “частиц” системы в результате самоорганизации; появление границ у системы; непрерывность среды; проявление корпускулярно-волнового дуализма; возникновение разнообразных временно- и пространственно-периодических структур; существование нескольких агрегатных состояний. Яркими представителями коллективных движений являются *волны* (рис. 4.1).



Рис. 4.1. Виды водных волн.

Волной называется процесс периодического распространения в пространстве возмущения той или иной физической характеристики в среде (в веществе или поле), сопровождаемый переносом импульса и энергии. Область пространства, в котором происходит распространение волны, называется *волновым полем*. Все точки волнового поля, которые имеют в выбранный момент времени одинаковую фазу, образуют *фронт* волны. Граница волнового поля называется *передним фронтом* волны. Распространение волны в однородном и изотропном пространстве проис-

ходит в направлении нормали к переднему фронту волны, поэтому говорят о распространении волны в виде *луча*. Наука, изучающая такие волны, называется *геометрической оптикой*. Лучи относятся к простейшим волнам, возникающим при совместном перемещении большого числа частиц. Можно выделить три типа волн: *упругие* (например: звуковые, сейсмические), *электромагнитные* (свет, радиоволны) и *волны на поверхности жидкости*. Как писал Р. Фейнман о поверхностных волнах: "...эти волны несколько не похожи ни на звук, ни на свет, здесь собраны все трудности, какие могут быть в волнах". Это связано с тем, что в жидкостях не может распространяться поперечная волна (см. ниже её определение) ввиду того, что модуль сдвига для такой среды равен нулю. Однако наблюдение за поверхностным слоем жидкой среды показывает, что такие волны можно отнести к поперечным. Учёт различных факторов, влияющих на формирование поверхностных волн, показывает, что для их математического описания необходимо привлекать модели не только теории колебаний и волн, но и нелинейной динамики. Важность исследования течений и движений жидких сред связана с использованием плавающих средств передвижения.

Деформация среды приводит к распространению в ней различных напряжений. Они могут распространяться в виде *продольной* или *поперечной* волн. *Продольной* волной называется процесс, в котором колебания частиц тела осуществляется в направлении распространения волны. Эти волны связаны с объёмной деформацией среды и поэтому наблюдаются в газах, жидкостях и твёрдых телах. Если колебания частиц среды происходят в направлении, которое перпендикулярно к направлению распространения возмущения, то говорят о *поперечных* волнах. В данном случае речь идёт о сдвиговой деформации в среде распространения. Поперечными волнами, например, являются световые волны (рис. 4.2).

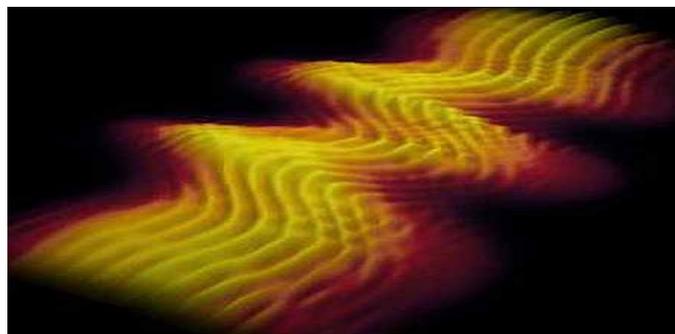


Рис. 4.2. Фотография световой волны.

Рассмотрим математическую модель продольной волны, возникающей в упругой среде (*механические* волны). Пусть источник колебаний приводит к коллективным движениям частиц вдоль оси абсцисс по закону синусоиды $x(t) = A \sin(\omega t)$ с амплитуда колебаний A , круговой частотой ω и нулевой начальной фазой. За промежуток времени Δt волна пройдёт расстояние s со скоростью распространения v . На расстоянии s от источника в точке $x(t + \Delta t)$ колебания будут отставать по фазе на величину $\delta = -\omega s/v$. Следовательно, уравнение *бегущей* волны имеет вид $x(t + \Delta t) = A \sin(\omega(t - s/v))$. За период колебаний T бегущая волна пройдёт расстояние $\lambda = vT$, которое называется *длиной* волны. В точках пространства, разделённых длиной волны, колебания происходят с одинаковой фазой.

Волновые движения сопровождаются целым рядом эффектов: интерференция, стоячая волна, эффект Допплера, дифракция и другие. *Интерференция* волн происходит при наложении двух когерентных волн, в результате чего в определённых точках пространства возникает возрастание, а в других точках – убывание амплитуды колебаний. Волны называются *когерентными*, если они имеют одинаковую круговую частоту и не меняющуюся со временем разность фаз. Эта разность фаз равна $\Delta\delta = 2\pi\Delta s/\lambda$, где $\Delta s = s_2 - s_1$ – разность расстояний от двух когерентных источников волн (*разность хода* волн). Если разность хода равна чётному числу полуволн $\Delta s = 2n(\lambda/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то наблюдается интерференционный максимум (сложение амплитуд когерентных волн). В противоположном случае в выбранной точке пространства происходит “гашение” амплитуд (вычитание амплитуд когерентных волн). Частным случаем интерференции когерентных волн является возникновение *стоячей* волны (рис 4.3). Она возникает при интерференции когерентных волн с одинаковой амплитудой, движущихся навстречу друг другу. Например, такое явление наблюдается при отражении волны от какой-либо преграды: отражённая волна интерферирует с падающей волной. В точках пространства, в которых разность хода $\Delta s = 2n(\lambda/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), амплитуда увеличивается вдвое (*пучности*). Взаимное уничтожение падающей и отражённой волн происхо-

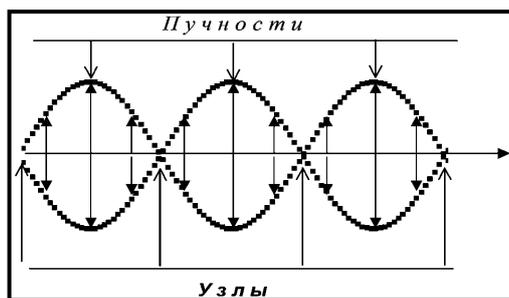


Рис. 4.3. Стоячая волна.

дит в точках (*узлах*), с разностью хода, определяемого формулой $\Delta s = (2n+1)(\lambda/2)$ ($n = 0, 1, \dots$). Стоячая волна обладает следующими свойствами:

- колебания между соседними узлами происходит с одной и той же фазой (*синфазно*);
- движения частиц по разные стороны от узла противоположны по фазе (если с одной стороны от узла частица движется вверх, то с другой – вниз);
- стоячей волной энергия не переносится, а превращается из одного вида в другой (например, кинетическая энергия частицы переходит в её потенциальную энергию).

Стоячие волны наблюдаются в закрытых водоёмах, музыкальных инструментах и в других физических объектах. В качестве примера рассмотрим *поперечные* колебания гитарной струны.

2. Колебания гитарной струны и звук

Пусть струна имеет длину l . Рассмотрим малые отклонения части струны от положения равновесия: амплитуда отклонения должна быть малая для постоянства во времени длины струны и натяжения струны T по её длине (рис 4.4). Движе-

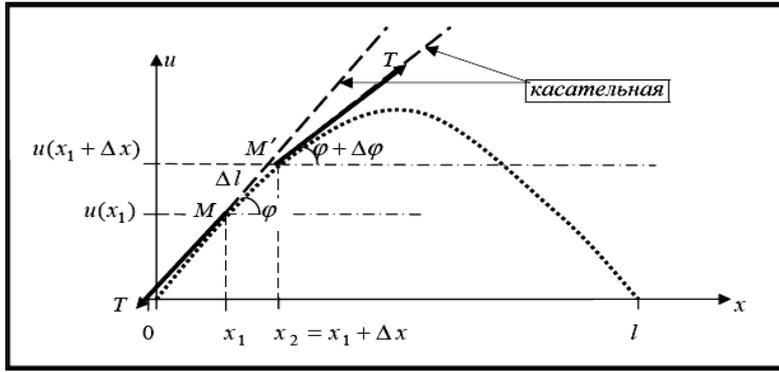


Рис. 4.4. Изгиб струны.

ние произвольной точки M струны происходит в плоскости xOu в направлении, перпендикулярном к оси Ox . Её смещение из положения равновесия будем описывать функцией отклонения $u(t; x)$. Будем рассматривать достаточно малые отклонения ($u(x_1 + \Delta x) - u(x_1) \ll u(x_1)$), при этом выполняется приближённое равенство $\Delta l \cong \Delta x$, и натяжение струны (сила T) во всех точках струны одинаково. Это означает, что к элементу струны MM' по касательным к струне приложены равные силы T . Пусть касательная к струне в точке M образует с положительным направлением оси Ox угол φ , а в точке M' – угол $\varphi + \Delta\varphi$. Проекция на ось Ou сил, которые действуют на малый элемент струны MM' , равна $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$. Так как смещения точек струны малы, то и угол φ также мал. Следовательно, используя эквивалентность бесконечно малых функций, можно записать, что $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \partial u(t; x) / \partial x$. Тогда проекция на ось Ou сил, приложенных к элементу MM' , примет вид:

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi \approx T [\partial u(t; x + \Delta x) / \partial x - \partial u(t; x) / \partial x] = T \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} [\partial^2 u / \partial x^2] dx.$$

Обозначим через $f(t; x)$ внешнюю силу, которая действует на струну в положительном направлении оси Ou , вызывает её изгиб и рассчитана на единицу длины. Её

проекция на эту ось равна $\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t; x) dx$. При малых колебаниях струны в воздухе сила

сопротивления среды прямо пропорциональна скорости движения, тогда её про-

екция на ось Ou запишется в виде $-2k \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} [\partial u / \partial t] dx$, где параметр k – коэффициент

сопротивления воздуха. Согласно второму закону Ньютона равнодействующая

всех сил, приложенных к элементу MM' , равна $\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} [\rho(x) \partial^2 u / \partial t^2] dx$, где $\rho(x)$ –

линейная плотность. Таким образом, можно записать

$$\int_x^{x + \Delta x} [T \partial^2 u / \partial x^2 + f(t; x) - 2k \partial u / \partial t - \rho(x) \partial^2 u / \partial t^2] dx = 0.$$

В силу произвольности точки x_1 подынтегральная функция обращается в нуль в произвольно выбранной точке струны. При постоянной линейной плотности упру-

гой нити уравнение приводится к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t; x)$, где коэффициенты $h = k/\rho$, $v^2 = T/\rho$ ($v = \sqrt{T/\rho}$ – скорость волны) и $q(t; x) = f(t; x)/\rho$. При отсутствии внешних сил ($q(t; x) = 0$) и сопротивления среды ($h = 0$) уравнение принимает вид уравнения, которое описывает *свободные колебания* струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Так как концы струны жёстко закреплены, то в качестве граничных условий выбираем $\begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}$ (*краевая задача первого типа*), а в качестве начальных условий –

первоначальный профиль $u(0; x) = \psi(x)$ и скорость $\partial u(0; x)/\partial t = \sigma(x)$. Решение полученного уравнения будем искать методом разделения переменных, т.е. представления смещения в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных: $u(t; x) = T(t)X(x)$. Тогда уравнение свободных колебаний (1) примет вид $T''(t)X(x) = v^2 T(t)X''(x)$. Разделив обе части равенства на величину $v^2 u(t; x) = v^2 T(t)X(x)$, получим $\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, где λ – число, так как левая

часть равенства зависит только от t , правая – от x . Таким образом, исходное уравнение сводится к системе однородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} T'' + \lambda v^2 T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \end{cases} \quad (\text{уравнения динамики}), \text{ при дополнительных условиях } X(0) = X(l) =$$

$= 0$, иначе при $T(t) \equiv 0$ смещение $u(t; x) \equiv 0$ (*задача Штурма-Лиувилля*). Несложно показать, что в случаях, когда параметр λ отрицателен или равен нулю, нетривиальных решений у задачи Штурма-Лиувилля нет. При положительных значениях параметра λ общее решение задачи имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

При использовании граничных условий находим: $\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \end{cases}$. Так как решение не может быть тривиальным, то константа $C_2 \neq 0$, тогда $\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$. Таким образом,

$\sqrt{\lambda} l = \pi n$ ($n \in Z$) или $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Этим собственным значениям параметра λ отвечают собственные функции

$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (произвольная константа C_2 выбрана равной 1). Решение уравнения $T''(t) + \lambda v^2 T(t) = 0$ проводится так же, как и уравнения для функции $X(x)$, следовательно, оно имеет аналогичный вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a t}{l}\right).$$

Решение задачи является суммой частных решений $u_n(t; x) = T_n(t)X_n(x)$, т.е.

$$u(t; x) = T(t)X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_n \cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a t}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right\}. \quad (2)$$

При ненулевых начальных условиях $\begin{cases} u(0; x) = \psi(x) \\ \partial u(0; x) / \partial t = \sigma(x) \end{cases}$ функции $\psi(x)$ и $\sigma(x)$ разлагаются в ряды Фурье, что позволяет найти константы A_n и B_n в решении (2).

В простейшем случае стоячая волна на гитарной струне описывается функцией $u(t; x) = u_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$, где амплитуда $A(x) = u_0 \sin(kx)$ зависит от начального смещения u_0 , волнового числа $k = 2\pi n/l$ и координаты x точки на оси абсцисс. Узлам соответствуют точки, в которых $\sin(kx) = 0$, а пучностям – $\sin(kx) = 1$. Круговая частота ω связана с волновым числом k дисперсионным соотношением вида $\omega = k v$.

Упругие волны в газах, жидкостях и твёрдых телах называются акустическими, так как они порождают звуковые волны, частота которых лежит в пределах от долей 1 Гц (инфразвук) до 10^{13} Гц (гиперзвук, Гц – Герц). Указанным частотам соответствуют волны с длиной от десятков километров до нескольких ангстрем ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$). Вибрирующая гитарная струна порождает в воздухе звуковую волну. Звук представляет собой *продольную* волну, являющуюся периодическим чередованием сжатий и разрежений. Звуковая волна распространяется без переноса импульса, т.е. частицы вещества не участвуют в поступательном движении, а колеблются вблизи своих равновесных положений. Взаимодействие частиц приводит в движение расположенные в их окрестности другие частицы, что и воспринимается как передача возмущения от одной точки среды к другой точке. Бегущая волна распространяется со скоростью v в соответствии с уравнением (1). Скорость звука определяется физическими характеристиками среды. Например, в воздухе скорость звука определяется по формуле $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, где γ – постоянная адиабаты (для воздуха этот параметр равен 1,40), $R = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \text{ К}^{-1}$ – универсальная газовая постоянная (Дж – Джоуль, К – Кельвин), T – температура по абсолютной шкале Кельвина, M – молярная масса, ($M_{\text{воздух}} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}$). В случае малых волновых амплитуд более общая формула для определения скорости распространения звуковой волны в реальных веществах имеет вид $v = \sqrt{\frac{dP/d\rho}{\rho_0}}$, где P – давление (единицы измерения $\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$; Н – Ньютон), ρ – плотность среды, а ρ_0 – её равновесное значение.

Если продольная волна проходит вдоль тонкого металлического стержня (поперечный размер стержня значительно меньше длины распространяющейся звуковой волны), то её скорость вычисляется согласно формуле $v = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга (Па – Паскаль), ρ – плотность материала стержня ($\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$). В случае толстого стержня (поперечный размер стержня значительно больше длины распространяющейся звуковой волны) скорость звука равна $v = \sqrt{Eq(\mu)/\rho}$, где функция $q(\mu) = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$, а μ – коэффициент Пуассона. При всевозможных значениях коэффициента Пуассона функция $q(\mu) > 1$, поэтому в толстом стержне звук распространяется быстрее, чем в тонком. Наиболее сложным для анализа является случай распространения звука в стержне, толщина которого сопоставима с длиной

звуковой волны. Фазовая скорость такой волны зависит от её частоты, а стержень выполняет роль волновода: при его плавном изгибании волна движется вдоль его оси.

3. Поверхностные волны

Для возбуждения волн, распространяющихся по поверхности воды, используют вибратор с регулируемой частотой колебаний от 20 до 100 Гц (Герц) (см. правое изображение на рис 4.1). Вибратор используется для создания возбуждающей силы, в качестве “упругих” сил (возвращающих в исходное положение) выступают силы поверхностного натяжения и тяжести. Если на поверхность жидкости не действуют внешние силы, кроме силы тяжести, то она имеет вид горизонтальной плоскости. Любое воздействие извне приводит к искривлению поверхности воды, что приводит за счёт поверхностных сил к увеличению потенциальной энергии одних участков воды и к уменьшению других (рис. 4.5). “Упругие” силы стре-

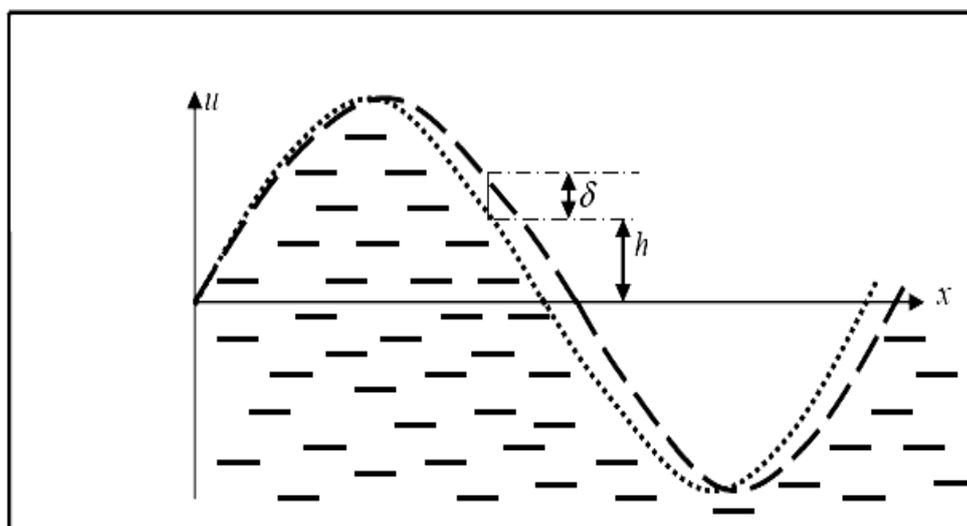


Рис. 4.5. Волна на поверхности жидкой среды.

мятся вернуть поверхность в её исходное плоское состояние с минимальной потенциальной энергией. Если амплитуда возникающих волн мала, то можно приближённо принять, что траекториями движения частиц воды являются окружности. Колебания будут считаться малыми, если радиус окружности r будет значительно меньше длины волны λ ($r \ll \lambda$). Окружность возникает при сложении продольных и поперечных волн (*винтовое* движение). Радиус окружности, по которой движутся молекулы воды, быстро убывает при переходе вглубь от поверхности воды. В этой связи можно считать, что волна движется в тонкой пластинкоподобной области (*пограничный слой*), а её остальная часть остаётся в состоянии покоя. Диаметр окружности, по которой движутся частицы равен разности между высотой гребня и глубиной впадины волны. Отметим, что на гребне волны частицы движутся в направлении перемещения волны, а во впадине – в противоположную сторону.

Пусть система координат жёстко связана с распространяющейся волной (*подвижная* система отсчёта в отличие от неподвижной *лабораторной* системы отсчёта). В выбранной системе отсчёта наблюдается движение частиц по поверхности “замороженной” (“покоящейся”) волны с абсолютной скоростью $v_0 = \frac{2\pi r}{T}$ (T – пе-

риод колебаний) в сторону противоположную распространению волны. Следовательно, во впадине волны относительная фазовая скорость их перемещения будет равна $v + \frac{2\pi r}{T}$ (v – скорость распространения волны). На гребне волны фазовая скорость движения частиц будет равна $v - \frac{2\pi r}{T}$, что связано с увеличением потенциальной энергии частиц. Если пренебречь поверхностными силами по сравнению с силами тяжести, то возникающие на поверхности воды волны называют “гравитационными” (данное название взято в кавычки для отличия таких волн от истинных волн гравитационного поля). Для таких волн изменение потенциальной энергии равно произведению силы тяжести mg (m – масса частицы, $g = 9,81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ – ускорение свободного падения) на диаметр окружности $d = 2r$: $\Delta U = mg \cdot 2r$. Изменение кинетической энергии определяется по формуле

$$\Delta K = \frac{m}{2} \left[\left(v + \frac{2\pi r}{T} \right)^2 - \left(v - \frac{2\pi r}{T} \right)^2 \right] = \frac{4\pi m r v}{T}.$$

Согласно закону сохранения энергии найденные выражения должны быть равны, следовательно, фазовая скорость волны $v = \frac{gT}{2\pi}$. Для малых колебаний поверхностная волна является практически синусоидой; длина волны равна $\lambda = vT$. Таким образом, скорость перемещения поверхностной волны связана с её длиной соотношением $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Из этой формулы видно, что с уменьшением длины волны λ скорость движения снижается, а с увеличением λ – возрастает по закону “квадратного корня”.

Влияние поверхностных сил на изменение потенциальной энергии сводится к необходимости учитывать выполняемую ими работу. Если элементарная поверхность ds поднимается на высоту δ (см. рис. 4.5), причём начальная кривизна поверхности была равна $1/R$ (R – радиус кривизны вертикального сечения волны), то она будет двигаться против силы, величина которой равна $df = \frac{\alpha}{R} ds$ (α – коэффициент поверхностного натяжения, который для воды равен $73 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-1}$). Обозначим через φ угол между высотой δ и радиусом кривизны R в начальной точке подъёма, тогда работа, совершённая силой df , будет определяться по формуле: $dA_1 = \frac{\alpha}{R} \delta \cos \varphi ds$. В силу сплошности жидкой среды освободившаяся область пространства должна быть заполнена соответствующим количеством жидкости, который взят с уровня исходной плоской границы. Для этого надо совершить подъём вещества с плотностью ρ (плотность воды равна $10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$) на высоту h против сил тяжести, т.е. выполнить работу $dA_2 = \rho g h \delta \cos \varphi ds$. Изменение потенциальной энергии определяется суммой этих работ: $dU = dA_1 + dA_2 = \left(\rho g h + \frac{\alpha}{R} \right) \delta \cos \varphi ds$.

Для применения этой формулы надо уметь вычислять радиус кривизны R . В

курсе высшей математики он вычисляется по формуле $\frac{1}{R} = \frac{d^2 h}{d x^2} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{d h}{d x}\right)^2\right]^{-3}}$. В

случае малых амплитуд колебаний эта формула принимает простой вид $\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 h}{d x^2}$,

а изменение положения точки подъёма задаётся формулой $h = h_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$,

следовательно, $\frac{1}{R} \approx \frac{4\pi^2 h}{\lambda^2}$. Тогда выражение для изменения потенциальной энергии

можно переписать в виде: $dU \approx \rho h \left(g + \frac{4\pi^2 \alpha}{\rho \lambda^2}\right) \delta \cos \varphi ds$, т.е. поверхностное натяже-

ние увеличивает ускорение свободного падения на величину $\frac{4\pi^2 \alpha}{\rho \lambda^2}$. Следова-

тельно, выражение для скорости распространения поверхностной волны можно пере-

писать в виде: $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$. Второе слагаемое под квадратным корнем появилось

в результате учёта поверхностных сил, которые ответственны за возникновение

капиллярных волн. Если поверхностное натяжение значительно превышает дейст-

вие силы гравитации ($\frac{g\lambda}{2\pi} \ll \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}$), то капиллярные волны движутся со скоростью

$v = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}$. Полученное соотношение используется для определения коэффициента

поверхностного натяжения. Минимально возможная длина поверхностной волны

равна $\lambda_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$. Реальное движение волны происходит не с фазовой скоро-

стью, а со скоростью V , которая называется *групповой* скоростью. Отметим, что

$\begin{cases} V > v, & \text{при } \lambda < \lambda_{\min} \\ V < v, & \text{при } \lambda > \lambda_{\min} \end{cases}$. Поверхностные волны, как и другие типы волн, могут накла-

дываться одна на другую без совместного изменения (*суперпозиция* волн), интерферировать, огибать препятствия, сопоставимые с их длиной (*дифракция*) и т.д. Зависимость скорости движения поверхностных волн от длины волны приводит к порождению звуковых волн (например, они возбуждаются в воздухе при движении судна по реке). Длинные волны имеют большую скорость и быстрее достигают наблюдателя на берегу реки. В этой связи он слышит вначале редкие, а затем – более частые всплески воды, вызванные более короткими волнами.

Неоднозначное поведение волн в различных физических экспериментах привело физиков к необходимости введения квантов волновых полей, что связано с *корпускулярно-волновым дуализмом материи*. Например, в квантовой физике твёрдого тела квазичастица акустического поля называется *фононом*. Таким образом, исследование волн показывает ещё одну особенность динамических систем: иногда они ведут себя как непрерывное физическое образование (*поле*), а иногда как дискретный объект – частица (*квант*). Особенно эта сторона физического мира проявляется при исследовании нелинейных волн.



§ 5. Взаимодействие нелинейных элементов

“...мир делится не на различные группы объектов, а на различные группы взаимоотношений... Единственное, что поддается выделению, – это тип взаимоотношений, имеющих особенно важное значение для того или иного явления... Мир, таким образом, представляется нам в виде сложного переплетения событий, в котором различные разновидности взаимодействий могут чередоваться друг с другом, накладываться или сочетаться друг с другом, определяя посредством этого текстуру целого.”

В. К. Гейзенберг

1. Нелинейные эффекты

а) *слабонелинейный осциллятор*. Уравнение динамического поведения слабонелинейной колебательной системы, для которой достаточно малыми величинами являются нелинейность, диссипация энергии и амплитуда f_0 внешней возбуждающей силы $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$, имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \left\{ f_0 \cos(\Omega t) - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\lambda \dot{x} \right\},$$

причём параметр μ является бесконечно малой величиной ($\mu \ll 1$). При исследовании резонанса решение динамического уравнения ищется на частоте внешней силы, т.е. в виде $x(t) = A(t) \sin(\Omega t + \delta(t))$. Пусть собственная частота осциллятора ω отличается на малую величину ε от частоты Ω : $\omega = \Omega - \varepsilon$, тогда динамическое уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \mu \left\{ f_0 \cos(\Omega t) - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\lambda \dot{x} + 2\varepsilon \Omega x \right\}.$$

Используя метод Ван дер Поля, сущность которого состоит во введении двух величин с выбираемым условием связи между ними, запишем укороченные уравнения для амплитуды и фазы: $\dot{A} = \frac{f_0}{2\Omega} \cos \delta - \lambda A$ и $A \dot{\delta} = -\frac{f_0}{2\Omega} \sin \delta + \frac{3\beta}{8\Omega} A^3 - \varepsilon A$. Нелинейную резонансную кривую, определяемую зависимостью $A(\varepsilon)$, находят при условиях $\dot{A} = 0$ и $\dot{\delta} = 0$, которые определяют стационарное состояние. Резонанс описывается соотношением

$\varepsilon = \gamma A_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{f_0}{2A_0\Omega}\right)^2 - \lambda^2}$ (A_0 – амплитуда колебаний в стационарном

режиме). При выполнении неравенства $A_0 < \frac{f_0}{2\Omega} = A_{BH}^*$ график зависимости $A_0^2(\varepsilon)$ описывает однозначную функцию, аналогичную кривой на рис. 3.8, но со смещённым максимумом. При увеличении собственной частоты колебаний с ростом амплитуды максимум смещается в сторону больших частот, а в противоположном случае – в сторону меньших частот. Если реализуется неравенство $A_0 > A_{BH}^*$, то график является отображением неоднозначной функции (рис. 5.1) с “z”-образным участком. Из рис. 5.1 видно, что при частоте ε_2 происходит скачкообразное уменьшение амплитуды колебаний, а при частоте ε_1 – её возрастание, т.е. участок кривой, отмеченный крестиками отвечает за возникновение “лавиноподобной” неустойчивос-

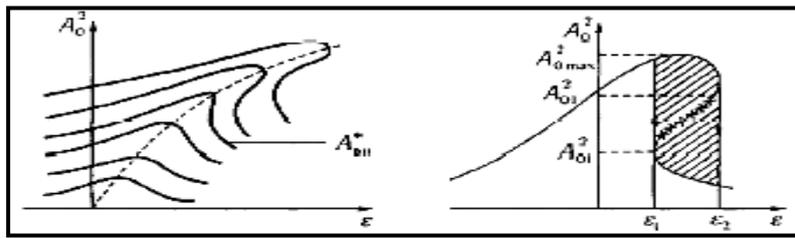


Рис. 5.1. Резонансные кривые нелинейного осциллятора.

ти. Такое поведение динамической системы получило название *гистерезиса*.

Отметим, что для системы связанных нелинейных осцилляторов возможны появления *внутренних* резонансов, когда возможно возрастание одних амплитуд и подавление других до тех пор, пока не будут уравновешены количества амплитуд с $A_0 < A_{BH}^*$ и $A_0 > A_{BH}^*$ (свойство *перемешиваемости*).

б) электрон в периодическом электрическом поле продольной волны. Рассмотрим движение электрона с массой m в электрическом поле, потенциал которого описывается периодической функцией $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t - kx)$. В системе отсчёта, связанной с волной, уравнение движения электрона имеет вид (в выбранной системе координат потенциал $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(kx)$): $m\ddot{x} + e\varphi_0 \sin(kx) = 0$. Отметим, что аналогичное уравнение лежит в основе элементарной теории лазера для случая, когда амплитуда волны считается постоянной. Фазовый портрет такой динамической системы показан на рис. 3.10. Если электрон перемещается вдоль волны с достаточно большой скоростью, то он не “замечает” потенциальных ям, а его скорость испытывает небольшие колебания. На фазовом портрете движение электрона происходит по сепаратрисе (рис. 5.2). Если скорость электрона не превыша-

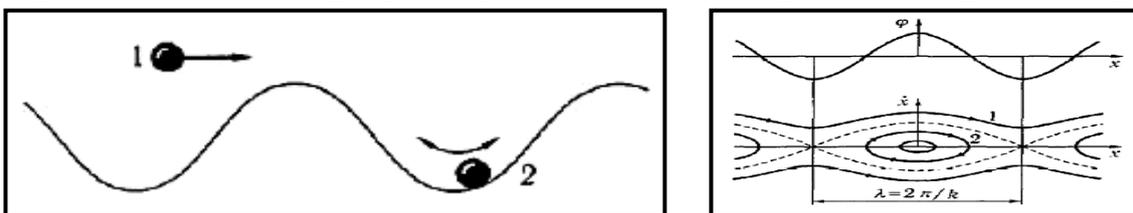
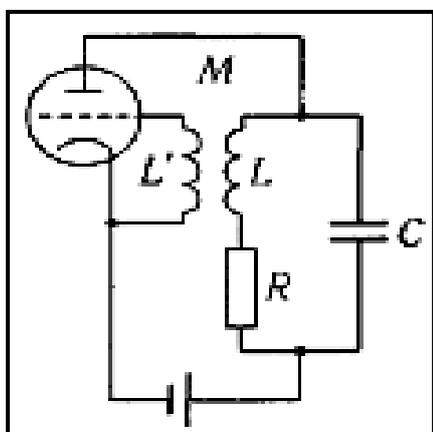


Рис. 5.2. Фазовые траектории движения пролетающей (1) и связанной (2) частиц.

ет критической скорости, которая определяется равенством кинетической и потенциальной энергий электрона $v_{кр.} \leq \sqrt{2e\varphi_0/m}$, то он “захватывается” потенциальной ямой и совершает в ней колебания (фазовая траектория 2). Другими словами, если скорость электрона в лабораторной системе отсчёта меньше, чем сумма фазовой скорости волны ω/k и $v_{кр.}$, то он захватывается волной. Связанные электроны могут быть описаны моделью линейного осциллятора, а пролетающие – моделью ротатора (движение по окружности). Следовательно, поведение электронов в косинусоидальном потенциальном поле может быть описано в виде *консервативного ансамбля тождественных нелинейных осцилляторов с различающимися начальными энергиями*. Возникает вопрос: как будет вести себя ансамбль с течением времени? Ответ на этот вопрос подразумевает знание *функции распределения* $f(v)$ электронов по их скоростям. Пренебрежение взаимодействием электронов друг с

другом позволяет рассмотреть качественную картину поведения ансамбля. Пусть начальный фазовый объём, который занимает ансамбль в начальный момент времени находится между сепаратрисами. Если производная от функции распределения, вычисленная при скорости равной фазовой скорости движения волны, отрицательна, то с течением времени фазовая область захваченных электронов превратится в спираль со всё увеличивающимся числом витков. В силу консервативности динамической системы (обратимость уравнений движения во времени), она должна вернуться в исходное состояние по истечении достаточно большого промежутка времени. Однако сколь угодно малое взаимодействие между электронами и с волной приведёт к равномерному заполнению осцилляторами исходной области фазового пространства. При этом число пролетающих и связанных частиц станет равным (свойство *перемешиваемости*). Затраты энергии на этот процесс компенсирует волна (*нелинейное затухание* Ландау). Для диссипативных осцилляторов возможен обратный процесс: увеличение энергии волны за счёт “отлова” пролетающих частиц. Их энергия идёт на увеличение амплитуды волны. В этом случае связанных (*медленных*) электронов меньше, чем *быстрых*. Увеличение амплитуды волны происходит до тех пор, пока не сравняются числа быстрых и медленных электронов. Показанный механизм взаимодействия осцилляторов широко используется при изучении зарождения турбулентности, в теории пограничного слоя; для описания процессов в лампе бегущей волны; при описании возбуждения нелинейных поверхностных волн.

в) генератор Ван дер Поля. Работа генератора Ван дер Поля, одна из возможных схем которого показана на рис. 5.3, описывается уравнением



$$\ddot{x} - \alpha(1 - \beta x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где параметр α характеризует степень возбуждения генератора (при $\alpha < 0$ возбуждение отсутствует), характеристика β определяет величину амплитуды автоколебаний (чем меньше β , тем больше амплитуда), $\omega_0 = 1/(LC)$ – круговая частота собственных колебаний. Перейдём к безразмерным переменным, введя обозначения $\tau = \omega_0 t$, $y = \sqrt{\beta} x$ и $\mu = \alpha \omega_0$:

$$\ddot{y} - \mu(1 - y^2)\dot{y} + y = 0.$$

Рис. 5.3. Генератор Ван дер Поля.

В зависимости от значения параметра μ полученное уравнение описывает различные формы автоколебаний, показанные на рис. 5.4. Из рис. 5.4 видно, что возрастание нелинейности су-

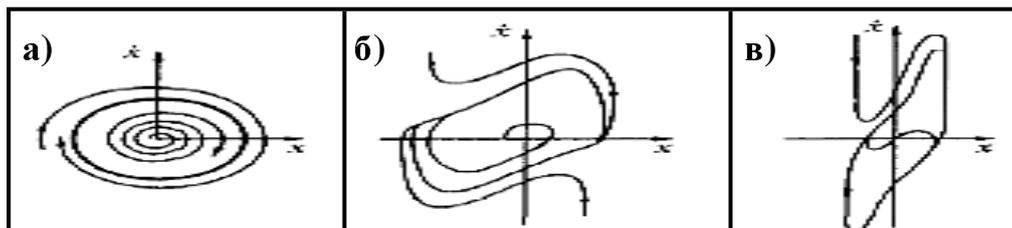


Рис. 5.4. Влияние параметра нелинейности на вид автоколебаний:

а) $\mu = 0,1$ – квазигармонические колебания; б) $\mu = 1$ – сильно несинусоидальные; в) $\mu = 10$ – релаксационные.

щественно изменяет не только количественную, но и качественную картину автоколебаний. На рис. 5.5 показаны осциллограммы колебаний, отвечающих случаям рис. 5.4. На рис. 5.5в можно видеть участки “быстрых” ($\mu \rightarrow 0$) и “медленных” ($\mu \gg 1$) движений, которые вновь подчёркивают присутствие *перемешиваемости* и

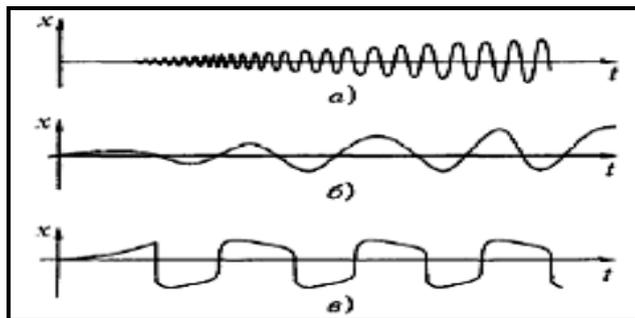


Рис. 5.5. Осциллограммы автоколебаний: а) $\mu = 0,1$; б) $\mu = 1$; в) $\mu = 10$.

бифуркации (изменение управляющего параметра μ приводит к переходу от одного типа автоколебаний к другому) в динамической системе.

2. Нелинейные волны: кноидальные и уединённые (солитоны)

Теория нелинейных волн базируется на уравнениях:

- 1) $\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ – модель одноволнового приближения, описывает плоскую бегущую волну в нелинейной среде;
- 2) $\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ – модель Бюргера для сред с затуханием;
- 3) $\frac{\partial u}{\partial t} + V(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ – обобщённые уравнения Кортевега-де Фриза для описания бегущей волны в среде с дисперсией (*дисперсия* – нелинейная зависимость круговой частоты от волнового числа и амплитуды) в области высоких частот;
- 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(u) = 0$ – уравнение Клейна-Гордона, учитывающее взаимодействие встречных волн (среда с дисперсией в области низких частот).

В линейных средах без дисперсии волна распространяется без искажений с постоянной скоростью V согласно уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (*простая* или волна

Римана). Такая волна не может существовать в нелинейной среде, так как возникающие в ней искажения будут накапливаться, что приведёт к неизбежной деформации профиля волны (например, волна Кортевега-де Фриза рис. 5.6). В нелинейной среде при отсутствии дисперсии наблюдаются эффекты деформации профиля волны (компоненты скорости распространения волны зависят друг от друга) и разрывы фронта волны. Малые возмущения волны перед разрывом движутся медленно, поэтому они поглощаются разрывом, при этом разрыв рассеивает энергию, что приводит к уменьшению общей энергии волны. Следовательно, разрыв фронта волны может существовать устойчиво только при диссипации энергии. Присутствие

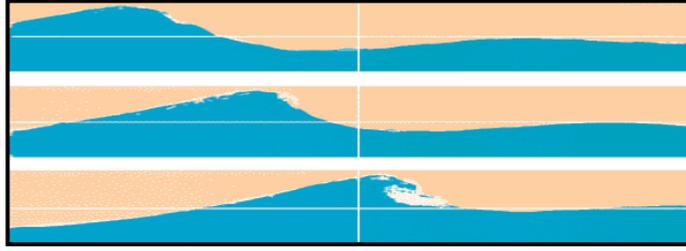


Рис. 5.6. Волна Кортевега-де Фриза.

диссипационного процесса делает *необратимыми* появляющиеся изменения. При наличии дисперсии среды возникает вопрос о том, какой из процессов будет преобладать: диссипативный или дисперсионный. В силу нелинейности среды фазовая скорость генерируемых возмущений будет отличаться от групповой скорости волны, но дисперсия ограничивает область их существования шириной разрыва. Таким образом, пренебрежение дисперсией среды будет приводить к консервативности волнового процесса: по истечении некоторого времени происходит восстановление деформированного нелинейностью синусоидального профиля волны.

Процесс деформирования-восстановления профиля волны становится периодическим. Однако при некоторых соотношениях между амплитудами и фазами возмущений, возникающих из-за нелинейности среды, обмен энергией между отдельными гармониками может не происходить. В этом случае система переходит в состояние *равновесия*, а профиль волны не зависит от времени (*стационарная* волна). Почти стационарные волны возникают в целом ряде задач, связанных с исследованием нестационарных возмущений в динамических системах. Устойчивость стационарных волн присуща диссипативным и консервативным системам. Примером устойчивой консервативной системы со стационарной волной является *солитон* (*уединённая волна*).

Пусть по поверхности бездиссипативной жидкости распространяется волна, которая описывается уравнением Кортевега-де Фриза (рис. 5.6):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Третье слагаемое в этом уравнении описывает дисперсионное “расплывание” волны, которое препятствует опрокидыванию фронта, стабилизирует профиль и скорость распространения волны V . В этом случае функция $u(x; t)$ зависит только от координаты бегущей волны $\xi = x - Vt$. Тогда уравнение Кортевега-де Фриза превращается из дифференциального уравнения в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение ($\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -V \frac{du}{d\xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du}{d\xi}$):

$$(u - V) \frac{du}{d\xi} + \beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0. \text{ Интегрируя это уравнение, получим } \left(\frac{u^2}{2} - Vu \right) + \beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} = C_1.$$

По своему виду это уравнение совпадает с уравнением нелинейного консервативного осциллятора (см. пункт 3 § 3) с потенциальной энергией (константу интегрирования C_1 положим равной нулю) $U(u) = -\left(\frac{u^3}{6} - V \frac{u^2}{2} \right)$. Фазовый портрет такого осциллятора показан на рис. 5.7. Из рис. 5.7 видно, что возможен целый ряд реше-

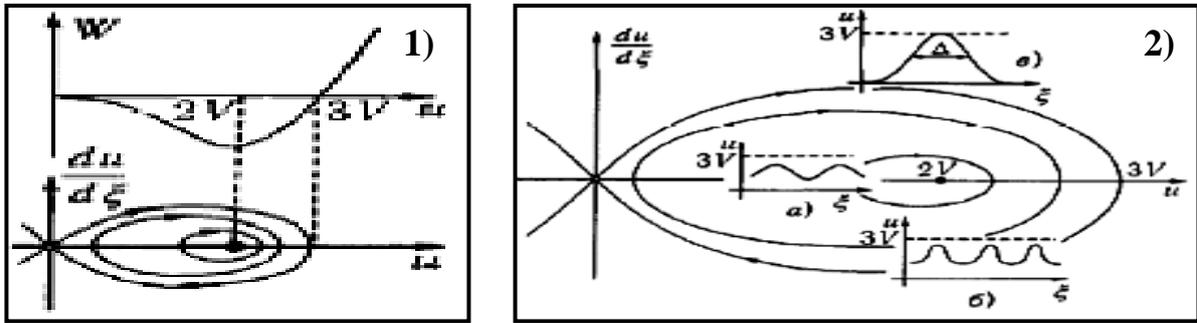


Рис. 5.7. Потенциальная энергия нелинейного консервативного осциллятора (1) и виды решений уравнения Кортевега-де Фриза (2): а) квазисинусоидальная волна (осцилляции вблизи центра); б) кноидальная волна (колебания вблизи сепаратрисы); в) уединённая волна или солитон (движение происходит вдоль сепаратрисы).

ний в зависимости от того, в какой части фазового пространства находится волна. Вблизи центра нелинейность системы не сказывается на волны с малой амплитудой, поэтому форма волны близка к синусоидальной. В окрестности сепаратрисы проявляется сильная нелинейность системы, что приводит к формированию особого вида волн: кноидальных и уединённых (солитонов, рис. 5.8).

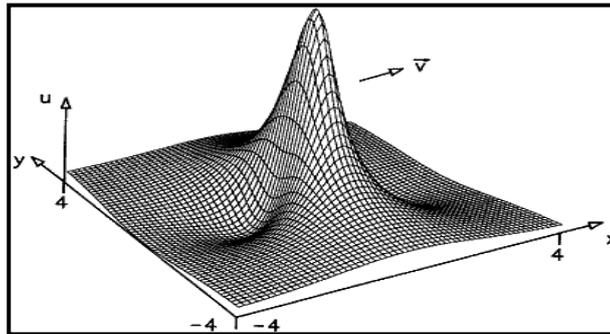


Рис. 5.8. Уединённая волна (солитон).

Решение уравнения Кортевега-де Фриза, отвечающее солитону, имеет вид:

$$u(x; t) = \frac{u_{\max}}{ch^2(\xi/\Delta)}, \text{ где } u_{\max} = 3V - \text{амплитуда и } \Delta = \sqrt{4\beta/V} - \text{ширина солитона, со-}$$

ответственно. Из полученных равенств видно: узкий солитон имеет большую амплитуду и движется быстрее широкого солитона. Однако свойство *перемещиваемости* динамической системы приводит к одинаковому количеству “быстрых” ($\Delta \rightarrow 0$) и “медленных” ($\Delta \gg 1$) солитонов.

Уединённая волна является устойчивым образованием. Для разъяснения этого факта введём в рассмотрение безразмерный параметр $\sigma = \frac{V\Delta}{4\beta}$, который характе-

ризует отношение нелинейности к дисперсии в системе: чем выше числитель дроби, тем сильнее нелинейность. Для солитона это отношение равно 1, т.е. эффекты нелинейной перестройки компенсируются дисперсионным расплыванием солитона. Если параметр σ мал ($\sigma \ll 1$), то возникающие возмущения воспринимают среду в виде вещества с линейной дисперсией: в системе появляются гармоники с большой длиной волны, что влечёт за собой увеличение параметра σ вплоть до “рождения” солитона. В противоположном случае ($\sigma \gg 1$) дисперсионные эффекты практически не наблюдаются, нелинейность системы порождает гармоники с

весьма малой длиной волны. Только после формирования этих коротких импульсов включается дисперсия среды, которая и приводит к образованию уединённой волны.

Уединённые волны возникают в системах, которые различаются по физической природе. Например, на рис. 5.9 показаны солитоны на поверхности магнитной жидкости, а на рис 5.10 – уединённые волны, возникающие на резонансе.

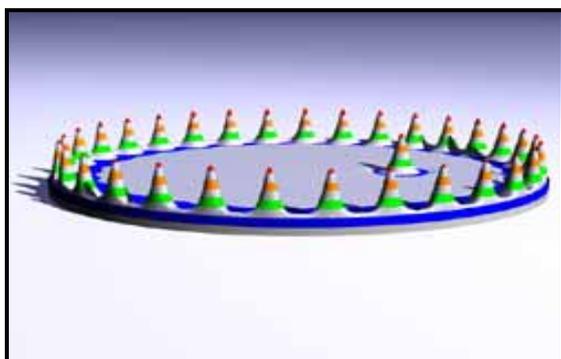


Рис. 5.9. Солитоны на поверхности магнитной жидкости.

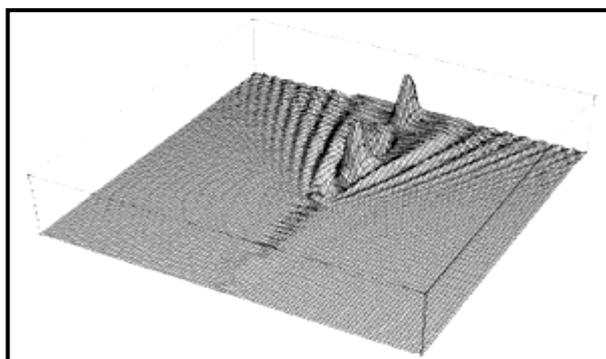


Рис. 5.10. Уединённые волны, рождённые на резонансе.

Исследование взаимодействия солитонов показывает, что они ведут себя как классические частицы: притягиваются, отталкиваются и колеблются друг относительно друга. Например, если различие скоростей невелико и расстояние между солитонами значительно превышает их ширину, то взаимодействие уединённых волн может быть описано согласно закону Ньютона. Солитоны могут существовать также в виде устойчивых вихрей в атмосфере – *солитоны Россби*. Вращение и направление движения вихря противоположны вращению планеты (*антициклон*): давление в центре вихря всегда больше, чем на его границах.

3. Стохастические движения вещества

При отсутствии случайных внешних сил (или полей) и достаточно больших скоростях течения в сплошных средах возникают стохастические движения. Изучим поведение детерминированной распределённой системы и выясним физическую сущность процесса, в результате которого возникает *турбулентность* (*неупорядоченные, хаотические* движения в сплошной среде, рис. 5.11). Гидродинами-



Рис. 5.11. Неупорядоченные, хаотические движения в струйке сигаретного дыма.

ческие течения вязкой жидкости описываются:

– уравнением Навье-Стокса: $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}$,

– уравнением неразрывности среды: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$ (жидкость называется

несжимаемой, если $\nabla \cdot \vec{u} = \text{div } \vec{u} = 0$),

– уравнением состояния жидкости: $P = P(\rho)$,

где $\vec{u}(x; y; z; t)$ – скорость движения среды; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – оператор гради-

ента; P – давление в системе; ρ – плотность жидкости; ν – коэффициент вязкост-

ти; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Решение этих уравнений при больших ско-

ростях течения жидкости противоречит экспериментальным данным. Например,

согласно эксперименту, сопротивление движению пропорционально квадрату сред-

ней скорости по сечению трубы (*закон Шези*). По теории Навье-Стокса оно рас-

тёт прямо пропорционально первой степени средней скорости (*закон Пуазейля*).

При исследовании течения струек подкрашенной жидкости Рейнольдс ввёл пара-

метр $Re = uD/\nu$ (D – диаметр трубы). Он показал, что при числах $Re < 2000$ наблюда-

ется ламинарное течение (ламинарный режим течения жидкости происходит при

скоростях меньших *30 см/сек*) и справедлив закон Пуазейля. При больших числа

Рейнольдса возникают случайные движения (*турбулентность*), а сопротивление

потoku подчиняется закону Шези. Турбулентный режим сопровождается возник-

новением большого числа вихрей (рис. 5.12 и 5.13), причём возникающие малые

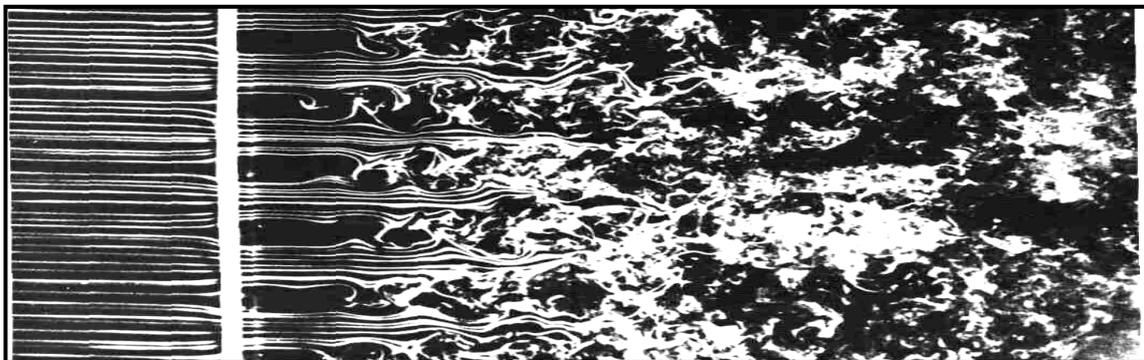


Рис. 5.12. *Переход от ламинарного к турбулентному режиму течения.*



Рис. 5.12. *Возникновение вихря при турбулентном движении воздуха.*

вихри отбирают энергию у больших и передают её ещё меньшим вихрям. Следовательно, диссипация энергии при турбулентности порождает целый спектр вихрей, минимальный размер которых регулируется вязкостью среды. *Перемешивание* вихрей происходит до выравнивания числа больших и малых вихрей. Критический линейный размер вихря можно оценить, используя определение числа Рейнольдса $l_{кр} = \frac{D}{Re_{кр}} = \frac{\nu}{u_{кр}}$. Вихри, размер которых сравним с критическим, можно

считать малыми, а при значительном превышении этого размера – большими.

Основной теоретической проблемой при описании турбулентности является выяснение причин её возникновения и механизма реализации. Например, в модели Ландау-Хопфа появление хаотических движений объясняется как серия последовательных неустойчивостей. Перепутывание возникающих возмущений и постоянное появление новых флуктуаций порождает хаос в первоначально упорядоченном течении. Объяснение причин возникновения турбулентности требует привлечения бесконечной последовательности степеней свободы. Это связано с мнением, выработанным в статистической физике: с точки зрения теории Ньютона можно детерминированно описать движение каждой частицы, но движение системы даже невзаимодействующих частиц настолько сложное, что динамический подход теряет смысл. По *теории Ландау-Хопфа* переход к хаосу системы с бесконечным числом степеней свободы происходит следующим образом: равновесное состояние становится неустойчивым при определённом значении управляющего параметра и порождает в своей окрестности предельный цикл. В процессе появления предельного цикла происходит возникновение периодического движения, которое также теряет устойчивость. Вместо предельного цикла возникает плоский тор, вырождающийся затем в трёхмерный тор. При достаточно большом числе возникающих гармоник описанный квазипериодический процесс выглядит случайным. В результате очередной бифуркации состояния динамической системы возможно появление странного аттрактора, отвечающего возникновению стохастического течения со сплошным энергетическим спектром.

Аналогично тому, как нелинейность и дисперсия среды стабилизируют новое состояние при движении вблизи сепаратрисы, так наличие вязкости у среды подавляет гармоники с высокой “самостоятельностью” (мелкомасштабные возмущения). Это приводит к возникновению конечномерного множества в бесконечномерном фазовом пространстве, к которому притягиваются все фазовые траектории системы при переходе в *турбулентный* режим.

Особый интерес у теоретиков и экспериментаторов вызывают анизотропные турбулентные течения, в которых были обнаружены когерентные структуры. Они существенно влияют на физические параметры потоков и являются составной частью турбулентного течения наравне с глобально средним течением и стохастическим компонентом. Стохастический компонент связан с возникновением случайных возмущений и *фрактальной структурой* множества особенностей поля завихренности. Сильно анизотропные течения в пограничном слое или в слое смешения пока не исследованы теоретически, что связано, по-видимому, с необходимостью учёта энергетических эффектов и перераспределения энергии между нормальными составляющими тензора напряжений.



§ 6. Вейвлет-анализ

“В своей работе я всегда пытался объединить истину с красотой, а когда мне приходилось выбирать между ними, я обычно выбирал красоту.”

Г. Вейль

“Одна из принципиальных целей теоретического исследования в любой области знания состоит в том, чтобы найти ту точку зрения, с позиции которой изучаемый объект проявляется в своей величайшей простоте”.

Д. У. Гиббс

1. Солитоноподобное преобразование

Распознавание образов, одиночных и множественных сигналов, дешифровка рентгенограмм, исследование турбулентности, кодирование и свёртывание больших объёмов информации осуществляется с помощью вейвлет-анализа (“wavelet” (Гроссман, Морле (1984)) в переводе с английского языка означает “маленькая волна” или “всплеск”). Солитоноподобное преобразование базируется на использовании совокупности функций, обладающих свойством пространственной (или временной) и частотной локализованности. Локализация всплеска позволяет проанализировать поведение системы в обычном пространственно-временном континууме и в частотном пространстве. Вейвлеты образуют иерархический базис и используются для моделирования нелинейных процессов в динамических системах, например, перемежаемости. Они позволяют получить крупномасштабную и высокочастотную информацию о диссипативной системе. В отличие от Фурье-анализа, всплески являются “математическим микроскопом”, с помощью которого изучают внутреннюю природу неоднородных объектов и их *скейлинговые* (“scale” – масштаб) свойства.

Проведём сравнение вейвлет-преобразования с представлением 2π -периодической функции $f(t)$ в виде ряда Фурье $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, где коэффициенты ряда вы-

числяются по формуле $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. В этом случае функция раскладывается

на гармоники, т.е. задаётся в виде суперпозиции бесконечного числа синусоидальных волн с разными амплитудами и частотами. Для непериодических и определённых на всей числовой оси функций необходимо построить новые ряды, позволяющие вычислять значение функции и отображать её график на любом интервале. Для решения поставленной задачи будем использовать маленькие “волны”, которые быстро сходят на нет при стремлении аргумента функции к любой из бесконечностей. Построение вейвлета $\psi(t)$, способного покрыть всю числовую ось, можно осуществить с помощью сдвигов, т.е. определив функцию $\psi(\omega t - n)$, где частота вейвлета $\omega = 2^k$. Для простоты рассуждений будем считать, что числа n и k являются целыми. Если базисный вейвлет $\psi(t)$ имеет единичную норму, то все остальные функции множества $\psi_{k,n} = 2^k \psi(2^k t - n)$ также будут нормированы на единицу, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{kn}(t) \psi_{lm}(t) dt = \delta_{kl} \delta_{nm} \quad (\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \text{ – символ Кронекера}).$$

Следовательно, любая непериодическая функция, заданная на всей числовой оси, может быть представлена в виде вейвлет-ряда: $f(t) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} b_{kn} \psi_{kn}(t)$. Простейшим ор-

тогональным вейвлетом является функция Хаара, которая задаётся формулой

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$$

В общем случае вейвлет-базис может быть сконструирован с применением масштабных преобразований (скейлинговый коэффициент a) и переносов (параметр b) материнского вейвлета $\psi(t)$: $\psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ (параметры a и b могут быть

и комплексными числами). Тогда интегральное вейвлет-преобразование произвольной функции имеет вид $W_{\psi} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}^*(t) dt$. Обратное преобразование задаётся

формулой $f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(t) \psi_{ab}(t) \frac{dad b}{a^2}$, где нормирующий коэффициент $C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_{ab}(\omega)| \frac{d\omega}{\omega}$.

Из теории анализа сигналов известно, что частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности. Следовательно, для получения высокочастотной информации надо извлекать её из узких временных интервалов, а низкочастотную – из относительно длительных промежутков времени. Такими свойствами всплеск обладает в соответствии со своим определением: локальность; обладает

нулевым средним порядка m по времени $\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0$ ($m=0, 1, \dots$); ограниченность

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi^*(t) dt < \infty$; автомодельность базиса сводится к тому, что все члены множест-

ва базисного вейвлета имеют такое же число осцилляций, что и основной вейвлет. На практике наиболее часто используют вейвлеты и их Фурье-образы, изображённые на рис 6.1. На рис. 6.1а и б показаны вейвлеты, полученные с помощью рас-

пределения Гаусса $\psi_m(t) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right)$ (Фурье-образ $\tilde{\psi}_m(k) = m(i k)^m \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)$)

при $m = 1$ и $m = 2$, соответственно. На рис. 6.1в и г отображены вейвлеты Морле $\psi(t) = \exp(i k_0 t) \exp(-t^2/2)$ ($\tilde{\psi}(k) = \theta(k) \exp(-(k - k_0)^2/2)$), специальная функция Хевисайда

$\theta(k) = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$) при различных значениях параметра k_0 . Вейвлеты Паули, которые ис-

пользуются в квантовой механике, $\psi_m(t) = \Gamma(m+1) \frac{i^m}{(1-it)^{m+1}}$ (Фурье-преобразование

имеет вид $\tilde{\psi}_m(k) = \theta(k) k^m \exp(-k)$) показаны на рис. 6.1д и е. Вейвлеты Гаусса приме-

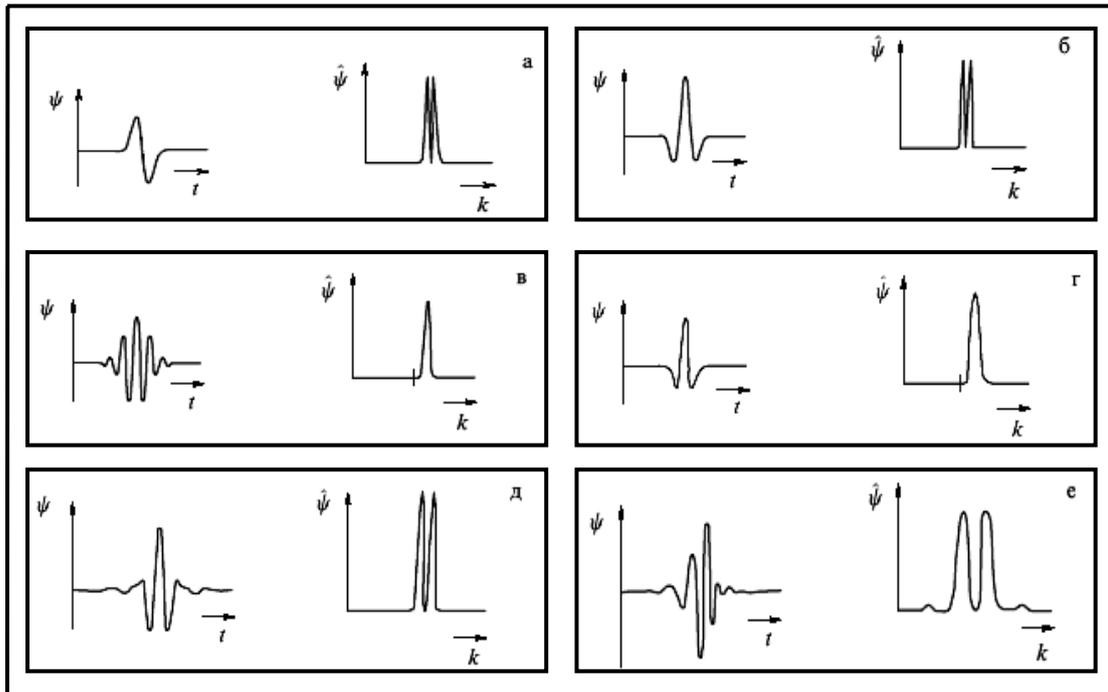


Рис. 6.1. Вейвлеты и их Фурье-трансформанты:
 а – WAVE; б – MHAT; в – Morlet; г – Paul; д – LMB; е – Daubechies.

няются при анализе сложных сигналов и изотропных полей. Комплексные вейвлеты Морле сохраняют направление времени и применяются для исследования причинно-следственных сигналов, они не создают интерференции между прошлым и будущим. В результате применения вейвлет-анализа получают двухпараметрическое множество $W_\psi(a; b)$, которое обычно отображается изолиниями на плоскости параметров a и b (рис. 6.2). На рис. 6.2б тёмные области отображают положительные значения коэффициентов $W_\psi(a; b)$, а светлые – их отрицательные значения.

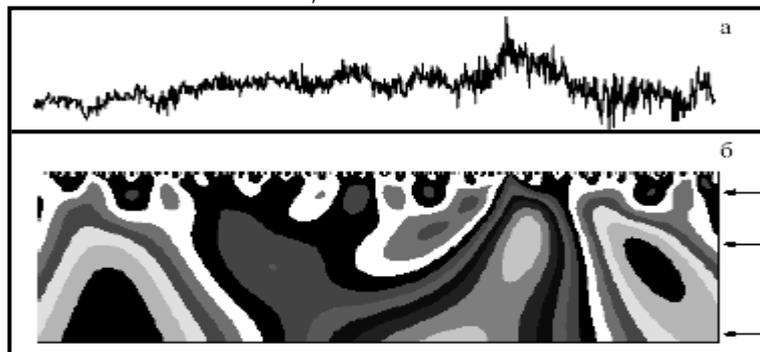


Рис. 10.2. Анализируемый сигнал (а) и изообласти параметров $W_\psi(a; b)$ (б).

2. Вейвлет-образы модельных сигналов

Рассмотрим нахождение вейвлет-образов $W_\psi(a; b)$ синусоидальной функции $\psi(t) = \sin(2\pi t/T_1) + \alpha \sin(2\pi t/T_2)$ при разных значениях параметров:

1). $T_1 = 25$, $\alpha = 0$. Вейвлет-преобразование синусоиды с частотой $\omega_1 = 2\pi/T_1$ отображено на рис. 6.3. Верхняя часть рис. 6.3б демонстрирует периодический характер исследуемого сигнала. Одинаковая длина линий и периодичность их появления указывает на единственность и постоянство частоты синусоиды.

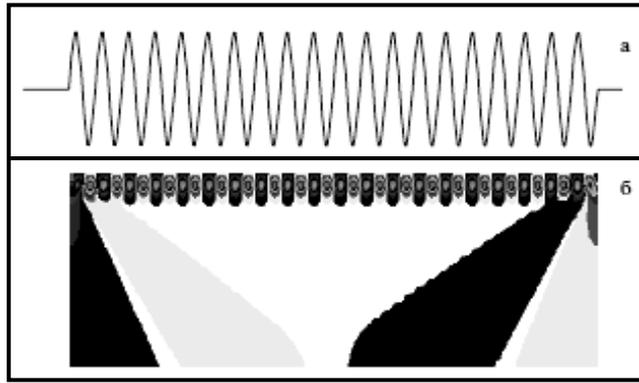


Рис. 6.3. Вейвлетное преобразование (б) синусоиды (а).

2). $T_1 = 200$, $T_2 = 40$, $\alpha = 0,4$. Коэффициенты преобразования показаны на рис. 6.4. Преобразуемая функция представляет сумму синусоид с сильно различающимися частотами $\omega_1 = 2\pi/T_1$ и $\omega_2 = 2\pi/T_2$. В результате резонанса высокочастотной компоненты синусоидальной функции с мелкомасштабными вейвлетами в верхней части рис. 6.4б наблюдаются периодически расположенные мелкие детали. Наличие корреляции между низкочастотной составляющей исследуемого сигнала и крупномасштабными вейвлетами отображено на рис. 6.4б в виде трёх тёмных и двух светлых областей параметров отображения $W_\psi(a, b)$.

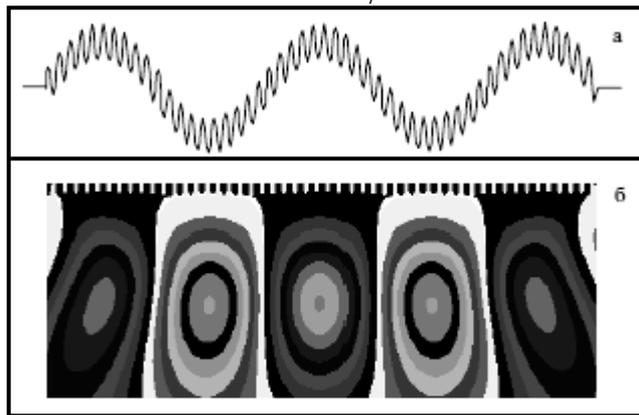


Рис. 6.4. Вейвлет-трансформанты $W_\psi(a, b)$ (б) синусоидальной функции (а).

3). Вейвлет-анализ в отличие от Фурье-преобразования позволяет различить включение другого сигнала через определённый промежуток времени (в данном случае рассматриваются синусоиды с периодами $T_1 = 25$, $T_2 = 50$) и сумму синусоид ($\alpha = 1$). Включение сигнала показано на рис. 6.5а, а сумма синусоид на рис. 6.5б.

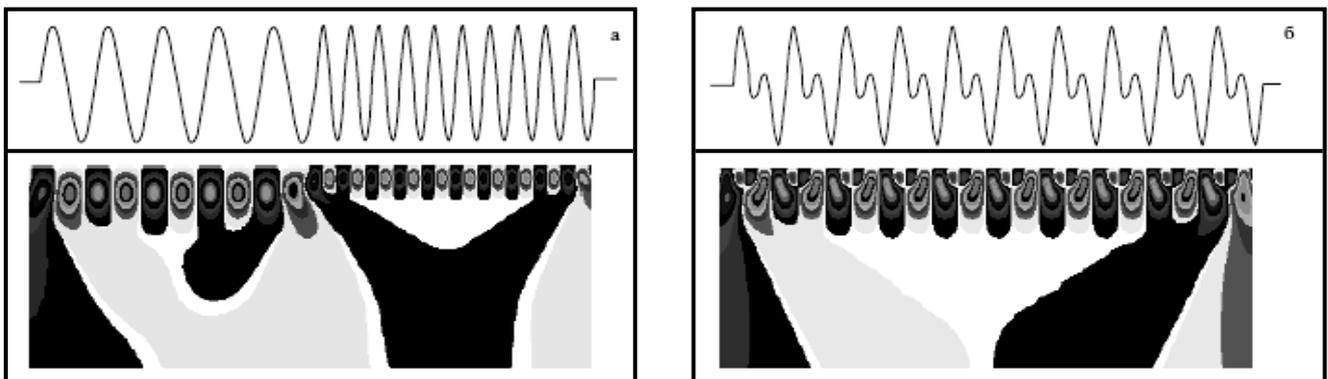


Рис. 6.5. Вейвлет-отображение включения сигнала (а) и суммы синусоид (б).

4). Использование “маленьких волн” позволяет не только проанализировать отображаемую функцию, но и выявить её особенности, связанные, например, с фазовым сдвигом. Указанная особенность при сдвиге по фазе на π синусоиды с периодом $T_1 = 25$ показана на рис. 6.6. При анализе особенности сигнала с помощью ряда

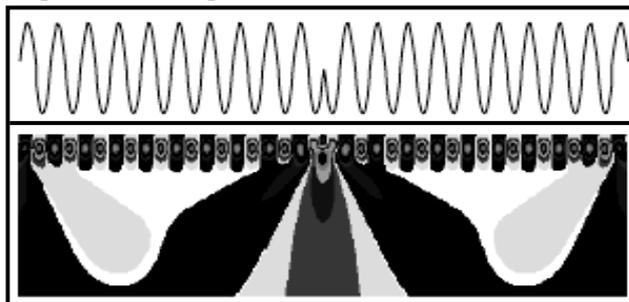


Рис. 6.6. Выявление особенности анализируемого сигнала.

Фурье приводит к появлению дополнительных пиков, так как особенность влияет на значения всех коэффициентов и частоты Фурье-преобразования. Это приводит к неправильной интерпретации сигнала: предполагается существование нескольких масштабов, в то время как он один. В реальных сигналах часто присутствуют импульсные помехи, различного рода наклоны и ступеньки, которые плохо выявляются гармониками Фурье. Вейвлетные функции позволяют определить не только особенность сигнала, но её положение и вид. Изолированная особенность локально влияет на отображающий вейвлет, поэтому её можно скорректировать или удалить из сигнала.

3. Применение вейвлетного анализа

Иерархичность базиса вейвлетов способствует их применению для анализа каскадов различной природы, турбулентности, фрактальных множеств (см. § 11) и временных рядов.

1) **Фрактальные множества.** Рассмотрим вейвлетное представление фрактала Кантора. Это множество строится следующим образом: данный отрезок делится на три части, после чего средний отрезок выбрасывается; описанный процесс продолжается до бесконечности (“канторовская пыль” показана на рис. 6.7а, см.

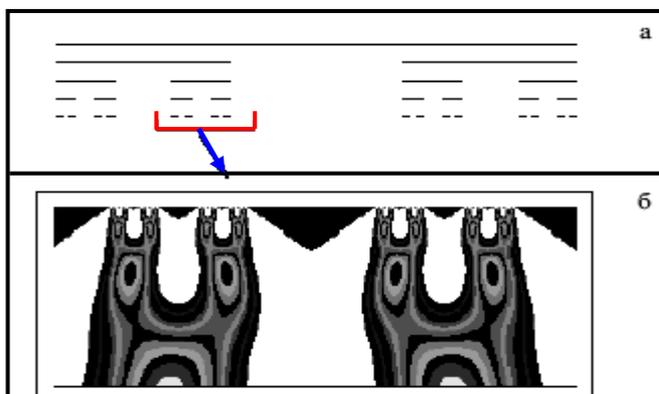


Рис. 6.7. Вейвлет-анализ фрактала Кантора.

также пункт 2 §11). “Канторовская пыль” в дальнейшем используется для построения двоичного множества, состоящего из последовательности нулей (отрезок отсутствует) и единиц (наличие отрезка). Картина вейвлетных коэффициентов (рис.

6.76) чётко демонстрирует иерархию подмножеств фрактала Кантора, отображая распад каждого максимума более высокого уровня на два максимума нижележащего множества.

2) Изменение погодных условий. Некоторые физические процессы описываются временными рядами, которые представляют собой долговременные наблюдения за параметрами физического явления. Например, изучение метеорологических условий в Тихом океане привело к выявлению крупномасштабного атмосферно-океанического явления, известного под кодовым названием Южное Колебание (в атмосфере) и Эль-Ниньо (в океанических водах). Этот процесс возникает в результате резкого потепления воды вблизи тихоокеанского побережья Центральной Америки, приводит к перемещению огромных масс воздуха между Восточным и Западным полушариями, что влияет на состояние всей земной атмосферы. Южное Колебание и Эль-Ниньо представляют собой планетарные “качели”, которые не только перегоняют массы воздуха, но и являются причиной возникновения муссонов, сопровождаемых проливными тропическими дождями. Атмосферно-океанические изменения описываются с помощью временной зависимости некоторого индекса $S(t)$, который определяет состояние системы океан-атмосфера. При отрицательном значении этого индекса происходит заметное снижение градиента давления между земными полушариями. Уменьшение сопротивления ветра приводит в движение тёплые океанические воды. Они устремляются вдоль побережья Южной Америки на север (Эль-Ниньо), что и приводит к возникновению Южного Колебания в атмосфере планеты. Резкие смены температуры воды и воздуха могут привести к экологическим катастрофам в океане и на суше: тайфунам в Китае, холодным зимам в Восточной Азии, засухам в Австралии, разливам Нила в Египте и т.п. На рис. 6.8а показан временной ряд, отображающий число появлений Эль-Ни-

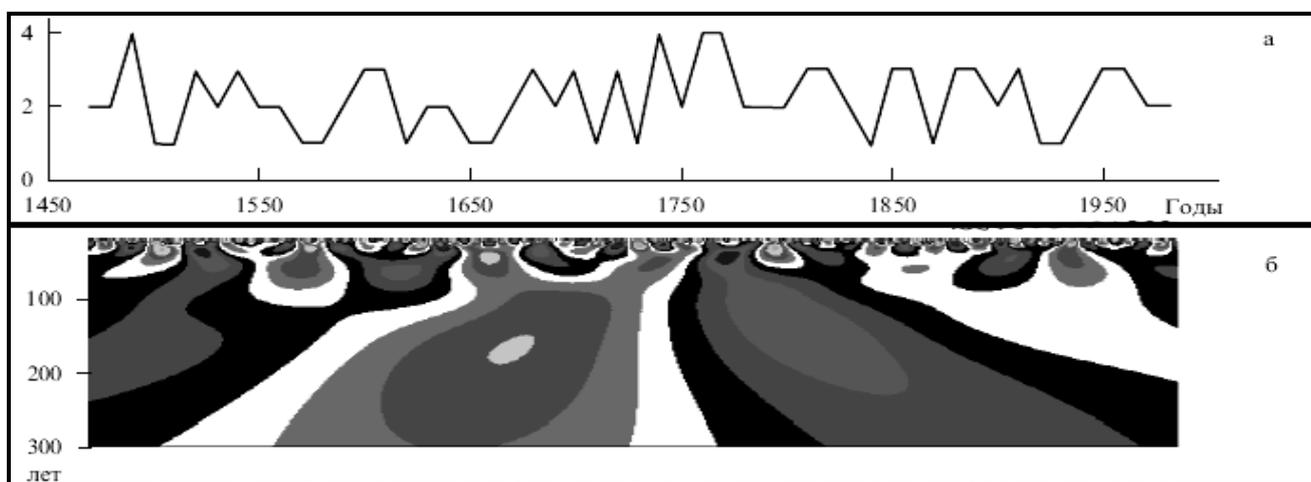


Рис. 6.8. Временная зависимость числа появлений Эль-Ниньо (а) и его вейвлет-диаграмма (б).

ньо в разные годы, а также диаграмма вейвлетного анализа этого ряда. Вейвлет-анализ среднемесячных колебаний индекса $S(t)$ показал автомодельность процесса Южное Колебание – Эль-Ниньо и наличие иерархии периодов, отображающих каскадность процесса, от месяца до нескольких десятков лет.

3) Сложные атомные структуры. Отсутствие точного аналитического метода решения проблемы многих тел предполагает построение приближённых мо-

делей. Поэтому в настоящее время преобладают экспериментальные методы исследования электронных спектров многочастичных атомарно-молекулярных систем. Сложность и фрактальная природа спектров осложняет их расшифровку с помощью гармонических рядов Фурье. Например, для описания потенциала атома урана требуется 2^{100} коэффициентов Фурье, вычисление которых является непосильной задачей даже для современных, быстродействующих компьютеров. Использование всплесковых функций позволяет восстановить потенциал атома с высокой точностью и надёжностью (рис. 6.9).

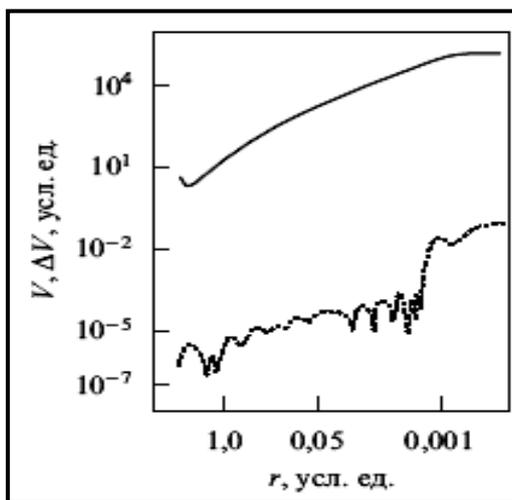


Рис. 6.9. Кулоновский потенциал V и точность его вычисления ΔV в зависимости от расстояния r до атома.

4) Ветвящиеся процессы рождения частиц на ускорителях. Столкновение частиц с достаточно высокими энергиями сопровождается рождением большого числа новых кратко- и долгоживущих частиц. Вновь рождённую частицу можно представить точкой в фазовом пространстве. Динамика процесса описывается различными конфигурациями таких точек. Идентификация объектов в фазовом пространстве может проводиться с применением вейвлетов, что позволит открыть новые редкие явления в области ядерных процессов. В частности, всплесковые функции позволили обнаружить кольцевые структуры, которые были интерпретированы как статистические флуктуации. Вейвлет-анализ отделяет наиболее интенсивные флуктуации, которые не могут определяться статистическими закономерностями, а следовательно, являются новыми частицами.

5) Помпаж в авиационных моторах. При работе авиационного двигателя с течением времени происходит изменение давления в его компрессоре. Возмущения в воздухе, забираемом аксиальным компрессором, могут привести к газодинамической неустойчивости за лопатками турбины; от них отрываются вихри. Эти потоки неустойчивости могут стать причиной нерегламентной работы мотора. Раннее выявление флуктуаций скорости воздушного потока с помощью анализа солитоноподобными функциями позволяет значительно снизить энергетические потери и риск авиационной катастрофы.

6) Вейвлет-анализ биений сердца. Изучение временных интервалов между биениями сердца с помощью “маленьких волн” привело к установлению новой меры в определении ритмичной динамики сердца. Для анализа составлялась временная последовательность интервалов между сердцебиениями, описываемая функцией от номера интервала, что дало возможность различать здоровых и больных пациентов (рис. 6.10). Приведенная методика вызывает сомнение в связи со статистической зависимостью вейвлет-коэффициентов между собой.

Расшифровка измерений электрической активности сердца (*электрокардиограмма*) и мозга (*энцефалограмма*) выявила ряд особенностей в деятельности этих органов. Аномалии в электрокардиограмме проявляются на больших масштабах, а нормальные структуры наблюдаются на малых масштабах. Вейвлетное исследование энцефалограммы надёжно выявляет центры эпилептической активности и отс-

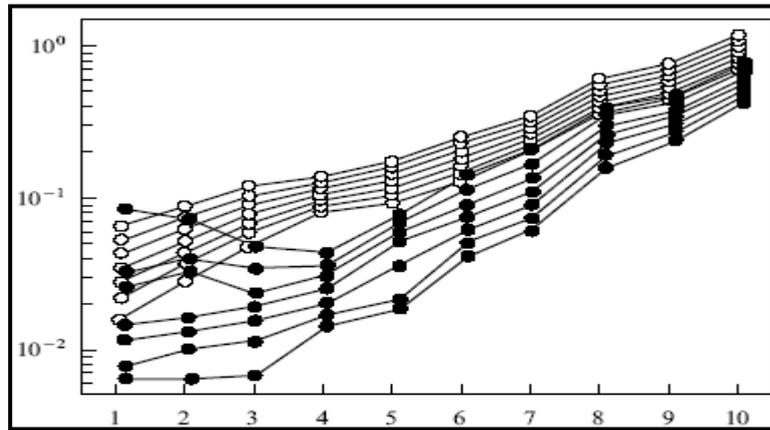


Рис. 6.10. Дисперсии вейвлет-коэффициентов здоровых (○) и больных (●) пациентов.

леживает её распространение в мозге.

7) Классификация клеток крови (эритроцитов). Эритроциты или клетки крови различаются геометрической формой, которая зависит от вида заболевания. В этой связи фиксация различий в очертании эритроцитов является основной задачей диагностики болезни. Применение двумерных вейвлетов даже к плохим фотографиям мазков крови приводит к хорошему распознаванию эритроцитов после удаления шумов и случайных деталей (рис. 6.11). Сортировка клеток крови была

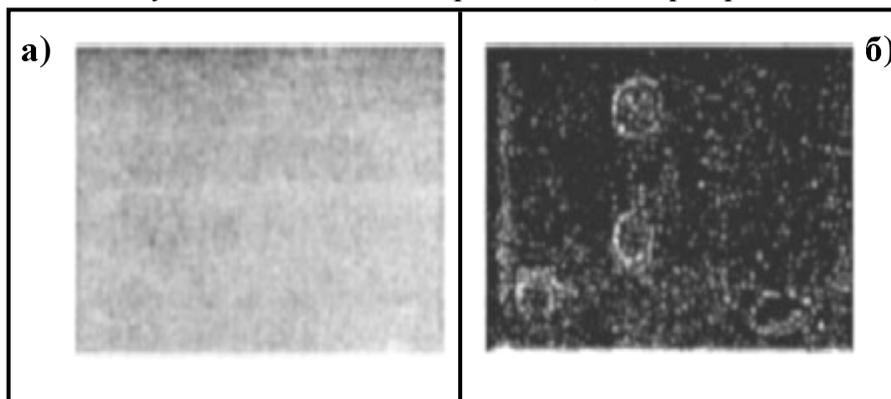


Рис. 10.11. Микроскопная (а) и после вейвлетной обработки (б) фотография эритроцитов.

проведена экспертом и его выводы заложены в программу распознавания и классификации форм эритроцитов, что значительно сократило время анализа клеток крови.

8) Сжатие и кодирование информации. Хранение и кодирование информации в компьютере с ограниченной памятью и передача данных по линиям связи с ограниченной пропускной способностью требует их сжатия и декодировки. Сжатие сигнала и его реконструкция проводятся с применением прямого и обратного вейвлет-преобразования. Оцифровка информации используется в дальнейшем для воспроизведения данных и картин на экране компьютера. Однако хранение информации в оцифрованном виде требует больших объёмов памяти. В этой связи были разработаны различные способы сжатия информации: *архивация* данных происходит без потери их первоначального вида, а при *квантовании* информации происходит её частичная потеря. На рис. 6.12 представлено сжатие оригинальной фотографии (а) по JPEG-алгоритму (б) и с использованием вейвлетов (в). Сравнение вос-

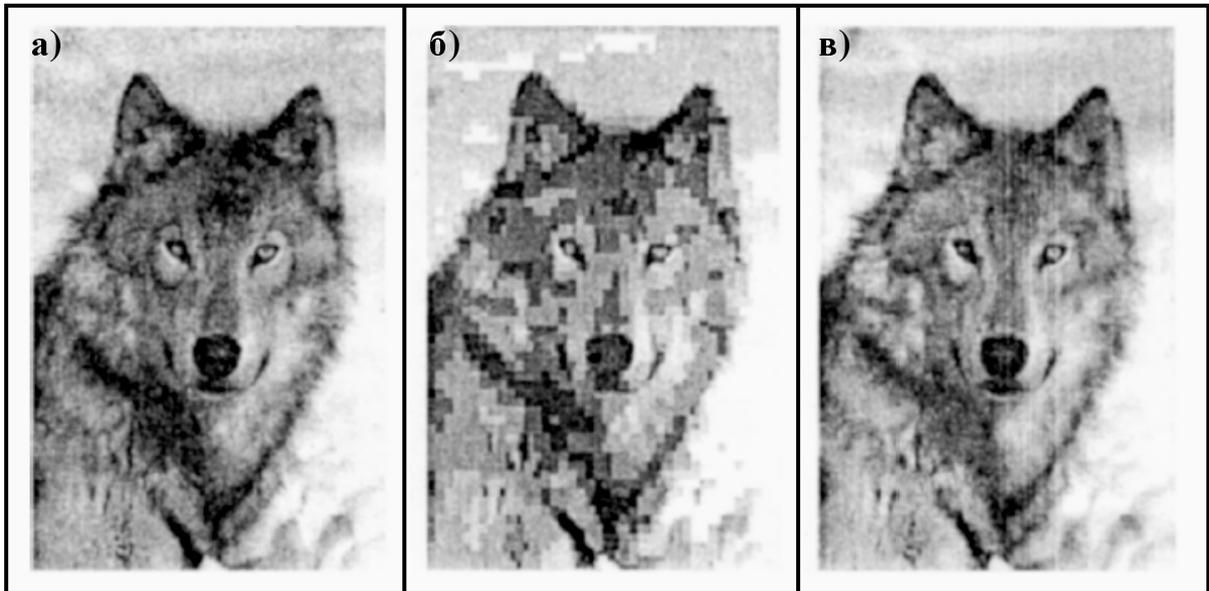


Рис. 6.12. Сжатие фотографии волка по разным алгоритмам.

становленных изображений демонстрирует значительное превосходство вейвлет-реконструкции в сравнении с JPEG-алгоритмом.

Исходя из вышеизложенного материала, можно утверждать, что вейвлетное представление выявляет структуру анализируемой информации, масштабы происходящих событий, даёт их частотную характеристику. Всплесковые функции выявляют особенности стационарных и переменных сигналов, локализованные периодичности процессов, избавляют информационный объект от зашумлённости и хорошо реконструируют исходные данные. Следует отметить, что вейвлет-преобразование не является заменой гармонического анализа Фурье, оно его дополняет и уточняет. Вейвлеты представляют собой перспективный инструментальный для численного решения обыкновенных и других дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные, неравновесные и необратимые процессы, в которых присутствуют нелокальные взаимодействия с разными временными и пространственными масштабами.

Простота и красота вейвлет-анализа является привлекательной чертой для исследователей как фундаментальных, так и прикладных задач. Это связано со свойствами вейвлетов: их ортогональность приводит к получению независимой информации на разных масштабах; сохранение информации на разных этапах преобразований обеспечивается нормируемостью вейвлетов; локальность позволяет не только определить строение сигнала, но и “высветить” имеющиеся особенности; полнота вейвлетного базиса даёт возможность восстановить первоначальный вид сигнала при подавлении шумов различной природы. Эти характерные черты вейвлетов позволяют анализировать и синтезировать объекты, принадлежащие разным уровням организации материи. Обобщение вейвлет-преобразования на многомерные случаи приводит к возможности анализа и отображения объёмных процессов и явлений, к незаменимости вейвлетов при распознавании сигналов разной природы. Однако не стоит поддаваться иллюзиям, что вейвлеты позволят решить любую задачу. Как отмечал Мейер, “ни один *“универсальный алгоритм”* не сможет подойти к тому исключительно разнообразному набору ситуаций, с которым нам приходится сталкиваться”.



§ 7. Катастрофы

“Функции, как и живые существа, характеризуются своими особенностями.”

П. Монтель

“**Катастрофами** называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий.”

В.И. Арнольд

“Чем ближе Вселенная к состоянию максимальной энтропии, тем меньше возникает возможностей для дальнейших изменений.”

Р. Клазиус

1. Складка и равновесие

Классификация статических неустойчивостей в общей теории Уитни-Тома-Мезера основана на топологическом подходе и использует понятие *структурной устойчивости* по Андронову и Понтрягину (1937). Это позволило авторам выделить классы неустойчивостей в зависимости от количества *управляющих параметров*. Известно, что структурная устойчивость связана с видоизменением функции состояния при малых возмущениях.

В качестве примеров рассмотрим поведение элементарных функций $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = x^4$, первая производная которых обращается в нуль при значении аргумента $x=0$ (критическая точка). Пусть эти функции испытали малые возмущения: $y = x^2 - \varepsilon x$ (см. рис. 7.1а), $y = x^3 - \varepsilon x$ (рис. 7.1б) и $y = x^4 - \varepsilon x^2$ (рис. 7.1в), где $\varepsilon \ll 1$ – ма-

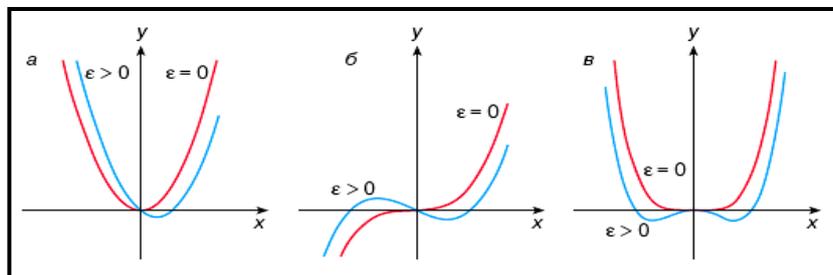


Рис. 7.1. Изменение функций при малых возмущениях.

лый параметр. Критическая точка первой функции осталась единственной, а минимум функции сдвинулся вправо и вниз. У второй и третьей функций появились новые критические точки. В этой связи первая функция является *структурно устойчивой*, а вторая и третья – *структурно неустойчивыми*. Любая математическая модель строится с учётом пренебрежения малых вкладов. Для систем, описываемых структурно устойчивыми функциями, это вполне оправдано. Однако для систем, которые отображаются структурно неустойчивыми функциями, отбрасывание малых величин приводит к пренебрежению возможными физическими явлениями, эффектами и процессами. Различают *статические* (элементарная теория катастроф) и *динамические* (теория катастроф) структурные неустойчивости. Статические структурные неустойчивости описываются зависимостями $U(q)$ от обобщённых координат, причём уравнение *катастрофы* имеет вид $\partial U(q)/\partial q = 0$. Динамические структурные преобразования системы описываются функциями $Z(\dot{q})$, зависящими от обобщённой скорости процесса, *катастрофа* которого определяется

уравнением $\partial Z(q)/\partial \dot{q} = 0$. Катастрофой называется скачкообразное изменение поведения системы при медленном изменении управляющих параметров.

Сводка результатов, полученных в элементарной теории катастроф, приведена в таблице 7.1. На практике наиболее часто встречаются системы, в которых

Таблица 7.1.

Зависимость потенциальной энергии от управляющих параметров.

Вид потенциальной энергии	Число управляющих параметров	Структура катастрофы
$U = q^3 + aq$	1 – параметр a	Складка
$U = \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{2}aq^2 + bq$	2 – параметры a и b	Сборка
$U = q^5 + aq^3 + bq^2 + cq$	3 – параметры a, b и c	Ласточкин хвост
$U = q^5 + aq^4 + bq^3 + cq^2 + dq$	4 – параметры a, b, c и d	Бабочка
$U = q_1^3 + q_2^3 + aq_1q_2 - bq_1 - cq_2$	3 – параметры a, b и c	Гиперболическая омбилика
$U = q_1^3 - 3q_1q_2^2 + a(q_1^2 + q_2^2) - bq_1 - cq_2$	3 – параметры a, b и c	Эллиптическая омбилика
$U = q_1^2q_2 + q_2^4 + aq_1^2 + bq_2^2 - cq_1 - dq_2$	4 – параметры a, b, c и d	Параболическая омбилика

наблюдаются катастрофы типа складки или сборки. На рис. 7.2 показано семейство параметризованных кривых, показывающих изменение потенциальной энергии в зависимости от одного управляющего параметра при возникновении складки. На рис. 7.3 показано, что при медленном изменении управляющего параметра может

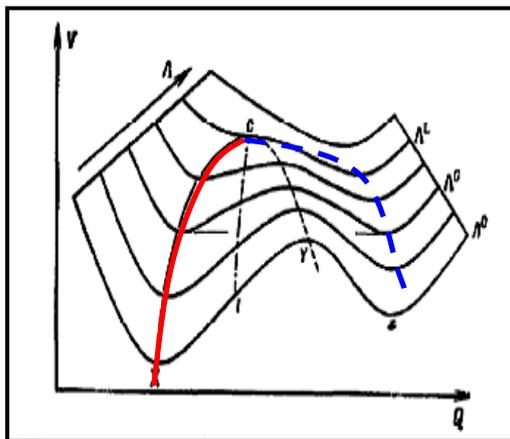


Рис. 7.2. Складка.

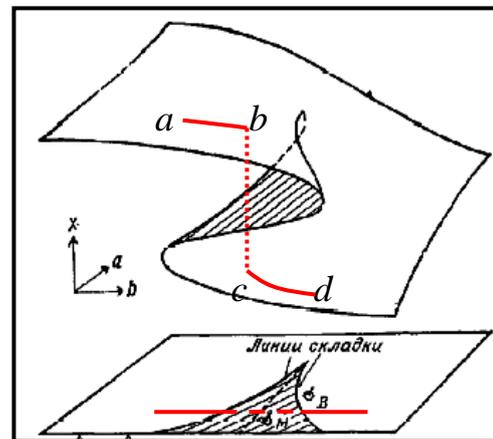


Рис. 7.3. Сборка.

происходить скачкообразный переход динамической системы из одного состояния в другое (траектория $abcd$) в случае катастрофы типа сборки. В частности, явление гистерезиса возникает тогда, когда возвратный скачок на сборке не происходит при тех же значениях управляющих параметров.

В качестве примера катастрофы типа складки рассмотрим равновесие стержня, соединённого с основанием пружиной. Пусть жёсткий стержень длиной l соединён с основанием нелинейно-упругой пружиной и находится под действием силы \vec{N} , которая сохраняет своё направление при отклонении стержня (рис. 7.4). В

начальный момент времени отклонение от вертикали задаётся углом θ_0 при недеформированной пружине. При угле θ сила \bar{N} создаёт вращательный момент

$$M_1 = N l \sin \theta,$$

которому противодействует восстанавливающий момент

$$M_2 = k_1(\theta - \theta_0) - k_2(\theta - \theta_0)^2$$

сжатой нелинейно-упругой пружины. Равенство этих моментов определяет стационарное состояние стержня, которое описывается уравнением

$$k_1(\theta - \theta_0) - k_2(\theta - \theta_0)^2 - N l \sin \theta = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) определяет экстремум потенциальной энергии жёсткого стержня, которая имеет вид:

$$U(\theta) = \frac{1}{2} k_1(\theta - \theta_0)^2 - \frac{1}{3} k_2(\theta - \theta_0)^3 - N l (1 - \cos \theta),$$

где слагаемое $-N l$ фиксирует начало отсчёта потенциальной энергии. При достаточно малых углах отклонения $\theta \ll 1$ (при этом и начальный угол довольно мал, т.е. $\theta_0 \ll 1$) можно воспользоваться эквивалентностью бесконечно малых величин

Рис. 7.4. Равновесие жёсткого стержня.

и записать: $\sin \theta \approx \theta$ и $1 - \cos \theta \approx \theta^2$. Это позволяет переписать нормированное на коэффициент k_2 выражение для потенциальной энергии в виде

$$\frac{U(\theta)}{k_2} = -\frac{1}{3} \theta^3 + a_2 \theta^2 + a_1 \theta + a_0,$$

где коэффициенты $a_2 = \frac{k_1}{2k_2} + \theta_0 - \frac{N l}{k_2}$; $a_1 = -\left(\frac{k_1}{k_2} + \theta_0\right) \theta_0$ и $a_0 = \left(\frac{k_1}{2k_2} + \frac{\theta_0}{3}\right) \theta_0^2$. Используя линейный сдвиг $\theta = q + a_2$, избавимся от квадратичного члена, тогда выражение для приведенной потенциальной энергии примет вид

$$\Pi(q) = \frac{U(q + a_2)}{k_2} + \frac{2a_2^3}{3} - a_1 a_2 - a_0 = -\frac{1}{3} q^3 + a q, \quad (5)$$

где параметр $a = a_2^2 + a_1$. Выражение (5) определяет функцию характерную для катастрофы типа *складка*. Уравнение (4) с учётом (5) примет вид $q^2 - a = 0$. При положительном значении управляющего параметра a ($a > 0$) полученное уравнение имеет два корня $q_{1,2} = \pm \sqrt{a}$. Эти корни определяют два стационарных состояния жёсткого стержня, одно из которых будет *структурно устойчивым* (минимум приведенной потенциальной энергии), а другое – *структурно неустойчивым* (максимум приведенной потенциальной энергии). Если коэффициент a обращается в нуль, то происходит слияние этих двух состояний, а стержень переходит в *лабильное* состояние. В этом состоянии система устойчива относительно отрицательных флуктуаций величины q и неустойчива к своим положительным возмущениям. Переход стержня в лабильное состояние соответствует бифуркации управляющего параметра. Для отрицательных значений параметра a ($a < 0$) функция (5) экстремумов не имеет.

2. Сборка и фазовые переходы

Катастрофа вида *сборки* позволяет объяснить целый класс разнообразных явлений из разных областей знания, в частности, возникновение фазовых переходов первого и второго родов. Различие между этими переходами состоит в следующем (рис. 7.5):

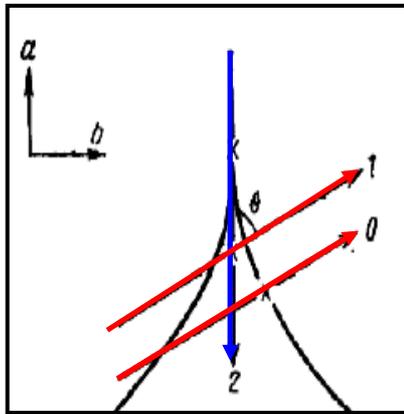


Рис. 7.5. Траектории переходов.

проходят через вершину сборки, что вызывает исчезновение фазового перехода второго рода.

Фазовые переходы первого рода сопровождаются скачкообразным характером изменения некоторых физических свойств и в термодинамике определяются уравнениями: $(\partial P/\partial V)_{T=T_c}=0$ и $(\partial^2 P/\partial V^2)_{T=T_c}=0$ (P – давление; V – объём фазы; T и T_c – температура и её значение в критической точке). Для фазовых переходов второго рода характерно непрерывное изменение физических свойств при скачкообразном изменении симметрии системы.

С физической точки зрения *катастрофа вида сборки* может быть ограничена следующими признаками:

1. *гетерогенность* (наличие двух фаз);
2. *метастабильность* (возможны состояния переохлаждённого пара и перегретой жидкости);
3. *скачкообразность* (прохождение через область скачков) и *плавность* (перевод одной фазы в другую вокруг критической точки через область значений параметров системы, лежащую вне области скачков) перехода из одной фазы в другую;
4. *гистерезис* (возникновение “памяти” о происходившем процессе);
5. *аномальность* поведения физических характеристик в критической области (уменьшение скорости распространения звуковых волн; *критическая опалесценция* (возникновение *мутности* жидкой фазы)).

В окрестности критической точки связь между управляющими параметрами (a и b) и физическими характеристиками фазы давлением P и температурой T должна быть линейной. Однако параметры a и b безразмерные, а давление и температура имеют размерность. Это препятствие может быть устранено введением

безразмерных характеристик с учётом их значений в критической точке (P_c и T_c): $(P - P_c)/P_c = p - 1$ ($P/P_c = p$) и $(T - T_c)/T_c = t - 1$ ($T/T_c = t$). Тогда связь между указанными величинами можно представить с помощью матрицы линейного отклика $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ в виде $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p-1 \\ t-1 \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что управляющие параметры равны: $\begin{cases} a = A(p-1) + B(t-1) \\ b = C(p-1) + D(t-1) \end{cases}$. Состояние системы определяется обобщённой координатой $q = (\rho - \rho_c)/\rho_c = \zeta - 1$ ($\rho = N/V$ и ρ_c – плотность вещества и её значение в критической точке; N – число частиц в объёме системы V ; $\rho/\rho_c = \zeta$). Уравнение сборки имеет вид $\partial U/\partial q = 0 = q^3 + aq + b$ или с учётом введённых обозначений и линейности отклика:

$$(\zeta - 1)^3 + [A(p - 1) + B(t - 1)](\zeta - 1) + C(p - 1) + D(t - 1) = 0. \quad (1)$$

Для нахождения констант A , B , C и D надо привлекать физические соображения. При $t \rightarrow \infty$ это уравнение должно вырождаться в уравнение состояния идеального газа. Идеальный газ описывается уравнением состояния Менделеева-Клапейрона $P = \frac{m RT}{M V}$, где m – масса газа с молекулярной массой M , $R = 8,314 \text{ Дж К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$ – универсальная газовая постоянная. В безразмерных переменных это уравнение имеет вид $Z_c p = \zeta t$, где $Z_c = p_c / (\zeta_c t_c)$ – коэффициент сжимаемости в критической точке. В пределе $t \rightarrow \infty$ плотность газа и давление в системе стремятся к нулю ($\zeta \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$), следовательно, для выполнения уравнения (1) требуется, чтобы разность коэффициентов $D - B = 0$ (иначе в уравнении (1) будет присутствовать бесконечное слагаемое), тогда $-1 + A + B - C - D = 0$ или с учётом равенства $D - B = 0$ окончательно находим, что $-1 + A - C = 0$. Если сгруппировать подобные члены в (1) и разделить уравнение на ζ , то получим

$$\zeta^2 - 3\zeta + 3 - A - B - (p/\zeta) + A p + B t = 0. \quad (2)$$

В уравнении (2) при $t \rightarrow \infty$ ($\zeta \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$) помимо слагаемых $B t$ и неопределённости p/ζ , которая компенсирует бесконечное слагаемое $B t$, остаётся выражение из констант $3 - A - B$, которое должно равняться нулю. Следовательно, уравнение (2) принимает вид

$$\zeta^2 - 3\zeta - \frac{p}{\zeta} + A p + (3 - A)t = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) можно преобразовать к безразмерному уравнению Ван дер Ваальса (1873), если параметр $A = \frac{1}{3}$: $\left(p + 3\zeta^2\right) \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}t$. Если вернуться к размерным величинам, то уравнение Ван дер Ваальса принимает вид $\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = \frac{m}{M}RT$, здесь параметры уравнения $\alpha = 3P_c V_c^2$, $\beta = V_c/3$ и $mR/M = 8Z_c/3$. Уравнение Ван дер Ваальса не удовлетворяет закону соответственных состояний, экспериментальную базу которого заложил Гуггенгейм, исследуя зависимость приведенной температуры t от безразмерной плотности ζ . Экспериментальные данные для разных газов укладываются на некоторую универсальную кривую (рис. 7.6). Из этих данных ви-

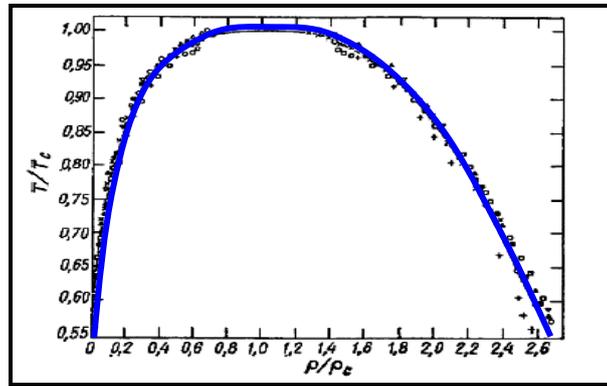


Рис. 7.6. Кривая Гуггенгейма, отображающая закон соответственных состояний.

дно, что

- выполняется *правило прямолинейного диаметра (правило Кальете-Маттиса)*: средняя плотность двухфазной системы (газ с плотностью ρ_g и жидкость с плотностью ρ_l) линейно зависит от расстояния до критической точки вдоль кривой фазового равновесия и описывается формулой

$$\frac{\rho_g + \rho_l}{2} = \rho_c \left(1 + \frac{3}{4} \frac{T_c - T}{T_c} \right);$$

- *параметр порядка* (разность плотностей жидкой и газовой фаз) вдоль кривой фазового равновесия имеет критический индекс равный 1/3 (по уравнению Ван дер Ваальса он равен 1/2), т.е. описывается формулой

$$\rho_l - \rho_g = \frac{7}{2} \rho_c \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{1/3}.$$

Итак, уравнение сборки можно использовать для вывода уравнения состояния вещества в окрестности критической точки. Однако несостоятельность уравнения Ван дер Ваальса и его модификаций ярко проявляется в неудовлетворительном согласии с законом соответственных состояний, демонстрирующего универсальный характер поведения веществ при фазовых переходах.

Складки и сборки встречаются во многих прикладных задачах, связанных со структурной неустойчивостью: гидростатическая неустойчивость мениска; пробой электроизоляции; прохождение света через среды; описание поведения животного и в других задачах. Например, рассмотрим поведение животного, которое одновременно испытывает страх и ярость (рис.7.7). Ярость побуждает его к нападению,

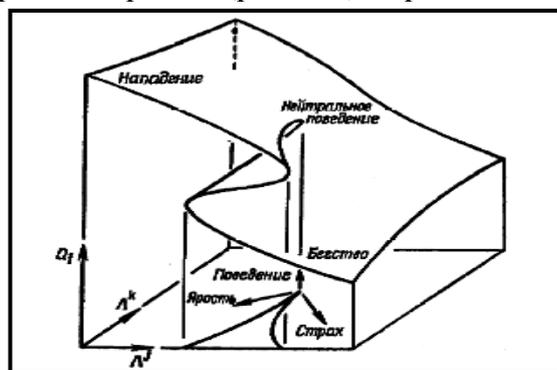


Рис. 7.7. Поведение животного в зависимости от значения бифуркационного параметра.

а страх – к бегству. И та, и другая формы поведения способствуют самосохранению и выживанию вида. Если ситуация не опасна, то реакция животного индифферентна (нейтральна). Таким образом, наличие бифуркационной сборки приводит к появлению ярко выраженных, противоположных эмоций и определяет поведение животного.

3. Галопирование, флаттер и вихри

Помимо структурных неустойчивостей, возникающих при статических возмущениях, системы испытывают ещё и динамические бифуркации: *галопирование*, *вихревой резонанс* и *флаттер*. Например, воздействие ветра с неизменной скоростью на мосты, обледенелые подвесные провода и аналогичные объекты может вызвать их стационарные колебания. Частота осцилляций зависит от параметра, который определяет возвращение системы в первоначальное положение. Исследования показывают, что даже слабый ветер может привести к динамической неустойчивости подвесных конструкций.

Для математического анализа чистого галопирования представим мост в виде квадратной призмы, которая имеет массу m , высоту h , длину l , опирается на пружину с коэффициентом упругости k и присоединена к демпферу с коэффициентом сопротивления λ . Пусть под действием ветра, движущегося со скоростью v , призма перемещается по вертикали под прямым углом к направлению ветра. Обозначим через z смещение от положения равновесия, тогда тормозящая сила демпфера равна $\lambda \dot{z}$ (\dot{z} – скорость движения призмы). При угле обдува $\alpha = \arctg(\dot{z}/v)$ ветер создаёт вертикальную составляющую подъёмной силы $F = \rho v^2 S B(\alpha)/2$, где ρ – плотность воздуха, $S = hl$ – площадь поверхности обдува, $B(\alpha)$ – коэффициент пропорциональности, который может быть положительным при малых углах α и отрицательным при больших значениях. Аэродинамическая сила усиливает любое начальное смещение призмы при совпадении знаков коэффициента $B(\alpha)$ и скорости движения призмы \dot{z} . Демпфер и упругая пружина стремятся скомпенсировать изменения положения призмы, что приводит к возникновению аэроупругих колебаний, которые описываются уравнением $m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = \rho v^2 S B(\alpha)/2$. При малых значениях угла α можно положить $B(\alpha) \approx B_0 \dot{z}/v$, тогда эффективный коэффициент сопротивления движению равен $\lambda_{эфф} = \lambda - (\rho v S B_0/2)$. При положительном значении параметра B_0 сопротивление движению исчезает при критической скорости ветра, равной $v_c = 2\lambda/(\rho S B_0)$ ($\lambda_{эфф} = 0$). Малые возмущения исходного положения призмы будут затухать при $v < v_c$ и расти при $v > v_c$. Следовательно, равновесие призмы будет неустойчивым при критической скорости ветра, при этой скорости начинается *галопирование (неконтролируемое раскачивание)* подвесных конструкций. В общем случае галопирование описывается уравнением $\ddot{z} + \omega_0^2 z = f(\dot{z})$, где ω_0 – круговая частота свободных колебаний. Динамическая неустойчивость возникает при обращении в нуль правой части уравнения неконтролируемого раскачивания. Раскачивание нелинейно-упругих несущих поверхностей с нарастающей амплитудой колебаний называется *статическим флаттером*. Он наблюдается при сверхзвуковом перемещении самолётов и ракет. Несмотря на то, что статический флат-

тер подавляется структурной нелинейностью мембран, он приводит, в конце концов, к усталостному разрушению крыльев самолётов и стабилизаторов ракет. *Динамический флаттер* возникает при достаточно быстром перемещении жидкостей в гибких и упругих трубах. В данном случае неизогнутая форма трубы является неустойчивой. Неустойчивость развивается под действием нарастающих по амплитуде динамических колебаний, вызванных движущейся жидкостью. Галопирование плохообтекаемых тел в стационарном потоке жидкости может приводить к возникновению вихрей различной структуры и вихревому резонансу.

Вихри и вихревые кольца (различные вихревые структуры показаны на рис. 7.8, см. также §8) представляют собой автоволновые системы, которые встречаются

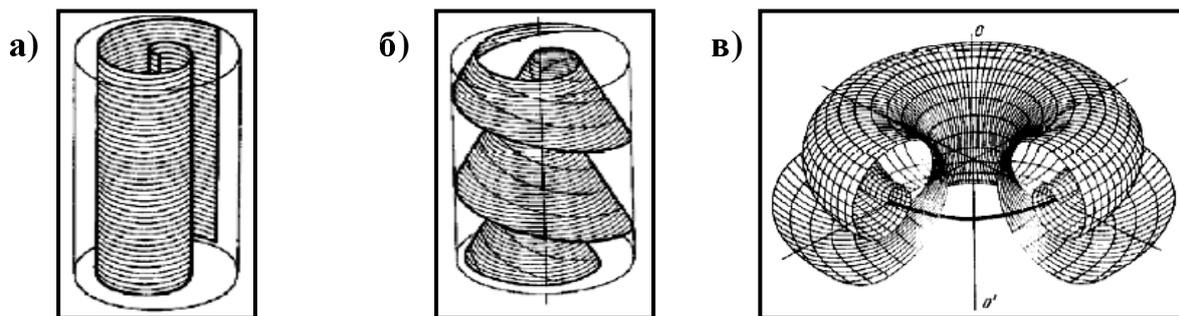


Рис. 7.8. Виды вихрей: а) простой; б) скрученный; в) вихревое кольцо.

ся в природе очень часто: от структур, возникающих при вращении жидкости, до спиралевидных галактик (рис. 7.9). Они образуются при полёте летательных аппа-

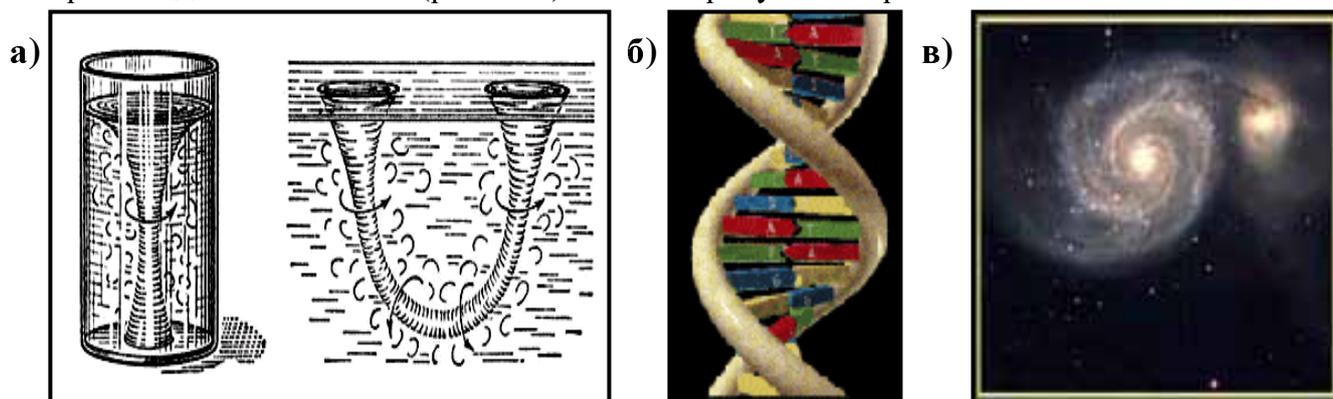


Рис. 7.9. Распространённость структур, возникающих при вращении: а) вихри в жидкости; б) спираль ДНК; в) спиральная Галактика.

ратов, птиц и насекомых (рис. 7.10). При полёте бабочка создаёт своими крыльями

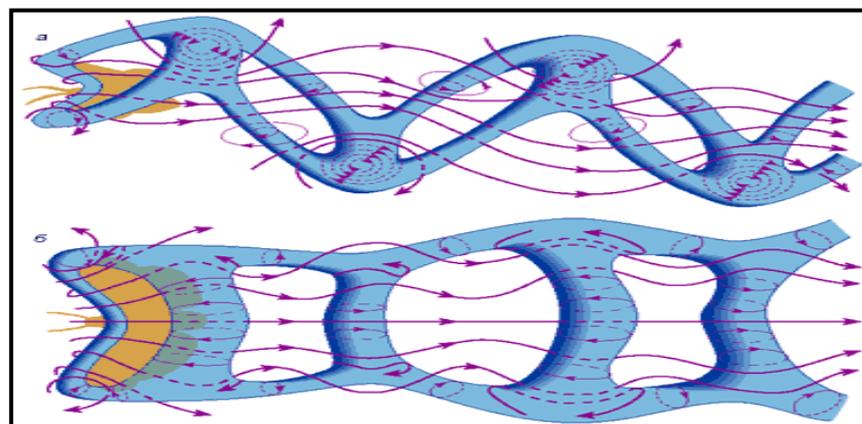


Рис. 7.10. Газодинамическая картина полёта бабочки.

вихревые потоки и перемещается в пространстве, используя “коридоры” наименьшего сопротивления. Исследования показали, что существуют топологические ограничения на существование произвольных трёхмерных вихревых образований (например, запрещено существование двух сцепленных вихревых колец), их внутреннее строение значительно сложнее (рис.7.11). Гироскопичность сил, которые

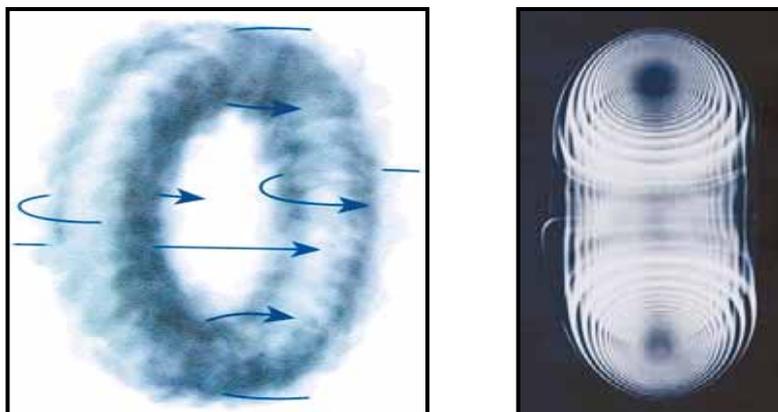


Рис. 7.11. Дымовое кольцо и его поперечный разрез.

вызывают образование вихрей, приводит к отсутствию производимой силами работы. Простейшая завихрённость в среде описывается уравнениями:

$$1. \operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \text{ — закон сохранения массы или несжимаемость}$$

среды;

$$2. \vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \neq 0 \text{ — замкнутость вихре-}$$

вых линий: они не имеют ни начала, ни конца.

$$3. \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \text{ — сохранение момента импульса вихря.}$$

Численные расчёты показывают, что вихревые кольца неустойчивы и медленно “схлопываются” со скоростью обратно пропорциональной своему радиусу. При определённых условиях вихревое кольцо может начать расти и затем превратиться в простой вихрь. Воздействуя на вихревое кольцо периодической внешней силой с подобранной амплитудой и фазой, можно ввести вихревое кольцо в резонансное состояние и управлять его движением. Если создать в некоторой среде с конечными размерами простой вихрь так, чтобы он выходил на поверхность (рис. 7.9а), то он будет нестационарным и при наличии неоднородностей превратится в скрученный вихрь. Таким образом, скрученные вихри вытесняют из неоднородной среды простые вихри.

Изложенный материал показывает, что статические и динамические неустойчивости возникают в результате структурного изменения аналитического выражения правой части уравнения $\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \beta z = \Phi(z; \dot{z})$ при бесконечно малых возмущениях. Такое поведение правой части наводит на мысль о существовании и других видов неустойчивости: преобразование функций друг в друга (мультианалитическое задание правой части уравнения при различных значениях управляющего параметра); возникновение дополнительных переменных; переход дифференциального уравнения из одного класса в другой и т.п.



§ 8. Теория вихрей

“Материя неба должна вращать планеты не только вокруг Солнца, но и вокруг собственного центра... и, следовательно, образовывать вокруг планет малые неба, вращающиеся в том же направлении, что и большое небо.”

Р. Декарт

“Мне претит мысль писать только для того, чтобы заявить о своём приоритете, но я, конечно, весьма огорчился бы, если кто-нибудь опубликовал бы мою теорию раньше меня.”

Ч. Дарвин

1. Возникновение и свойства вихрей

Вращательное движение частиц вязкой среды называется *вихрем*. Вихри сопровождают все движения, которые происходят с диссипацией энергии. Сопротивление потоку вблизи препятствий вызывает появление круговых движений: даже при очень слабом ветре вращается пыль и мелкий мусор у бордюра тротуара; вихри возникают в трубах при истечении воды через кран с изношенной прокладкой и сопровождаются звуковыми эффектами в виде рёва и гудения; в газовой и жидкой средах возникают гигантские вихри, которые называются *смерчами* и *водоворотами*; вихри сопровождают полёты насекомых и летательных аппаратов; двойная спираль ДНК – две переплетённые вихревые нити и т.п. Причиной возникновения вихря является вязкость среды (даже очень маленькая как у газов). Обтекание средой препятствия сопровождается торможением частиц вблизи его поверхности. Вдали от поверхности препятствия частицы ускоряются потоком, в результате чего в среде возникает вращательный момент и образуется вихрь. Внутри вихря давление меньше, чем на его внешней границе, поэтому он будет устойчивым образованием, всасывая внутрь себя газовую или жидкую среду. Одинаково вращающиеся вихри при сближении начинают вращаться вокруг оси симметрии, а противоположно вращающиеся вихри – двигаются поступательно как единое целое. Например, вихревые кольца при сближении ведут себя следующим образом: переднее кольцо замедляет своё движение и увеличивает свой радиус; догоняющее кольцо сжимается и ускоряется при прохождении через переднее кольцо; смена колец местами приводит к повторению описанного процесса (автоколебательная система). Отметим, что наличие второго вихря вызывает изменение скорости, но не ускорения первого вихря. Изолированные вихри находятся в состоянии покоя.

Стабильность и распад вихря обеспечивается гироскопическими силами. В настоящее время сценариев распада вихря открыто около десятка: пузырьковый (рис. 8.1а), спиральный (рис. 8.1б), двухспиральный, конический, бегущий и др. Несмотря на большое число экспериментальных и теоретических работ, адекватной *теории распада вихря пока не создано*.

Завихрённость движения элементарного объёма среды описывается ротором скорости $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \neq 0$. *Гельмгольц (1858)* доказал теоремы о сохранении вихревых линий (рис. 8.2а) и интенсивности вихревых

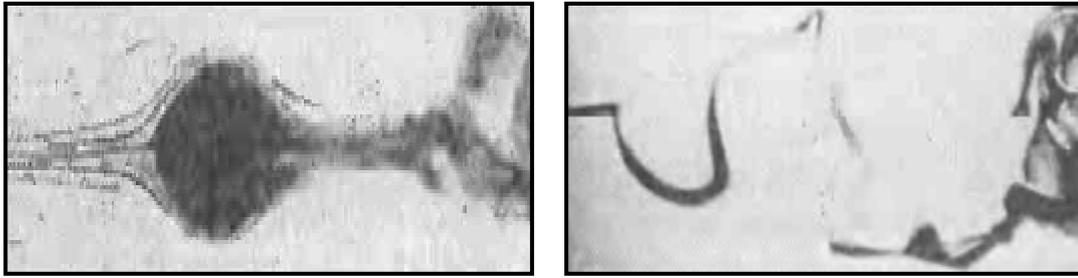


Рис. 8.1. Пузырьковый (а) и стиральный (б) распады вихря.

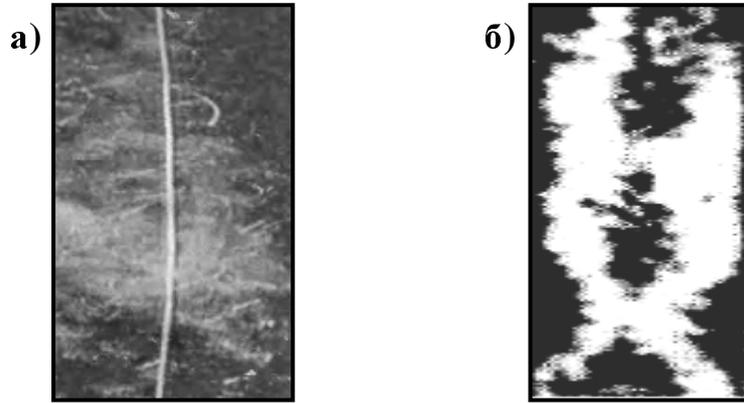


Рис. 8.2. Вихревая нить(а) и вихревая трубка (б).

трубок (рис. 8.2б). Первая теорема отражает факт движения вихревой линии вместе с частицами среды. Частицы, которые находятся на вихревой линии, остаются на ней и при движении вихря. *Интенсивностью вихревой трубки* называется поток завихренности через поперечное сечение трубки, который по второй теореме Гельмгольца не изменяется с течением времени. При действии на вихревую линию растягивающих сил, она начинает интенсифицировать свою завихренность.

В сплошной среде вихревая линия определяется уравнением $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{v})$, где

\vec{v} – скорость движения частиц среды, \vec{u} – соленоидальное поле, которое удовлетворяет уравнению $\text{div} \vec{u} = 0$. Например, такому уравнению удовлетворяет магнитное поле (напряжённость магнитного поля $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ ($\text{div} \vec{H} = 0$), где \vec{A} – векторный потенциал), а вихревые линии совпадают с силовыми линиями магнитного поля. В случае плоского течения решение уравнения $\text{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ можно представить

в виде $u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ и $u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, где Ψ – называется *функцией тока*. В гидродинамике

важную роль играет функция тока вида $\Psi = -\frac{\chi}{2\pi} \ln r$ ($r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ – расстояние

до оси вихря), которая удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$ и описы-

вает вихрь интенсивности χ в точке с координатами $(x_0; y_0)$. Интенсивность вихря определяется циркуляцией скорости, вычисленной по любому замкнутому контуру, внутри которого находится особая точка $(x_0; y_0)$, т.е. равна

$$\oint (u_x dx + u_y dy) = I.$$

По второй теореме Гельмгольца в баротропной (невязкой) среде, находящейся под действием консервативных сил, скорость изменения циркуляции равна нулю, т.е. $dI/dt=0$.

Пусть два вихря образуют консервативную систему и расположены на расстоянии ρ друг от друга. Потенциальная энергия пары вихрей обратно пропорциональна квадрату расстоянию между их центрами (для тел с массой или электрическим зарядом потенциальная энергия взаимодействия по законам Кеплера и Кулона обратно пропорциональна первой степени расстояния между ними), т.е. описывается формулой $U = -\frac{\chi_1 \chi_2 (\chi_1 + \chi_2)}{8\pi^2 \rho^2}$. Аналогом центра масс в теории вихрей является

центр завихрённости, его координаты равны $\frac{\chi_1 x_{01} + \chi_2 x_{02}}{\chi_1 + \chi_2}$ и $\frac{\chi_1 y_{01} + \chi_2 y_{02}}{\chi_1 + \chi_2}$. Отрезок, соединяющий особые точки вихрей, вращается вокруг центра завихрённости с угловой скоростью $\frac{\chi_1 + \chi_2}{2\pi\rho^2}$ при условии, что $\chi_1 + \chi_2 \neq 0$ (вращение вихрей вокруг

оси симметрии, проходящей через центр завихрённости, рис. 8.3а и 8.3б). В противном случае, когда $\chi_1 + \chi_2 = 0$, отрезок будет двигаться поступательно со скоростью $\chi/(2\pi)$ (рис. 8.3в) где $\chi = \chi_1 = -\chi_2$. Различие знаков интенсивностей вихрей

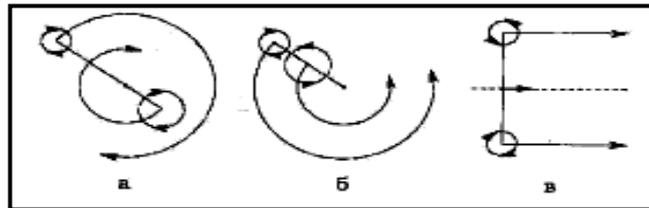


Рис. 8.3. Вращательное и поступательное движения пары вихрей.

свидетельствует об их разнонаправленной завихрённости. Решение задачи о движении трёх вихрей было выполнено *Грёбли* (1877): задача оказалась интегрируемой в квадратурах в отличие от задачи взаимодействия трёх гравитирующих масс. Отметим, что хаотические движения характерны для систем из четырёх и более вихрей, однако их взаимодействие может привести к упорядочению, возникающему в результате когерентного, коллективного поведения вихрей. Исследования показали, что система из n вихрей с неизменными расстояниями между ними либо движется поступательно, либо вращается с постоянной угловой скоростью. Например, *Дж. Дж. Томсон* (1883) показал, что вращение устойчиво при расположении вихрей в вершинах правильного шестиугольника. В дальнейшем, численными методами было показано, что устойчивые равновесные конфигурации распределения вихрей наблюдаются в том случае, когда они расположены на одной окружности или нескольких концентрических окружностях (*лорд Кельвин* (*В. Томсон*) называл их “атомными оболочками”).

Вихри возникают в вязких средах, например, в жидкости. Динамика течений вязкой жидкости со скоростью u , давлением P и потенциалом внешних сил U определяется уравнением *Навье-Стокса* в форме *Громеки-Ламба*:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{u} \times \text{rot } \bar{u} - \frac{\partial f}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u},$$

где ν – коэффициент вязкости, $f = P + U + u^2/2$ – функция Бернулли. По теореме Бернулли при баротропном течении идеальной жидкости функция Бернулли остаётся постоянной вдоль линии тока. В этом случае уравнение Громеки-Ламба принимает вид $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \times \text{rot } \vec{u} + \nu \Delta \vec{u}$, которое по виду аналогично уравнению для индукции маг-

нитного поля среды с магнитным сопротивлением. Если частицы жидкости равномерно вращаются по concentрическим окружностям в одной плоскости, то завихрённость имеет компоненты $\text{rot } \vec{u} = (0; 0; \xi)$. В этом случае векторное поле $\vec{u} \times \text{rot } \vec{u}$ будет потенциальным. Применяв к обеим частям уравнения Навье-Стокса операцию ротора, найдём $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nu \Delta \xi$. Это уравнение параболического типа в частных производ-

ных, оно аналогично уравнению Фурье для теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T$ (T – темпе-

ратура, κ – коэффициент температуропроводности среды) и уравнению Фика для диффузии $\partial c / \partial t = D \Delta c$ (c – концентрация диффундирующего вещества, D – коэффициент диффузии). Решение этого уравнения получено в курсе математической физики и имеет вид распространения завихрённости от мгновенного точечного вихря $\xi = \frac{\chi}{4\pi\nu t} e^{-r^2/(4\nu t)}$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). В силу того, что $\iint \xi dx dy = \chi$, вычисленный по бес-

конечной плоскости не зависит от времени, то интенсивность вихря остаётся постоянной величиной. Указанная аналогия позволяет говорить о *диффузии* вихря по плоскости. Согласно формуле Грина, циркуляция скорости вдоль окружности оп-

ределяется формулой $2\pi \oint_{C_r} \xi r dr = \chi \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right) = \chi_c$. Из этой формулы видно,

что с увеличением времени циркуляция скорости уменьшается до нуля. В результате взаимодействия частиц возможна хаотизация их движения, что может привести к стабилизации вихря или к его распаду.

Проведенное исследование показывает, что вихревая линия не может заканчиваться в произвольной точке жидкой среды. Она может замыкаться сама на себя, переходя в вихревое кольцо; простирается до бесконечности или заканчиваться на поверхностях разрыва (границах среды, рис. 7.9а). Это свойство вихревой линии связано с сохранением интенсивности вихря, определяемой циркуляцией вектора скорости по произвольному контуру, содержащему особую точку.

2. Сферические вихри Хилла и Хикса

Вихревые кольца наблюдаются при импульсном испускании дыма курительщиком, выхлопе отработанных газов автомобилем, при падении капель подкрашенной жидкости в другую жидкость. При изучении самоиндуцированного движения тонкого вихревого кольца с циркуляцией χ (радиус кольца r_0 , радиус его ядра значительно меньше радиуса кольца $\varepsilon \ll r_0$) Кельвин (1867) получил следующую

формулу для скорости поступательного движения $v = \frac{\chi}{4\pi r_0} \left(\ln\left(\frac{8r_0}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{4} \right)$. Для поло-

го (или заполненного неподвижной жидкостью) вихревого кольца Хикс (1885) получил несколько иную формулу $V = \frac{\chi}{4\pi r_0} \left(\ln \left(\frac{8r_0}{\varepsilon} \right) - \frac{1}{2} \right)$. Вязкость среды, наличие закрутки, нестационарность и сжимаемость вихревого кольца были учтены в работе Шаффмана (1970) и дали поправки к формуле Хикса. При малых временах существования кольца структуру его ядра можно считать плоской с циркуляцией χ_c , что даёт для скорости поступательного движения формулу

$$V = \frac{\chi}{4\pi r_0} \left(\ln \left(\frac{8r_0}{\varepsilon} \right) - 0,588 \right).$$

При наличии вязкости среды движение вихревого кольца не является установившимся, но Шаффман показал, что скорость поступательного перемещения является производной по времени от центра тяжести завихрённости $\bar{X} = \int \frac{(\bar{r} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{I}}{2I} \cdot \bar{r} dW$, где $\bar{\omega}$ – завихрённость на расстоянии, определяемом радиусом-вектором \bar{r} , \bar{I} – импульс, параллельный оси вращения вихревого кольца. Используя результаты работы Катаева (1988) (в ней было получено выражение для завихрённости при условии независимости её распределения от конвекции среды относительно вихревого кольца) Капланский и Руди (1999) получили интегральное выражение для скорости вихря $V = \frac{\chi}{4\pi\sqrt{2vt}} \int_0^\infty \left(\pi(1 - \text{erf}(z))(1 - 6z^2) + 6\sqrt{\pi} z e^{-z^2} \right) J_1^2 \left(\frac{zr_0}{\sqrt{2vt}} \right) dz$, где специальные функции $\text{erf}(q)$ и $J_1(q)$ – функции ошибок и Бесселя, соответственно.

Пренебрежение закруткой позволило Френкелю (1970) получить интегральное уравнение для функции тока, которое было исследовано численными методами Норбури (1973). Численные расчёты показали зависимость формы вихревого кольца от безразмерного параметра $\alpha = \sqrt{S/(\pi r_0^2)}$, где S – площадь поперечного сечения вихревого кольца (рис. 8.4). Было показано, что значение параметра $\alpha = \sqrt{2}$

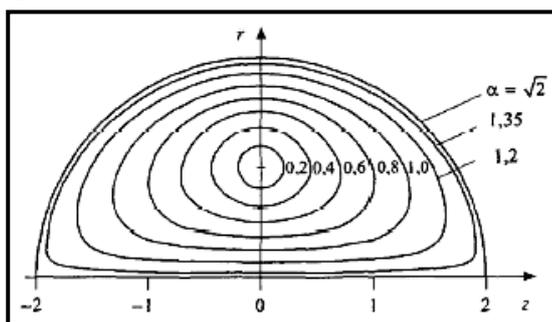


Рис. 8.4. Зависимость формы вихревого кольца от параметра α .

соответствует сферическому вихрю Хилла (1894), для которого существует точное аналитическое решение. Отметим, что с ростом значения параметра α скорость вихревого кольца и его кинетическая энергия уменьшаются, а импульс \bar{I} возрастает.

В задаче Хилла завихрённость располагается внутри сферы радиуса a , которая движется поступательно со скоростью V . Вихревые линии представляют собой концентрические окружности, а вне сферы движение потенциально. В цилин-

дрических координатах $(r; \varphi; z)$ с началом координат в центре сферы вектор завихренности $\vec{\omega} = (0; \omega_2; 0)$. Распределение завихренности имеет вид

$$\omega_2 = \begin{cases} \Lambda r, & \text{внутри сферы} \\ 0, & \text{вне сферы} \end{cases}, \quad (1)$$

(Λ – постоянный множитель) и для несжимаемой среды удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \times \vec{\omega}). \quad (2)$$

Использование уравнения неразрывности $\text{div} \vec{u} = 0$ позволяет ввести функцию тока Ψ , которая связана с компонентами скорости уравнениями $u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ и $u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$.

По определению завихренность $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{u}$, следовательно, уравнение для функции тока имеет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -r \omega_2. \quad (3)$$

На поверхности сферы функция тока постоянна ($\Psi|_{z_p} = \omega_2 / r = \Lambda$) и при достаточном удалении от вихря компонента скорости $u_z = -V$ относительно сферы. Запишем (3) в сферических координатах $(\rho; \varphi; \theta)$, здесь $r = \rho \sin \theta$ и $z = \rho \cos \theta$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - \text{ctg} \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = \begin{cases} -\Lambda \rho^2 \sin^2 \theta, & \rho < a \\ 0, & \rho > a \end{cases}. \quad (4)$$

Применяя метод разделения переменных, найдём общее решение однородного $\Psi_0 = \left(c \rho^2 + \frac{d}{\rho} \right) \sin^2 \theta$ ($\begin{cases} d=0, & \rho < a \\ c=0, & \rho > a \end{cases}$) и частное решение неоднородного уравнений $\Psi_1 = -\frac{\Lambda}{10} \rho^4 \sin^2 \theta$. Удовлетворяя граничным условиям, найдём решение в виде

$$\Psi = \begin{cases} \frac{\Lambda}{10} \rho^2 (a^2 - \rho^2) \sin^2 \theta, & \rho < a \\ -\frac{\Lambda}{15} \rho^2 a^2 \left(1 - \frac{a^3}{\rho^3} \right) \sin^2 \theta, & \rho > a \end{cases}. \quad (5)$$

В силу однородности потока вдали от сферы параметр Λ находится из равенства $-\frac{2\Lambda}{15} a^2 = -V$. Распределение линий тока в вихре Хилла показано на рис. 8.5. Мно-

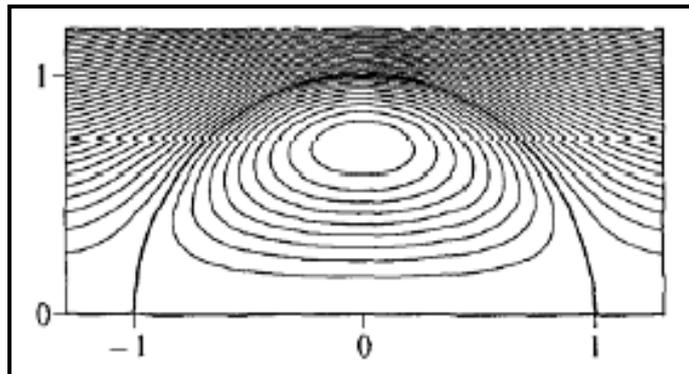


Рис. 8.5. Линия тока вихря Хилла

гие учёные и любители науки считают, что шаровая молния представляет собой сферический вихрь Хилла. В частности на сайте www.yawp.com размещена фотография шаровой молнии, которую заснял в 1963 г. в своём доме Леонардо Тичи (рис. 8.6).



Рис. 8.6. Шаровая молния по версии Л. Тичи.

Более сложную пространственную структуру с тремя ненулевыми компонентами скорости и завихрённости имеет сферический вихрь Хикса (1899). Если в случае Хилла функция Бернулли постоянна на вихревых линиях, то для вихря Хикса она является функцией от Ψ . Решение уравнений Хикса показывает, что вихревые линии наматываются на некоторый тор (рис. 8.7а), аналогично ведут себя и линии тока (рис. 8.7б). В отличие от сферического вихря Хилла в случае Хикса установлен дополнительный инвариант движения, который называется *спиральностью*. Таким образом, при движении сферического вихря Хикса сохраняются импульс, момент импульса, полная энергия и спиральность.

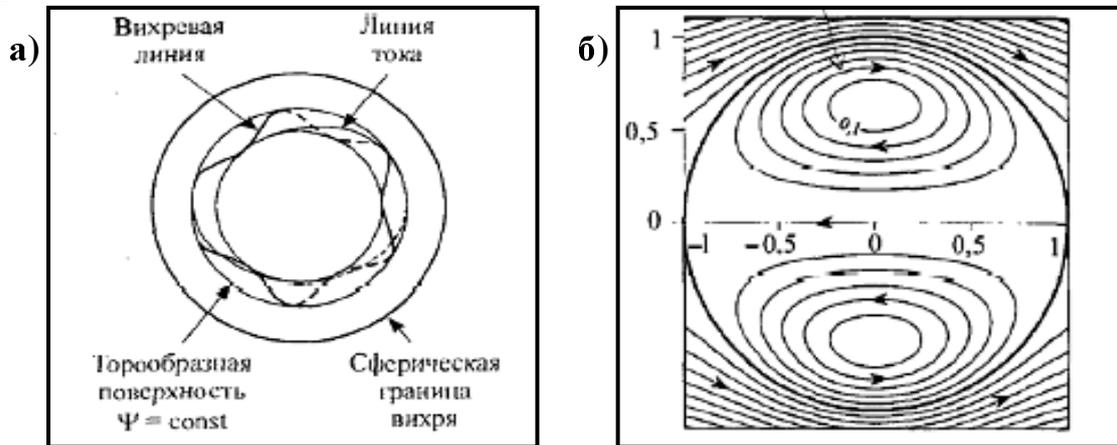


Рис. 8.7. Вихревые линии, линии тока вихря Хикса (а) и эквиповерхности тока (б).

3. Спиральный солитон Хасимото

Пространственную кривую можно задать правой тройкой единичных векторов (*ортов*) ($\vec{\tau}; \vec{n}; \vec{b}$), которые называются векторами *касательной*, *главной нормали* и *бинормали*, соответственно (рис. 8.8). Если обозначить через s длину пространственной кривой, то орты определяются по формулам $\vec{\tau} = d\vec{r}/ds$; $\vec{n} = d^2\vec{r}/ds^2$ и $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$. Кривизна и кручение кривой вычисляются следующим образом:

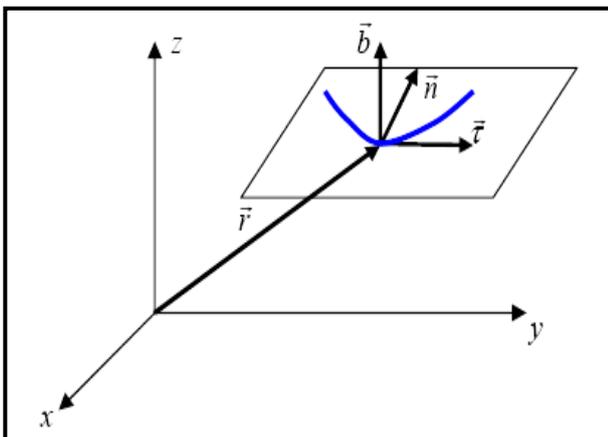


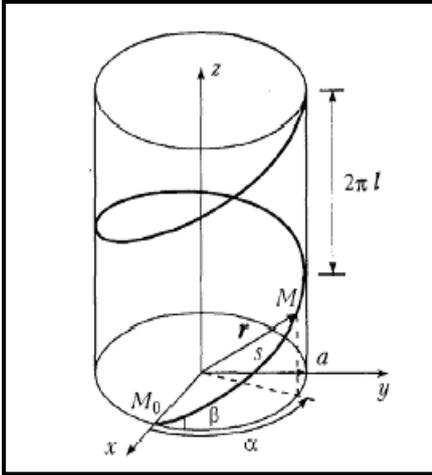
Рис. 8.8. Треугольник ортов.

$$K = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \quad \text{и} \quad \kappa = \tilde{A}/K^2,$$

где определитель $\tilde{A} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$, а

штрихами обозначены соответствующие

производные по параметру s . Радиус кривизны кривой равен $R=1/K$. Правому винту соответствуют значения кручения $\kappa>0$, а левому $-\kappa<0$. Если $\kappa=0$, то кривая лежит в некоторой плоскости, т.е. является плоской. Для винтовой линии, которая задаётся уравнениями $x=acos\alpha$, $y=asin\alpha$ и $z=la$ (a – радиус винтовой линии в поперечном сечении; l – определяет расстояние (шаг) между соседними витками и направление витков: $l>0$ – правый, а $l<0$ – левый винты) и изображена на рис. 8.9, кривизна и кручение равны



$$K = \frac{a}{a^2 + l^2} = const \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{l}{a^2 + l^2} = const,$$

соответственно. Для окружности кручение равно нулю, а кривизна обратна её радиусу. Прямая линия характеризуется нулевыми значениями кривизны и кручения.

Кривизна и кручение связаны с тройкой ортов $(\vec{\tau}; \vec{n}; \vec{b})$ уравнениями Серре-Френе:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{n}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \kappa\vec{b} - K\vec{\tau} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\kappa\vec{n}.$$

Эти уравнения были использованы Хасимото (1972)

для вывода нелинейных уравнений Шрёдингера. Умножим последнее уравнение Серре-Френе на мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$ и прибавим

к предыдущему уравнению, получим $\frac{d(\vec{n} + i\vec{b})}{ds} + i\kappa(\vec{n} + i\vec{b}) = -K\vec{\tau}$. Введём в рассмотре-

ние функции $\psi = K \exp\left(i \int_0^s \kappa dq\right)$ и $\vec{N} = (\vec{n} + i\vec{b}) \exp\left(i \int_0^s \kappa dq\right)$. Из первой формулы следует,

что

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = K \exp\left(i \int_0^s \kappa dq\right) K \exp\left(-i \int_0^s \kappa dq\right) = K^2.$$

С учётом введённых функций уравнения Серре-Френе запишутся в виде

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{2}(\psi^* \vec{N} + \psi \vec{N}^*) \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = -\psi \vec{\tau}.$$

Производные по времени от $\vec{\tau}$ и \vec{N} по Хасимото равны

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{i}{2} \left(\frac{d\psi}{dt} \vec{N}^* - \frac{d\psi^*}{dt} \vec{N} \right) \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = iF \vec{N} - i \frac{d\psi}{dt} \vec{\tau},$$

где функция F определяется формулой $F = \frac{1}{2}(|\psi|^2 + A(t))$, которая содержит неизвестную функцию $A(t)$. Из полученных уравнений следует, что функция ψ удовлетво-

ряет уравнению $\frac{d\psi}{dt} = i \left(\frac{d^2 \psi}{ds^2} + F\psi \right)$. Вводя преобразование $\Phi = \frac{\psi}{2} \exp\left(-\frac{i}{2} \int_0^t A(q) dq\right)$,

получим хорошо известное в научной литературе нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d^2\Phi}{ds^2} + 2|\Phi|^2\Phi = 0.$$

Одним из решений полученного уравнения является *солитон (всплеск) Хасимото*, который представляет собой спираль. Единственным параметром, который характеризует форму и завихрённость спирального вихря Хасимото является отношение кручения к максимальной кривизне вихревой линии $T = \frac{2\kappa}{K_{\max}}$. Зависимость формы

уединённой волны Хасимото от значений параметра T показаны на рис. 8.10. Враще-

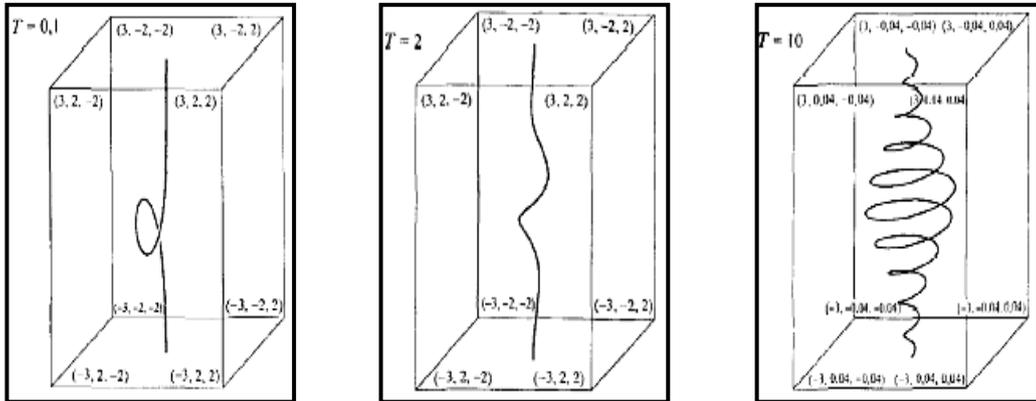


Рис. 8.10. Влияние параметра T на форму солитона Хасимото.

нение спирали также зависит от параметра T : если $|T| < 1$, то спираль закручена вправо (рис. 8.11а), при $|T| > 1$ – влево (рис. 8.11в). Закрученность отсутствует при $|T|=1$ (рис. 8.11б), когда кривизна вихревой линии равна удвоенному значению её кручения.

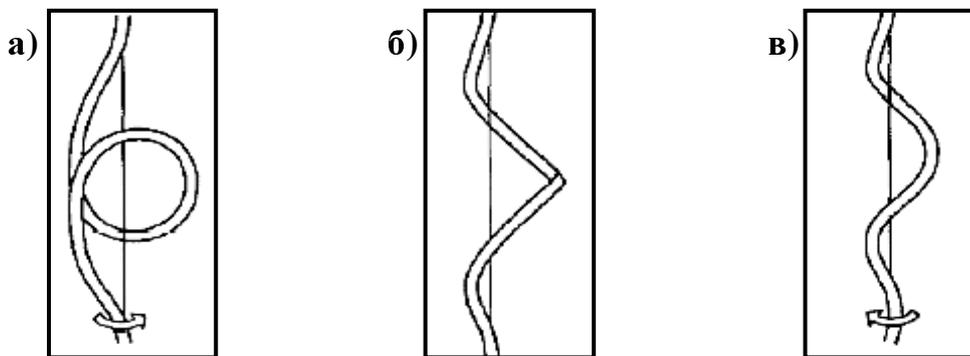
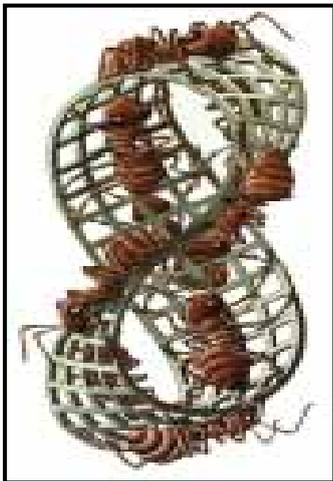


Рис. 8.11. Закрученность спирального вихря (а) $|T| < 1$; (б) $|T| = 1$; (в) $|T| > 1$.

Центр всплеска Хасимото движется с групповой скоростью $V_{gp} = 2\kappa$. Перемещение точки с постоянной фазой (фазовая скорость V_ϕ) происходит со скоростью, равной $V_\phi = \frac{4\kappa^2 - K_{\max}^2}{4\kappa}$. Для слабонелинейных спиральных вихрей фазовая скорость постоянна, а для нелинейных солитонов Хасимото она различна для точек по длине всплеска. При больших кручениях $T \rightarrow \infty$ групповая скорость солитона равна удвоенному значению фазовой скорости; при отсутствии вращения (параметр $|T|=1$) групповая и фазовые скорости совпадают; при уменьшении параметра T ($T \rightarrow 0$) солитон Хасимото вырождается в плоскую волну.



§ 9. Информация и динамика

“... любая теория основана на физических понятиях, выраженных с помощью математических идеализаций. Последние вводятся, чтобы дать адекватное представление физических явлений. **Ни одно физическое понятие не может считаться определённым, если неизвестна область его применимости.**”

Л. Розенфельд

“Ибо, **кто имеет, тому дано будет и приумножится; а кто не имеет, у того отнимется и то, что имеет.**”

Евангелие от Матфея

1. Информация в классической механике

Определения информации и энтропии связаны с вероятностью того, что индивидуальная составляющая динамической системы находится в том или ином состоянии. Разброс состояний задаётся функцией распределения для непрерывных сред или таблицей значений вероятности при дискретном описании микросостояний. Указанные величины зависят от времени и отображают постоянный мониторинг системой своего состояния.

Представим непрерывную динамическую систему в виде бесконечной совокупности связанных осцилляторов (например, шарики скреплённые пружинами). Состояние связи выбранного элемента в точке x и момент времени t с другими составляющими системы определяет поведение элемента: направление движения и скорость перемещения (рис. 9.1, направление перемещения показано сплошной стрелкой). Очевидно, что даже очень малое смещение шарика из первоначального положения вызовет изменения в состояниях связей, что приведёт к изменению величины результирующего действия, его направления (по такому же сценарию происходит движение броуновской частицы) и приводит к хаотическому перемещению выбранного шарика.

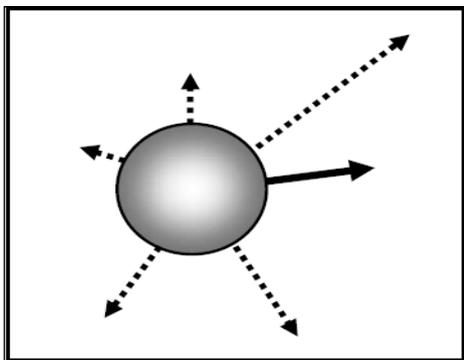


Рис. 9.1. Движение связанного маятника.

Воздействие внешней силы, которая определяется положением частиц в окружающей среде, будет квазипериодическим. Если частота побуждающей силы близка к собственной частоте осциллятора, то наблюдается *внутренний резонанс (флуктуация)*. Из-за стохастичности воздействия (возбуждения могут усиливаться из-за внутреннего резонанса в одних точках и подавляться в других местах системы) поле, соответствующее распространяющимся волнам флуктуаций, должно описываться вероятностной функцией в отличие от обычных волн, которые описываются детерминированными соотношениями. Именно распространение флуктуационной волны и отвечает как за возникновение хаоса, так и появление упорядоченных областей. Таким образом, хаотическое квазипериодическое движение является переносчиком информации-энтропии. При абсолютной температуре T квант поля равен $k_B T$. Следовательно, постоянная Больцмана k_B является адиабатическим инвариантом динамической

системы, а сумма энтропии и информации – интегралом движения. Приведенный пример указывает на то, что информация-энтропия должна учитываться и в классических уравнениях движения Ньютона как некоторое условие обратимости механического движения: отсутствие флуктуаций, которые приводят к перемешиванию динамических состояний исследуемого объекта.

Введём в рассмотрение функцию Лагранжа L как разность кинетической и потенциальной энергий тела: $L = K - U$. Тогда действие D связано с функцией Лагранжа равенством: $D = \int_{t_1}^{t_2} L(q; \dot{q}; t) dt$. Принцип наименьшего действия определяется равенством нулю вариации действия $\delta D = 0$. Принцип позволяет получить уравнения Ньютона: $\delta D = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q; \dot{q}; t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt =$ (интеграл от второго слагаемого в полученном выражении вычислим с использованием метода интегрирования по частям $\int_{\alpha}^{\beta} A dB = AB|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} B dA$, выбрав в качестве функций $A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, а $dB = \delta \dot{q} dt = \delta q$) $= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right] \delta q dt = 0$. В механике Лагранжа-Эйлера начальная и конечная точка траектории движения считаются фиксированными, т.е. $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = 0$. Тогда уравнение движения принимает вид $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ или в форме Ньютона $\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}$ ($\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}}$ – импульс, $\bar{F} = -\frac{\partial U}{\partial q}$ – потенциальная сила). Фиксация предельных точек траектории движения не является единственным условием существования уравнения Ньютона.

Другим условием обратимости во времени уравнения динамики является граничное соотношение: $p_2 \delta q(t_2) - p_1 \delta q(t_1) = 0$. Следовательно, в общем случае вариация действия равна $\delta D = p_2 \delta q(t_2) - p_1 \delta q(t_1) + \frac{\partial D}{\partial t} \delta t$. Если не проводить вариацию по времени ($\delta t = 0$), то $\delta D = \frac{\partial D}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial D}{\partial q_1} \delta q_1$, где частные производные $p_2 = \frac{\partial D}{\partial q_2}$ и $p_1 = -\frac{\partial D}{\partial q_1}$ ($q_2 = \delta q(t_2)$ и $q_1 = \delta q(t_1)$). Вариация действия для состояния системы между моментами времени t_1 и t_2 определяется формулой $\delta D = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial D}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial D}{\partial t} \delta t$. Так как функция Лагранжа равна $L = \frac{\delta D}{\delta t} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial D}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial D}{\partial t} = \sum_{k=1}^2 p_k \dot{q}_k + \frac{\partial D}{\partial t}$, то $\sum_{k=1}^2 p_k \dot{q}_k - L + \frac{\partial D}{\partial t} = 0$.

Выражение $\sum_{k=1}^2 p_k \dot{q}_k - L$ определяет изменение полной энергии H системы между моментами времени t_1 и t_2 , т.е.

$$\sum_{k=1}^2 p_k \dot{q}_k - L = H(t_2) - H(t_1) = \Delta H.$$

Уравнение движения принимает вид

$$\Delta H + \partial D / \partial t = 0. \quad (1)$$

Из уравнения (1) видно, что приращение гамильтониана системы определяет скорость изменения действия с течением времени. Если действие не зависит явно от времени, то полная энергия системы является интегралом движения, т.е. сохраняется ($\Delta H = 0$ или $H(t_2) = H(t_1)$), а в силу произвольности моментов времени t_1 и t_2 находим $H(t) = E = const$). По своей структуре уравнение (1) напоминает локальный закон сохранения для действия. Если определить изменение полной энергии системы в виде

$$\Delta H = \dot{q} \partial D / \partial q, \quad (2)$$

то действие будет интегралом движения для динамических систем даже в случае диссипации энергии.

Для консервативных систем $\Delta H = \dot{q} \frac{\partial D}{\partial q} = 0$, т.е. их положение в фазовом прост-

ранстве определяется обращением в нуль частной производной $\frac{\partial D}{\partial q} = 0$. Это равен-

ство определяет консервативную поверхность (поверхность постоянства энергии) системы. Отсюда следует, что информационное поле консервативных систем устроено так, чтобы подавлять любые возникающие флуктуации физических параметров динамической системы. Это означает, что движение таких объектов осуществляется либо по консервативной поверхности, либо в малой окрестности этой поверхности, когда изменения функции Гамильтона пренебрежимо малы по сравнению с величиной самого гамильтониана. Следовательно, полная энергия и действие являются функциями состояния динамической системы. Для диссипативных систем надо учитывать локальное сохранение действия $\frac{\partial D}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial D}{\partial q} = 0$, которое зада-

ёт в фазовом пространстве поверхности постоянного действия (инвариантные торы в переменных действие-угол). В этом случае информация, распространяющаяся по системе, сводится к отбору тех флуктуаций, которые позволяют динамической системе приблизиться к стационарному состоянию, расположенному на резонансном или обычном торах. При этом устойчивыми будут и те движения, которые происходят в малой окрестности стационарного состояния. Динамическая система синтезирует и запоминает ценную информацию путём создания в фазовом пространстве определённых поверхностей. Поверхности сохраняются до тех пор, пока не происходит значительных изменений суммы энтропия-информация. Это приводит к мысли о существовании иерархии динамических систем, различающихся сохранённой или “забытой” информацией о поведении системы при тех или иных внешних условиях. Сохранение того или иного интеграла движения соответствует неизменности адиабатического инварианта, что, по-видимому, является причиной существования мировых констант.

Исключить влияние начальных условий можно, если характеризовать состояние динамической системы в сопряжённых переменных Якоби: если $\partial D / \partial t = -H$, то

$\frac{\partial D}{\partial H} = -t$, а полная вариация действия равна $\delta D = \frac{\partial D}{\partial t} \delta t + \frac{\partial D}{\partial H} \delta H$. Возможность такой за-

писи подчёркивает факт независимости движения от начальных условий, которые учитываются изменением полной энергии динамической системы. Кроме того, такая форма записи позволяет показать, что стационарному состоянию диссипативной системы отвечает равенство $\partial D / \partial H = 0$ при условии $\delta H / \delta t \neq 0$. Независимость динамики от начальных условий состоит в том, что перестройка системы осуществляется так, что возникающие в каждый момент времени новые начальные условия приводят к выполнимости уравнения (1), которое необратимо во времени. Таким образом, снимается вопрос об обратимости во времени динамических уравнений для микрочастицы и необратимостью в поведении системы в целом ввиду уравнения (1) для действия.

Вышеизложенный материал позволяет выдвинуть гипотезу о том, что эволюционирующие системы характеризуются разрушением действия и описываются уравнением $\frac{\partial D}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial D}{\partial q} = P_D$ или $\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial H} \frac{dH}{dt} = P_D$, где P_D – производство действия.

Следовательно, критерием разделения динамических систем на физико-химические и биологические является наличие или отсутствие производства действия. Для первых систем $P_D = 0$, а для вторых – $P_D \neq 0$ (рис. 9.2).

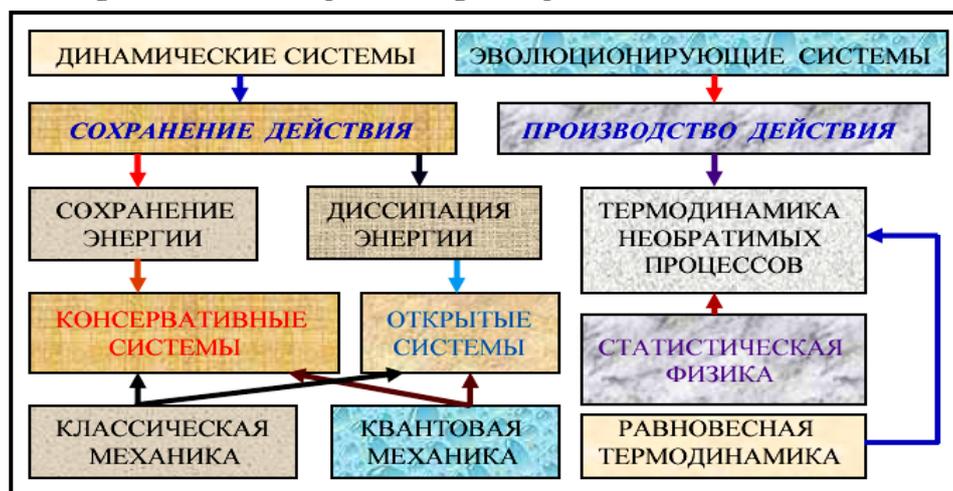


Рис. 9.2. Классификация систем и способов их описания.

Сравнение простых механических тел и биологических объектов со сложной системой организации и управления говорит об их принципиальном различии. Это различие, на первый взгляд, проявляется в ярко выраженной свободе действий, выборе целей и поступков, способности накапливать, сохранять и передавать информацию, производить себе подобных существ. Однако с точки зрения синергетики биологические создания являются лишь очередным иерархическим уровнем динамической природы материи. На этом уровне самоорганизации материи происходит “запоминание” расположения устойчивых состояний; выделяются подсистемы со специфическими свойствами, регулирующие уровень упорядоченности за счёт производства действия; выбор решений осуществляется в бифуркационных точках и т.п. Все эти качества выработались в результате конкуренции за нахождение в устойчивом состоянии или его малой окрестности. Очевидным фактом такой конкуренции является возникновение “памяти”, а также центра управления и при-

нения решений в результате бифуркаций неизвестных пока параметров порядка. Такие системы способны *адаптироваться* к изменяющимся внешним условиям, *оптимизировать* своё поведение и *сосуществовать* с аналогичными объектами. Развитие этих механизмов приводит к возможности накапливать, перерабатывать, усваивать и передавать накопленные знания, что в свою очередь, повышает свободу действий и волю к выбору одного решения из множества альтернативных решений. Выбор осуществляется центром управления на основе детерминированных (*знаний*) или случайных (*интуиция* – скрытые знания всего эволюционного пути развития) данных. Решение формируется под действием информации, поступающей от *сенсоров* (датчиков, следящих за состоянием окружения). Первоначально развивается *аналоговое* мышление: поступай так же, как поступал ранее. Неудачные опыты с аналогиями привели к появлению *логического* мышления, которое способно не только управлять, но и предугадывать развитие взаимодействия с внешним миром. Все эти аспекты поведения биоструктур указывает на то, что в них преобладают информационные процессы, связанные со случайностью.

2. Неопределённость квантовой динамики

Описание квантовых систем осуществляется с помощью уравнения Шрёдингера $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$ ($i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\hbar = h/(2\pi)$, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек – постоянная

Планка, определяющая квант действия, Ψ – волновая функция, H – оператор Гамильтона). Это уравнение полностью согласуется с уравнением (1) при условии, что действие $D \rightarrow i\hbar \Psi$, а изменение гамильтониана заменяется выражением $H\Psi$. Следовательно, постоянная Планка является адиабатическим инвариантом квантовой механики. Отметим, что уравнение Шрёдингера не изменится, если провести замену $\Psi = \tilde{\Psi} e^{i\alpha}$, где α – постоянная фаза. Состояния, различающиеся на постоянную фазу α , соответствуют повороту модуля волновой функции в комплексной плоскости на угол α . Информационное поле квантовой системы приводит к восприятию состояний, отличающихся постоянной фазой, как *тождественных*. Следовательно, тождественные состояния квантовой системы должны различаться *дополнительными параметрами*. Учёт начальных условий с помощью уравнения (1) снимает противоречие между классической и квантовой механикой, различие между ними состоит только в том, что классические величины (полная энергия и импульс) заменяются на операторы.

Запишем уравнения Шрёдингера для волновой функции Ψ и ей сопряжённой функции Ψ^* :

$$\Psi^* : \begin{cases} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \\ -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = H \Psi^* \end{cases} . \text{ Домножим первое уравнение слева на сопряжённую волновую функцию } \Psi^*, \text{ а второе уравнение – на } \Psi, \text{ вычтем из первого преобразованного уравнения второе, получим } i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) = \Psi^* H \Psi - \Psi H \Psi^* \text{ или } i\hbar \partial |\Psi|^2 / \partial t = \Psi^* H \Psi - \Psi H \Psi^* \text{ (} |\Psi|^2 = \Psi \Psi^* \text{ – квадрат модуля волновой функции). Введя обо-}$$

значения для вероятности состояния $P = |\Psi|^2$ и расходимости потока вероятности

$div \bar{J} = \frac{\Psi^* H \Psi - \Psi H \Psi^*}{i\hbar}$, получим уравнение локального сохранения вероятности

$$\frac{\partial P}{\partial t} + div \bar{J} = 0. \quad (3)$$

Отметим, что уравнение (3) не зависит от конкретного вида потенциальной функции ($\Psi^* U \Psi - \Psi U \Psi^* = U \Psi^* \Psi - U \Psi \Psi^* = U(|\Psi|^2 - |\Psi|^2) = 0$), поэтому оно описывает сохранение вероятности вне зависимости от взаимодействия частиц. Если поток вероятности равен $\bar{J} = -K \nabla P$ (K – коэффициент диффузионного изменения вероятности), то уравнение (3) переходит в уравнение Фоккера-Планка. Уравнение (3) отображает тот факт, что в квантовой системе синтезируется информация о подавлении флуктуаций волновой функции, которые могут разрушить локальное сохранение вероятности данного состояния квантовой системы. Возникновение флуктуаций приводит к “расплыванию” волновой функции и нарушению условий нормировки, т. е. к изменению числа частиц в системе. *Вывод:* квантовая механика Шрёдингера описывает закрытые квантовые системы.

Для открытых квантовых систем надо использовать нелинейное уравнение, описывающее перемешивание квантовых состояний системы и процессы рождения-уничтожения реальных частиц. При таком подходе становится ясным бесполезность какой-либо классификации в теории элементарных частиц: при нахождении квантовой системы на резонансном торе возникает огромное число короткоживущих резонансов, которые могут интерпретироваться как частицы. В этой связи возникает необходимость чёткого разделения частиц (*квантовый солитон, одинокий вихрь* или другое устойчивое, *уединённое, волновое* образование со сложной или простой внутренней структурой) и резонансов, возникающих при взаимодействии частиц, например, по длительности и условиям их устойчивого существования. Представление частиц в виде квантовых волновых структур является физической основой *принципа корпускулярно-волнового дуализма материи*.

Математическое описание открытых квантовых систем может быть проведено на основе аналога уравнения классической динамики, записанного в сопряжённых переменных *Якоби*:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta t} \frac{\partial \Phi}{\partial H}, \quad (4)$$

где функция $\Phi = \Phi(H; t)$ описывает эволюцию оператора действия в открытой квантовой системе с диссипацией оператора Гамильтона. Диссипация этого оператора показывает, что вид уравнения Шрёдингера меняется с течением времени, а, следовательно, будут возникать новые квантовые состояния, отвечающие новым решениям. При этом квантовая система “забывает” о том, какая она была в начальный момент времени (что приводит к возрастанию энтропии, в силу уменьшения накопленной информации) и осуществляет поиск нового устойчивого стационарного положения в фазовом пространстве. Разрушение интеграла движения (вероятности локального состояния) приводит к изменению сохранённой и порождает синтез новой информации: система начинает производить случайные поиски устойчивых состояний (*метод проб и ошибок*) и нового интеграла движения. В этом

смысле динамическая система подобна *демону Максвелла*: она различает неустойчивые и устойчивые состояния (производит информацию). Однако в отличие от демона Максвелла динамическая система в процессе перебора отбрасывает из-за перемешиваемости *равное количество* неустойчивых и устойчивых состояний. Устойчивость того или иного состояния не является критерием его выбора. Основную роль играют условия реализации такого состояния. При одних условиях система стремится занять положение минимума по одному из управляющих параметров, а, попав в минимум, обнаруживает его неустойчивость по другой характеристике. В результате только минимизирующая совокупность управляющих параметров позволяет системе на определённое время занять стационарное состояние. При изменении управляющих параметров начинается новый поиск устойчивого состояния (рис. 9.3).

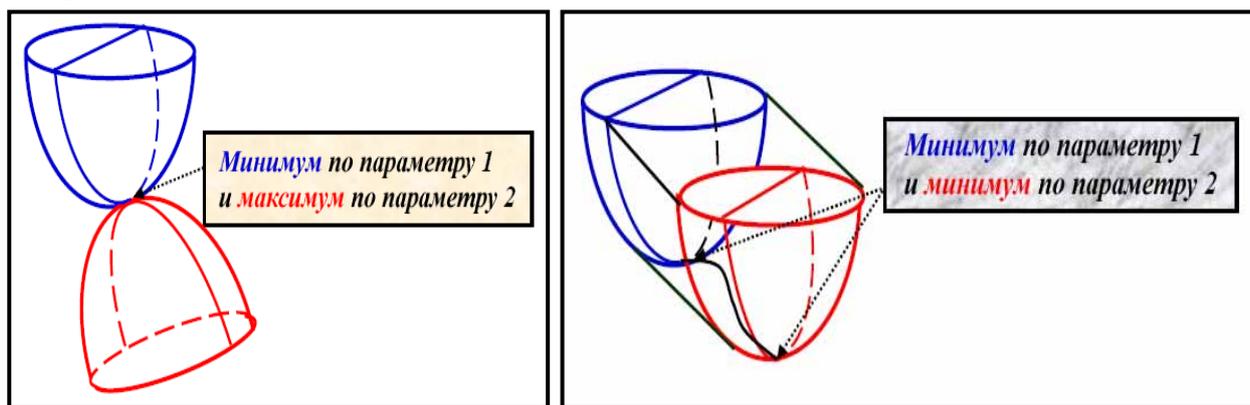


Рис. 9.3. Два возможных случая влияния управляющих параметров на поиск динамической системой устойчивого состояния.

Другой аспект квантовой механики состоит в том, что размер ячеек в фазовом пространстве (с учётом массы частицы) не может быть меньше постоянной Планка, т.е. $\Delta p \Delta q \geq \hbar$ и $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, которые называются *соотношениями неопределённостей Гейзенберга*. Для массивных тел размер ячейки может быть пренебрежимо мал и динамическая траектория макротел в фазовом пространстве согласно *H-теореме Больцмана* заполняет с течением времени весь фазовый объём системы (*эргодичность*). Для квантовых систем существенным является не свойство эргодичности, а *перемешивание*: часть фазового пространства недоступна для её заполнения в силу соотношений Гейзенберга. Это приводит к образованию “пузырей” в фазовом объёме диссипативной системы (*перемешиваемость*). Широкий спектр возникающих флуктуаций в диссипативной системе может привести к появлению возмущения с энергией меньше, чем $\hbar/\Delta t$, за промежуток времени Δt . Сохранение запрета Гейзенберга приводит к выталкиванию фазовой траектории из такой области, т.е. соотношения Гейзенберга являются интегралами движения. В этой связи возникает вопрос: “Как распределены ячейки Гейзенберга в фазовом пространстве для заданной диссипативной системы?” Естественно, что их распределение обусловлено физическими характеристиками и динамикой конкретной квантовой системы. Поэтому вид фазового объёма по истечении некоторого момента времени для каждой динамической системы специфичен. Однако в силу стохастического описания состояния квантовой системы её фазовый объём в любой момент времени имеет неопределённые очертания.

3. Квантовый компьютер и когерентность состояний

Идея создания квантового компьютера была сформулирована в начале 80-х годов XX века. Классическое вычислительное устройство содержит ячейки памяти, в которых записана последовательность 0 и 1 (см. § 2, пункт 1). Квантовая механика выявила достаточно много объектов, способных прибывать только в двух состояниях (без учёта их перепутывания): спин частицы, поляризация света и др. Техническая сторона проблемы состоит в создании устройств, создающих ячейки с необходимым квантовым состоянием. Мерой информации в кибернетике является бит, а в квантовом компьютере – кубит (quantum bit). Например, для поляризации фотона кубит определяется продольной ($|\leftrightarrow\rangle = |0\rangle$) и поперечной ($|\updownarrow\rangle = |1\rangle$) поляризациями (*ортогональные состояния*). Однако число состояний квантового бита не ограничивается элементарной парой состояний, возможны их суперпозиции вида $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ и $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. В принципе, можно создать любую линейную комбинацию с мнимыми коэффициентами из чистых и запутанных основных состояний. Оперирование с такими данными должно использовать унитарные преобразования, которые действуют на такие образования. Итак, квантовые вычисления сопровождаются следующими процессами:

1. *Суперпозиция*: унитарные преобразования когерентных состояний.
2. *Интерференция*: подавление или усиление выбранных амплитуд за счёт создания соответствующей разницы фаз.
3. *Запутанность*: некоторые состояния нельзя представить в виде их произведения.
4. *Неопределённость и неопируемость*: некоторые состояния не могут копироваться без риска их уничтожения.

Управление компьютером осуществляется логической ячейкой “исключённого – ИЛИ” (на английском XOR, OR) и “управляемого – НЕТ” (NOT). Она использует два бита информации, причём первый из битов управляющий. Если первый бит равен 1, то он изменяет значение второго бита. Операцию “НЕТ” можно реализовать с помощью матрицы перестановки $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, при этом управляющий бит может включать эту матрицу при своём значении 1 или пропускать второй бит без изменения (операция “ИЛИ”) при своём значении 0. При работе с суперпозициями квантовых состояний требуются иные матрицы, поэтому в квантовом компьютере требуется более сложное устройство для отождествления запутанных и чистых сигналов. Логические схемы вычислений строятся также, как и в обычном вычислительном устройстве. Однако они должны включать способы и механизмы перехода квантовых состояний в классические значения 0 и 1. Наличие суперпозиционных квантовых состояний позволяет создать регистры для большого числа параллельных вычислений.

При создании большого числа квантовых ячеек возникает ряд сложностей, связанных с поведением границ ячеек и границ считывающих устройств, эффектами туннелирования квантового возбуждения между ячейками, переход к непрерывному спектру состояний и их декогерентности. Создание ортогональных кванто-

вых состояний возможно только при хаотизации фаз, что приводит к непересекающимся волновым пакетам. Этот процесс разбивает когерентную волновую функцию на отдельные составляющие (ячейки). Процесс измерения зафиксировывает квантовую частицу только в одной из этих ячеек, но в какой именно определяется вероятностью $P=|\Psi|^2$ нахождения частицы в той или иной ячейке. Расположение и размеры ячеек определяются внешним измерительным прибором, который и вызывает хаотизацию фаз. Наличие границы (*мезомира*) между классическим прибором и квантовым объектом порождает не только хаотизацию фаз, но и ставит вопрос об исследовании мезомира. Отличительной чертой мезомира является то, что в нём происходят явления и процессы, которые обладают и классическими, и квантовыми характеристиками. Этому миру присущи возникновение и подавление когерентности волновых функций, переход от квантового (случайного, стохастического, хаотического) к классическому (детерминированному, предопределённому, логическому) поведению физической системы.

Если рассматривать классическую частицу со стороны квантовых состояний через окно мезомира, то можно увидеть “вымерших динозавров”: волновая функция макрочастицы коллапсировала, она “забыла” о своей волновой природе и превратилась в “окаменелость” с фиксированной координатой и импульсом. Однако эта забывчивость существует до поры, до времени, пока макрочастицы не объединяются в большие “коллективы”. И на этом уровне происходит “восстановление памяти”: они могут при определённых условиях образовывать волны и частицы нового уровня (солитоны, одиночные вихри и т.п.), т.е. и на новом уровне проявляется корпускулярно-волновой дуализм Природы, но в виде коллективного поведения огромного числа частиц.

Коллапс волновой функции, ответственный за появление классической частицы, связан с разрушением интеграла движения, который обеспечивал локальное сохранение вероятности квантового состояния в выбранной пространственно-временной точке. Он не может быть описан уравнением Шрёдингера, так как происходит уничтожение когерентных ячеек сразу во всех остальных точках. Отметим, что коллапс волновой функции ни в коей мере не затрагивает физические свойства классической частицы: она просто вылетает в макромир, теряя когерентность своей волновой функции. Следовательно, коллапс волновой функции является необратимым и одномоментным процессом. Коллапс происходит в момент отрыва частицы от мезомира. Если бы этот процесс продолжался в макромире, то происходило бы дальнейшее дробление волновой функции на когерентные пакеты и можно было бы вычислить вероятность обнаружения частицы в одном из них, фиксируя при этом скорость перемещения частицы. Последнее утверждение противоречит соотношениям неопределённостей Гейзенберга, следовательно, оно неверно. Поэтому описание коллапса волновой функции требует создания новой модели, которая позволит исследовать поведение полуклассических, полуквантовых объектов мезомира. Понимание этого процесса требует не простой замены физических характеристик на операторы или обратного перехода (операторов на физические параметры), а выяснения физической сущности таких замен.

Взаимно дополняющее изучение классических и квантовых явлений, процессов и эффектов позволит правильно понять устройство окружающего мира.



§ 10. Энтропия – мера хаоса

“Энтропию можно рассматривать как своего рода *меру незнания*. Если известно лишь, что система находится в данном макросостоянии, то энтропия этого макросостояния служит мерой нашего незнания того, в каком из микросостояний находится система, – мерой, определяемой путём подсчёта числа битов дополнительной информации, необходимой для однозначного определения микросостояния при условии, что все микросостояния, образующие данное макросостояние, равновероятны.”

Гелл-Манн

1. Силы и обобщённое уравнение энергии

Силы, действующие на динамические системы, можно разделить на *потенциальные, возмущающие и препятствующие (силы сопротивления)* движению. *Потенциальные* силы стремятся удержать систему вблизи положения равновесия и являются производными от потенциальной функции ($F_{пот} = -\partial U / \partial q$, q – обобщённая координата). *Возмущающие* силы явно зависят от времени (например, внешняя сила, которая действует на осциллятор $F_{возм} = f_0 \sin(\Omega t)$), они могут либо подавлять, либо усиливать определённые моды движения. *Силы сопротивления* препятствуют перемещению в выбранном направлении и являются причиной диссипации полной энергии системы. *Препятствующие* силы имеют различную физическую природу, среди них выделяют:

- сопротивление сухого (*кулонового*) трения не зависит от скорости изменения положения системы;
- вязкое (*линейное*) сопротивление, пропорционально первой степени скорости движения;
- вихревое (*квадратичное* или *турбулентное*) сопротивление, подчиняющееся закону Шези.

Учёт только вязкого трения приводит к описанию линейных динамических систем с диссипацией энергии, а остальные виды сопротивления приводят к нелинейным дифференциальным уравнениям эволюции диссипативной системы. Силы сопротивления можно представить в виде производной от *функции рассеивания* или *диссипативной функции Рэлея* $\Phi(\dot{q})$ (\dot{q} – обобщённая скорость): $F_{сопр} = -\partial \Phi / \partial \dot{q}$.

Из курса аналитической механики известно, что в общем случае кинетическая энергия системы может быть записана в виде $K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, причём параметры $A_{ij}(q_k)$ зависят от обобщённых координат и удовлетворяют *условиям взаимности* $A_{ij}(q_k) = A_{ji}(q_k)$ ($k=1, 2, \dots$). Если коэффициенты $A_{ij}(q_k)$ не зависят от обобщённых координат, то они называются *коэффициентами инерции* (в частности, *масса тела* – это мера его инертности). В аналогичном виде записывается и функция Рэлея,

но с другими коэффициентами $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$.

Невозмущённое движение материальной системы при фиксированных начальных условиях описывается уравнением Лагранжа-Эйлера: $\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = F_i$ с начальными условиями $q_k(0) = q_{k0}$ и $\dot{q}_k(0) = \dot{q}_{k0}$.

Изменение начальных условий приводит к новому решению уравнению Лагранжа-Эйлера, поэтому отвечающее ему движение системы называется *возмущённым* по отношению к выбранному за основу. Невозмущённое движение остаётся устойчивым сколь угодно долго, если возмущение приводит к движениям в малой окрестности состояния, определяемого основным движением (в частности, состояния равновесия). Перепишем уравнение эволюции в виде $\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = F_{i \text{ возм}}$. Умножим это уравнение на

соответствующую обобщённую скорость \dot{q}_i и просуммируем по $i=1 \div N$, получим $\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^N F_{i \text{ возм}} \dot{q}_i$. Первое слагаемое в левой части уравнения преобразуем следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} (2K) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i,$$

здесь была учтена теорема Эйлера об однородных функциях (кинетическая энергия является квадратичной формой от обобщённой скорости, т.е. является однородной функцией, следовательно, $\sum_{i=1}^N \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2K$). Так как кинетическая энергия

не зависит явно от времени ($\partial K / \partial t = 0$), то её полная производная по времени равна $\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$. Следовательно, разность

$\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (2K) - \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt}$. Потенциальная энергия не зависит явно

ни от времени, ни от скоростей движения, поэтому $\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial U}{\partial q_i}$. Функция Рэ-

ля также, как и кинетическая энергия, является однородной функцией, поэтому $\sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2\Phi$. Величина $W = \sum_{i=1}^N F_{i \text{ возм}} \dot{q}_i$ определяет *мощность* возмущающих сил.

Введя обозначение *полной энергии* (энергии Гамильтона, гамильтониан) $H = K + U$, запишем уравнение Лагранжа-Эйлера в виде обобщённого уравнения для энергии $dH/dt = W - 2\Phi$. Из полученного равенства видно, что при компенсации возмущающими силами диссипации полная энергия системы сохраняется $dH/dt = 0$ (*консервативная* система), в противном случае движение системы приводит к рассеиванию энергии (*диссипативная* система).

2. Адиабатические инварианты динамических систем

Движения в фазовом пространстве консервативных и диссипативных систем существенно различаются. Введение гамильтониана позволяет определить обобщённые скорости $\dot{q} = \partial H / \partial p$ (p – обобщённая импульс) и силы $\dot{p} = -\partial H / \partial q$ посред-

вом производных от полной энергии. Лиувилль показал, что фазовый объём динамической системы с течением времени сохраняется (*эргодичность*). Введя обобщённый вектор тока в фазовом пространстве $\vec{J} = (\dot{q}; \dot{p})$, можно утверждать, что фазовая “жидкость” несжимаема, так как

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_q}{\partial q} + \frac{\partial J_p}{\partial p} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0,$$

что является следствием непрерывности функции Гамильтона. Несжимаемость фазовой “жидкости” и обеспечивает сохранение фазового объёма при эволюции. Из теоремы Лиувилля следует утверждение Пуанкаре (*цикл Пуанкаре*): если консервативная система совершает движение из конечной области фазового пространства, то её траектории движения таковы, что система возвращается по истечении некоторого времени в исходную область, за исключением может быть точек начала движения (*обратимость* уравнений динамики). Продолжительность цикла Пуанкаре тем больше, чем сильнее неустойчивость динамической системы (рис 10.1).

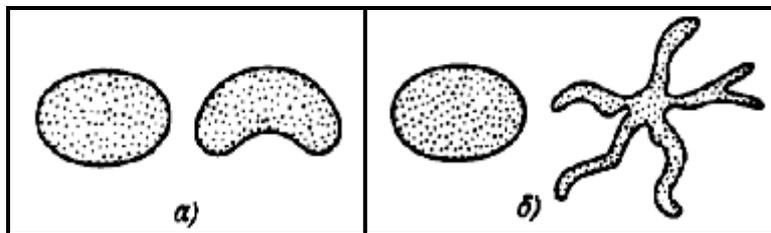


Рис. 10.1. Изменение фазового объёма динамической системы при устойчивом (а) и диссипативном (б) движениях.

Если динамическая система содержит очень большое число частиц, то можно ввести функцию распределения $f(q; p; t)$ частиц в фазовом пространстве по месторасположениям и скоростям в зависимости от момента времени. Из теории вероятностей известно, что $\int f(q; p; t) d\Gamma = 1$, где величина $d\Gamma = dq dp$ определяет объём фазового пространства, занятый системой. Дифференциальный закон сохранения числа частиц с течением времени определяется уравнением $\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{J}) = 0$ или с учётом несжимаемости фазовой “жидкости” уравнением Лиувилля:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Если в этом уравнении выполнить инверсию времени (замена t на $-t$), то уравнение не изменится, т.е. уравнение Лиувилля обратимо во времени.

При движении динамической системы остаются неизменными определённые величины, например, интеграл, определяющий действие $I = - \oint \frac{p dq}{2\pi}$. Динамические уравнения можно записать в переменных действие (I)-угол (ϑ), которые задают в фазовом пространстве инвариантный тор:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) \end{cases},$$

где $\omega(I)$ – круговая частота нелинейных колебаний.

Из приведенной системы уравнений видно, что для консервативных систем сохраняются действие I и угол ϑ (полная энергия системы). При медленных возмущениях, вносимых в динамическую систему, действие приближённо сохраняется (*адиабатический инвариант*). Если действие меняется существенным образом, то могут возникнуть новые гармоники возмущений, которые переводят систему в новое устойчивое состояние, вплоть до возникновения хаотических движений. Таким образом, хаотическое состояние системы характеризуется системой уравне-

ний
$$\begin{cases} \dot{i} = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} \\ \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I} \end{cases}$$
. Если движение динамической системы характеризуется N адиабати-

ческими инвариантами I_k ($k = 1 \div N$), то она имеет N сохраняющихся интегралов движения. Если число интегралов движения меньше числа N на величину n , то происходит “разрушение” n адиабатических инвариантов (например, *полная энергия системы не сохраняется* в нелинейных динамических системах и при образовании упорядоченных структур при необратимых процессах). Таким образом, разрушение интегралов движения должно приводить к разрушению инвариантных торов фазового пространства. Среди инвариантных торов выделяют *резонансные* и *обычные*. На инвариантных торах фазовые траектории замкнуты; частоты движения на резонансном торе соизмеримы, а на обычном – нет. Инвариантные торы рождаются в результате вырождения предельного цикла: фазовые траектории начинают накручиваться на предельный цикл (рис. 10.2). Фазовые траектории на торе описывают квазипериодические колебания. Особенностью инвариантных торов является их зависимость от количества интегралов движения. При $N = 2$ торы вложены один в другой и делят фазовое пространство между собой. Разрушенные торы оказываются зажатými между устойчивыми торами (рис 10.3), поэтому возму-

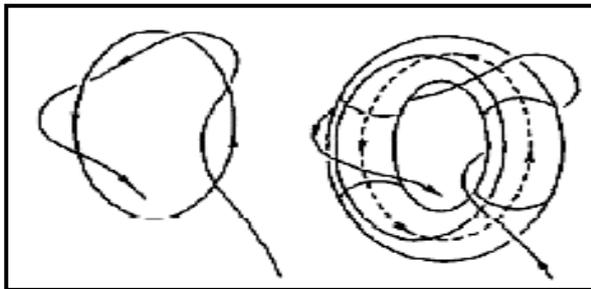


Рис. 10.2. “Рождение” инвариантного тора.

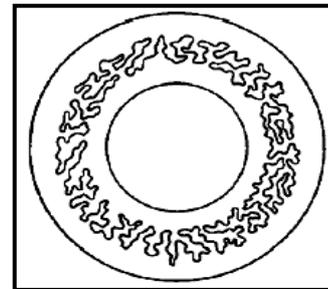


Рис. 10.3. При $N = 2$ разрушенные торы между устойчивыми торами.

щения фазовой траектории в такой области ограничены (*слабый хаос*). При количестве интегралов движения $N > 2$ торы пересекаются и разрушенные торы образуют сложную сетку каналов, по которым фазовая траектория начинает “гулять” по всему фазовому пространству (*сильный хаос*) и может уйти сколь угодно далеко от исходного состояния (*диффузия Арнольда*). Причина такого разделения случаев состоит в том, что в пространстве с $2N$ измерениями поверхность постоянной энергии имеет размерность $2N - 1$, а её граница – $2N - 2$. Если торы делят фазовое пространство, то их размерность должна удовлетворять неравенству $N \geq 2N - 2$, отсюда находим, что $N \leq 2$. Следовательно, при конечном значении числа N всегда

существуют конечные по размеру (пусть даже не очень большие) области фазового пространства, в которых движение динамической системы будет детерминированным, а уравнения движения обратимыми во времени.

Приведенные рассуждения применимы для описания систем с конечным числом динамических переменных. Однако поля имеют бесконечное число интегралов движения, поэтому разрушение конечного числа интегралов движения может привести только к каким-либо видоизменениям внутри поля (например, возникновению солитонов), но не к качественной перестройке полевой системы. Как будет показано ниже для перехода в новое состояние такая система должна обладать новыми *статистическими* свойствами.

Разрушение адиабатических инвариантов движения *происходит вблизи сепаратрис* и приводит к *перемешиванию* состояний динамической системы. Если усреднённые по времени параметры динамической системы равны аналогичным характеристикам, полученным путём усреднения по ансамблям тождественных динамических подсистем, то движение системы называется *эргодическим*. При эргодическом движении фазовые траектории равномерно покрывают фазовое пространство. При *перемешивании* за время T фазовые траектории покрывают всё фазовое пространство определённой сеткой. По истечении времени $2T$ картина повторяется, но размер ячеек сетки становится вдвое меньше. Таким свойством обладают динамические системы, у которых фазовые траектории с течением времени отдаляются друг от друга из-за неустойчивости системы. Если фазовое пространство конечно, то траектории не могут уйти друг от друга далее характерного размера пространства и начинают образовывать “запутанный клубок” (*локальная неустойчивость*). Это означает, что существует направление в пространстве, для которого зависимость от времени расстояния $D(t)$ между двумя точками описывается формулой $D(t) = D(0)e^{h_0 t}$, где h_0 – коэффициент затухания. Среднее значение этого параметра обратно пропорционально времени расцепления временных корреляций в распределении фазовых траекторий по фазовому пространству. Наличие локальной неустойчивости приводит к *перемешиванию* и, в частности, к *эргодичности* системы.

3. Энтропия и перемешиваемость

Статистическая физика исследует свойства систем, состоящих из большого числа частиц. Под частицами понимают объекты различной природы: атомы и молекулы в газе, звёзды в галактике, автомобили на городских улицах, людей в социальной группе и т.п. Однородные совокупности элементов системы объединяются под названием *ансамбль*. Основная задача статистической физики состоит в выяснении свойств ансамбля, исходя из поведения составных частей системы. В силу взаимодействия компонентов системы между собой свойства ансамбля будут качественно отличаться от характеристик индивидуальностей. В частности, обратимость механического движения атомов может оказаться нарушенной для всего ансамбля в целом (разрушение адиабатического инварианта, обеспечивающего обратимость движения во времени). Законы движения частиц всегда считаются заданными и не являются предметом обсуждения в статистической науке. В дальнейшем под *ансамблем частиц* понимается совокупность частиц, движение которых

описывается механикой Гамильтона или механикой Лагранжа-Эйлера.

Ранее было показано, что объединение большого числа связанных между собой динамических систем обладает новым свойством непрерывности (сплошности), вследствие чего возникло понятие поля, определяющего среду распространения волнового процесса. Разные поля описываются разными непрерывными (кусочно-непрерывными) функциями, которые являются решениями разных или сходных по структуре дифференциальных уравнений.

Для характеристики *хаотичности* ансамбля динамических систем Больцман ввёл понятие *энтропии*, определив её через функцию распределения $f(q; p; t)$:

$$S(f) = - \int f \ln f d\Gamma.$$

Из этого определения энтропии следует, что она сохраняется с течением временем в силу справедливости уравнения Лиувилля $\frac{df}{dt} = 0$, определяющего неизменность фазового объёма, занятого ансамблем частиц в фазовом пространстве:

$$\frac{dS(f)}{dt} = - \int (1 + \ln f) \frac{df}{dt} d\Gamma = 0.$$

Установить точный вид функции распределения для ансамбля не представляется возможным ввиду свойства перемешиваемости из-за взаимодействия частиц, поэтому приходится вводить ограничения на её вид, например, в виде огрубления. Однако при огрублении определения функции распределения $f(q; p; t)$, например, в виде $F = \frac{1}{\delta\Gamma} \int f d\Gamma$ ($\delta\Gamma$ – область огрубления), ситуация изменяется. Функция распределения F теперь может зависеть от времени, тогда и энтропия $\tilde{S}(F) = - \int F \ln F d\Gamma$ также будет функцией времени. Другое определение энтропии также принадлежит Больцману: $\tilde{S} = k_B \ln W$, где $k_B = 1,38 \cdot 10^{-25}$ Дж / К – постоянная Больцмана, W – вероятность того, что система находится в том или ином состоянии.

Вблизи состояния равновесия все состояния системы практически равновероятны в области фазового пространства $\Delta\Gamma$, тогда вероятность $W \cong \Delta\Gamma / \Gamma_0$ (Γ_0 можно принять равным 1). Согласно теореме Лиувилля, изменение фазового объёма, занимаемого динамической системой, не зависит от времени, т.е. $\Delta\Gamma(t) = \Delta\Gamma(0)$. Несмотря на это происходит изменение формы и структуры любой фазовой капли во времени: она наполняется “пузырями пустоты”; количество “пузырей” растёт со временем; огибающая капельного объёма увеличивается (рис. 10.4). Огрублённый объём капли $\Delta\tilde{\Gamma}(t)$ зависит от времени согласно формуле $\Delta\tilde{\Gamma}(t) = \Delta\Gamma(0) e^{h_c t}$, где h_c – усреднённое по фазовому объёму капли значение коэффициента затухания. Тогда безразмерная энтропия ($\sigma = S / k_B$) определяется формулой $\sigma = \ln \Delta\tilde{\Gamma}(t) = h_c t + \ln \Delta\Gamma(0)$. При точности огрубления ε величину начального объёма можно положить равной $\Delta\Gamma(0) \cong \varepsilon$ и в дальнейшем устремить точность огрубления ε к нулю. Энтропия по Колмогорову определяется формулой $\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \Delta\tilde{\Gamma}(t)}{t} \right) = h_c$. Энтропия Колмогорова определяет скорость изменения энтропии Больцмана при перемешивании фазовых траекторий; обратно пропорциональна времени расцепления временных ко-

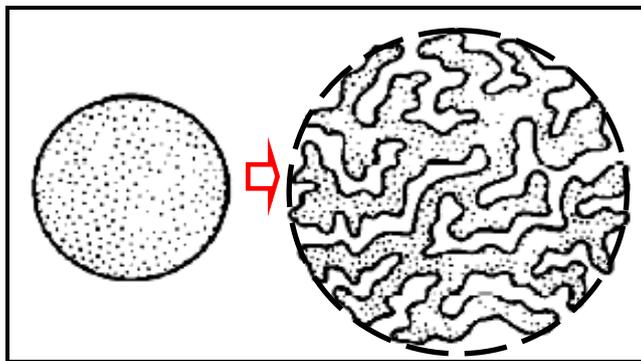


Рис. 10.4. Изменение структуры фазовой капли.

релляций; она не зависит от способа разбиения фазового пространства и выполненного огрубления (*метрический инвариант*); системы с одинаковыми значениями h_c изоморфны (*подобны*) друг другу. Введение энтропии Колмогорова позволяет определить время, в течение которого возрастает энтропия Больцмана: если фазовая капля $\Delta\Gamma(0) = \varepsilon_0$ растекается до объёма $\Delta\tilde{\Gamma}(t)=1$, то время возрастания энтропии

Больцмана равно $t_0 = -\frac{1}{h} \ln \varepsilon_0$.

С возрастанием энтропии Больцмана (*H-теорема*) связан ряд парадоксов статистической физики. *Парадокс Цермело (возвращаемость)* связан с применением теоремы Пуанкаре о возврате системы в исходное состояние с любой заданной точностью через определённое время. Следовательно, энтропия системы должна совпадать в момент возврата со значением энтропии системы в исходном состоянии, а это противоречит *H-теореме*. *Парадокс Лошмидта (обратимость)* связан с временной обратимостью динамических уравнений. Если при прямой последовательности состояний, через которые проходит система, энтропия возрастает, то при обратной во времени последовательности состояний она должна убывать, а это тоже противоречит теореме Больцмана. Интересен ответ Больцмана на эти замечания, который он дал в “*Лекциях по основам кинетической теории*” (1904): “Я убеждён в том, что нападки эти основаны на недопонимании и что значение кинетической теории до сих пор просто не осознано. По моему мнению науке будет нанесён сильнейший удар, если те, кто стоит в оппозиции к кинетической теории в настоящее время, сумеют предать её забвению, подобно тому, как это произошло с волновой теорией света благодаря авторитету Исаака Ньютона. Я вполне отдаю себе отчёт в бессилии человека перед лицом мнения, разделяемого большинством. Для того, чтобы была уверенность в том, что когда человечество вернётся к изучению кинетической теории, ему не придётся снова переоткрывать известные вещи, я постараюсь изложить наиболее трудные и непонятные разделы теории как можно яснее”.

Конфликт обратимости уравнений механики Гамильтона и необратимости кинетических уравнений, описывающих неравновесные процессы, устраняется в теории Больцмана введением интеграла столкновений (вводится *приближение хаотических фаз*). Несмотря на то, что движение каждой частицы газа описывается первым законом Ньютона, но никто не наблюдал в эксперименте, чтобы газ, будучи отгороженным в левой половине сосуда, после снятия перегородки, вновь собрался бы в левой половине сосуда через какое угодно длительное время. Это свя-

зано с чрезвычайно малой вероятностью возврата системы в исходное состояние. Такими вероятностями обычно пренебрегают при крупнозернистом огрублении функции распределения системы с большим числом частиц. В силу этого уравнения кинетической теории не могут описывать процессы возврата. Кроме того, микроскопическая обратимость движений частиц нивелируется как крупнозернистой функцией распределения, так и пренебрежением флуктуациями, которые могли бы выровнять вероятности перехода во времени системы из одного макросостояния в другое. Ответы Больцмана своим коллегам Цермело и Лошмидту звучали так: “Долго же вам придётся ждать” и “Попробуйте их повернуть”, соответственно.

Современные достижения эргодической теории с учётом открытых свойств *перемешиваемости* и *локальной неустойчивости* указывают на появление *статистических* свойств у динамических систем (даже с малым числом частиц). Как было показано ранее, *необратимость* процесса связана не с тем, что система не может вернуться в сколь угодно близкое состояние к исходному, а в силу свойства *перемешиваемости* состояний, которое изменяет форму фазового объёма системы. Интуитивно ясно, что вероятность возврата этого объёма к первоначальной форме является весьма малой. Пренебрежение этой вероятностью приводит к необратимости кинетики.

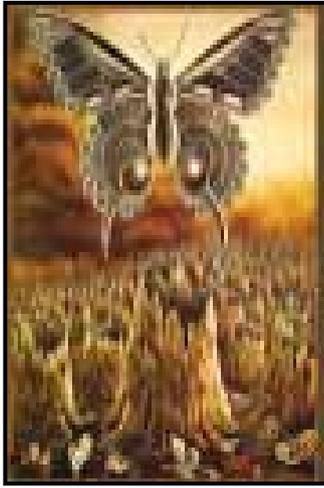
Почему же нельзя повернуть все частицы по их известным детерминированным траекториям, вычисленным по первому закону Ньютона? Это связано с тем, что при выборе масштаба огрубления в виде определённого объёма происходит потеря информации о поведении траекторий внутри этого объёма: вместе с развитием выбранной траектории в этом объёме происходит обращение и бесконечного числа других траекторий, находящихся в этой фазовой капле в силу свойства перемешиваемости. Перемешиваемость приводит к заполнению объёма огрубления за конечное время весьма большим числом траекторий, пришедших из любой области фазового пространства, *информация* о которых теряется в результате операции огрубления. Перемешивание делает процесс утраты *информации* экстремальным и устойчивым.

Изучение множества взаимодействующих частиц позволяет выделить следующие ансамбли и соответствующие им динамические системы:

- – *микрoканонический* (*закрyтая* система, которая не обменивается с внешней средой ни частицами, ни энергией, ни информацией);
- – *канонический* (*изолированная* система, которая обменивается с термостатом только энергией, но не частицами и информацией);
- – *макрoканонический* (*открытая* или *диссипативная* система, в которой присутствуют потоки частиц и энергии как внутрь системы, так и во внешний мир, но не происходит передачи информации);
- – *мегаканонический* (*эволюционирующая* система, которая может накапливать, сохранять, перерабатывать и передавать другим системам вещество, энергию и информацию).

Статистические свойства ансамблей взаимодействующих частиц приводят к новому качеству – *информативности* динамической системы. Введение информации в роли физической переменной впервые было предложено основателем кибернетики Н. Винером. Существуют различные определения информации: от печат-

ного слова до выражения её через вероятности осуществления того или иного явления. В дальнейшем под *информацией* будем понимать численную меру *упорядоченности* ансамбля, т.е. определять её из равенства $\tilde{S}(f) + I(f) = const$. Из этой формулы следует важное свойство информации: при обратимых процессах ($d\tilde{S} = 0$) не происходит изменение информации, а при необратимых явлениях ($d\tilde{S} \geq 0$, знак равно соответствует адиабатическим изменениям состояния ансамбля) информативность системы уменьшается. По-видимому, в таких системах начинают протекать процессы, которые стремятся восстановить нарушенный паритет между энтропией и информацией. Эволюционирующая система переходит на качественно новый уровень, изменяя соотношение информация-энтропия, например, за счёт разделения на подсистемы вида k , в которых сохраняется связь $\tilde{S}_k(f) + I_k(f) = const_k$. Это приводит к возникновению *границ* между подсистемами. *Границы* – области пространства, внутри которых происходит скачкообразное изменение физических характеристик при переходе от одной подсистемы к другой. Следовательно, сумма энтропии и информации является новым интегралом движения для диссипативных систем. Его разрушение приводит к *репродуктивности* (размножению) системы с появлением подсистем с качественно новыми *генетическими* свойствами (*мутанты*). Простым примером репродуктивности является фазовый переход. При фазовом переходе из газа выделяется новая подсистема в виде жидкой фазы (мутант), свойства которой значительно отличаются от свойств газа. В отличие от газа жидкость малосжимаема; принимает форму сосуда, в который она помещается; обладает вязкими свойствами. Это означает, что *выживаемость* мутантов неразрывно связана с синтезом новой информации. Следовательно, возникает проблема *сохранения, переработки и передачи* информации при репродукции. Появление границ не решает эту проблему: при разделении жидкости перегородкой не происходит синтеза новой информации. Более сложный процесс *коагуляции* (или объединения) одинаковых и разнородных частиц приводит к формированию *химических соединений*, которые изменяют информационно-энтропийную структуру системы. Следовательно, происходит разделение исходной динамической системы на области с большей информацией и меньшей энтропией, которые взаимодействуют между собой путём обмена информацией или энтропией. Высокоэнтропийные системы пытаются разрушить системы с высокой информативностью (и наоборот), ведя борьбу внутри собственного “вида” (реализуется *принцип подчинённости*): системы с достаточно низкой энтропией пытаются отобрать её у систем с большей энтропией (*версификация* устойчивых состояний). На биологическом уровне развития материи эти процессы реализуются в виде моделей “хищник-жертва” (см. § 13) и внутривидовой борьбы. Перемешиваемость вынуждает к уравниванию систем с повышенной и низкой информативностью. Это приводит к тому, что системы с высокой и низкой информативностью могут сосуществовать только в режиме эволюционирующей системы. Для жизнедеятельности системы надо обеспечить безопасность (материальную, энергетическую и информационную) индивидуального (*инстинкт самосохранения*) и коллективного (*инстинкт подчинённости*) существования; возобновляемость индивидуумов (*инстинкт репродукции*); сохранение ценной для выживания старой и синтез новой информации (*инстинкт эволюции*).



§ 11. Фракталы – геометрия природы

“Красота *всегда относительна*... Не следует... полагать, что берега океана и впрямь *бесформенны* только потому, что их форма отлична *от правильной формы* построенных... причалов; форму гор *нельзя считать неправильной* на основании того, что они не являются *правильными конусами* или *пирамидами*; из того, что расстояния между звёздами *неодинаковы*, ещё *не следует, что их разбросала по небу неумелая рука*. Эти *неправильности существуют только в нашем воображении*, на самом же деле они таковыми не являются и никак не мешают истинным проявлениям жизни на Земле, ни в царстве растений и животных, ни среди людей.”

Р. Бенгли

1. Самоподобие

Многие исследователи в области физики и математики считают, что явления и процессы описываются дифференцируемыми функциями. Однако такие функции являются скорее исключением, чем правилом, в организации природы. Примером может служить траектория броуновской частицы (рис. 11.1), которая является

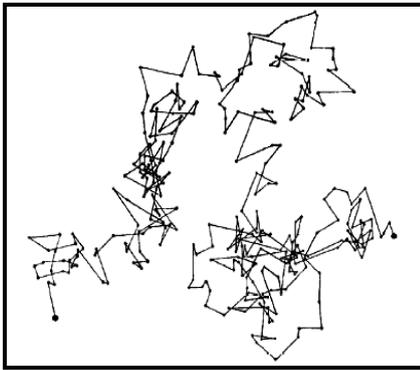


Рис. 11.1. Недифференцируемая траектория броуновской частицы.

недифференцируемой кривой: на этой кривой присутствует большое число точек, в которых не существует производная. Среди этих объектов присутствуют такие, которые при любом увеличении масштабов содержат одинаковые структуры – это фрактальные множества. Самоподобие фракталов привлекает внимание исследователей потому, что этим свойством обладают все объекты природы на всех уровнях её организации. Основатель теории фракталов *Б. Мальденброт* (1984)

писал: “Почему геометрию называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в её неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно. Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные...”

В качестве самоподобных структур можно привести русские матрёшки, логарифмическую спираль, ε -разложение Вильсона (*теория перенормировок*) и т. п. Самоподобие отображает иерархическую сущность самоорганизации материи на всех уровнях её существования: от малых до больших масштабов. Выбор *скейлинговой* (масштабной) области в исследуемом объекте может отразить те свойства системы, которые игнорируются при более крупном масштабе. Самоподобие приводит к тому, что мелкие детали вкрапляются в крупные и становятся “незаметными”, хотя они имеют те же свойства, что и большие “кирпичики” мироздания.

Для иллюстрации самоподобия разделим отрезок прямой линии, квадрат и куб на N равных частей (рис. 11.2), *топологическая размерность* (число параметров, характеризующих геометрическую фигуру) которых равна: для отрезка прямой $d = 1$ (определяется одним параметром – длиной), для квадрата $d = 2$ (длина и

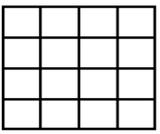
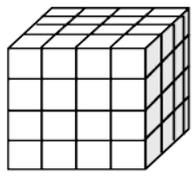
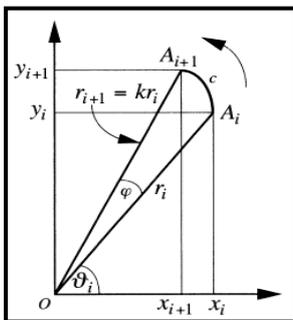
Исходный объект	Элемент подобия	Параметры подобия
		$N=4, k=1/4, d=1$
		$N=16, k=1/4, d=2$
		$N=64, k=1/4, d=3$

Рис. 11.2. Топологическая размерность и коэффициент подобия геометрических фигур.

ширина), для куба $d=3$ (длина, ширина и высота). Тогда каждая часть будет подобна исходному объекту, но уменьшена в $1/k^d$ раз (k – коэффициент подобия). Числа N и $1/k^d$ связаны между собой равенством $Nk^d = 1$. Из этого равенства топологическая размерность $d = \frac{\ln N}{\ln(1/k)}$. Топологическая размерность совпадает с минималь-

ной размерностью пространства, в котором может быть отображена геометрическая фигура или её часть: отрезок прямой линии – в одномерном, квадрат – в двумерном, куб – в трёхмерном пространствах. Таким образом, *самоподобие* геометрических фигур достигается *изменением масштаба оригинала* как в сторону увеличения ($k > 1$), так и в сторону уменьшения его размеров ($k < 1$).



Другим примером самоподобия является логарифмическая спираль. Согласно Газале, поворот радиус-вектора r_i на произвольный угол φ с удлинением в k раз (рис. 11.3) описывается уравнениями, которые в матричном виде выглядят так:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

После n поворотов на угол φ эти уравнения принимают вид:

Рис. 11.3. Поворот радиус-вектора
$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k^n \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k^n \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Если начальная точка лежит на оси Ox , то $y_i = 0$. В этом случае после n поворотов на угол φ координаты новой точки определяются начальной координатой абсциссы по формулам:

$$x_n = k^n x_0 \cos(n\varphi) \text{ и } y_n = k^n x_0 \sin(n\varphi).$$

Следовательно, $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = k^n r_0$, а угол поворота $\vartheta_n = n\varphi$. Из этих формул видно, что при повороте на произвольный угол ϑ радиус-вектор увеличится в $k^{\vartheta/\varphi}$ раз. Тогда радиус-вектор можно задать формулой $r(\vartheta) = r_0 e^{\lambda\vartheta}$, где $\lambda = (\ln k)/\varphi$ – коэффициент

циент расширения. Такая спираль называется *логарифмической*. Логарифмическая спираль самоподобна, так как существует такой угол θ , при котором увеличенная в k раз спираль совпадает с исходной спиралью. Коэффициент расширения определяет котангенс постоянного угла β между радиус-вектором r и касательной к нормали в любой точке логарифмической спирали. Это означает, что в каждой четверти декартовой плоскости точки спирали расположены внутри подобных прямоугольных треугольников (рис.11.4). Спираль достаточно часто возникает в различных физических задачах, например, фазовые траектории в случае устойчивого и неустойчивого фокусов (см. рис. 2.7) представляют собой спирали. Это говорит о возникновении самоподобия при таком типе движения. Природа использует спираль при построении живых организмов – моллюсков *Nautilus* и других. Рассмотренные примеры показывают, что самоподобие является неотъемлемым атрибутом природы: элементарные частицы подобны (*тождественны*) друг другу; броуновское движение демонстрирует вероятностное самоподобие; темперированный двенадцатитоновый строй Баха (отношение частот соседних нот темперированного строя постоянно и равно $2^{1/12}$ октавы, разделённой на 12 полутонов) указывает на использование самоподобия в музыке. Наиболее интенсивно свойство самоподобия использовал в своём творчестве художник *Эшер* (рис. 11.5). Природные фракталы показаны на рис. 11.6. Самоподобие пронизывает все уровни организации, существования и

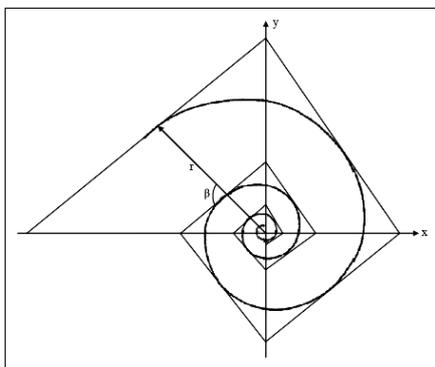


Рис. 11.4. Самоподобие логарифмической спирали.

но и равно $2^{1/12}$ октавы, разделённой на 12 полутонов) указывает на использование самоподобия в музыке. Наиболее интенсивно свойство самоподобия использовал в своём творчестве художник *Эшер* (рис. 11.5). Природные фракталы показаны на рис. 11.6. Самоподобие пронизывает все уровни организации, существования и

и неустойчивого фокусов (см. рис. 2.7) представляют собой спирали. Это говорит о возникновении самоподобия при таком типе движения. Природа использует спираль при построении живых организмов – моллюсков *Nautilus* и других. Рассмотренные примеры показывают, что самоподобие является неотъемлемым атрибутом природы: элементарные частицы подобны (*тождественны*) друг другу; броуновское движение демонстрирует вероятностное самоподобие; темперированный двенадцатитоновый строй Баха (отношение частот соседних нот темперированного строя постоянно и равно $2^{1/12}$ октавы, разделённой на 12 полутонов) указывает на использование самоподобия в музыке. Наиболее интенсивно свойство самоподобия использовал в своём творчестве художник *Эшер* (рис. 11.5). Природные фракталы показаны на рис. 11.6. Самоподобие пронизывает все уровни организации, существования и

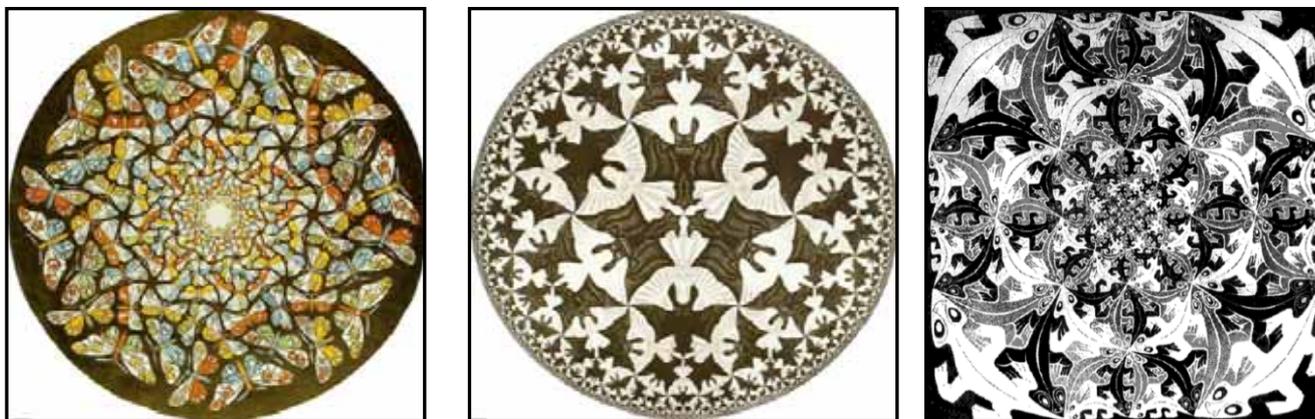


Рис. 11.5. Самоподобие в картинах Морица Эшера.



Рис. 11.6. Фрактальная геометрия природы.

отображения организации материального мира, т.е. *скейлинг* (или масштабная инвариантность) является важной характеристикой природного объекта. Самоподобие может быть детерминированным и хаотическим, непрерывным (траектория броуновской частицы) и дискретным (русские матрёшки). Некоторые виды подобия сохраняются при значительном увеличении масштаба, а другие исчезают при незначительном изменении геометрических размеров (*ограниченность* скейлинга). Иногда масштабно изменённые объекты математически точно воспроизводят геометрию исходной фигуры, но в природе эта точность теряется за счёт воздействия различных факторов (“*мутаций*”), скейлинг наблюдается только асимптотически. Самоподобие может быть явным или скрытым, поэтому его выявление является важной задачей естествознания.

2. Фрактальные множества

Фракталом (от латинского слова “fractus” – *изломанный*; в английском варианте слово “fractional” означает *дробный*) называется структура, состоящая из частей, которые подобны исходному объекту в целом и имеют *размерность Хаусдорфа-Безиковича* D , которая *строго больше* или *равна* её топологической размерности d . Размерность Хаусдорфа-Безиковича определяется почти таким же соотношением ($D = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N}{\ln(1/k)} \right)$), что и топологическая размерность, но в отличие от

последней может принимать не только целочисленные, но и дробные значения.

Ярким представителем фрактальной кривой является траектория движения броуновской частицы (рис. 11.1). Увеличение любого её участка в 10 раз приводит к увеличению числа звеньев в 100 раз, т.е. для кривой *Броуна* размерность Хаусдорфа-Безиковича равна 2. Если бы броуновская частица двигалась по плоскости (топологическая размерность $d=2=D$), то её траектория прошла бы по истечении длительного времени через все точки плоскости. Однако в силу самопересечения кривой движения этот феномен не наблюдается. Кроме того, начав движение из некоторой точки, броуновская частица может вернуться в сколь угодно малую окрестность этой точки, потому что вероятность этого события в случае плоскости равна 1. При движении в пространстве (топологическая размерность $d=3>D$), вероятность возврата в малую окрестность начальной точки движения меньше 1. Границы масштабной инвариантности для блуждающей частицы Броуна порядка 10^8 : от размеров сосуда ($\approx 0,1$ м) до длины свободного пробега ($10 \text{ нм} = 10^{-9}$ м), причём каждое звено траектории образует *континуум*. Отметим, что траектория броуновской частицы достаточно близко подходит под определение недифференцируемых функций *Вейерштрассе*. Кроме того, этот пример показывает, что при размерности Хаусдорфа-Безиковича равной 2 геометрическим объектом необязательно будет плоскость. Этой фигурой может быть и топологически одномерная линия. Поэтому рассмотрим примеры таких структур:

а) Кривая (“снежинка”) Коха (1904). Возьмём отрезок прямой и в его средней части построим равносторонний треугольник; аналогичные построения проведём на каждом прямолинейном участке (результаты построений до 5 шага показаны на рис.11.7). Шаг итерации при n -ом построении (коэффициент подобия) равен 3^{-n} , а

число возникающих отрезков – 4^n . Следовательно, размерность Хаусдорфа-Безиковича кривой Коха равна $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,26\dots$. Так как эта размерность лежит между 1 и 2, то кривая Коха занимает промежуточное положение между одно- и двумерными топологическими фигурами.

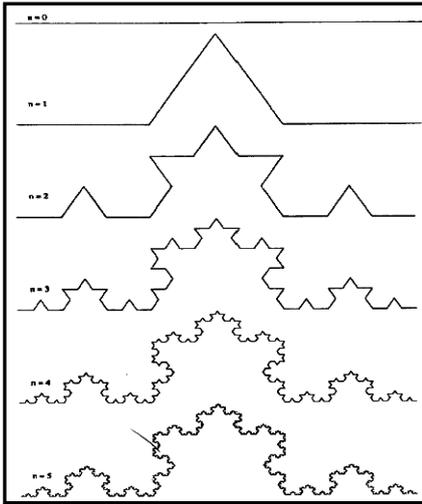


Рис. 11.7. Кривая Коха.

б) “Пыль” Кантора (1883). Если отрезок прямой разделить на 3 равные части и удалить средний отрезок, то полученная фигура представляет первый шаг при построении канторовской “пыли”. Аналогичные действия выполняются с каждым из полученных отрезков до бесконечности (рис. 11.8). Размерность Хаусдорфа-Безиковича определяется формулой

$$D = \ln 2 / \ln 3 = 0,63 \dots,$$

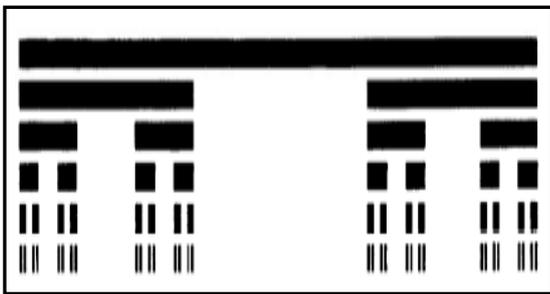


Рис. 11.8. Канторовская “пыль”.

так как при n -ом построении коэффициент подобия равен 3^{-n} , а число возникающих отрезков равно 2^n .

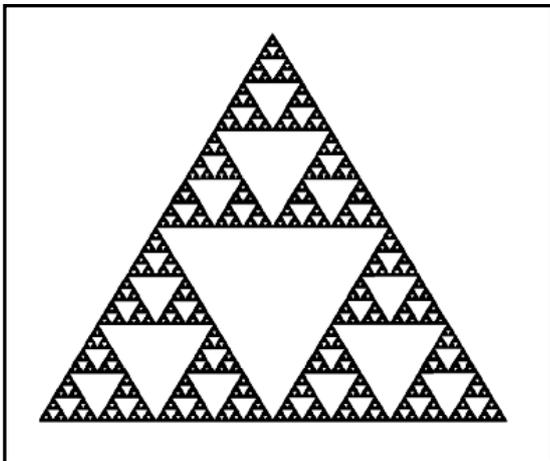


Рис. 11.9. “Ковёр” Серпинского.

в) “Ковёр” Серпинского (1915). Фрактал Серпинского представляет собой плоский аналог “пыли” Кантора (рис. 11.9). Его можно определить различными способами: удалением центрального равностороннего треугольника из первоначального треугольника, разделённого на 4 равносторонних треугольника; множеством выигрышных точек в игре сэра Пинского; использованием треугольника Паскаля в системе двоичного исчисления (учитываются правила сложения $0+0=1$, $0+1=1$, $1+0=1$ и $1+1=0$). Воспользуемся последним способом, для чего напомним, как строится треугольник Паскаля.

Возведение в степень n суммы 2 чисел приводит к следующим выражениям:

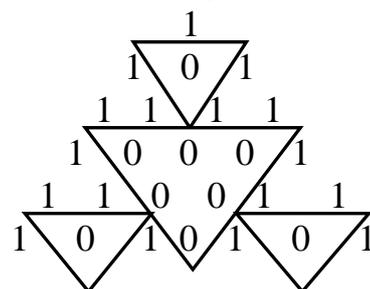
$$n=2 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$n=3 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$n=4 \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \dots$$

Паскаль заметил, что числовые коэффициенты на шаге n можно вычислять по известным коэффициентам шага $n-1$ в виде суммы ближайших чисел (рядом построен аналогичный треугольник в двоичной системе исчисления):

	1					
	1	2	1			
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
	1	5	10	10	5	1
.....						



Треугольник Паскаля, построенный в двоичном коде, полностью отвечает верхней части ковра Серпинского, если вместо нулей изобразить равносторонние треугольники. Фрактальная размерность ковра Серпинского обратно пропорциональна размерности Хаусдорфа-Безиковича для канторовской “пыли”, т.е. равна

$$D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58 \dots$$

г) “*Драконы*” Хайвера. Если складывать лист бумаги так, как показано на рис. 11.10а (показаны первые 4 итерации), то после n -ого шага построения получается фрактальное множество, которое Хайвер назвал “драконом”. Отметим тот факт,

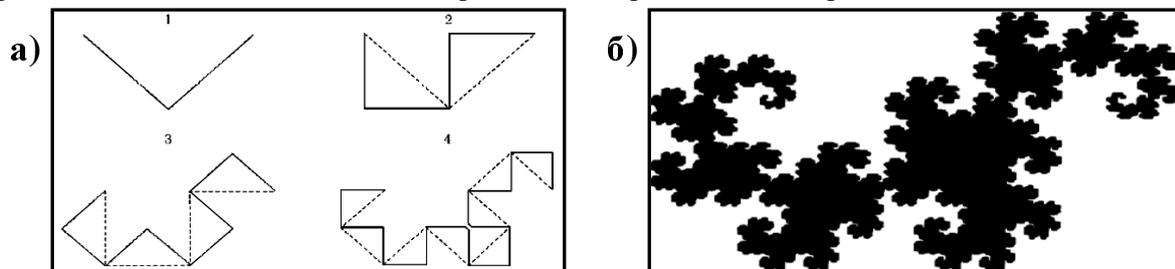


Рис. 11.10. Построение и вид дискретного фрактала Хайвера.

что последовательность центральных складок точно укладывается на логарифмическую спираль. Хаусдорфова размерность фрактала “дракон” равна единице.

д) “*Деревья*”. Примером фракталов, названных “деревьями”, является фрактальное множество Пифагора, построение которого показано на рис. 11.11 (использовано доказательство теоремы Пифагора с использованием квадратов). Соединение “дерева” Пифагора с логарифмической спиралью приводит к картине обдуваемого ветром дерева (рис.11.11б).

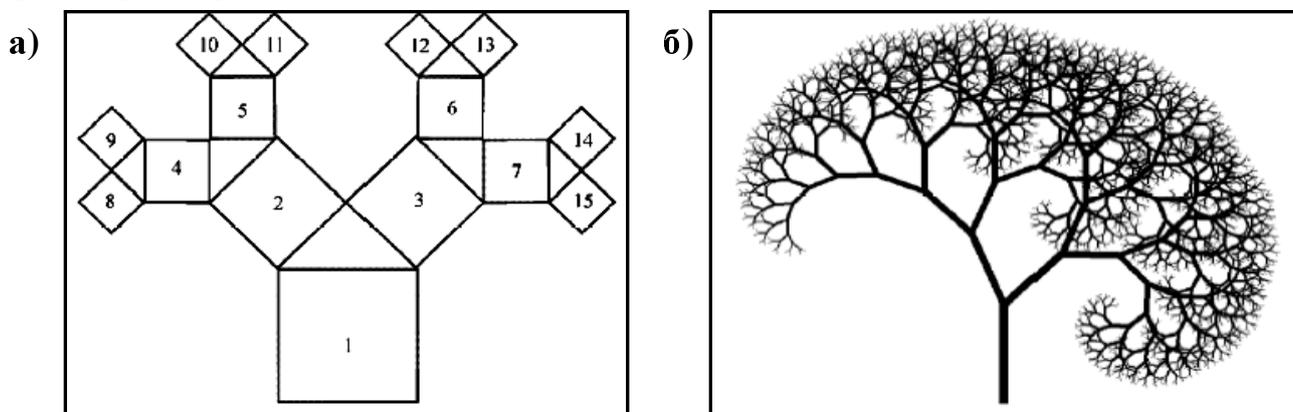


Рис. 11.11. Способ построения (а) и обдувание ветром (б) “дерева” Пифагора.

Представленные примеры фрактальных множеств являются конструктивными, так как задаётся способ их построения. Аналитически фракталы могут быть построены с применением поворотов, сжатий, растяжений и инверсий относительно произвольного центра. Эти преобразования точек описываются формулами:

$$\text{– повороты-растяжения } \begin{cases} x' = a x - b y + c \\ y' = b x + a y + d \end{cases};$$

$$\text{– повороты-сжатия } \begin{cases} x' = a x + b y + c \\ y' = b x - a y + d \end{cases};$$

с показателем растяжения (сжатия) равным $\sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 11.12). Конструктивные фракталы *инвариантны* относительно приведенных преобразований, что является

причиной их самоподобия. Преобразования поворотов, сжатий, растяжений и инверсий являются частным случаем аффинных преобразований, которые задаются формулами $\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$, с масштабным коэффициентом $\sqrt{ad - cb}$. С помощью аффинного преобразования строят фракталы, которые очень похожи на природные структуры. Например, на рис. 11.13 показан фрактал, похожий на лист папоротника, построенный с помощью системы итерированных функций аффинного типа. Для ряда фракталов такого вида коэффициенты преобразования приведены в таблице 11.1. Более сложные фракталы возникают при построении итерационных

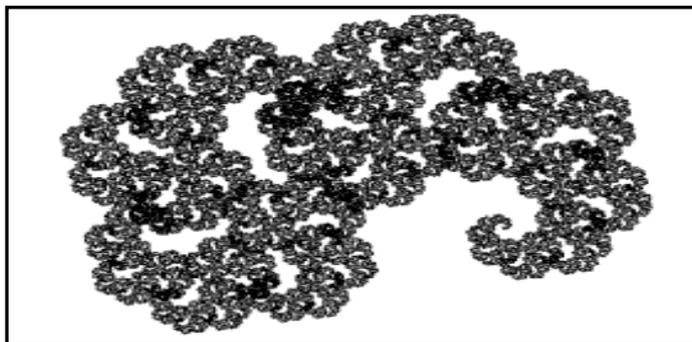


Рис. 11.12. Фрактал, полученный двойным применением поворота-сжатия.



Рис. 11.13. Аффинный лист папоротника.

Таблица 11.1.

Коэффициенты системы итерированных функций (по Р.М. Кроноверу).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
<i>Папоротник</i>	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
<i>Кристалл</i>	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
<i>Лист</i>	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
<i>Дерево</i>	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

процессов в области *комплексных и гиперкомплексных (кватернионных)* чисел: комплексные фракталы Жюлиа, Ньютона, Мандельброта и других. Фрактал Жюлиа появляется в результате отображения $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (см. § 2), где $z = x + iy$, а величина $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, c – ненулевое, постоянное, комплексное число. Фракталы Жюлиа, “пыль” Фату, множества Ньютона и Мандельброта продемонстрированы на рис.11.14 (на этом же рисунке показано *возникновение бифуркаций* (удвоение периода) для фрактала Мандельброта). Кватернионные фракталы отображены на рис. 11.15.

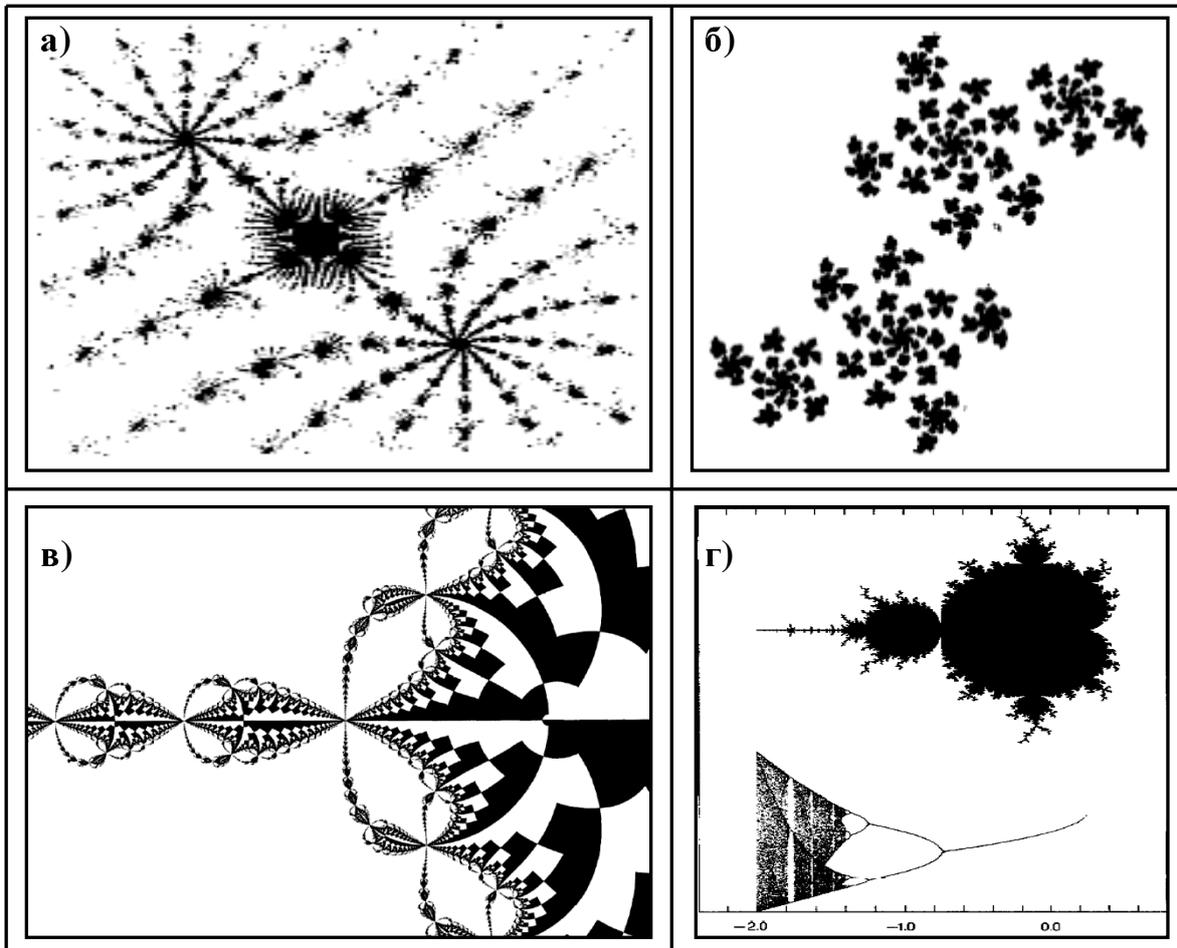


Рис. 11.14. Комплексные фракталы:

- а) – разреженное множество Жюлиа; б) – “пыль” Фату;
 в) – фрактал Ньютона; г) – множество Мандельброта и бифуркация.



Рис. 11.15. Кватернионные фрактальные структуры.

3. Различие и размерность Реньи

Фрактальные линии описываются непрерывными, но не дифференцируемыми функциями. По своим свойствам к фракталам близки функции Вейерштрасса,

которые определяются в виде $w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k x)$ (α – вещественное, а β – нечётное

число), где множители α^k обеспечивают сходимость приведенного ряда. Вейерштрасс показал, что при выполнении неравенства $\alpha\beta > 1 + (3\pi/2)$ функция $w(x)$ во

всех точках непрерывна, но не дифференцируема. Подобная функция Вейерштрасса с коэффициентом β ($w_L(\beta x) = \sum_{k=1}^L \cos(\beta^k \beta x) = \sum_{k=1}^L \cos(\beta^{k+1} x) = \sum_{k=1}^{L+1} \cos(\beta^k x) = w_{L+1}(x)$) практически совпадает с исходной функцией, т.е. является асимптотически самоподобной. Если составить музыкальный ряд с помощью функции Вейерштрасса, то при удвоении скорости воспроизведения звуки будут звучать не на октаву выше, как должно быть, а на полтона *ниже*. Функции Вейерштрасса описывают результирующую суммы колебаний с разными периодами. Отсутствие в природе идеально периодических процессов, взаимодействие ограниченного объекта с окружающей средой, возникновение спонтанных флуктуаций, стремление к выживанию и другие причины приводят к нарушению подобия, что отражается в виде разнообразия форм и способов существования материи.

Скейлинговое подобие нарушается при учёте физических, химических, биологических, социальных и других факторов. Галилей, исследуя зависимость прочности костей животных от их габаритов, пришёл к следующему выводу: животное, имеющее по отношению к своим сородичам вдвое большие размеры, должно весить в 8 раз больше, чем они. Однако более широкие кости лап имеют только *вчетверо* большее поперечное сечение и могут выдерживать только четырёхкратное увеличение веса. Это приводит к тому, что размер костей увеличивается быстрее, чем изменяются остальные части тела животного. Нарушение подобия происходит и при диссипации энергии теплокровными существами: излучаемая энергия должна быть пропорциональна площади поверхности их тела с показателем степени (индексом рассеивания) $2/3$, но экспериментальные данные приводят к индексу рассеивания, равному $3/4$ (рис. 11.16). С каждым столетием люди становятся выше и им следует задуматься о сохранении своего вида, если они не хотят разделить судьбу динозавров и мамонтов.

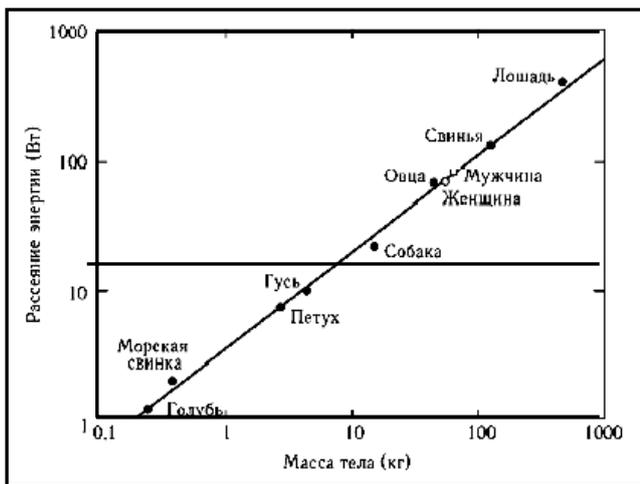


Рис. 11.16. Рассеивание энергии теплокровными животными.

Подобие в динамических задачах сводится к однородности функций, описывающих поведение исследуемой системы. Если потенциальная энергия тела описывается однородной функцией пространственных координат порядка n , т.е. $U(\lambda r) = \lambda^n U(r)$, то при масштабировании времени в ω раз скорость движения изменится в λ/ω раз, а кинетическая энергия — в $(\lambda/\omega)^2$ раз. Если коэффициенты подобия совпадают $(\lambda/\omega)^2 = \lambda^n$, то лагранжиан будет однородной функцией порядка n , а уравнения движения останутся неизменными для преобразования сжатия-растяжения пространственно-временного континуума (*универсальность* поведения динамических систем вне зависимости от их масштабов). Наиболее часто однородные функции используются в равновесной термодинамике, поэтому многие термодинамические системы демонстрируют универсальное поведение (см., например, рис. 7.6). Нарушение скейлинга (в частности, из-за его ограниченности) приводит к изменению поведения динамиче-

ских и термодинамических объектов. Нарушение скейлинга указывает на пирамидальность организации природы: *на смену одной однородной функции состояния приходит другая зависимость между параметрами системы с новыми скейлинговыми свойствами.*

Для описания смены масштабной инвариантности воспользуемся обобщённым определением энтропии Реньи (1955). Оно содержит моменты порядка ν вероятностей p_i : $S_\nu = \frac{1}{\nu-1} \ln \left(\sum_{n=1}^N p_n^\nu \right)$, где ν – произвольное вещественное число. Отметим, что при $\nu \rightarrow 1$ из этой формулы следует стандартное выражение для энтропии $S_1 = -\sum_{n=1}^N p_n \ln p_n$ (*информационная энтропия Колмогорова*, см. пункт 3 § 10). Оп-

ределим обобщённую размерность формулой $D_\nu = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{S_\nu}{\ln k}$. Из этой формулы вид-

но, что при больших отрицательных значениях параметра ν размерность формируется малыми вероятностями, а при больших положительных значениях этого параметра размерность формируется теми вероятностями, которые близки к единице. При $\nu = 0$ размерность Реньи совпадает с размерностью Хаусдорфа-Безиковича для самоподобных фрактальных множеств. Для фрактальных фигур со свойством самоподобия вероятности $p_i = 1/N$, а энтропия не зависит от порядка ν :

$$S_\nu = (\nu - 1)^{-1} \ln \left(N (1/N)^\nu \right) = -\ln N,$$

что и определяет особый статус самоподобных фракталов. Из дефиниции размерности Реньи следует, что самоподобный фрактал покрывается одинаковыми “ячейками”, число которых вычисляется по формуле $n(\nu) = (1-\nu)D_\nu$. При значении $\nu = 1$

величина D_1 задаёт *информационную*, а при $\nu = 2$ *корреляционную* $D_2 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{S_2}{\ln k}$ раз-

мерности. Энтропия S_2 определяется вероятностями обнаружения подобного элемента фрактального множества на расстоянии k от наугад выбранного другого элемента этого множества. Эти размерности показывают иерархию масштабов, зависящих от того, какие моменты вероятностей участвуют в их формировании.

Достижение границы существования одного масштаба сопровождается переходом к другому масштабу, иной однородной функции состояния, возникает динамический хаос, изменяется структура физического тела. Так в 1984 году Д. Шехтман с сотрудниками обнаружили аморфно-кристаллическое состояние быстроохлаждённого сплава алюминия с марганцем. Такие системы получили название *квазикристаллов*. Они характеризуются наличием симметрии пятого порядка (примером фигуры с осью симметрии пятого порядка может служить пятиконечная звезда), запрещённой для периодических (самоподобных) кристаллов. Между полностью упорядоченными структурами (кристаллами) и практически бесформенными объектами лежат не только квазикристаллы, но и динамические системы с временным и пространственным детерминированным хаосом. Нарушение скейлинга происходит при определённых значениях медленно меняющихся параметров, что приводит к *плавному или скачкообразному переходу в новое состояние с образованием новой структуры.*



§ 12. Перенормировки и клеточные автоматы

“Мир наш такой, какой он есть, и я такой, каким живу... Всё вне меня и всё во мне *порождено игрой необъяснимых сил*. Порядок, тот, что в хаосе таится, превыше разуменья, недоступен человеку.”

Г. Миллер

“Что меня действительно интересует, так это вопрос, имел ли Господь Бог при сотворении мира *хоть какой-нибудь выбор?*”

А. Эйнштейн

“Понимание природы человека и места человека в природе – одна из центральных тем в науке.”

Д. Бронновский

1. Степенные законы и скейлинг

Исследуя законы движения планет И. Ньютон показал, что при выполнении скейлингового соотношения между частотой обращения ω и радиусом круговой орбиты r вида $\omega \sim r^{2n}$, гравитационный потенциал должен быть пропорциональным r^{2-2n} . При $n=3/2$ Ньютон получил закон всемирного тяготения; при $n=2$ объект приближается (удаляется) по спирали к центру притяжения; при $n=5/2$ одной из траекторий движения является кардиоида (“сердечко”). Таким образом, степенные законы являются неиссякаемыми источниками подобия. Так исследования частоты падения космических обломков на Землю показывает, что каждые 30 микросекунд в атмосферу попадает частица размером 1 микрон (10^{-6} м), метеориты с диаметром в 100 м встречаются с Землёй один раз в 10000 лет, а тела астрономических размеров (~ 10 км=10000м) посещают земную атмосферу 1 раз в 10^8 лет. Падение такого или более крупного метеорита может привести к катастрофе планетарного масштаба и к вымиранию биологических видов. Изучение зависимости числа видов сухопутных животных от длины их тела демонстрирует показательный закон с индексом степени $n=-2$ (рис. 12.1). Галилео Галилей первым открыл самоподобие физических законов. Бросая маленькие и большие камешки с Пизанской башни Галилей заметил: они падают с почти одинаковой скоростью. Он установил, что время падения прямо пропорционально квадратному корню из высоты башни. Самоподобие закона Галилея имеет ограничение в связи с уменьшением притяжения Земли при увеличении высоты башни до астрономических размеров. Закон всемирного тяготения описывается лишь приближённо формулой Ньютона. Современные эксперименты требуют введения дополнительного слагаемого в формулу Ньютона, связанного с

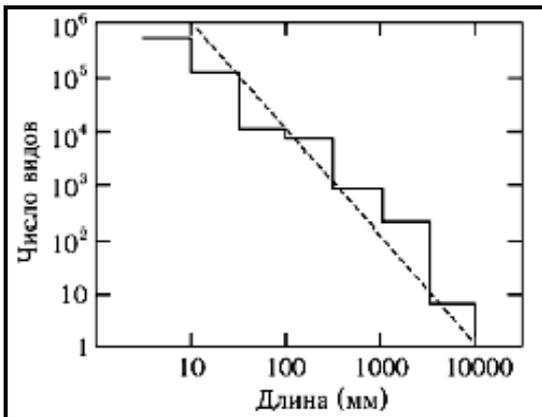


Рис. 12.1. Зависимость числа видов сухопутных животных от длины их тела.

быстро убывающими силами. Художник, изобретатель и учёный Леонардо да Винчи показал, что ствол дерева диаметром d разделяется на две ветви с диаметрами d_1 и d_2 , причём они связаны между собой равенством $d^\sigma = d_1^\sigma + d_2^\sigma$ ($\sigma=2$). Формула Леонардо да Винчи лежит в основе “трубчатой” модели структуры деревьев ($\sigma=2$),

теории слияния двух рек ($\sigma=2$) и транспортных магистралей ($\sigma=1$), ему удовлетворяют артерии и вены в сосудистой системе млекопитающих ($\sigma \cong 2,7$), бронхи лёгкого ($\sigma \cong 3$). Концепция скейлинга подсознательно используется человеком при создании музыкальных произведений: музыка красива, если в ней присутствует несколько изменений тональности (многомасштабность) и ритма (ограниченная масштабность).

Достаточно широко в физике используют гиперболические связи между величинами, в частности, Гейзенберг получил соотношения неопределённостей в виде: $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ или $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ (Δp и Δx ; ΔE и Δt – погрешности измерения импульса и местоположения; энергии и времени, соответственно, $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек – постоянная Планка). Это неравенство показывает, что для точной фиксации местонахождения элементарной частицы необходимо использовать фотоны с очень большими импульсами (короткие по длине электромагнитные волны), т.е. при высокоточном измерении пространственной координаты частицы невозможно определить её импульс в связи с возмущением движения измеряющими волнами. Наибольшая точность измерения переменных p и x (E и t) достигается тогда, когда обе измеряемые величины подчиняются *нормальному закону (закону Гаусса, закону ошибок)*. Скейлинговая инвариантность соотношения неопределённостей Гейзенберга наблюдается в достаточно широких диапазонах энергий и временных интервалов, импульсов и координат. Соотношение неопределённостей Гейзенберга является следствием существования природных масштабов (размеров элементарных частиц). При их отсутствии все элементарные частицы превратились бы в точки, т.е. просто схлопнулись. В этой связи *вакуум* (пространство без материи) состоит из флуктуаций, которые имеют конечную энергию и существуют в течении конечного промежутка времени (косвенным подтверждением этой гипотезы являются данные, полученные при изучении сверхтонкой структуры атомных спектров).

Самоподобие наблюдается не только при целочисленных, но и при дробных показателях степени. Дробные индексы степени встречаются в разных разделах физики и указывают на существование *универсальности* физических законов при описании, например, сосуществующих фаз и спиновых систем; ферромагнетизма и сверхпроводимости. Зачастую функция состояния по одному из своих аргументов может быть представлена степенным законом (например, функция трёх переменных $f(x; y; z) = x^\alpha g\left(\frac{y}{x^\beta}; \frac{z}{x^\mu}\right)$), т.е. является самоподобной по этой переменной.

Так в термодинамике введён *закон соответственных состояний*, который утверждает подобие поведения веществ вблизи критической точки фазового перехода (рис. 7.6). Если записать все параметры состояния системы в безразмерном виде (например, $l=d/d_c$, где d_c – значение параметра d в критической точке), то все вещества демонстрируют универсальность поведения вблизи критической точки. Скейлинг степенных функций связан с отсутствием у них естественных масштабов единичной длины. Кроме того, физические и другие ограничения приводят к разрушению масштабной инвариантности: упругая пружина не может линейно растягиваться до бесконечности, всегда существует критическая длина, при достижении

которой пружина претерпевает разрыв. Следовательно, ограничения не геометрической природы определяют существование характеристических или критических масштабов, до достижения которых наблюдается подобие.

2. Теория перенормировок

Универсальность поведения вещества в окрестности критической точки фазового перехода привела к созданию теории перенормировок (*метод ренорм-группы Вильсона*). Например, изучение поведения теплоёмкости $c(T)$ в зависимости от температуры T в окрестности критической температуры T_c показало наличие простого степенного закона: $c(T) - c(T_c) \sim |T - T_c|^{-\alpha}$ (разности вида $c(T) - c(T_c)$ называют *параметрами порядка*). Универсальность природы проявляется в том, что критический индекс α имеет одно и то же значение для различных веществ. Он зависит от размерности пространства, в котором протекает процесс, и от *числа степеней свободы* параметра порядка (числа ограничений, накладываемых на параметр порядка).

В силу сложности устройства реальных систем и протекающих в них процессов исследователь вынужден моделировать ситуацию, выдвигая простые гипотезы. Так изучение магнитных спиновых систем привело Изинга к простой модели: спины могут занимать только два положения (“вверх” \uparrow и “вниз” \downarrow) и взаимодействуют только с ближайшими соседями. Модель Изинга приводит к существованию двух критических температур: 1) полностью упорядоченное состояние при $T_c = 0$, когда все спины направлены в одну сторону; 2) полностью хаотическое распределение магнитных моментов при $T_c = \infty$, при котором наблюдается беспорядочная ориентация спинов. Для трёхмерной модели Изинга компьютерные вычисления дают для параметра порядка (средней спонтанной намагниченности $\bar{M}(T)$) выражение вида $\bar{M}(T) \sim (T_c - T)^{0,325}$ при $T < T_c$. Критический индекс практически равен $1/3$, такая же температурная зависимость наблюдается и для разности плотностей сосуществующих фаз газ-жидкость (*универсальность* поведения вблизи критической точки перехода).

Одним из достижений теории фракталов (§ 11) является установление связи перенормировки с самоподобием исследуемого объекта. На рис. 12.2 показаны три шага построения ферро- и антиферромагнитной иерархических (самоподобных) решёток. Чёрным и светлым точкам на рис. 12.2б соответствуют разнонаправлен-

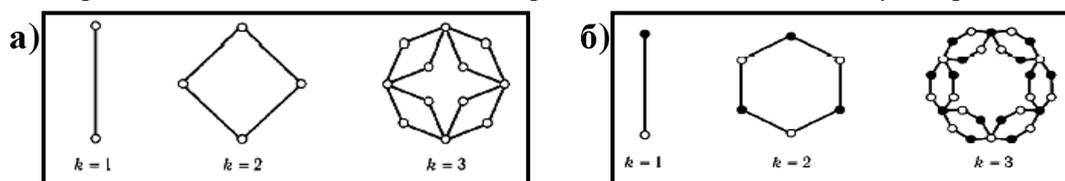
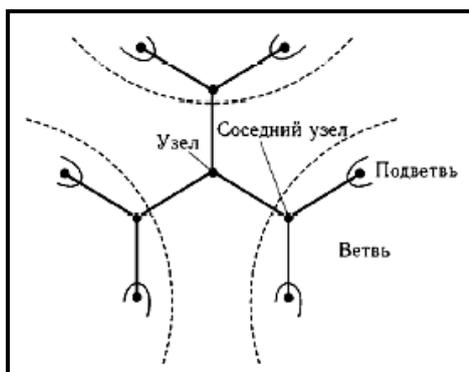


Рис. 12.2. Построение ферро- (а) и антиферромагнитных (б) решёток.

ные спины. Так как решётки самоподобны, то их можно характеризовать фрактальной размерностью Хаусдорфа-Безиковича. Компьютерное экспериментирование с иерархическими решётками показало, что одинаковым решёткам соответствуют разные критические индексы, это привело к снижению научного интереса к теории ренорм-группы.

Другим представителем иерархических решёток является *решётка Бете* (в теории графов она называется *деревом Кэли*), хорошо известная в теории твёрдого тела. В решётке Бете число связей наугад выбранного узла с другими узлами в зависимости от диаметра растёт не по степенному, а по экспоненциальному закону (рис 12.3). В этой связи она ведёт себя так, если бы её фрактальная размерность



равнялась бесконечности. Выберем произвольный узел и перейдём из него в один из z соседних узлов, связанного со следующим окружением $z-1$ ветвью. Эти ветви ведут к следующему узлу, который может быть занят с вероятностью p или быть свободным с вероятностью $q=1-p$. Найдём в решётке Бете путь, на котором встречаются только занятые узлы, число которых среди соседей равно $(z-1)p$. Если это число меньше единицы, то вероятность обнаружения указанного пути экспоненциально убывает по мере увеличения его длины. В противном случае можно двигаться по выбранному пути до бесконечности. Следовательно, порог проникновения (*перколяции*) в решётку Бете определяется формулой $p_c = 1/(z-1)$. Для случая, изображённого на рис. 12.3, число $z=3$, тогда $p_c = 1/2$. Однако существует конечная вероятность того, что выбранный путь не связан с бесконечностью, т.е. вероятность того, что z соседних узлов окажутся вакантными (q^z). Вероятность того, что выбранный путь ограничен, подчиняется уравнению $Q = q + (1-q)Q^{z-1}$ (в этой формуле второе слагаемое определяет вероятность того, что соседний узел занят, но не находится на пути, который не ведёт в бесконечность). При $z=3$ это уравнение имеет решения $Q_1=1$ и $Q_2 = q/(1-q)$. Следовательно, вероятность того, что узел занят, но не связан с бесконечностью, определяется по формуле $P = p(1-Q^3)$. На пороге перколяции $p=p_c=1/2$ эта вероятность обращается в нуль. При значениях p незначительно превышающих порог перколяции $p_c = 1/2$ (критическая точка) зависимость параметра порядка P от вероятности p имеет вид $P=6(p-p_c)$, т.е. критический индекс равен 1. Исследованная простая задача лежит в основе теорий проникновения влаги в сыпучие материалы, распространения линейного электрического разряда в атмосфере, эффекта Андерсона в сверхпроводниках и т.п.

Несмотря на то, что ренорм-группа имеет ограниченную область применимости, сходимость её рядов вызывает сомнение, но она является хорошим инструментом для отыскания критических индексов и установления взаимоотношений между ними. Рассмотрим простой пример применения теории Вильсона к треугольной решётке, для которой порог перколяции $p_c=1/2$, а критический индекс корреляционной длины равен $4/3$. В методе Вильсона используется масштабное увеличение самоподобной решётки, т.е. три узла исходной решётки заменяются одним “сверхузлом” новой решётки. “Сверхузел” считается занятым, если он представлен *кластером*, т.е. заполнены не менее 2-х узлов исходной решётки. Вероятность того, что заполнены все три узла равна p^3 , а два узла – $3p^2q$. Следовательно, веро-

ятность образования кластера (иными словами, занятости “сверхузла” новой решётки) равна $P = p^3 + 3p^2(1-p)$. При достижении критического значения p_c эта вероятность равна $P = p = p_c$. Кубическое уравнение имеет два очевидных (0 и 1) и одно нетривиальное ($p_c = 1/2$) решения. Последний корень совпадает с известным порогом перколяции для треугольной решётки, что указывает на истинность скейлинговой гипотезы. Проверим этот факт, вычислив критический индекс ν корреляционной длины ξ : $\xi = c|p - p_c|^{-\nu}$ (c – константа). Для “сверхрешётки” приведенное равенство имеет вид $E = \lambda c|P - p_c|^{-\nu}$ (λ – коэффициент подобия между исходной решёткой и “сверхрешёткой”). Подобие требует равенства указанных величин $E = \xi$, следовательно, критический индекс $\nu = \ln \lambda / \ln[(P - p_c)/(p - p_c)]$. В окрестности критической точки представим вероятность P в виде ряда Тейлора $P = p + 3(p - p_c)/2 + \dots$, тогда дробь $(P - p_c)/(p - p_c) = 3/2$. При значении коэффициента подобия $\lambda = \sqrt{3}$ критический индекс $\nu \cong 1,355 \approx 4/3$. Для правильного вычисления критических индексов, по-видимому, надо использовать разложение функций не в ряд Тейлора, а в обобщённые ряды с дробными показателями степени.

3. Клеточные автоматы

Предположим, что одномерный клеточный аппарат состоит из ячеек, в каждой из которых записаны нули за исключением одной ячейки, в которой хранится единица. Эволюция клеточной системы происходит по схеме: суммируются значения в выбранной ячейке и в ячейке слева от неё; происходит перезаписывание значение ячейки справа от исходной ячейки. Последовательность состояний клеточного прибора, получаемая в ходе эволюции имеет вид: ...0001000 ...; ...0001100 ...; ...0001210...; ...0001331.; ...00014641.. Приведенный пример клеточного автомата является простейшим компьютером, который вычисляет биномиальные коэффициенты возведения в соответствующую степень суммы 2 чисел. Клеточные агрегаты могут быть многомерными, их ячейки могут иметь разную форму (квадратную или шестиугольную), в них могут храниться числа, векторы, тензоры и другие математические объекты. Например, использование клеточных автоматов позволило правдоподобно отобразить на компьютерном дисплее вихревой след за обтекаемым жидкостью цилиндром (рис. 12.4). Программа перестройки клеточного автомата

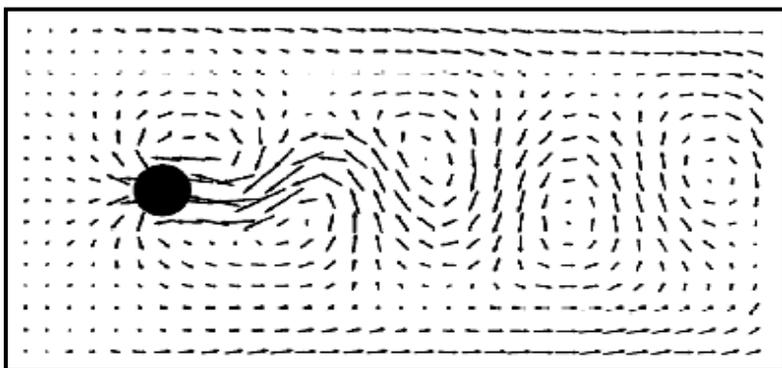


Рис. 12.4. Вихревой след за обтекаемым цилиндром.

включается многократно, что должно приводить к образованию фрактальных конфигураций.

Подобие возникающих фигур наблюдается в играх с фиксированными правилами рождения и уничтожения. Если правила эволюции связывают существование “жизни” в наудачу выбранной ячейке с четырьмя соседними квадратами, то существуют

$2^{2^5} \cong 4\,000\,000\,000$ законов, согласно которым происходит перераспределение “сущест” по “жизненному пространству”. Пусть “жизненное пространство” располагается на плоскости и является совокупностью пустых квадратных ячеек. Предположим, что “жизнь” появилась спонтанно в небольшой области плоскости, например, в четырёх квадратах, которые расположены рядом. Через определённое время правила эволюции порождают структуру “жизненных видов”, которые показаны на рис. 12.5. Если задать закон выживания так, что клетка оживает, если заполнена

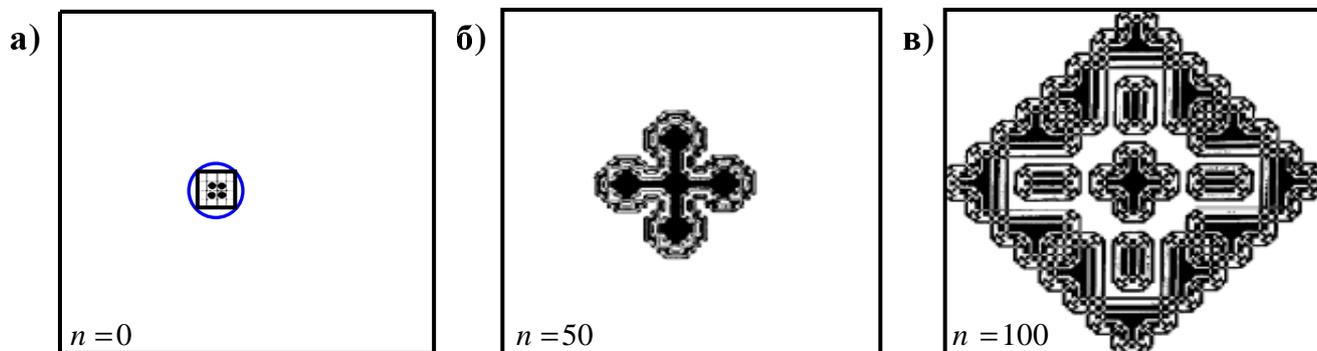


Рис. 12.5. Видообразование в эволюционирующей системе.

только одна из восьми близлежащих ячеек, то развивающаяся система по истечении определённого времени примет вид “снежинки” (рис. 12.6). Пусть закон выживания задаётся правилом: если из девяти соседей четверо или меньше мертвы, то центральная клетка умирает. Такой закон развития приводит к картине, которая отражает поведение магнитных систем Изинга при низких температурах (лаби-

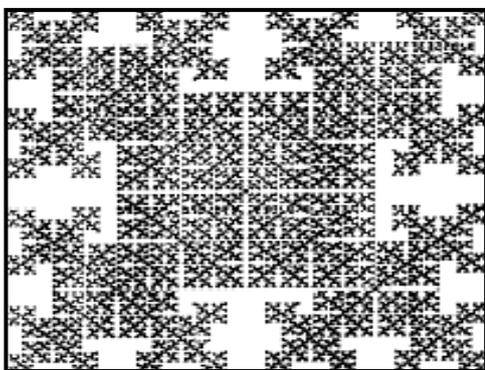


Рис. 12.6. “Жизнь” по закону “одна из восьми”.



Рис. 12.7. Подобие клеточного автомата модели Изинга.

ринт спинов показан на рис. 12.7). Такая же несамоподобная фрактальная структура наблюдается при отжиге металлов. Самоподобие в спиновой системе Изинга возникает при увеличении напряжённости внешнего, магнитного поля до критической величины: образуется решётка цилиндрических магнитных доменов. Представленные клеточные автоматы являются *детерминированными*, так как они эволюционируют в соответствии с принудительным законом, задаваемым программой. Компьютерная программа, в которой происходит копирование случайного соседа, описывает *хаотичную эволюцию* системы (при моделировании используется *метод Монте-Карло*). Такие программы позволили смоделировать поведение ряда химических реакций, полосы на шкуре зебры, конечности человека и многие другие системы.

§ 13. Синергетические системы

“Поддержание организации в природе *не достигается* (и не может быть достигнуто) *управлением из единого центра*; порядок *может поддерживаться только с помощью самоорганизации*. Самоорганизующиеся системы делают возможной адаптацию к доминирующему типу окружающей среды, т.е. реагируют на изменения в окружающей среде... Мы хотели бы подчеркнуть *превосходство самоорганизующихся систем над традиционной человеческой технологией*, старательно избегающей сложности и иерархически управляющей почти всеми технологическими процессами... *Преимущество самоорганизующихся систем* отчётливо видно на примере биологических систем, обладающих способностью создавать сложные продукты с непревзойдённой точностью, эффективностью и скоростью.”

К. К. Бибрагер, Г. Николис, П. Шустер

1. Ячейки Рэлея-Бенара и модель Лоренца

Диссипативные структуры возникают на наноуровне, при протекании химических реакций, при образовании растворов (рис. 13.1-13.4) и других необратимых

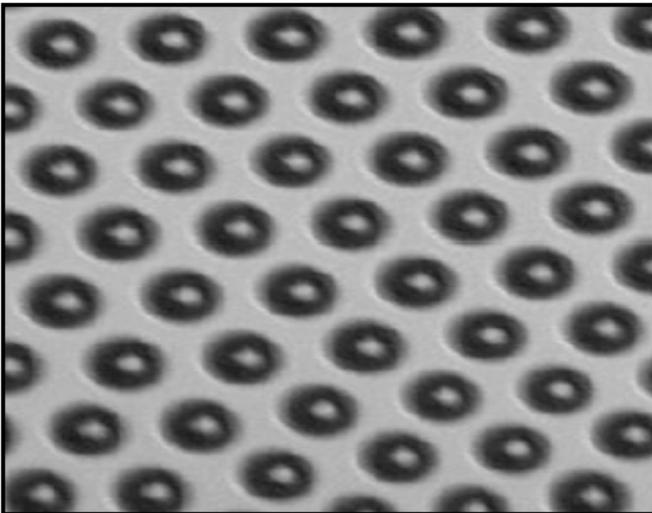


Рис. 13.1. Включения иной жидкокристаллической фазы в смектиках.

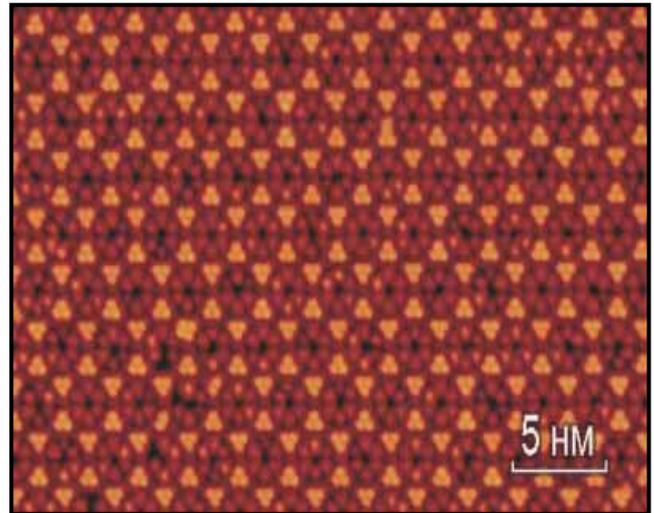


Рис. 13.2. Спонтанные структуры на наноуровне в системе Al-Si.

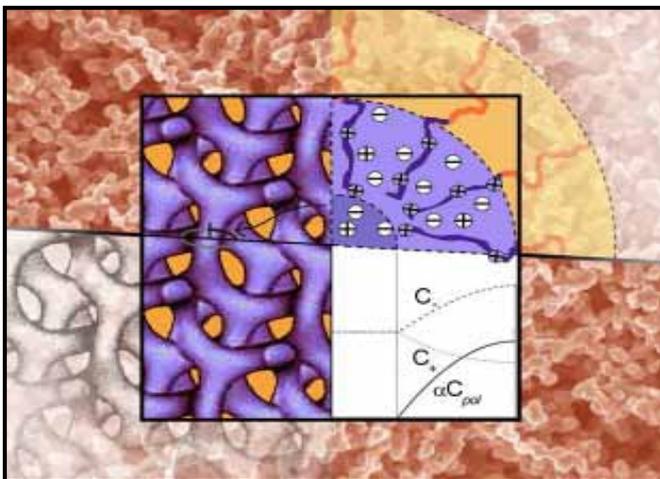


Рис. 13.3. Самоорганизация амфифильных молекул.

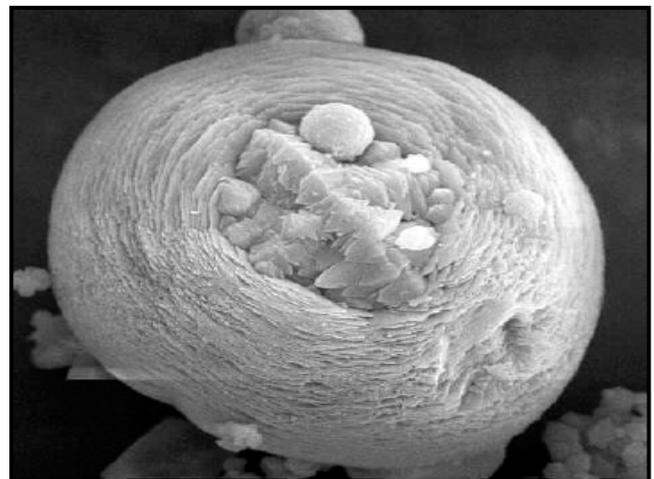


Рис. 13.4. Неравновесные образования в кремнезёме (SiO_2).

процессах. В качестве примеров синергетических систем, в которых возникает самоорганизация, рассмотрим возникновение ячеек Бенара, колебания при протекании реакции Белоусова-Жаботинского (брюсселятор Пригожина-Лефевра) и в биологической системе жертва-хищник (модель Лотки-Вольтерра).

Эксперимент Рэля-Бенара описан в пункте 2 §1 (рис. 13.5), в связи с чем ра-

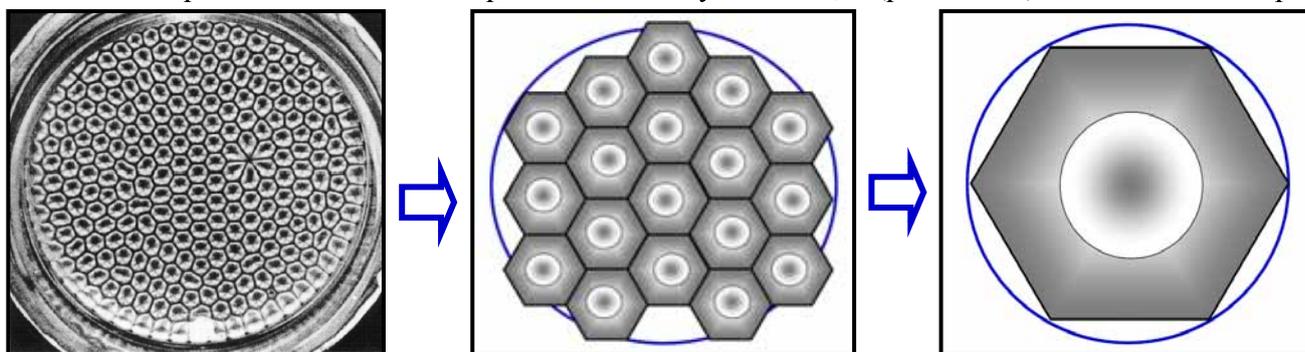


Рис. 13.5. Ячейки Рэля-Бенара.

смотрим его теоретическую модель. Пусть слой жидкости толщиной h находится в гравитационном поле Земли (\vec{g} – вектор свободного ускорения) под действием градиента температуры, т.е. на верхней границе жидкость имеет постоянную температуру T_0 , а на нижней – $T_0 + \Delta T$ (рис. 13.6). При достаточно большой разности

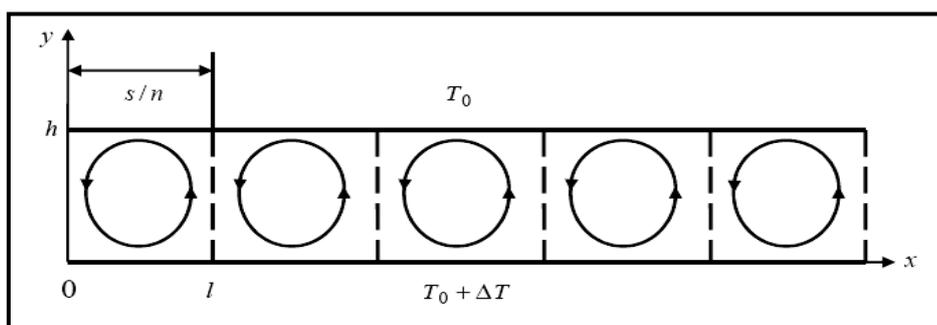


Рис. 13.6. Поведение слоя жидкости при наличии градиента температуры.

температур ΔT (градиент температуры) в слое возникают конвекционные потоки, которые и формируют ячейки Бенара (ширина $l = s/n$, s – ширина среды вдоль оси абсцисс, n – число ячеек, уместяющихся на оси абсцисс): внутри которых жидкость поднимается от более нагретой нижней границы к поверхности слоя, а по плоскостям шестигранников охладившаяся жидкость стекает вниз. Распределённая система задаётся векторным полем скоростей $\vec{u} = \vec{u}(u_1; u_2; u_3)$, скалярными полями давления $P = P(x; y; z; t)$, температуры $T = T(x; y; z; t)$ и плотности $\rho = \rho(x; y; z; t)$, соответственно. Моделирование исследуемой ситуации строится на использовании уравнений:

$$- \text{Навье-Стокса } \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \vec{u} + \vec{g} \quad (\nu - \text{кинематическая вязкость});$$

$$- \text{неразрывности среды } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0;$$

$$- \text{теплопроводности } \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \vec{u}) = \chi \Delta T \quad (\chi - \text{коэффициент теплопроводности});$$

водности);

– связи между плотностью и температурой $\rho = \rho_0(1 - \alpha \Delta T)$ (остальные параметры системы считаются независимыми от разности температур (приближение Буссинеска), α – коэффициент теплового расширения).

Система уравнений дополняется граничными условиями:

- на нижней границе $T(x; y; z = 0; t) = T_0 + \Delta T$; $\bar{u}|_{y=0} = 0$;
- на верхней границе $T(x; y; z = h; t) = T_0$; $\bar{u}|_{y=h} = 0$.

Граничные условия для поля скоростей отражают отсутствие движения жидкости через граничные плоскости. Линеаризуем данные уравнения, введя следующие обозначения: $P = P_0 - \rho_0 g(1 - \alpha \Delta T)y + p(x; y; t)$ и $T = T_0 + \Delta T \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \theta(x; y; t)$, где $p(x; y; t)$ и $\theta(x; y; t)$ – малые отклонения от гидростатического давления $P = P_0 - \rho_0 g y$ и от линейной зависимости $T = T(y)$, соответственно. Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \bar{u} + \alpha g \bar{j} \theta; \\ \nabla \cdot \bar{u} = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla(\theta \bar{u}) - \Delta T \nabla \left(\frac{y}{h} \bar{u} \right) = \chi \Delta \theta, \end{cases}$$

заметим, что $\nabla(y \bar{u}) = u \bar{j}$. Граничные условия преобразуются к виду:

$$\begin{cases} \theta(x; y = 0; t) = \theta(x; y = h; t) = 0; \\ u \bar{j}|_{y=0} = u \bar{j}|_{y=h} = 0. \end{cases}$$

Так как движение жидкости происходит в плоскости xOy , то составляющая скорости $u_3 = 0$. В силу того, что $\nabla \cdot \bar{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$, можно ввести функция тока жидкости, согласно формулам $u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, отражающих непрерывность среды.

После исключения давления, как показал Солтсмен (1981), уравнения движения можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Delta \psi)}{\partial t} = - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} + \nu \Delta^2 \psi + \alpha g \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, y)} - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \chi \Delta \theta, \end{cases}$$

где $\frac{\partial(q, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ и $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$. Разлагая функцию тока в ряд Фурье,

сохраняя только младшие члены разложения и используя подстановку

$$\begin{aligned} \frac{n}{1+n^2} \frac{\psi}{\chi} &= \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right); \\ \frac{\pi R \theta}{R_c \Delta T} &= \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right), \end{aligned}$$

где функции $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ зависят только от времени, $R = \alpha g h^3 \Delta T / (\nu \chi)$ – число Рэлея, а $R_c = \pi^4 (1+n^2)^3 / n^2$ – его критическое значение, величина n характеризует

отношение линейных размеров ячейки Бенара, получим систему уравнений Лоренца (1963):

$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ, \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases} \quad (1)$$

здесь производная берётся по безразмерному времени $\tau = \pi^2(1+n^2)\chi l/h^2$, $a = \nu/\chi$ – число Прандтля, $b = R/R_c$ – управляющий параметр, $c = 4/(1+n^2)$. В системе уравнений Лоренца переменная $X(t)$ характеризует скорость вращения конвекционных потоков, а $Y(t)$ и $Z(t)$ описывают распределение температуры по осям абсцисс и ординат. Проанализируем устойчивость, условия возникновения конвекции и турбулентности в модели Лоренца, для чего запишем систему уравнений (1) в векторной форме $\dot{\vec{X}} = F(\vec{X})$, где $\vec{X} = (X; Y; Z)$, $F(\vec{X}) = (a(Y - X); bX - Y - XZ; -cZ + XY)$. Решение уравнения $F(\vec{X}) = 0$ определяет неподвижные точки, которые задаются равенствами $\vec{X}_1 = (0; 0; 0)$ и $\vec{X}_2 = (\pm\sqrt{c(b-1)}; \pm\sqrt{c(b-1)}; b-1)$. Первая точка описывает теплопроводность покоящейся среды. Её матрица устойчивости по Ляпунову равна

$$\left. \frac{\partial F_i(\vec{X})}{\partial X_j} \right|_{\vec{X}_1} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}, \text{ причём собственные числа равны } \lambda_{1,2} = -\frac{a+1}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+1)^2 + 4(b-1)a}}{2}$$

и $\lambda_3 = -c$. Все показатели Ляпунова отрицательны при значении управляющего параметра $0 < b < 1$, т.е. решение $\vec{X}_1 = (0; 0; 0)$ устойчиво. При $b=1$ собственное число $\lambda_1 = 0$, а решение $\vec{X}_1 = (0; 0; 0)$ становится неустойчивым: начинается конвекция Бенара и реализуется второе решение $\vec{X}_2 = (\pm\sqrt{c(b-1)}; \pm\sqrt{c(b-1)}; b-1)$. Для этого решения матрица

устойчивости имеет вид $\left. \frac{\partial F_i(\vec{X})}{\partial X_j} \right|_{\vec{X}_2} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & d \\ d & d & -c \end{pmatrix}$, где $d = \pm\sqrt{c(b-1)}$. Главные значения этой матрицы при $b=1$ равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -c$ и $\lambda_3 = -a-1$. Критическая величина управляющего параметра для конвективного решения определяется по формуле $b_c = a \frac{a+c+3}{a-c-1}$ (если $a=10$, $c=8/3$, то $b_c = 24,74$). При превышении этого значения предельный цикл конвективного движения становится неустойчивым и динамическая система переходит в хаотический режим (см. рис. 3.7).

Возникновение ячеек Бенара при достижении критического значения градиента температуры демонстрирует явление самоорганизации в диссипативной системе. Тепловая энергия, вносимая в систему извне, расходуется на создание конвективных потоков в строго определённых пространственных областях, что приводит к возникновению шестигранных структур. Геометрическая форма ячеек зависит от граничных условий, она может также быть квадратной и треугольной.

При нагревании не только дна, но и боковых стенок сосуда, присходит переход шестигранников в *страйн-структуры (лабиринты)* с последующим преобразованием их в *стирالی* (рис. 13.7). Таким образом, ячеистая структура становится

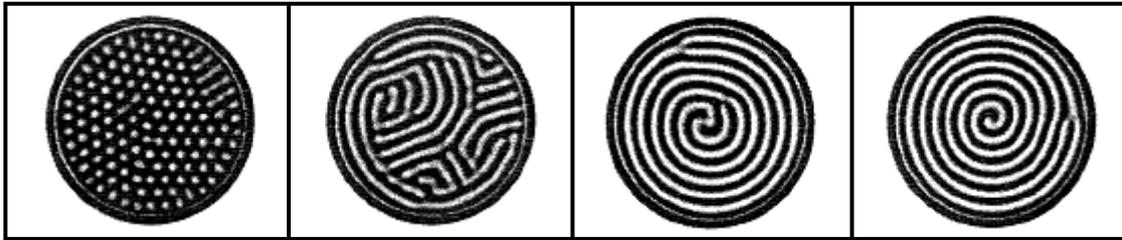


Рис. 13.7. Стадии преобразования ячеек Рэлея-Бенара в спираль.

ся неустойчивой при нагреве боковых стенок и замещается более устойчивым спиралевидным образованием.

2. Брюсселятор (модель Пригожина-Лефевра)

В качестве другого примера возникновения упорядоченной структуры при протекании необратимых процессов рассмотрим химическую реакцию Белоусова-Жаботинского. Эта реакция является нетривиальным представителем автоколебательных процессов. В процессе реакции происходит окисление малоновой кислоты при взаимодействии с оксидом брома в присутствии катализатора, в качестве которого выступают ионы церия. Протекание реакции сопровождается распространением *спиральных волн*, окрашенных в голубой и красный цвета (рис. 13.8).



Рис. 13.8. Спиральные волны периодической химической реакции.

К настоящему времени предложены различные модели этой реакции (модели Жаботинского, Филда, “орегонатор” Кереса-Нойеса и др.), но ни одно теоретическое построение не отображает всех деталей периодических химических реакций. Приведём несколько рецептов для приготовления растворов, в которых наблюдаются химические автоволновые процессы, распространяющиеся со скоростью около 1 мм/мин:

- 1). Растворы: $KBrO_3$ (0,2 моль/л); малоновая кислота (0,3 моль/л); ферроин (0,003 моль/л); H_2SO_4 (0,3 моль/л). Растворы наливают в прозрачную кювету слоями и для наблюдения реакции ставят её на белый лист бумаги.
- 2). Растворы: лимонная кислота (40 г в 160 мл H_2O); H_2SO_4 (1:3); $KBrO_3$ (16 г); $Ce_2(SO_4)_3$ (3-3,5 г). Раствор лимонной кислоты подогревают до температуры $40^\circ-50^\circ C$, высыпают в него $KBrO_3$, кювета ставится на белый лист бумаги и в раствор добавляют $Ce_2(SO_4)_3$ и H_2SO_4 (от 2 до 4 мл).

3). Растворы: H_2O_2 (50 мл 30 % перекиси водорода); KIO_3 (7,2 г в 50 мл воды); $HClO_4$ (30 мл разбавленного раствора); малоновая кислота (3 г в 50 мл воды). Навески: $MnSO_4$ (1 г) и немного крахмала. Все растворы слить в один стакан (200-250 мл) и добавить навески.

Химические волны отличаются от обычных волн тем, что при столкновении они гасят друг друга, т.е. не наблюдается интерференции. Пригожин (1960) доказал, что концентрационные колебания не могут возникнуть вблизи стационарного состояния открытой диссипативной системы, если оно находится в малой окрестности термодинамического равновесия. Следовательно, автоколебания в химической системе возможны только в том случае, когда система находится достаточно далеко от состояния термодинамического равновесия.

Механизм реакции Белоусова-Жаботинского до сих пор изучается во многих научных лабораториях, так как она содержит порядка десяти промежуточных продуктов реакции. Наиболее простая модель гипотетической, автоволновой, химической реакции была предложена И. Пригожиным и Р. Лефевром (1968), которая получила название *брюсселятор*. Реакция состоит из последовательного ряда химических превращений с константами скоростей реакций k_i :

$A \xrightarrow{k_1} X$; $B + X \xrightarrow{k_2} Y + D$; $2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X$ и заключительная реакция $X \xrightarrow{k_4} E$. При рассмотрении этой реакции считается, что вещества A и B находятся в растворе в избытке, а продукты D и E не вступают в реакцию с другими составляющими химической системы. *Кинетические уравнения*, описывающие изменения веществ X и Y (в уравнениях этими же буквами обозначены их концентрации) с течением времени имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X \\ \dot{Y} = k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{cases} \quad (2)$$

Из первого уравнения выписанной системы уравнений следует, что скорости изменения концентраций промежуточных веществ X и Y зависят от их концентрации в растворе, т.е. реакция носит *автокаталитический* характер. Переходя к безразмерным величинам $\tau = k_4 t$, $x = \sqrt{k_3/k_4} X > 0$ и $y = \sqrt{k_3/k_4} Y > 0$, запишем систему уравнений (2) в виде, который содержит минимальное число управляющих параметров:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (b+1)x + x^2 y \\ \dot{y} = b x - x^2 y \end{cases} \quad (3)$$

где коэффициенты $a = \sqrt{k_1^2 k_3/k_4^3} A > 0$ и $b = (k_2/k_4) B > 0$. Состояние равновесия (стационарное протекание химической реакции) определяется равенствами $x_0 = a$ и $y_0 = b/a$. При малом возмущении стационарного состояния концентрации веществ равны $x = a + \xi(t)$ и $y = b/a + \eta(t)$ ($\xi(t) \ll a$ и $\eta(t) \ll b/a$), а изменения концентраций веществ согласно (3) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (b-1)\xi + a^2 \eta \\ \dot{\eta} = -b\xi - a^2 \eta \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка будем искать в виде $\xi(t) = \xi_0 e^{pt}$ и $\eta(t) = \eta_0 e^{pt}$. Тогда характеристическое уравнение системы (4) имеет вид $p^2 + (-b+1+a^2)p + a^2 = 0$. Обращение в нуль коэффициента при p определяет структурную устойчивость полинома, стоящего в левой части уравнения. Следовательно, при критическом значении управляющего параметра $b_c = 1+a^2$ состояние равновесия становится неустойчивым и происходит самовозбуждение автоколебательного процесса, приводящего к образованию спиральных волн и “вихрей”. Поведение химической системы в нелинейном случае, который описывается системой уравнений (3), можно изучить при численном моделировании. Компьютерный анализ показывает, что при значениях параметра $b > b_c$ стационарный режим становится неустойчивым: на фазовой плоскости образуется предельный цикл, на который накручиваются фазовые траектории (рис.13.9). Это сви-

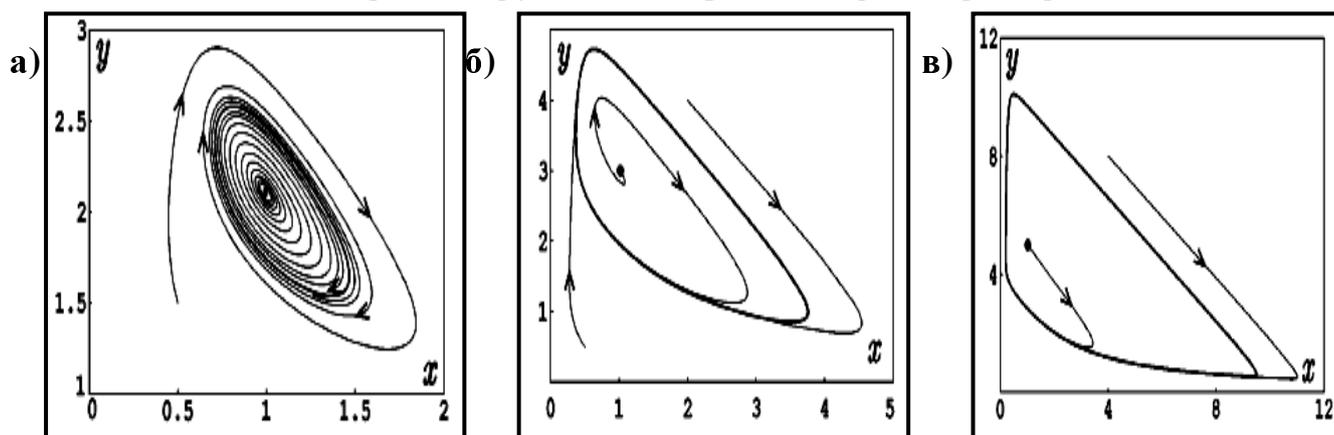


Рис. 13.9. Фазовый портрет брюсселятора при значениях параметров $a = 1$ и
 а) $b = 2,1$; б) $b = 3,0$; в) $b = 5,0$.

детельствует о возникновении автоколебаний с частотой a . При значениях параметра b , не на много превышающих его критическое значение, колебания носят квазигармонический характер, а при значительном превышении – релаксационный. Колебания концентраций веществ лежат в основе большинства биологических процессов и структур: механизма временной организации биологических систем; органов, которые обеспечивают перемещение; при работе возбудимых элементов (например, нервной системы); в чувствительности биорганισμού к лекарственным средствам и потребности в размножении в течение суток. Возрастание числа разнообразных химических реакций, протекающих в системе, приводит к эволюции системы в сторону создания иерархических структур. Они выполняют как стандартные, так и специфические функции. Например, клеточные мембраны выполняют сортировку химических соединений, пропуская внутрь клетки одни и задерживая другие вещества. Иерархию биохимических систем можно провести по количеству элементов, которые участвуют в их жизнедеятельности: чем древнее элемент, тем в большем числе химических реакций он участвует.

При построении модели брюсселятора была выдвинута гипотеза о неизменности содержания веществ A и B в химической системе. В реальности их концентрации можно сохранять постоянными только тогда, когда они поставляются в систему из внешней среды. Таким образом, в модели Пригожина-Левефра в систему

вносится вещество, а в модели Лоренца – энергия. Это говорит о том, что самоорганизация возможно только в *открытых* и *неравновесных* (нестационарных) системах, которые обмениваются с окружением энергией, веществом, информацией и т.п. При “рождении” упорядоченных структур макроскопические процессы протекают по *самосогласованному* (*когерентному, кооперативному, подобному*) “сценарию”. Для обеих синергетических систем существует критическое значение управляющего параметра, при котором происходит уход от стационарного (равновесного) состояния с протеканием необратимых процессов и изменением структуры системы. С математической точки зрения эти явления возникают при учёте нелинейности в уравнениях исследуемого процесса.

3. Хищник-жертва (модель Лотки-Вольтерра)

Самоорганизация возникает не только на физическом и физико-химическом уровнях существования материи, но и на биологическом. В качестве примера рассмотрим модель Лотки (1920)-Вольтерра (1931), которая описывает взаимодействие популяций хищников и жертв. Пусть некоторая биологическая популяция насчитывает в момент времени t число особей равное $X(t)$. Обозначим через k_1 коэффициент благоприятствования увеличению, а через k_2 – уменьшению численности популяции. Тогда скорость изменения числа особей определяется уравнением $\dot{X} = (k_1 - k_2) X$. Если $k_1 > k_2$, то дифференциальное уравнение имеет экспоненциально возрастающее с течением времени решение (*мальтузианский рост*, см. § 17), в противном случае ($k_1 < k_2$) – экспоненциально быстрое вымирание вида. При наличии другого вида (*хищника*) с численностью $Y(t)$, выживающего за счёт истребления особей первого вида (*жертв*), возникает взаимодействие между популяциями. Его наличие является регулирующим фактором численности обеих популяций, что и определяет самоорганизацию биологической системы. Борьба за жизнь между хищниками и жертвами будем считать прямо пропорциональной произведению особей обеих популяций, т.е. описывать выражением $k_3 XY$. Тогда система уравнений, задающих численность популяций в момент времени t имеет вид

$$\begin{cases} \dot{X} = k_1 X - k_3 XY \\ \dot{Y} = k_3 XY - k_2 Y \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (5) является *моделью Лотки-Вольтерра*. Стационарное решение данной системы (не считая тривиального $X(t) = 0$ и $Y(t) = 0$) получим, приравняв нулю правые части равенств: $X_0 = k_2 / k_3 = a$ и $Y_0 = k_1 / k_3 = b$. В случае очень малого отклонения биологической системы от стационарного состояния $X = a + \xi(t)$ и $Y = b + \eta(t)$ ($\xi(t) \ll a$ и $\eta(t) \ll b/a$) уравнения в (5) можно линеаризовать и записать в виде

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -k_2 \eta \\ \dot{\eta} = k_1 \xi \end{cases} \quad (6)$$

Исключив из (6) переменную $\eta(t)$ путём дифференцирования по времени первого

уравнения и подстановки скорости $\dot{\eta}(t)$ из второго уравнения получим хорошо известное уравнение свободных колебаний: $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$ (частота собственных колебаний популяции жертв равна $\omega_0 = \sqrt{k_1 k_2}$). Фазовые траектории в пространстве $X(t)$ и $Y(t)$ являются концентрическими эллипсами вблизи стационарного состояния, поэтому оно устойчиво. Численное моделирование системы уравнений (5) приводит к фазовым траекториям, отображённым на рис. 13.10. Из рис. 13.10 видно, что при

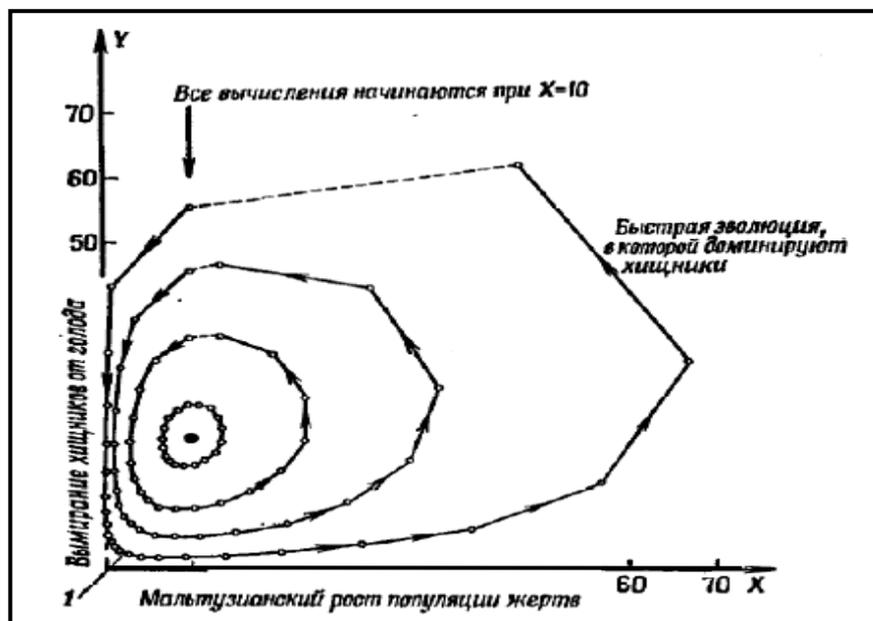


Рис. 13.10. Изменение численности популяций хищников и жертв.

малом числе хищников происходит рост популяции жертв по мальтузианскому закону. Обильное количество пищи в виде жертв вызывает рост численности хищников, которые резко сокращают поголовье жертв. При снижении популяции последних у хищников наблюдается недостаток пищи, который приводит к снижению их популяции. Этот циклический процесс повторяется достаточно длительное время (рис. 13.11), пока не происходит каких-либо катастрофических изменений (на-

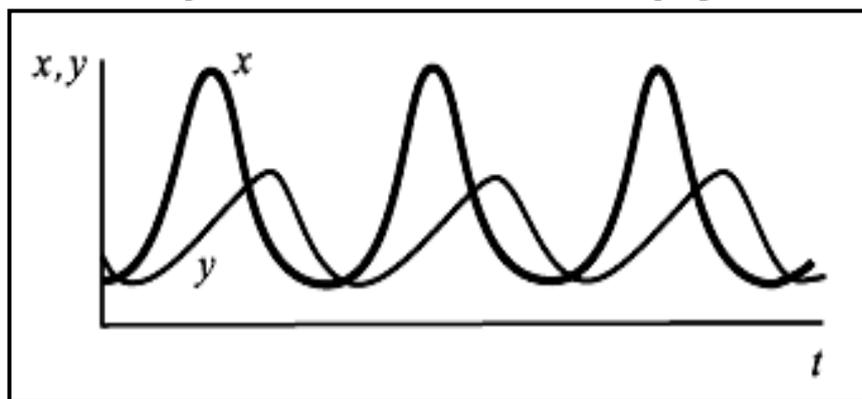


Рис. 13.11. Осцилляции численности популяций жертв (x) и хищников (y).

пример, вымирание того или иного вида), приводящих к разрушению предельного цикла (аттрактора). Экспериментальные исследования взаимоотношений популяций рысь-заяц показана на рис. 13.12.

Николис, Пригожин и Мэй доказали структурную неустойчивость уравнения Лотки-Вольтерра. Модель Лотки-Вольтерра тождественна осцилятору без затуха-

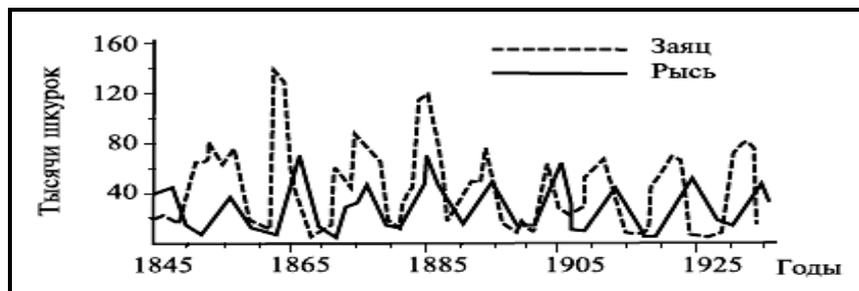


Рис. 13.8. Изменения числа особей в биосистеме заяц-рысь.

ния колебаний. Введение в модель вязкого сопротивления, прямо пропорционального скорости изменения численности популяции, приведёт к изменению вида фазовых траекторий; к появлению *структурно устойчивых фокусов* и *предельных циклов* и к *когерентному* поведению компонентов биологической системы. В результате этих явлений появится чётко определённый период колебаний обеих популяций.

В рассмотренной модели в неявном виде принимается предположение о наличии *конкуренции* между видами. *Конкуренция* является отражением ограниченности энергетических, материальных и информационных ресурсов, необходимых для обеспечения жизнедеятельности биологического организма. Результатом конкуренции является вымирание одних видов и появление более приспособленных к новым условиям *мутантов*. Появление мутантов связано с тем, что протекание биологических процессов происходит при разных граничных и начальных условиях, что неизбежно приводит к возникновению ошибок при воспроизводстве. Наиболее приспособленные к новым условиям существования мутанты выживают (*естественный отбор*) и начинают порождать себе подобных. Естественный отбор проявляется в том случае, когда численность популяции не может превышать некоторой критической величины. Понимание этого механизма привело к созданию искусственного отбора (*селекции*). Стремление вида к выживанию приводит к отбору тех особей, которые являются более жизнеспособными и плодовитыми, чем их сородичи. Таким образом, естественный и искусственный отборы препятствуют хаотизации биосистемы (устраняют дальнейший рост накопления ошибок при простом или расширенном воспроизводствах вида) и стабилизируют внешние признаки вида.

Открытость, неравновесность, нелинейность, недостаток разнообразных ресурсов, конкуренция, мутация, естественный и искусственный отборы при воспроизводстве, обеспечение безопасности существования вида определяют основу *биологической эволюции*. В результате эволюции появились самовозникающие, самоорганизующиеся, самоподдерживающиеся, самовоспроизводящиеся и самосохраняющиеся системы, которым присущи как свойства нижележащих уровней организации материи, так и отличительные признаки. Эти признаки позволяют условно выделить *физическую, химическую, биологическую и социальную* формы существования материи.

Исследование этих уровней приводит как к пониманию схожести математических моделей, так и к выяснению признаков и отличительных черт, которые и позволяют установить *иерархию динамических, эволюционирующих систем далёких от равновесного состояния*.



§ 14. Необратимые процессы

“В огромной фабрике природных процессов **производство энтропии играет роль директора, поскольку именно оно задаёт характер всего производства и его развитие**; закону сохранения энергии отведена роль бухгалтера, устанавливающего баланс между дебетом и кредитом.”

И. Мейкснер

“Существует большое количество **феноменологических законов**, описывающих **необратимые процессы** в форме пропорциональностей... закон Фурье о пропорциональности теплового потока градиенту температуры, закон Фика о пропорциональности потока компонента смеси градиенту концентрации, закон Ома о пропорциональности электрического тока градиенту потенциала, закон Ньютона о пропорциональности силы внутреннего трения градиенту скорости, закон о пропорциональности скорости химической реакции градиенту химического потенциала.”

Р.С. де Гроот

1. Стационарное состояние

Термодинамика необратимых процессов устанавливает свойства симметрии открытых систем и их стационарных состояний; общие закономерности превращений и диссипации энергии; уравнения перестройки макроскопических систем при игнорировании их микроскопического устройства. Исследуемые системы могут быть разделены на 3 типа: *однородные* (интенсивные характеристики системы температура T , давление p и химический потенциал μ_i компонента i и другие имеют одинаковые значения во всех точках системы); *дискретные* (состоят из нескольких однородных подсистем) и *непрерывные* (термодинамические функции состояния являются дифференцируемыми функциями пространственно-временных координат). Необратимые процессы разделяют по типу поля, используемого для их описания: на *скалярные* (например, химические реакции), *векторные* (диффузия, теплопроводность) и *тензорные* (гидродинамические течения вязких жидкостей). Термодинамика необратимых процессов основана на использовании гипотезы о локальном равновесии, которая позволяет использовать все установленные взаимосвязи равновесной термодинамики. Законы сохранения массы, импульса, энергии и баланса энтропии записываются в виде локальных дифференциальных уравнений в частных производных.

Мерой хаоса или неполноты информации о состоянии системы является энтропия (см. § 10). В термодинамической теории она является функцией внутренней энергии U , объёма V , которые являются *интенсивными* величинами числа молей N_i компонентов $i=1 \div m$, т.е. $S=S(U, V, N_i)$. Энтропия описывается однородной функцией числа молей компонентов и обладает следующими свойствами:

– *аддитивностью* (при разделении системы на две подсистемы с энтропиями S_1 и S_2 энтропия системы $S=S_1+S_2$);

– *изменение энтропии* открытой системы определяется изменениями её аргументов

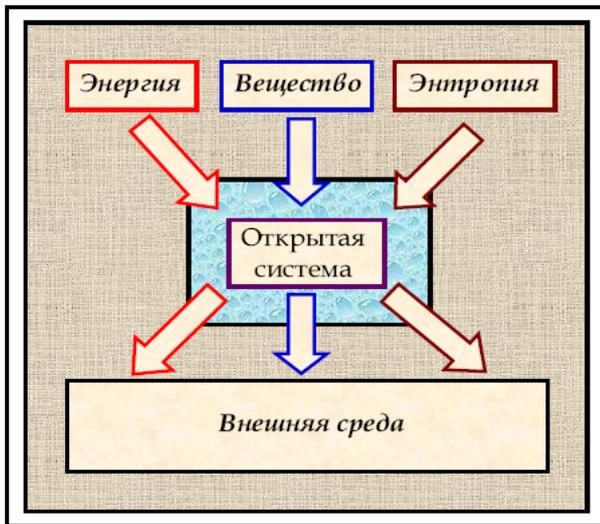
$$T dS = dU + p dV + \sum_{i=1}^m \mu_i N_i ;$$

– изменение энтропии можно представить *суммой изменений энтропии за*

счёт внутреннего перераспределения компонентов ($d_i S$) и взаимодействия с окружающей средой $d_e S$;

– внутренняя энтропия не изменяется ($d_i S=0$) для обратимых или возрастает ($d_i S>0$) для необратимых процессов (II закон термодинамики).

Для изолированных систем, которые не обмениваются веществом и энергией с внешней средой, $d_e S=0$ и $d_i S \geq 0$. Состоянию термодинамического равновесия отвечает максимальное значение внутренней энтропии $d_i S$, т.е. наинизшему уровню организации материи соответствует наибольшая неупорядоченность и минимальная информативность. В этой связи описание этого уровня организации материи может проводиться только в терминах вероятностных функций (например, квантовая механика или блуждания броуновской частицы). В открытых системах, которые обмениваются с внешним миром веществом, энергией и информацией (диссипативная система, рис. 14.1), наблюдаются процессы самоорганизации и самоупорядочения, поэтому они характеризуются низкой внутренней энтропией $d_i S$ и высокой информативностью. Это говорит о неравновесности процессов, протекающих в диссипативных системах. Неравновесные условия взаимодействия открытой системы с внешней средой характеризуются производством энтропии (или скоростью возникновения энтропии) $d_i S/dt$ в единицу времени t (Пригожин). Кроме того, на экстенсивные характеристики диссипативной системы налагается ряд ограничений:



1) сохранение внутренней энергии $d_i U=0$ (I закон термодинамики);

2) число молей N_k компонента k (согласно закону Гульдберга-Вааге) изменяется только за счёт протекания химических реакций $d_i N_k = \sum_{r=1}^R \nu_{kr} d\xi_r$ (ν_{kr} – стехиометрический коэффициент компонента k в химической реакции r , ξ_r – полнота протекания реакции по де Донде);

3) внутренняя энтропия постоянна или возрастает $d_i S \geq 0$.

Рис. 14.1. Обмен энергией, веществом и энтропией открытой системы с внешней средой.

В открытой системе перечисленные величины могут увеличиваться и уменьшаться, не нарушая законов термодинамики. Изменение энтропии диссипативной системы происходит в результате её взаимодействия с внешней средой. Если вносимая энтропия $d_e S$ отрицательна (негэнтропия или информация), то возникает тенденция к упорядочению; неожиданная самоорганизация происходит при критических значениях управляющих параметров. Если сумма $d_i S + d_e S = 0$, то система находится в стационарном состоянии. Стационарное состояние системы определя-

ется соотношениями $d_e U = 0$; $d_e N_k = -d_i N_k = -\sum_{r=1}^R \nu_{kr} d\xi_r$; $d_e S = -d_i S < 0$, как состояние с

постоянным притоком неэнтропии и вещества при сохранении притока и оттока энергии. Изменение внутренней энтропии всегда положительно ($d_i S > 0$), следовательно, энергетические процессы в системе происходят в сторону уменьшения и рассеивания (*диссипации*) энергии. Изменение внутренней энергии системы при постоянном вводе в систему внешней энергии указывает на согласованную реакцию компонентов на воздействие внешней среды, что получило название *когерентного (согласованного)* поведения элементов системы (примером когерентного поведения может служить возникновение лазерного излучения (*Хакен*)).

Для закрытой системы зависимость от параметров системы энтропии и производства энтропии $P = d_i S / dt$ показаны на рис. 14.2. Помимо производства энтро-

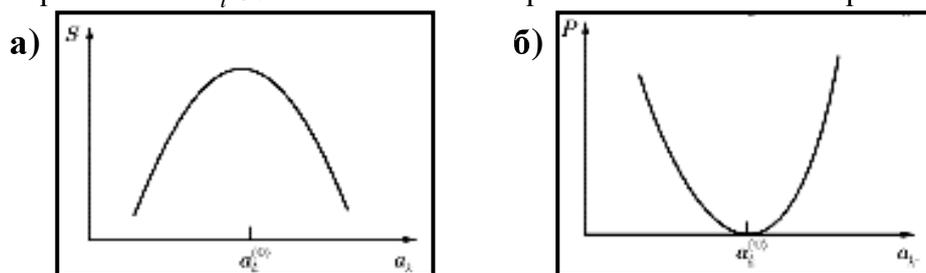


Рис. 14.2. Энтропия (а) и её производство (б) как функции параметров системы.

пии в термодинамике необратимых процессов используют функцию диссипации $\Psi = T d_i S / dt \geq 0$. Из рис. 14.2б видно, что в равновесной точке производство энтропии равно нулю, а вблизи этой точки представляет собой вогнутую кривую. Таким образом, изолированная система эволюционирует до тех пор, пока производство энтропии не станет равным нулю. Протекающие после этого в системе процессы компенсируют любую стохастическую попытку выхода из равновесного состояния в результате флуктуаций параметров системы. Открытая система находится в окрестности равновесного состояния только при выполнении соотношения Дюгема-

Гиббса: $-V dP + S dT + \sum_{i=0}^m N_i d\mu_i = 0$. Термодинамическое равновесие системы

определяется действием на систему *обобщённых скалярных сил*

$$f_1 = 1/\theta; \quad f_2 = P/\theta; \quad f_3 = -\mu/\theta,$$

с помощью которых выражение для безразмерной энтропии однокомпонентной системы можно записать в виде

$$dS = (1/\theta) dU + (P/\theta) dV + (-\mu/\theta) dN = f_1 dq_1 + f_2 dq_2 + f_3 dq_3$$

($q_1 = U$, $q_2 = V$, $q_3 = N$ – обобщенные термодинамические координаты). Вводя вектор термодинамической силы $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ и вектор состояния $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, запишем энтропию изолированной системы в виде $S = \vec{f} \cdot \vec{q}$. Эта формула позволяет интерпретировать энтропию как обобщенную “*работу*” термодинамических сил. При бесконечно малом смещении изолированной системы из положения термодинамического равновесия изменение энтропии $dS = \vec{f} \cdot d\vec{q}$, при этом выполняется равенство $\vec{q} \cdot d\vec{f} = Udf_1 + Vdf_2 + Ndf_3 = 0$, которое преобразуется в уравнение Дюгема-Гиббса.

Уравнение показывает, что бесконечно малое изменение одной из термодинамических сил компенсируется изменениями двух других сил. Таким образом, отклонение термодинамической системы от положения равновесия характеризуется изменением вектора ее состояния, которое связано с бесконечно малыми изменениями обобщённых термодинамических координат: внутренней энергии, объёма системы и числа частиц.

В химически активной системе даже после достижения механического, теплового и диффузионного равновесий может происходить изменения чисел молей N_i компонентов из-за протекания химических реакций. Производство энтропии

для этого случая равно
$$P = \frac{d_i S}{dt} = -\frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \mu_k \frac{d_i N_k}{dt} = -\frac{1}{T} \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^R \mu_k \nu_{kr} \frac{d \xi_r}{dt} = -\frac{1}{T} \sum_{r=1}^R A_r \frac{d \xi_r}{dt}$$
 (A_r

– сродство химической реакции r) или после введения термодинамической силы $f_r = -\frac{A_r}{T}$ и скорости протекания химической реакции r , равной $\dot{q}_r = \frac{1}{V} \frac{d \xi_r}{dt}$, можно

переписать производство энтропии в единице объёма в виде
$$P = \sum_{r=1}^R f_r \dot{q}_r$$
. В открытой

термодинамической системе внешние силы препятствуют достижению равновесного состояния, поэтому химические реакции являются *заторможенными*. Это может приводить к существованию химических соединений, которые не наблюдаются при равновесных условиях. Следовательно, стационарное состояние диссипативной системы характеризуется нулевой скоростью производства энтропии, рассеиванием энергии и заторможенностью химических реакций. *И. Пригожин* показал, что $dP=0$ и $P=\min$ отвечает равновесию, а $dP<0$ – эволюции системы. Теорема Пригожина справедлива в малой окрестности стационарного состояния, в которой справедлива *линейная теория неравновесных процессов Онсагера*. В малой окрестности стационарного состояния необратимые процессы протекают так, чтобы вернуть систему в это состояние. В линейной области все отклонения устойчивы, поэтому в ней невозможны колебательные движения, система просто “сваливается” в стационарное состояние. В нелинейных системах производство энтропии может быть и не минимальным, оно положительно или отрицательно. Флуктуация термодинамических сил, которая нарушает условие Дюгема-Гиббса $\bar{q} \cdot \bar{df} = 0$, приводит к отклонению диссипативной системы в любую сторону от стационарного состояния. Если новое состояние лежит “выше” стационарного состояния, то система стремится вернуться в исходное положение. В противном случае система пытается уйти от стационарного состояния в поисках более устойчивого распределения компонентов и энергетических условий. Устойчивость стационарного состояния наблюдается только при движении в “горку”, в противном случае малые возмущения разрушают устойчивость.

Возникновение и устойчивость стационарного состояния определяется

- большими отклонениями от равновесия;
- постоянным притоком в систему негэнтропии;
- возрастанием внутренней энтропии при необратимых процессах;
- нелинейностью уравнений движения;
- кооперативным (когерентным) поведением элементов системы;

- неустойчивостью по отношению к определённым типам возмущений;
- усилением неустойчивости при поиске нового стационарного состояния;
- отбором устойчивых состояний и возникновением спонтанной самоорганизации;
- устойчивостью диссипативных структур при сохранении внешних условий;
- заторможенностью химических реакций.

2. Модель Онсагера

Действие термодинамических сил на диссипативную систему вызывает появление потоков соответствующих координат состояния. Связь производства энтропии с потоками и силами для случая химической системы ($\Pi = \sum_{r=1}^R f_r \dot{q}_r$), полученная в пункте 1 этого параграфа была обобщена на термодинамические силы и скорости произвольной природы.

При малом отклонении от стационарного состояния *Онсагер* (1932) предположил линейную связь между потоками экстенсивных величин $J_i = q_i \bar{v}_i$ (\bar{v}_i – скорость) и градиентами термодинамических сил $X_k = -\nabla f_k$ вида $J_i = \sum_{k=1}^K L_{ik} X_k$, где фе-

номенологические коэффициенты L_{ik} не зависят ни от потоков, ни от градиентов термодинамических сил. Микроскопическое рассмотрение необратимых процессов позволило установить, что $L_{ik} \sim \int_0^{\infty} \langle \bar{u}_i(t) \bar{u}_k(t-\tau) \rangle d\tau$, здесь угловые скобки означа-

ют усреднение произведения скоростей частиц различных типов по локально равновесному ансамблю. Следовательно, кинетические коэффициенты Онсагера учитывают корреляцию в состояниях движения частиц различных сортов. Онсагер показал, что для скалярных неравновесных процессов в адиабатически изолированных системах выполняются соотношения взаимности $L_{ik} = L_{ki}$ (*Казимир* установил, что при наличии вихрей или магнитных полей соотношение взаимности принимает вид $L_{ik} = -L_{ki}$). Учёт пространственной симметрии приводит к тому, что термодинамические силы вызывают потоки только своей природы, т.е. коэффициенты Онсагера $L_{ik} = L_i \delta_{ik}$ (*принцип Кюри*), где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ – символ Кронекера (в системах

Кюри отсутствуют перекрёстные эффекты). Предложенная Онсагером связь между потоками и градиентами термодинамических сил встречается достаточно часто при исследовании теплопроводности, диффузии, перекрёстных эффектов (например, термодиффузионные эффекты *Соре* и *Дюфура*, термоэлектрические процессы и т.п.) и других необратимых процессов. Экспериментально установлено, что границы применимости линейной теории Онсагера для большинства исследованных необратимых процессов довольно широки. Исключением является химическая кинетика, для которой модель Онсагера справедлива только при очень малых отклонениях от равновесного состояния.

Модель Онсагера применяется совместно с локальными уравнениями баланса экстенсивных величин вида $\frac{\partial q_i}{\partial t} + \text{div} J_i = \sigma_i$, где σ_i описывает наличие внутренних и внешних источников ($\sigma_i > 0$) и стоков ($\sigma_i < 0$) для экстенсивной переменной q_i . Если в диссипативной системе отсутствуют источники и стоки ($\sigma_i = 0$), то уравнение баланса экстенсивной переменной q_i отображает закон её локального сохранения. Другими словами, в случае, когда $\sigma_i = 0$, необратимые процессы протекают так, что в наугад выбранной точке системы экстенсивные переменные имеют постоянное значение (*локальное равновесие*). В силу того, что диссипативные системы обмениваются с внешним окружением веществом, энергией и энтропией (информацией), то локальное равновесие является ситуацией, когда мощность внешних источников (стоков) компенсируется внутренними процессами локального возникновения (уничтожения) экстенсивной переменной. К таким процессам относятся механические течения вещества, теплопроводность, диффузия, химические реакции и их сочетания (перекрёстные эффекты).

В неравновесных условиях на составляющие m -компонентной системы действуют внутренние и внешние термодинамические силы различной физико-химической природы. Внутренними термодинамическими силами являются: *тепловая* $\bar{X}_q = \nabla(1/T)$, *электрохимические* $\bar{X}_i = -\nabla(\tilde{\mu}_i/\theta)$, $i=0 \div m$ ($\tilde{\mu}_i = \mu_i - q_i \varphi_i$ и μ_i – электрохимический и химический потенциалы компонента i , соответственно; q_i и φ_i – заряд и электрический потенциал частиц сорта i , θ – температура в энергетических единицах) и *механические* силы $\bar{X}_i^P = -\omega_i \nabla(\psi/\theta)$ ($\psi(\bar{r})$ – функция, связанная с давлением в системе, ω_i – парциальный объём). Градиенты термодинамических сил вызывают соответствующие потоки, возникающие при необратимых процессах:

$$\bar{J}_q - \sum_{i=0}^m (\tilde{\mu}_i \bar{J}_i + \omega_i \psi \bar{J}_i^P) = L_{qq} \bar{X}_q + \sum_{i=0}^m L_{qi} \bar{X}_i + \sum_{i=0}^m L_{qi}^P \bar{X}_i^P, \quad (1)$$

$$\bar{J}_k = L_{kq} \bar{X}_q + \sum_{i=0}^m L_{ki} \bar{X}_i + \sum_{i=0}^m L_{ki}^P \bar{X}_i^P, \quad (2)$$

$$\bar{J}_j^P = L_{jq}^P \bar{X}_q + \sum_{i=0}^m L_{ji}^P \bar{X}_i + \sum_{i=0}^m L_{ji}^P \bar{X}_i^P. \quad (3)$$

В формуле (1) из теплового потока \bar{J}_q вычтены потоки электрохимического тепла и потока тепла, связанного с переносом механической энергии и обусловленного неоднородным давлением в неравновесной системе.

В частности, *движущая сила диффузии* равна $\bar{X}_j = -\nabla(\mu_j/\theta)$ (∇ – оператор градиента). Область пространства, в которой происходит диффузионная эволюция системы, называют *диффузионной зоной*. Для идеального газа химический потенциал $\mu = \mu_{st}(P, T) + \theta \ln(n/n_{st})$, здесь $\mu_{st}(P, T)$ – стандартное значение газа при внешнем давлении P , температуре T и плотности газа n_{st} , n – плотность газа. Тогда диффузионный поток по теории Онсагера равен $\bar{J} = -L \nabla(\mu/\theta) = -L(\nabla n/n)$. Сравнивая полученное соотношение с первым законом Фика $\bar{J} = -D \nabla n$ (D – коэффициент диффу-

зии), установим связь кинетического коэффициента L с коэффициентом самодиффузии D : $L = Dn$. Одним из интересных диффузионных явлений является “восходящая” диффузия. При реализации этого процесса атомы диффундируют не в сторону меньших концентраций (как это должно происходить по законам Фика), а в области с повышенной концентрацией атомов того же сорта. Такие явления наблюдаются при распаде твёрдых растворов, когда выделяется фаза с повышенной концентрацией атомов определённого типа, и в неоднородном поле упругих напряжений, которое возникает при зародышеобразовании. Это явление явно указывает на то, что движущей силой диффузии является не градиент концентрации, а градиент отношения химического потенциала компонента к его тепловой энергии $\theta = k_B T$. В диффузионной зоне наблюдается *пластическое течение вещества* в месте контакта двух разнородных материалов с общим компонентом (*эффект Киркендалла-Смигельскаса*) и *образование (залечивание) макроскопических пор (эффекты Френкеля I и II родов)*.

При протекании необратимых процессов наблюдаются перекрёстные эффекты, которые связаны с возникновением потоков под действием градиентов термодинамических сил иной физико-химической природы:

1) *возникновение теплового потока под влиянием диффузионного перемещения частиц в изотермических условиях (эффект Дюфура)*. Рассмотрим вертикальную трубку, разделённую на 2 равные части диафрагмой. В каждой половине трубки находятся газы, отличающиеся молекулярным весом. Обе части трубки имеют одинаковые температуру и давление. После снятия диафрагмы происходит диффузионное перемешивание газов, причём изменяется температура на границе раздела газов. Изменение температуры обусловлено наличием градиента концентрации. Возникающий тепловой поток устанавливает равномерное распределение температуры во всей трубке. При этом температура газа, который порождает тепловой поток, понижается, а другого газа, поглощающего тепло, – возрастает. При отсутствии других необратимых процессов порождаемый тепловой поток

$$\bar{J}_q = -\sum_{i=0}^m L_{qi} \nabla \left(\frac{\mu_i}{T} \right) = -\sum_{i,j=0}^m \frac{L_{qi}}{T} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} \nabla x_j = -\sum_{i,j=0}^m D_{qi} g_{ij} \nabla x_j,$$

где $D_{qi} = L_{qi}$ – коэффициент термодиффузии, $g_{ij} = \frac{1}{T} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j}$ – термодинамические фак-

торы компонентов;

2) *возникновение диффузии компонентов под влиянием неоднородного распределения температуры в системе (эффект Соре)*. При наличии градиента температуры термодиффузия компонентов компенсируется обычной диффузией частиц, которая приводит к неоднородному распределению компонентов в системе. Этот эффект используется для разделения смеси изотопов. В этом случае диффузионный поток компонента i : $\bar{J}_i = L_{iq} X_q = -\frac{L_{iq}}{T^2} \nabla T = -\frac{L_{iq}}{L_{qq}} \frac{L_{qq}}{T^2} \nabla T = -\xi_i \alpha \nabla T$, где коэффи-

циент $\xi_i = D_{qi} (\alpha T^2)^{-1}$, а α – коэффициент теплопроводности;

3) *термоэлектрические эффекты* связаны либо с появлением электрического тока под влиянием градиента температуры, либо с возникновением градиента

температуры при пропускании через систему электрического тока. Для системы, компоненты которой переносят электрический заряд, поток компонента i состоит из диффузионной \bar{J}_i^D и токовой \bar{J}_i^T / q_i частей: $\bar{J}_i = \bar{J}_i^D + (\bar{J}_i^T / q_i)$.

– *эффект Зеебека*: в месте контакта двух различных проводников, имеющих разные температуры, возникает электродвижущая сила (э.д.с.). Возникновение э.д.с. в эффекте Зеебека приводит к появлению электрического тока, обусловленного гра-

$$\text{диентом температуры } \bar{J}_i^T = \sum_{i=0}^m L_{iq} q_i \bar{X}_q = - \sum_{i=0}^m \frac{L_{iq} q_i}{T^2} \nabla T = - \frac{\sum_{i=0}^m L_{iq} q_i}{L_{qq}} \varkappa \nabla T = -\Omega \varkappa \nabla T.$$

– *эффект Пельтье*: в термически однородной системе, составленной из разных проводников, пропускание электрического тока приводит к поглощению (выделению) тепла на стыке проводников. Тепловой поток, возникающий в эффекте Пельтье, при пропускании тока через систему разнородных проводников равен

$$\bar{J}_q = - \sum_{i=0}^m \frac{L_{qi} q_i}{T} \nabla \varphi_i = \sum_{i=0}^m \frac{L_{qi} q_i}{T} \bar{E}_i = -\Lambda \sigma \bar{E},$$

где $\Lambda \sigma = - \sum_{i=0}^m \frac{L_{qi} q_i}{T} \frac{(\bar{E}_i \cdot \bar{E})}{|\bar{E}|^2}$, σ – коэффициент электропроводности.

– *эффект Томсона*: пропускание тока через термически неоднородную систему приводит к выделению дополнительного тепла, отличного от джоулева тепла. Для физического объяснения эффекта Томсона рассмотрим тепловой поток, обусловленный электрохимическим потенциалом

$$\sum_{i=0}^m \tilde{\mu}_i \bar{J}_i = \sum_{i=0}^m (\mu_i + q_i \varphi_i) \left(\bar{J}_i^D + \frac{\bar{J}_i^T}{q_i} \right) = \sum_{i=0}^m \mu_i \bar{J}_i^D + \sum_{i=0}^m \mu_i \frac{\bar{J}_i^T}{q_i} + \sum_{i=0}^m q_i \varphi_i \bar{J}_i^D + \sum_{i=0}^m \varphi_i \bar{J}_i^T.$$

В этом равенстве первая сумма описывает поток теплоты смешения компонентов, последняя сумма – джоулево тепло, вторая и третья суммы описывают перекрёстные тепловые потоки, которые возникают при одновременном протекании диффузии и электрического тока. Теплота Томсона определяется выделением (поглощением) теплоты смешения компонентов и перекрёстными тепловыми потоками.

4) другие перекрёстные эффекты. Линейная теория Онсагера позволяет исследовать целый ряд новых перекрёстных эффектов, возникающих в неравновесных системах. Особый интерес вызывают явления, связанные с барометрическими процессами:

а) возникновение теплового градиента в системе с неоднородным давлением (*механокалорический эффект*). В этом случае тепловой поток равен

$$\bar{J}_q = - \sum_{i=0}^m L_{qi} \omega_i \nabla \left(\frac{\psi}{T} \right) = - \sum_{i,j=0}^m \frac{L_{qi} \omega_i}{T} \frac{\partial \psi}{\partial P} \nabla P = -\gamma \nabla P,$$

где γ – *механокалорический коэффициент*. Данное равенство позволяет установить связь коэффициента теплопроводности с механокалорическим коэффициентом и коэффициентом давления $\varkappa = \gamma P \beta_V$.

б) возникновение градиента давления в термически неоднородной системе (*термоосмос*). В этом случае механический поток равен $\bar{J}_j^p = L_{jq}^p \bar{X}_q = -\zeta_j \varkappa \nabla T$, где ζ_j – термобарический коэффициент компонента j .

в) если система находится в гравитационном поле, то перераспределение частиц по высоте системы обеспечивается силой тяжести и диффузией частиц. Со стороны среды на частицы действует сила сопротивления движению (*сила Стокса*). При постоянной температуре осмотическое давление в системе на высоте z равно $P(z) = n(z)\theta$, где $n(z) = \sum_{i=0}^m n_i$ – плотность системы, $\theta = k_B T$ – температура в энергетических единицах. Осмотическая сила равна $F_z^{осм.} = -\partial P / \partial z = -\theta (\partial n(z) / \partial z)$. Баланс импульса определяется уравнением $\partial P / \partial z = \sum_{i=0}^m n_i(z) F_{iz}$. Если на частицы сорта i действует сила Стокса, то $F_{iz} = \zeta_i \eta_i V_{iz}$, где ζ_i и η_i – коэффициенты структуры и коэффициент вязкости компонента i , соответственно. Проекция скорости движения $V_{iz} = J_{iz} / n_i(z)$. Следовательно, $\theta \frac{\partial n_i}{\partial z} = \zeta_i \eta_i J_{iz} = \frac{\zeta_i \eta_i}{\theta} \sum_{k=0}^m L_{ik} \frac{\partial \mu_k}{\partial z} = \frac{\zeta_i \eta_i}{\theta} D_i n_i \frac{\partial \mu_i}{\partial z}$. Введя обозначение $g_i = \frac{\partial n_i}{\partial z} \left(\frac{n_i}{\theta} \frac{\partial \mu_i}{\partial n_i} \right)^{-1}$, перепишем полученное равенство в виде соотношения Эйнштейна $D_i = g_i \theta / (\zeta_i \eta_i)$.

Согласно *принципу Ле Шателье-Брауна* необратимые процессы всегда протекают таким образом, чтобы скомпенсировать изменения, возникающие в диссипативной системе, и перевести её в равновесное состояние. Однако противоборство различных по физико-химической природе явлений переводит диссипативную систему в стационарное состояние с “заторможенными” необратимыми процессами. “Торможение” реакций системы на внешние “раздражители” является отличительной чертой биологических систем. Отбор в процессе эволюции таких состояний отображает *закон сохранения энтропии-информации* в открытых системах.

3. Диссипативные структуры

Как писал *В.Эбеллинг*: “В принципе структуры могут возникать в природе во всех тех случаях, когда выполняются следующие четыре необходимых условия:

- 1) Система является термодинамически открытой, т.е. может обмениваться веществом и/или энергией со средой.
- 2) Динамические уравнения системы нелинейны.
- 3) Отклонение от равновесия превышает критическое значение.
- 4) Микроскопические процессы происходят кооперативно (согласованно).”

Протекание необратимых процессов в открытых системах при известных условиях может приводить к образованию различных структур: ячеистых (ячейки *Бенара*, цилиндрические магнитные домены), спиралевидных (спирали реакции *Белоусова-Жаботинского*), вихревых (кольца *Тейлора*, солитон *Хакимото*), фрактальных (например, деревья) и других. Возникновение упорядоченных областей наблюдается при критическом значении градиента той или иной физической величины. Градиенты физических величин в термодинамике неравновесных процессов определяют потоки, которые перераспределяют вещество, энергию и энтропию, изменяют структуру системы, обеспечивают её жизнеспособность и приспособляемость при

изменяющихся внешних условиях.

При равновесных условиях в системе отсутствуют механические течения, не происходит переноса тепла и перераспределения вещества. Если система изолирована, то она обладает максимальной энтропией. В открытых системах *агрегатное состояние* (газ, жидкость, кристалл, любое промежуточное состояние) или *структура существования* выбирается в соответствии с внешними условиями. Структуры различаются *степенями упорядоченности* и разной *симметрией*. Переход от одной структуры к другой происходит скачкообразно (*катастрофа типа сборки*). Изменение внешних условий существования приводит к ответной реакции открытой системы в виде течений, перемещений, тепло- и электропроводности и других движений. Значительное отклонение от равновесия сопровождается при достижении критических значений градиентов той или иной термодинамической силы возникновением новых структур (конвективные потоки в жидкости порождают ячейки Бенара, в ламинарном течении возникают турбулентные вихри, лабиринтная магнитная структура преобразуется в цилиндрические магнитные домены и т.п.). Эти явления связаны с тем, что суммарная энтропия системы может быть уменьшена за счёт отдачи её части в окружающую среду. Если выброс энтропии во внешнюю среду превышает некоторое критическое значение, то происходит *формирование новой структуры*, т.е. *самоорганизация* возникает в “сверхкритической” области. Это говорит о том, что самоорганизующиеся структуры являются результатом взаимосвязи между внутренним состоянием открытой диссипативной системы и внешними условиями, которые формируются окружающей средой. Значительное отклонение от равновесия сопровождается *разрушением старой и формированием новой структуры*. Новая структура возникает при *когерентном (кооперативном, согласованном)* поведении элементов вне зависимости от природы диссипативной системы. *Универсальность* поведения объясняется одинаковой динамической природой наблюдаемых явлений (см. §§ 2-5).

Возникающие структуры, согласно И. Пригожину, разделяют на *временные*, *пространственно-временные* и *пространственные*, а по изменению их состояния с течением времени – на *стационарные*, *квазистационарные* и *нестационарные*. В таблице 14.1 описаны различные структуры, которые существуют в равновесном состоянии, вблизи равновесия и вдали от него. Переход от одной структуры к дру-

Таблица 14.1.

Классификация структур

<i>Тип структуры</i>	<i>Равновесные</i>	<i>Околоравновесные</i>	<i>Неравновесные</i>
<i>Стационарные и квазистационарные</i>	<i>Газ, жидкость, кристаллы и промежуточные состояния</i>	<i>Линейные потоки, ламинарные течения</i>	<i>Диссипативные структуры</i>
<i>Нестационарные</i>	–	<i>Процессы размножения и роста</i>	<i>Турбулентные потоки, процессы горения, взрыв, биологическая эволюция</i>

гой называют *кинетическими фазовыми переходами*. Пространственными образованиями являются *структуры Тьюринга*, временными явлениями – *автоколебания*, пространственно-временными – *волны*.

Структуры Тьюринга возникают в химически активных системах, с диффузионным подводом компонентов. Для двухкомпонентной системы с концентрациями компонентов c_i ($i=1,2$) кинетические уравнения в линеаризованном виде относительно малых отклонений концентраций $u_i = c_i - c_{i0}$ от равновесных концентраций

c_{i0} определяются равенствами $\partial u_i / \partial t = \sum_{k=1}^2 a_{ik} u_k + D_i \partial^2 u_i / \partial x^2$. Используя Фурье-пре-

образование $u_i = \sum_{l=0}^{\infty} b_{li} e^{\lambda_{li} t + \alpha \kappa_{li} x}$ ($\alpha = \sqrt{-1}$ – мнимая единица), можно привести эти

уравнения к системе однородных линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда Фурье. Из анализа полученных решений следует, что неустойчивость Тьюринга возникает в том случае, когда вещественная часть наибольшего из комплексных чисел $\lambda_i(\kappa_i)$ обращается в нуль. В этом случае ограниченная по геометрическим размерам система из конечного числа неструктурированных мод усиливает определённые гармоники. Нарастание этих гармоник приводит к переходу системы в область упорядочения. На микроуровне происходит *автокатализ* одного из компонентов системы с подавлением его производства другим реагентом (*ингибитором*). Активация производства одного из компонентов приводит к распространению в химической системе возмущения гауссовского типа (см., например, решения *уравнений теплопроводности Фурье* или *уравнений диффузии Фика* в курсе математической физики), которые гасятся производством ингибитора. В свою очередь, возрастание концентрации ингибитора вызывает распространение обратной волны возмущений, которая подавляется повышением концентрации автокаталитического компонента. При *когерентном поведении* компонентов, которое наблюдается при критических концентрациях веществ происходит резкое нарастание одного из компонентов, что не может быть описано линейной моделью. Появление *нелинейности* в поведении химической системы проявляется в торможении химических реакций и в солитоноподобных всплесках концентраций компонентов (для модифицированного “брюсселятора” Пригожина они показаны на рис. 14.3а и 14.3б), что сопровождается появлением *новой диссипативной структуры, более приспособленной к новым условиям существования*.

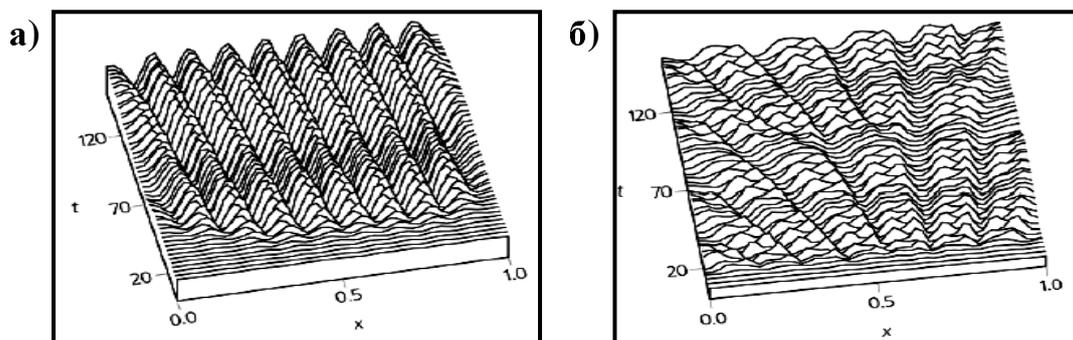


Рис. 14.3. Возникновение структур Тьюринга в модифицированной модели “брюсселятора”.



§ 15. Конкуренция и отбор

“...тезис “выживает сильнейший” напоминает о кошке, пытающейся ухватить саму себя за хвост, так как согласно этому тезису понятие “сильнейший” определяется следующим образом: сильнейший – это тот, кто выживает... наследственные признаки определённых “биологических” молекул в прямом смысле слова наследуются. Для нас в данном случае важно, что эти молекулы могут размножаться путём автокатализа..., а затем вступать в конкурентную борьбу...”

Г. Хакен

“... если бы мы могли *продолжать наблюдение неограниченно долго*, то *все процессы казались бы нам обратимыми.*”

Р. Смолуховский

1. Химическое равновесие

Уравнения химической кинетики в некоторых случаях подобны уравнениям нелинейных динамических и электротехнических систем. Это указывает на *структурное подобие* природных явлений.

Установим закономерности возникновения и развития химических реакций в изолированной системе, находящейся в термодинамическом равновесии. Пребывание изолированной системы в состоянии термодинамического равновесия не означает, что она находится в покое. Согласно *принципу детального равновесия* (*вероятности протекания прямого и обратного процессов в термодинамической системе равны между собой*), в системе могут протекать процессы, которые не нарушают условий равновесия. К таким процессам относятся переходы частиц из одной фазы в другую (*фазовые превращения*), а также образование и распад химических соединений (*химическая реакция*). Химические реакции не нарушают термодинамического равновесия, так как алгебраическая сумма воздействий на систему при этом равна нулю. Химические реакции не приводят к появлению новых компонентов в системе, между химическими потенциалами компонентов существуют дополнительные связи (если протекают две и более химических реакций). Протекание химических реакций (*фазовые переходы можно рассматривать как частный случай химической реакции*) сопровождается преобразованием одних элемен-

тов m -компонентной системы в другие согласно формуле $\sum_{i=1}^l \nu_i X_i \Leftrightarrow \sum_{i=l+1}^m \nu_i Y_i$, где ν_i –

стехиометрические коэффициенты; X_i – *реагенты*, Y_i – *продукты* реакции (для реагентов стехиометрические коэффициенты $\nu_i > 0$, а для продуктов реакции – $\nu_i < 0$); стрелки обозначают, что реакция может протекать как в прямом направлении с образованием продуктов, так и в обратном направлении – с диссоциацией продукта реакции на исходные реагенты. В этом случае говорят об *обратимых* реакциях, в противном случае – реакции *необратимы*. Необратимость химической реакции с предпочтительным направлением ее протекания в одну из сторон (или образования продукта, или его распада) определяется условиями, при которых реализуется химическая реакция. Протекание химических реакций может сопровождаться как выделением, так и поглощением тепла. Если изменение энтропии системы равно нулю, то реакции не нарушают термодинамического равновесия и протекают в со-

ответствии с *законом сохранения массы* (или *сохранения числа частиц*). Если закрытая система находится в тепловом равновесии с термостатом, то изменение числа частиц того или иного компонента возможно только при протекании химических реакций. Протекание *химических превращений* веществ в m -компонентной системе при изобарно-изотермических условиях описывается изменением термодинамического потенциала Гиббса $dG = \sum_{i=1}^m \mu_i dN_i$, причём в силу закона сохранения массы выполняются равенства $\frac{dN_1}{\nu_1} = \frac{dN_2}{\nu_2} = \frac{dN_l}{\nu_l} \dots \frac{dN_{l+1}}{-\nu_{l+1}} = \dots = \frac{dN_m}{-\nu_m} = d\xi$, где $d\xi$ –

изменение *полноты протекания* реакции по *де Донде* (обобщённая координата). Если изменение полноты реакции положительно ($d\xi > 0$), то реакция идёт в сторону образования продуктов, а противном случае – реагентов. Используя указанные равенства, перепишем энергию Гиббса в виде $dG = \sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i d\xi = Ad\xi$, здесь $A = \sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i$ –

химическое сродство (обобщённая термодинамическая сила). При протекании химической реакции слева направо сродство положительно ($A > 0$), а при отрицательном сродстве ($A < 0$) реакция протекает в обратном направлении.

Определим скорость протекания химической реакции как скорость изменения полноты реакции: $\dot{q} = d\xi/dt$. Химическая реакция будет находиться в метастабильном (“заторможенном”) состоянии при отличном от нуля сродстве и нулевой скорости протекания химической реакции ($A \neq 0, \dot{q} = 0$). Если обобщённая сила и скорость химической реакции равны нулю ($A = 0, \dot{q} = 0$), то она находится в равновесии. Обращение в нуль сродства является необходимым и достаточным условием химического равновесия, из него следует *закон действующих масс Гильдебержа-Вааге* (1867): $\sum_{i=1}^m \mu_i \nu_i = 0$.

Для взаимодействующих частиц сорта i химический потенциал μ_i записывается в виде $\mu_i = \mu_{is}(P, T) + \theta \ln a_i$, где $\mu_{is}(P, T)$ – значение химического потенциала компонента i при стандартных внешних условиях, $a_i = x_i \gamma_i$ – *активность*, x_i – *концентрация*, γ_i – *коэффициент активности* компонента i , соответственно. Стандартное состояние обычно выбирают по Гильдебранду: при стандартном внешнем давлении $P = 1 \text{ атм} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ и комнатной температуре $T = 20^\circ \text{C} = 293.15 \text{ К}$ активность чистого компонента равна единице. Активность компонента отражает его способность не только к смещению, но и к его взаимодействию с другими компонентами (коэффициент активности γ_i).

Закон действующих масс для реагирующих компонентов через активности компонентов и константу реакции имеет вид $\prod_{i=1}^l a_i^{\nu_i} / \prod_{i=l+1}^m a_i^{\nu_i} = K(P, T)$, где константа

реакции $K(P, T) = \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^m \mu_{is}(P, T)\right)$, $\beta = (k_B T)^{-1}$. Отметим, что в формуле для константы равновесия безразлично какие компоненты считать реагентами, а какие продук-

тами химической реакции. Она показывает, что при фиксированных значениях внешнего давления P и температуры T константа реакции постоянна; изменение активностей реагентов химической реакции приводит к изменениям активностей продуктов реакции; химическая реакция никогда не идёт до полного исчерпания реагентов или продуктов реакции. Знание температурной зависимости константы реакции при фиксированном значении внешнего давления позволяет вычислить тепловой эффект ΔH_p химической реакции согласно формуле:

$$(\partial(\ln K(P, T))/\partial T)_P = \Delta H_p / (RT^2).$$

Если энтальпия реакции ΔH_p положительна, то в результате протекания химической реакции происходит поглощение выделяемого тепла (*эндотермическая реакция*). В противном случае, когда энтальпия реакции отрицательна ($\Delta H_p < 0$), протекание химической реакции сопровождается выделением тепла (*экзотермическая реакция*). Если энтальпия реакции $\Delta H_p = 0$, то константа химической реакции зависит только от внешнего давления.

Если в системе протекает 2 химические реакции, то возможна ситуация, когда $A_1 \dot{q}_1 < 0$ и $A_2 \dot{q}_2 > 0$ при условии $A_1 \dot{q}_1 + A_2 \dot{q}_2 > 0$ (*принцип возрастания энтропии*). В этом случае первую реакцию называют *сопряжённой*, а вторую – *сопрягающей*. Изменение энтропии для первой реакции отрицательно, т.е. реакция стремится уменьшить хаос и увеличить упорядоченность; вторая реакция препятствует этому процессу и стремится подавить протекание первой реакции, но для этого она должна протекать с достаточно большой скоростью. В силу локального характера химических реакций снижение и возрастание энтропии в разных точках системы порождает распространение волн противоположных возмущений. Их взаимодействие приводит к образованию структур Тьюринга (см. § 14).

Скорость прямой химической реакции \dot{q}_+ в *гомогенной (однофазной)* среде определяется формулой $\dot{q}_+ = K_+(P; T) \prod_{i=1}^l a_i^{v_i}$, а обратной – $\dot{q}_- = K_-(P; T) \prod_{i=l+1}^m a_i^{v_i}$, где константы $K_{\pm}(P; T)$ – коэффициенты пропорциональности. Скорость изменения количества компонента i равна разности между этими скоростями, т.е. $\dot{x}_i = \dot{q}_+ - \dot{q}_-$. В “заторможенном” и равновесном состояниях скорости прямой и обратной реакций совпадают, что приводит к реализации закона Гuldберга-Вааге, причём константа равновесия $K(P, T) = K_-(P; T) / K_+(P; T)$. Если скорость обратной химической реакции значительно меньше скорости прямой реакции ($\dot{q}_+ \gg \dot{q}_-$), то говорят о *необратимой* химической реакции.

Зависимость коэффициентов активности от концентраций компонентов порождает весьма сложные уравнения химической кинетики, которые в общем случае можно записать в виде $\dot{x}_i = f(P, T, x_1, x_2, \dots, x_m)$. Вид нелинейной правой части уравнения зависит от конкретной реакции, которая протекает в системе. Нелинейность играет решающую роль в химической кинетике и порождает большое многообразие типов нелинейного поведения химически активной системы. Если функцию $f(P, T, x_1, x_2, \dots, x_m)$ можно представить в виде произвольного полинома, то, согласно Корзухину (1967), уравнению химической кинетики будет асимптотичес-

ки отвечать хотя бы одна химически активная система. Химические реакции разделяют на *автокаталитические*, *перекрёстно-каталитические* (*взаимокаталитические*) и *ферментативные*. Автокаталитические реакции (например, реакция Белоусова-Жаботинского, см. § 13) – это реакции размножения и роста (*периодические* реакции), при их протекании возникновение продуктов реакции ускоряет саму реакцию. При автокаталитической реакции вещество *самовоспроизводится* за счёт реагентов или переходит в структурно и энергетически более простые продукты реакции. Автокаталитическая реакция записывается в виде $X+Y \Leftrightarrow XY \Rightarrow X+X$. Отличительными чертами автокаталитических реакций является переход от колебаний к пространственно-временным структурам в форме слоёв, сферических или спиральных волн и других пространственных структур; через некоторое время в системе устанавливается предельная концентрация компонентов. Перекрёстно-каталитические реакции приводят к самовоспроизводству реагентов, а при наличии диффузионного процесса – к образованию структур Тьюринга (см. § 14). Ферментативные реакции протекают при низкой (комнатной) температуре и определяют процессы обмена веществ. *Ферментами* называют белки, которые являются биологическими *катализаторами* (ускоряют реакцию) или *ингибиторами* (тормозят протекание реакции). Они обладают высокой активностью и *избирательностью* (*селективностью*) по отношению к отдельным веществам. Скорость протекания ферментативных реакций обычно на несколько порядков выше, чем у автокаталитических и взаимокаталитических реакций. Ферментативные реакции наблюдаются при промежуточном обмене веществ (*метаболизме*), при синтезе биологического “клея” рибонуклеиновой кислоты (*РНК*) и белков на генетическом материале (*эпигенез*), а также при образовании генов – дезоксирибонуклеиновой (*ДНК*) кислоты (*генез*). Все эти реакции протекают вдали от равновесия и описываются нелинейными кинетическими уравнениями. Нелинейность, например, при метаболизме наиболее ярко проявляется при *гликолизе* (превращение глюкозы в лактат). Этот процесс сопровождается процессами брожения и выделения тепла, которое используется системой для поддержания теплового баланса живого биоорганизма. При экспериментальном исследовании гликолиза в клетках и мышечных волокнах наблюдаются колебания. Гликолитический “маятник” (частота колебаний составляет порядка одной минуты) работает за счёт периодической активации и торможения фермента фосфофруктокиназы.

Химические реакции, протекающие вдали от равновесия, представляют собой существенно нелинейные динамические системы, которые характеризуются критическими значениями управляющих параметров (*бифуркации*), возникновением упорядоченных структур в “сверхкритической” области, их чередованием (химические осцилляции), конкуренцией при наличии нескольких реакций и отбором тех реакций, которые стабилизируют химически активную систему при заданных внешних условиях. Они могут приводить к образованию длинных цепочек, состоящих из случайного набора веществ, конкуренция и отбор среди которых привёл к возникновению клеток и простейших организмов. Последние определили этапы развития жизни на планете Земля. Борьба за выживание, появление мутационных изменений, способность накапливать и передавать последующим поколениям полезную информацию привело к широкому разнообразию биосистем.

2. Элементы теории жизни

При протекании в химически активной системе нескольких химических реакций, которые “питаются” одним и тем же компонентом, возникает *конкуренция* и “борьба за выживание” (*отбор*). При постоянной концентрации “питательного” компонента одни вещества стремительно “размножаются” (растёт их концентрация), а другие “вымирают” (их концентрация приближается к нулю). Такой процесс называется *сегрегацией*. При сегрегации появление и исчезновение продуктов реакции не зависят друг от друга. Ситуация изменится, если поставлять “питание” из внешней среды в виде постоянного притока. Все реакции в системе можно расположить в порядке возрастания отношения коэффициентов прямой (*выживание*) и обратной (*вымирание*) реакций. В этом случае реакция с наибольшим отношением должна быть наиболее “живучей”. Однако в нелинейных химических системах реализуется другой сценарий: при заданном состоянии внешней среды реализуется то или иное стационарное состояние, благоприятствующее протеканию одной из конкурирующих химических реакций (*селекция* или *отбор*). Существует и другое условие, помимо постоянного притока “питательного” компонента из внешнего окружения, приводящее к селекции: постоянство суммарной объёмной концентрации компонентов системы. Такой процесс наблюдается при разбавлении исходной системы при постоянном притоке “питания” из внешней среды. Это условие соответствует отводу из системы всех веществ с постоянной скоростью и приводит к появлению ряда стационарных состояний. Из всех стационарных состояний наиболее устойчивым будет то, для которого скорость производства того или иного вещества будет наибольшей. Это означает, что такой компонент системы начинает подавлять производство других веществ и становится полноправным “хозяйном” химической системы. Следовательно, для конкурентных химических реакций справедлив *эволюционный закон Дарвина*: при заданных условиях выживает наиболее приспособленный вид.

Конкурентные химические системы проявляют некоторые элементы поведения биологических структур:

– *обмен веществ* (“питательный” компонент используется для создания новых химических соединений);

– *самовоспроизводство* (компоненты химической системы размножаются за счёт “питательного” компонента);

– *селекция* (конкурентное поведение компонентов по отношению друг к другу, из всех компонентов выживает компонент, наиболее приспособленный к заданным условиям существования).

Однако конкурентные химические реакции не обладают свойствами мутации, развития, накопления, использования, хранения и передачи последующим поколениям ценной для выживания вида информации. Этими качествами обладают *биологические молекулы*, условия возникновения и устройство которых до сих пор остаётся научной загадкой. Биологические молекулы представляют собой цепочки, которые состоят из разных химических элементов, поэтому их называют *биополимерами*. Согласно современным научным знаниям, зарождение жизни происходило в несколько этапов:

- 1) формирование базовых элементов живых систем (*нуклеотидов и аминокислот*);
- 2) их полимеризация со случайным расположением в биомолекулах;
- 3) возникновение самоорганизующихся, самовоспроизводящихся, эволюционирующих структур со свойствами селекции, мутации, сохранения, переработки и передачи наследственной информации;
- 4) возникновение клеток и простейших биоорганизмов, приспособленных к существующим и постоянно изменяющимся внешним условиям;
- 5) возникновение бифуркационных ветвлений эволюционных возможностей простейших организмов с последующим формированием разнообразия живых существ.

Существование биологических видов невозможно без нуклеиновых кислот РНК и ДНК, которые построены из случайных цепочек нуклеотидов: *аденина (А), гуанина (G), цитозина (С), тимина (Т) и урацила (U)*. Биомолекулы РНК и ДНК образуются в ходе реакций: $\nu_1 A + \nu_2 G + \nu_3 C + \nu_4 U \Leftrightarrow РНК$; $\tilde{\nu}_1 A + \tilde{\nu}_2 G + \tilde{\nu}_3 C + \tilde{\nu}_4 T \Leftrightarrow ДНК$.

Число нуклеотидов в цепочках биополимеров РНК и ДНК колеблется в пределах от 10^2 до 10^8 , а их расположение в биомолекулах определяет *первичную структуру* цепочки молекул. Перестановки нуклеотидов в РНК и ДНК порождают огромное число (порядка 10^{600}) возможных видов биосистем. Помимо нуклеотидов в построении живых организмов принимают 20 аминокислот, которые образуют линейные цепочки, называемые *протеинами*. Длина таких полимеров составляет от 10 до 10^4 длин мономеров. Перестановки аминокислот могут породить до 10^{1300} различных протеинов. Огромное разнообразие биомолекул порождается их колоссальными структурными и информационными ёмкостями. Это приводит к появлению новых свойств биосистем, например, при достаточном количестве исходных мономеров в окружающей среде начинается процесс размножения биополимеров (*репликация*). Репликация происходит в соответствии с универсальным кодом, который представляет собой последовательность нуклеотидов в полимере. Репликация двойной спирали ДНК происходит путём её разрыва на отдельные нити с последующим построением из каждой нити двойной спирали (автокаталитическая реакция, если пренебречь спонтанной полимеризацией). “Переводчиком” генной информации, зашифрованной в ДНК, выступает РНК. При недостатке “строительных кирпичей”, в роли которых выступают нуклеотиды, возникают конкурентные химические реакции. Случайные изменения условий репликации может привести к протеканию иной химической реакции, не соответствующей воспроизведению точной копии образца. Это приводит к незначительным отклонениям от заданного “проекта”, поэтому возникают мутации. Если мутации способствуют повышению жизнеспособности биоструктуры, то они сохраняются и передаются при следующей репликации (*накопление и передача наследственной информации*).

Из вышеизложенного материала следует, что биомолекулы практически неограниченны в эволюционном развитии, но пределы репликации определяются вероятностью правильного клонирования исходной матрицы. Отличие репликационного процесса от простой автокаталитической реакции состоит в возникновении мутаций, порождающих новые конкурентно способные биомолекулы.

3. Детерминизм, случайность и отбор

В процессе конкурентной борьбы нежизнеспособные биомолекулы распадаются на энергетически бедные мономеры (*паразитные потери*), которые стремятся к самосохранению и вмешиваются в формирование наиболее приспособленной структуры. Жизнеспособные биомолекулы обладают разной сопротивляемостью по отношению к паразитным потерям. Вынужденный отбор, связанный с различного рода ограничениями, приводит к колебаниям в биосистеме в окрестности стационарного состояния (рис. 15.1). Оценка конкурентной способности биомолекул

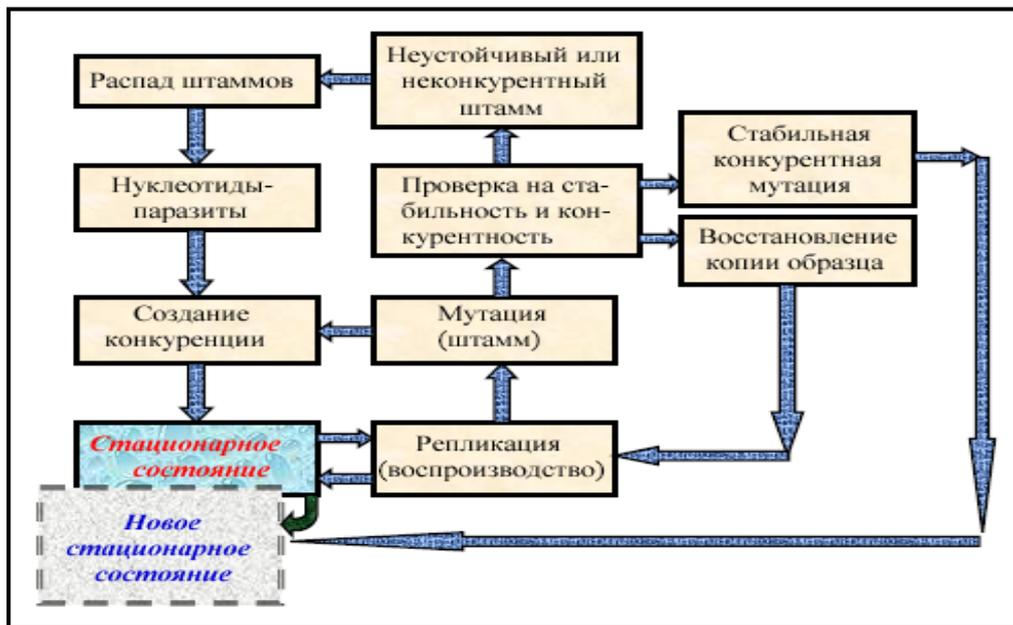


Рис. 15.1. Блок-схема циклического движения в окрестности стационарного состояния.

связана с *функцией ценности* (скорость производства), которая определяет предельное значение скорости производства. Если скорость производства выбранного типа биомолекул меньше предельного значения, то они вымирают. В противоположном случае детерминированно отбираются биомолекулы, скорость производства которых растёт. Функция ценности зависит от целого ряда параметров, изменение которых может привести к бифуркации, соответствующей появлению новой биоструктуры. Наличие паразитов изменяет эволюционный ход отбора жизнеспособных систем, преимущество получает биополимер с меньшей скоростью производства, но устойчивый к воздействию паразитов. Процесс отбора вблизи стационарного состояния регулируется *критерием эволюционного развития Пригожина-Гленсдорфа*. Таким образом, отбор устойчивых биомолекул происходит при ряде ограничений, которые и определяют жизнестойкую структуру.

Огромная структурная и информационная ёмкость биосистем приводит к одновременному существованию большого количества разнообразных видов (практически бесконечное число биополимеров). Существование мутаций обеспечивается стохастическими (случайными) условиями репликации биомолекулы. Флуктуирующие источники порождают случайные *штамм-последовательности* и *резервные копии*. При копировании штамм-последовательности может произойти устранение мутации и порождение резервной копии исходного биополимера, так как создание

новой штамм-последовательности маловероятно. Однако возникновение таких последовательностей нуклеотидов сопровождается изменением условий существования стационарного состояния и порождает переход к новому стационарному положению. Отбор является временным и неустойчивым. *Эйген* (1973) писал: “Всякая система, поддерживаемая процессами мутации и селекции, не определена относительно своей структуры, однако направление её эволюционного развития предопределено – это закон. Появление мутации, имеющей преимущество при отборе, порождает неустойчивость, которая может быть понята с помощью эволюционного принципа Пригожина-Гленсдорфа для стационарных необратимых термодинамических процессов. Оптимизирующий ход эволюции, таким образом, в принципе неизбежен, хотя его конкретные пути не определены.”

Борьба между хаотизацией и упорядочением не может быть завершена за конечный промежуток времени, следовательно, не существует такого состояния, которое будет равновесным для биосистем. Неравновесность поддерживается интенсивным отводом и притоком в биосистему высокоэнергетических “питательных” веществ, разных видов энергии и информационных потоков; существованием неограниченного числа стационарных состояний при отсутствии финального равновесия; репликацией и мутацией; самостабилизацией отбора; постоянной конкуренцией между биоцепочками.

При самовоспроизведении биополимеров существенными моментами являются: возрастание скорости производства в зависимости от сложности и устройства биополимера; возрастание вероятности мутации при увеличении длины биоцепочки; переписывание информации с ДНК-гена на короткие фрагменты РНК-переносчика; качество закодированной информации. Процесс отбора самых живучих биомолекул основан на сохранении информации о конкурентноспособной цепочке, преимущества которой развиваются по методу “проб-ошибок”. Эволюция базируется на:

- случайном развитии отдельной биомолекулы;
- спонтанном самовозникновении эволюционирующих систем и накапливаемой информации;
- огромной ёмкости биосистем по отношению к разнообразию возникающих структур и накоплению информации;
- перестройке биосистем в сторону накопления относительных преимуществ при заданных внешних условиях;
- сложности как самих биомолекул, так и процессов воспроизводства;
- самоконтроле и селекции;
- малой частоте мутаций, которая способствует устойчивости и стабильности воспроизводимых биоцепочек;
- переходе от одного стационарного состояния к другому в результате отбора мутационных изменений;
- разрастании и ветвлении эволюционного процесса за счёт возникновения новых структур;
- зависимости от предыстории;
- отсутствии конечной цели у эволюционного процесса, несмотря на возрастание энтропии, стремящейся “сбросить” систему в равновесное состояние.



§ 16. Самоорганизация биосистем

“С точки зрения современной науки эволюция является направленным процессом адаптации, ведущим к прогрессивной организации живой материи. Необходимость процесса эволюции и его необратимость определяется отбором. Речь идёт об автоматическом саморегулирующемся процессе, при котором в результате различного выживания и воспроизведения некоторые *нежелательные генетические комбинации устраняются*, а другие комбинации, *выгодные с точки зрения адаптации организма, сохраняются.*”

Ф. Чизек, Д. Годанова

1. Формирование и устойчивость биоструктур

Самоорганизация является неотъемлемой характеристикой всех неравновесных открытых систем, находящихся вблизи стационарного состояния, далёкого от равновесия. Она появляется и при формировании биологических структур: взаимодействие клеток приводит к их крупномасштабному когерентному поведению, которое определяет возникновение и поддержание жизнедеятельных образований. Высший биологический организм содержит до 100 различных по виду и функционированию клеток. Однако свойства клеток не могут объяснить разнообразия биологических существ.

Изложенные в предыдущих *параграфах* научные данные позволяют сформулировать основные этапы предбиологической эволюции, начиная с момента образования планеты Земля:

– неоднородности распределения элементов в земной коре, наличие градиентных температурных и механических зон, аномалии магнитного и электрического характера и другие причины вынуждают неорганические компоненты вступать во взаимодействие друг с другом и образовывать различные агрегатные состояния и химические соединения;

– постоянно изменяющаяся внешняя среда обитания порождает между химическими соединениями конкуренцию и отбор, что заставляет некоторые из них объединяться в длинные цепочки (полимеры) с сохранением программы их построения и последующим воспроизводством;

– воспроизводство сопровождается детерминированными или случайными ошибками, которые позволяют отбирать наиболее устойчивые биомолекулы для данных условий, при этом нежелательные мутации не накапливаются;

– когерентное поведение биомолекул на изменения внешней среды заставляет биосистему породить новую структуру – клетку;

– дифференцировка клеток под влиянием пространственно распределённой информации приводит к возникновению сложных организмов.

Изучением закономерностей формирования биоструктур в зависимости от пространственной организации клеток занимается наука с названием *морфогенез*. Сложность задачи, поставленной морфогенезом, состоит в том, что высокоразвитые организмы образуются из одной клетки (*зиготы*), которая делится на разнородные клетки (*дифференцировка*) со специфическими свойствами согласно *генетическому коду*. Пространственно-временное развитие организма в результате протекания

процессов в клетке и на субклеточном уровне называется *онтогенезом*. Он жёстко регулирует процессы дифференцировки, роста и деления клеток; пространственные перемещения клеток (*хемотаксис*, разделение на виды) и их взаимодействия; *коллективные (когерентные)* свойства организма. Морфогенез протекает под действием некоторого регуляторного процесса в ограниченной пространственно-временной области: из однородного массива клеток выделяются клетки с новыми параметрами их функционирования. В настоящее время отсутствуют математические модели перечисленных процессов, поэтому представляет интерес рассмотрение простейших механизмов онтогенеза, которые не зависят от субклеточных изменений (например, *эмбриональное развитие*).

В эмбриологии установлено, что внутри яйца существуют градиенты физиологически активных веществ. Наличие градиентов, радиус действия которых значительно превышает размеры одной клетки, приводит к различным условиям формирования клеток вдоль градиента, что приводит к их *дифференцировке*. В этом случае говорят о распределённой (*позиционной*) в пространстве информации об условиях формирования и развития клеток. Согласно *Вольперту* (1895), такой механизм дифференцировки клеток является универсальным. Наличие в биосистеме градиентов концентраций различных веществ порождает их диффузионное перемещение (коэффициент самодиффузии составляет порядка $0,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2 / \text{сек}$) между источником того или иного компонента и его стоком. Очевидно, что на вид позиционной информации оказывают влияние градиенты давления, температуры, химических потенциалов и других физических величин, но диффузия является самым медленным необратимым процессом, который окончательно определяет распределение информации. Как было показано в § 14, движущей силой диффузии является градиент отношения химического потенциала компонента к его энергетической температуре. В силу этого возможна ситуация, когда градиент концентрации компонента за счёт термодинамических факторов может быть направлен против своего потока (*активный транспорт* по Пригожину). Указанный процесс приводит к накоплению в определённом месте такого компонента.

Взаимодействие клеток может происходить не только с помощью диффузии, но и путём протекания химических реакций в месте их контакта (*межклеточный механизм*). В зависимости от условий протекания они могут привести либо к однородному распределению компонентов в соседних клетках, либо к колебательному обмену веществом, энергией и энтропией (реакция Белоусова-Жаботинского, см. § 13). Колебательный процесс определяется градиентом фазы или частоты волны, возникающей в соседней клетке. В некоторый момент времени одна из частот становится ведущей, что и задаёт ритм образования той или иной клетки.

Дифференцировка клеток приводит к их размещению в строгой пространственной последовательности, которая вынуждает клетки к движению и объединению. Перемещение клетки формирует информационный сигнал для других аналогичных клеток, т.е. возникает градиент информации, который и определяет стремление клеток к “сбору” в заданном месте. Распространение информационных волн приводит к когерентному поведению клеток, формирующих биоструктуру.

Формирование диссипативных биообразований связано также с изначальной асимметрией, заложенной в клетках. Кроме того, клетки на поверхности биообъек-

та находятся в контакте с окружающей средой и могут служить стоками и источниками для различных физико-химических величин, что поляризует клетки биосистемы. Аналогичные явления могут возникнуть при случайном нарушении симметрии клеток, что нарушает первоначальную однородность клеточного массива.

Одним из условий безопасного существования биологического организма является его *устойчивость* по отношению к изменениям управляющих параметров и внешних условий, так как неустойчивые системы не представляют интереса с физиологической точки зрения. Устойчивость подразумевает наличие *нелинейного взаимодействия*, по крайней мере, между двумя морфогенетическими компонентами; для возникновения биоструктуры *управляющий параметр должен достигнуть критического значения*; биокинетические уравнения движения должны *приводить к ограниченным, неотрицательным, устойчивым* и (в большинстве случаев) *периодическим решениям*. Суточная периодичность поведения биологического организма (основана на устойчивости периода и фазы) и его устойчивость к внешним воздействиям определяют *приспособляемость* вида.

Биоструктура представляет собой динамическую систему с множественными предельными циклами. Если она находится в окрестности устойчивого стационарного состояния в окружении двух предельных циклов, то в биосистеме наблюдаются колебания. Эта “внутренняя возбудимость” устойчива и выводит безвозвратно биосистему из старого стационарного состояния при превышении управляющим параметром определённого порогового значения. Таким образом, уравнения биологической кинетики должны приводить к решениям, описывающим дифференцировку однородной массы клеток под влиянием разнообразных градиентов физической и химической природы, регуляторную функцию позиционной информации, множественность стационарных состояний и предельных циклов, устойчивость “внутренней возбудимости”, кинетических переходов из одного стационарного состояния в другое, эволюционное развитие и другие параметры биосистем.

Протекание биолого-химико-физических процессов в конкурентных условиях определяют не только репликативное воспроизводство, но и улучшение генетического материала за счёт мутаций со сколь угодно долгим их повторением без накопления нежелательных изменений. Борьба за выживание порождает *принцип естественного отбора Дарвина*, который определяет переход биосистемы с одного уровня развития на другой: от одноклеточных к высшим организмам. Естественный отбор возникает при существенном ограничении питательных, энергетических или информационных ресурсов среды обитания. При этом выживают только те особи, которые порождают многочисленное и устойчивое к внешним изменениям потомство. Селекционный “пресс” вынуждает биосистемы усложняться и порождать всё новые самоорганизующиеся, автономные и самовоспроизводящиеся биоструктуры под управлением универсального генетического кода, в котором хранится информация их построения и развития. Возникновение наследственности и её передача с помощью генетической программы является результатом пока неизученного процесса, возникающего, по-видимому, под влиянием градиента позиционной информации. Кроме того, отпечаток градиента позиционной информации “фильмируется” нуклеотидами и определяет их месторасположение в биополимере. “Фильм” сканируется по кадрам РНК-носителем, который создаёт первичный

градиент позиционной информации для последующего воспроизведения.

2. Уровни организации живых организмов

Эволюционная адаптация клеточных систем проявляется на биохимическом уровне: в клетках происходит восстановление утраченной способности к воспроизводству необходимых для выживания биомолекул (устраняются нежелательные мутации); запускается механизм их производства с помощью генной программы; формируются самоорганизующиеся структуры и т.д. Биоструктуры возникают на *субклеточном* (см. также § 15), *клеточном* и *многоклеточном* (организменный, популяционный, социальный) уровнях организации биологических систем. Различие между субклеточным и высшим многоклеточным уровнями заключается в количестве генов, которые определяют начальное информационное поле, задают градиенты первичных реагентов, запускают “строительство” новых более сложных организмов. На субклеточном уровне информационная ёмкость человеческого гена равна 800 Мб (мегабайт). Очевидно, что такого количества информации вряд ли достаточно для построения такого сложного и многоклеточного организма как человек. По-видимому, на клеточном уровне происходит поиск и усвоение новой информации о строящемся объекте. Возникновение новой информации вынуждает биологическую систему перестраиваться и подстраиваться под внешние условия. Примером пространственно-временной самоорганизации на клеточном уровне могут служить паттерны колоний бактерий, которые показаны на рис. 16.1, и имеют

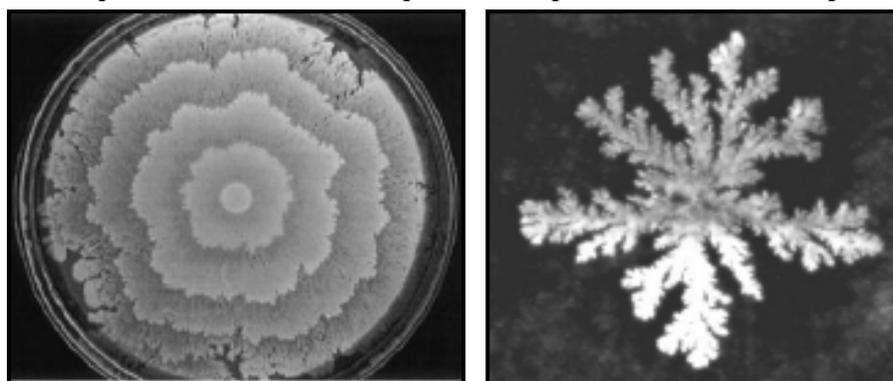


Рис. 16.1. Паттерны колоний различных бактерий.

ярко выраженную фрактальную геометрию. За счёт когерентного, скоординированного движения, роста, дифференцировки и отмирания клетки образуют новые кольцевые, спиралевидные, вихревые и фрактальные клеточные градиенты, которые задают новое информационное поле для перехода биосистемы в новое стационарное состояние с образованием новой структуры. При недостатке питательных веществ строящаяся биосистема начинает “сбрасывать” лишнюю информацию, избавляясь от энергетически бедных компонентов. Процесс сохранения внутренней энергии системы вступает в конфликт с возрастающим производством энтропии, что порождает новые условия существования и градиенты новых переменных функций, в том числе и случайных. Это приводит к новому стационарному состоянию и новому когерентному поведению клеток: однородное распределение клеток заменяется на их неоднородную, неравновесную, стационарную и жизнеспособную совокупность. Биохимические реакции в мембранах соединяют разнородные клетки в единый организм с большей степенью упорядоченности, менее энергосат-

ратный и более жизнеспособный. Из возникающих организмов преимущество получает тот, который устойчивее других к колебаниям внешних воздействий.

В качестве примера нелинейной, самоорганизующейся системы можно привести нервную систему. В нейронной сети любая клетка может быть задействована в случайный момент времени или точке её пространственного расположения. Нервная клетка обладает предустановленной (генной программой) способностью реагировать на изменение условий существования. Она является самообучающейся системой: в период обучения внешние сигналы воспринимаются ею как шумовое поле. Из этого поля клеткой извлекаются те гармоника, которые понижают рост энтропии и уменьшают её производство. Обученная клетка начинает активно вступать в контакты с другими нейронами, передавая им накопленный опыт “общения” с внешним миром. Процессы активизации и подавления межнейронных контактов происходят постоянно. Чем чаще задействована нейронная сеть, тем сильнее укрепляются старые связи между нейронами, интенсивнее возникают новые их объединения для решения поставленных задач – нейронная сеть становится устойчивее. При отсутствии процессов возбуждения и торможения нейроны атрофируются и гибнут (*анантоз*). Индивидуальное существование нервных клеток невозможно в виду активации процесса апоптоза, поэтому нейронная сеть является примером коллективного сосуществования. Отмирание незадействованных нейронных сетей подтверждается медицинскими историями болезни. Если младенец рождается глухим, то ему необходима срочная операция по восстановлению слуха, в противном случае нейронные сети, ответственные за распознавание звука, не формируются и отмирают.

Нейронные сети образуют самоорганизованную, управляющую структуру – мозг. Отвечая на внешние сигналы мозг учится выделять из них звуковые и световые волны, реагировать на изменения температуры и давления, вычленяет из окружающей среды различные объекты, формирует представления и суждения. Мозг не только распознаёт поступающие сигналы, но и пытается методом проб и ошибок заставить организм реагировать на раздражители. Многообразие внешних сигналов приводит к образованию в управляющем организме центре специальных “секторов” и “отделов”, отвечающих только на строго определённые “требования” внешнего мира. При “расформировании” того или иного “сектора” или “отдела” по какой-либо причине его функции частично выполняют соседние “секторы” или “отделы”. Однако полная взаимозаменяемость невозможна ввиду фиксации программы реагирования только на свой сигнал. Следовательно, после прохождения фазы обучения усвоение поступающей информации затрудняется из-за строгой очерёдности реакций организма на заданное извне возмущение. С этим фактором связана уникальность каждой личности, так как у неё формируется индивидуальная реакция на идентичные раздражители (именно поэтому даже у близнецов манеры и поведение различны). Накопление и использование информации создаёт новые условия, порождающие конкуренцию и отбор среди нейронных сетей. Таким образом, поток информации способствует не только снижению производства энтропии ранее сформировавшихся процессов, но и порождает увеличение энтропии из-за развития возникающих перераспределений вещества, энергии и информации. На образование нейронных сетей влияет не только поступающая извне и

изнутри информация, но её обработка. Она возбуждает новые связи между нейронами, порождая вторичные самоорганизующиеся структуры.

Другим примером разветлённой структуры является кровеносная система. Кровеносные сосуды, по которым проходят основные потоки компонентов крови, становятся магистральными, а остальные преобразуются в более мелкие сосуды, вплоть до капилляров. Сосуды, по которым протекает объём крови меньше его критического значения, вырождаются и отмирают. По строению организма можно предсказать пути прохождения кровеносных магистралей, однако невозможно определить расположение капилляров. Местоположение капилляров, углы их изгибов и точки их ветвления зависят от особенностей строения и потребностей в газообмене тканей, в которых развиваются капилляры, т.е. капиллярная структура уникальна.

Уникальность формирования определённых структур многоклеточного организма свидетельствует о каскадном характере дифференцировки клеточных потоков в поле позиционной информации. Когерентность поведения возникающих образований изменяет первоначальные градиенты вещества, энергии и энтропии, создавая новые условия для дальнейшей дифференцировки характеристик клеток вдоль выбранного направления (пространственная анизотропия дифференцировки клеток). Следовательно, управляющий развитием ген обладает различными регуляторными функциями по пространственным направлениям. Активация или торможение белками-регуляторами одной из управляющих последовательностей может ускорить или замедлить скорость реализации генной программы в зависимости от микроскопической обстановки в малой пространственной области. Это может привести к специфическим свойствам не только отдельной клетки, но их совокупностей, т.е. происходит дифференцировка тела зародыша (рис. 16.2). Таким об-

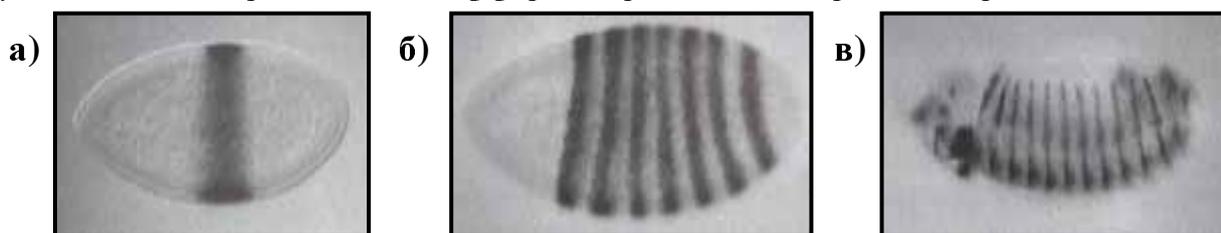


Рис. 16.2. Дифференцировка тела зародыша
(а) – *kruppel*, (б) – *fushi tarazu* и (в) – *engrailed*.

разом, морфогенез биологического организма представляет собой жёстко скорректированное, детерминированное “строительство” в соответствии с генным “проектом”. Отдельная клетка является неустойчивым, нелинейным и случайным элементом самоорганизующегося организма, она преобразовывается под влиянием морфогенетических полей химической, температурной, механической, электромагнитной, гравитационной и другой природы. Поддержание этих полей осуществляется регуляторными функциями генома с помощью белков. Отклонения от заданного “проекта” зачастую приводят к уродству и снижению устойчивости организма по отношению к изменениям внешней среды.

Рождение и развитие биоорганизмов приводит к их конкурентной борьбе и отбору на популяционном уровне. Этому уровню также свойственны процессы синхронизации в поведении видовых популяций, не только в период размножения,

но и в повседневной жизни (*эффект стадности*). Стадность возникает при достижении критического числа особей, после чего популяция превращается из совокупности индивидуумов в общественный организм. Появление общества формирует условия, при которых выделяются преимущественные особи. Отбор происходит в сторону сохранения и увеличения численности вида. Развитие сообществ животных по изложенным закономерностям вычленяет из них наиболее жизнестойкое и приспособленное сообщество (*социум*), которое в процессе эволюции превращается в социальные группы (племена, народности, народы и нации), которые назовём *соционами*. Взаимодействие между соционами сводится к конкурентной борьбе за жизненные ресурсы, развитие которой порождает их экономию, договорной обмен излишками, заключение союзов между группами с целью захвата жизненного пространства других социальных групп, информационной обработке членов своего социона и другим явлениям. Социум образуется из соционов и, в некотором роде, также является “многоклеточным” организмом. Условия возникновения и существования социума подразумевают сохранение внутренних свойств этого образования, в качестве примера можно привести регулирование численности противоположностей (*принцип перемешиваемости*): мужских и женских особей, сумасшедших и гениев, лидеров и ведомых.

Несмотря на вычлененные общие эволюционные закономерности, нельзя утверждать, что свойства социума являются простой суммой характеристик соционов, свойства соционов не сводятся к свойствам сообществ и т.д. Каждый новый виток эволюционной спирали на новом уровне порождает новое качество, возникающее после достижения критического значения количественных изменений (*бифуркация*). “Двигателями” эволюционного “авто” являются конкурентная борьба подсистем за выживание и отбор самых жизнестойких из них. Уменьшение “питательных” ресурсов неизбежно приводит к деградации и вымиранию одних видов и замещению их другими самоорганизующимися структурами с иными материальными, энергетическими, информационными и геометрическими параметрами.

3. Фрактальное строение биосферы

Каждая клетка живого организма является открытой и неравновесной структурой, которая стремится снизить воздействие внешней среды. Например, для внутренних органов внешней средой является кровеносная система. Она осуществляет газообмен, доставку питательных веществ и отвод продуктов жизнедеятельности, перенос информационных биомолекул. Эффективность работы кровеносной системы тем выше, чем больше площадь её контакта с тканями. Экстремальной площадью обладают фрактальные плоскости (см. § 11), уложенные в трёхмерный объём ткани. Изгибы и ветвления квазифрактальной укладки кровеносных капилляров позволяют достичь любой точки в заданном пространственном объёме. Таким образом, квазифрактальны кровеносная система всего организма и его внутренние органы (рис. 16.3а). Удаление кровеносной системы из организма приводит к тому, что организм в целом также квазифрактален, что является следствием совместного формирования организма и его кровеносной системы. Подобным квазифрактальным характером обладает любая транспортная система, обеспечивающая реализацию обменных процессов, например, лимфатическая (рис. 16.3б), ды-

хательная (рис. 16.4а) или пищеварительная (рис. 16.4б).

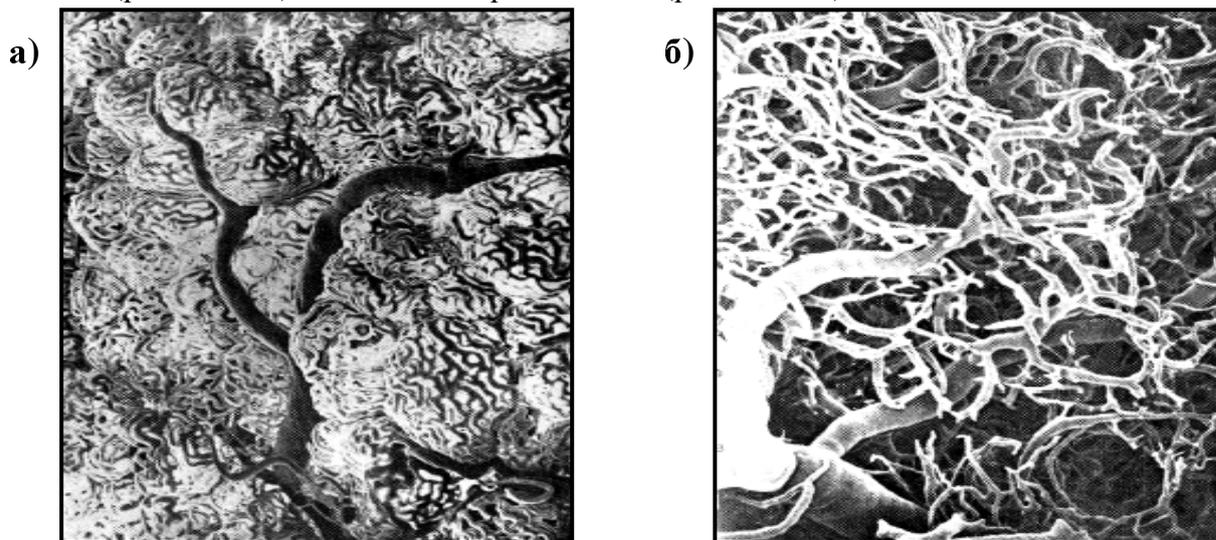


Рис. 16.3. Кровеносная система щитовидной железы (а) и брыжеечный лимфатический узел (б) крысы.

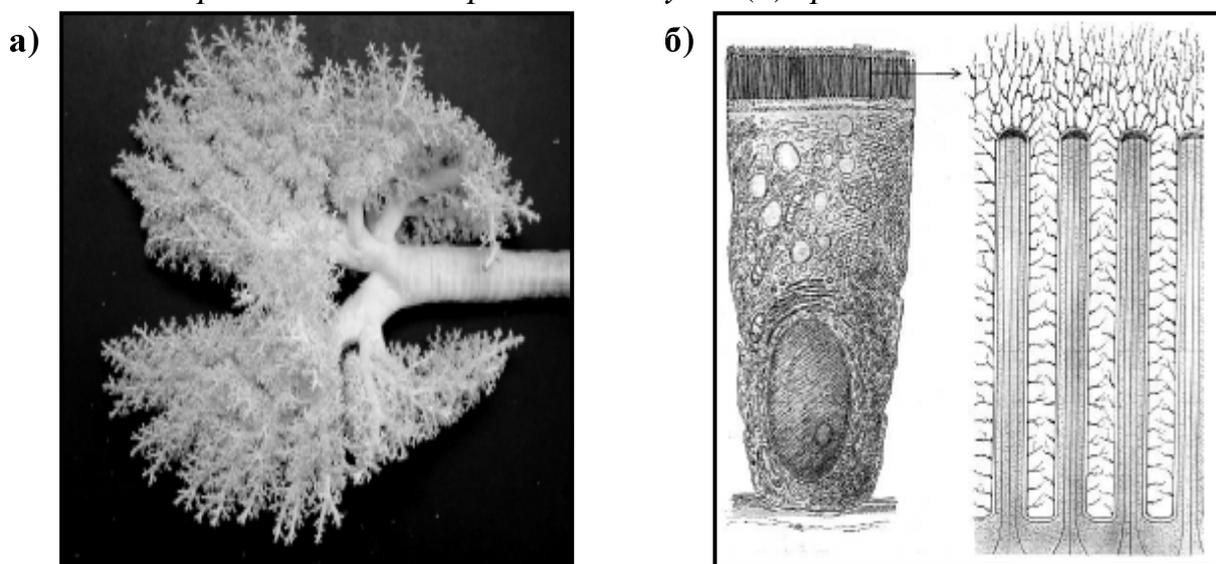


Рис. 16.4. Квазифрактальная структура лёгких (а) и пищеварительной системы (б).

Так как фракталы представляют собой многократное повторение самоподобных элементов, то алгоритм их построения является наиболее приемлемым для построения сложных организмов при минимальном количестве генной информации. Для построения транспортных магистралей достаточно двух генов: один формирует трубчатую структуру, а второй включается в моменты ветвления. Физические свойства транспортируемых элементов ограничивают минимальные размеры капиллярных ветвей. Они являются причиной отмирания капилляров с геометрическими размерами, меньшими критических.

Квазифрактальность транспортных путей связана со стохастичностью изменений фрактальной структуры. Случайные погрешности вносятся флуктуациями внешних условий при формировании “магистралей”, “вспомогательных дорог” и “тупиков”. Полная хаотизация фрактальной структуры связана с отсутствием в геномном коде параметра, определяющего форму организма, примером может служить паразитирующий мешкогрудый рак (рис. 16.5). Он живёт в тканях организмов и

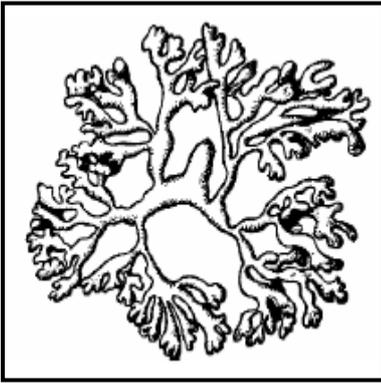


Рис. 16.5. *Dendrogaster dichotomus*.

его мутации не устраняются отбором, т.е. он постоянно изменяется. Отсюда вытекает важное следствие: живые организмы осваивают как детерминированные ниши существования, так и стохастические. Возникновение фрактально-стохастических организмов с произвольно меняющейся формой тела можно отождествить с возникновением турбулентности в ламинарном течении жидкости.

Квазифрактальная *морфология* (строение) наблюдается также при формировании скелета. Квазифрактальное строение и сочленение костей скелета увеличивает площадь, по которой распределяется действие силы веса организма. Такое строение позволяет скелету биорганισμού выдерживать увеличение веса взрослой особи без существенного изменения его геометрических размеров.

Максимального развития данный механизм скелетной прочности достиг в *сутуре* (нижняя часть рис. 16.6) ранее существовавших, хищных, плавающих моллюсков аммонитов. Быстрое перемещение аммонитов должно было совмещаться с лёгким,

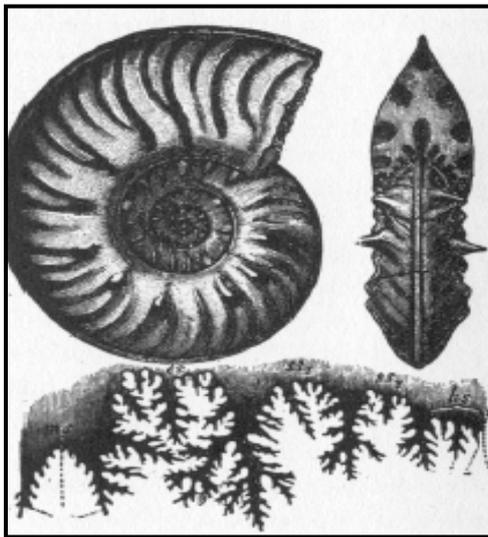


Рис. 16.6. Аммонит и сутура.



Рис. 16.7. *Nautilus pompilius*.

- центра управления жизнедеятельностью организма;
- органов запоминания, переработки, хранения, производства и передачи информации;
- условий для возникновения новых самоорганизующихся систем.

Всё это используется при формировании новой устойчивой структуры – *социума*.

но прочным панцирем. В противном случае он мог быть легко разбит, а аммонит превратился бы из охотника в жертву. Отметим здесь, что в эволюционном процессе (*в силу принципа перемещиваемости*) постоянно происходят колебательные процессы в системе хищник-жертва (см. модель Лотки-Вольтерра в § 13). Кроме того, в ходе борьбы за выживание, по-видимому, происходит накопление не только оборонительных, но и наступательных качеств. Через продолжительный промежуток времени это приводит к тому, что жертва и хищник могут поменяться местами.

Чисто фрактальное строение (логарифмическая спираль) наблюдается у раковины моллюсков вида *Nautilus* и ряда других организмов (рис. 16.7).

Изложенный материал продемонстрировал (квази-) фрактальную геометрию биосистем, которую они используют для создания:

- транспортных каналов;
- несущих конструкций;
- сочленений;
- органов контроля за состоянием внешней среды;



§ 17. Социум

“Лучший способ предсказать будущее – создать его”.

Р. Энтони

“Я интересуюсь будущим потому, что собираюсь провести в нём всю оставшуюся жизнь.”

Ч. Кеттеринг

“...накануне войны большинство учёных предсказывали мир; накануне экономического краха и обнищания – процветание; накануне революций – стабильный порядок и закономерный прогресс. Несмотря на все находящиеся в нашем распоряжении общественные и естественные науки, мы не способны ни управлять социально-культурными процессами, ни избежать исторических катастроф.”

П.А. Сорокин

1. Модели количественного роста населения

Синергетический подход к решению проблем возникновения, функционирования и развития человеческого общества (*социума*) позволяет переопределить такие понятия, как исторический детерминизм; устойчивое, бескризисное и прогрессивное развитие социума; его сосуществование с биосферой; долгосрочный социальный прогноз и численность населения планеты.

Возникновение человечества на планете Земля неразрывно связано с увеличением численности *Homo sapiens* (в переводе с латыни: *Человек разумный*) и её преодолением некоторого критического значения. В § 16 было показано, что эволюционное преимущество получает тот вид, который наиболее интенсивно увеличивает свой *количественный показатель*. Рассмотрим ряд простых моделей, которые прогнозируют численность населения:

1) модель Мальтуса. При благоприятных внешних условиях (обилие пищи, отсутствие хищников и т.п.) скорость увеличения численности популяции (dN/dt) пропорциональна числу особей в сообществе (N). Коэффициент прироста населения (k) определяется разностью коэффициентов рождаемости и смертности. Согласно модели Мальтуса, кинетическое уравнение эволюции численности популяции имеет вид $dN/dt = kN$. Решением уравнения является функция $N(t) = N(0)e^{kt}$, где $N(0)$ – число особей в начальный момент времени. Удвоение численности населения происходит быстро по истечении промежутка времени, равного $\Delta t = \ln 2/k$. При превышении некоторого достаточно большого числа N_c (предел численности популяции) модель Мальтуса становится непригодной в силу зависимости коэффициента прироста от числа индивидуумов в сообществе.

2) логистическая модель. При $N \geq N_c$ возникает конкуренция между особями из-за нехватки питания и стремлением к расширенному воспроизводству. Это включает природные регуляторные функции, которые подавляют развитие менее приспособленных членов популяции. Линейная зависимость коэффициента прироста ($k = a - bN$) от числа особей приводит к логистической модели, в которой эволюционное уравнение имеет вид $dN/dt = aN - bN^2$. Изменения численности населения в зависимости от времени по модели Мальтуса (штрих-линия) и логистичес-

кой модели (сплошная линия) показаны на рис. 17.1.

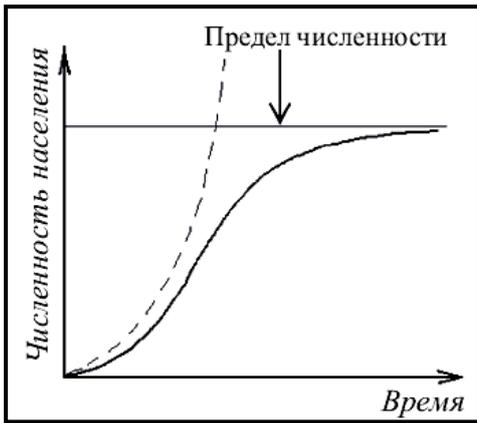


Рис. 17.1. Рост численности населения Земли по логистической модели.

При малой численности сообщества закон Мальтуса и логистическое соотношение практически совпадают (в физике твёрдого тела аналогичная картина наблюдается при вычислении теплоёмкости по моделям Эйнштейна и Дебая), однако при приближении к критической величине народонаселения логистический закон показывает выход на стационарную численность N_c (явление насыщения). Различные оценки стационарной численности населения Земли приводят к значениям от 16 до 20 млрд человек. S-образный логистический закон также хорошо описывает смену одной технологии другой, эволюционные процессы в экономической и социокультурной сферах, распространение инноваций и т.п. Например, в 1990 году по логистическому закону количество стран, которые имеют демократическое устройство, достигло 50 %, а по прогнозу их число приблизится к 90 % в 2100 году.

3) модели с отловом: а) **без учёта конкуренции.** Если из популяции с постоянной скоростью v_0 изымаются особи, то этот процесс описывается моделью с отловом. Простейшим уравнением, которое описывает отлов, является уравнение $dN/dt = kN - v_0$, решение которого имеет вид $N(t) = N(0)e^{kt} + (v_0/k)(1 - e^{-kt})$. Из этой формулы видно, что при скорости отлова $v_0 = kN(0)$ численность популяции не меняется с течением времени и равна её начальному значению. Дискретный аналог этой модели описывается уравнением $x_{n+1} = ax_n - c$ ($a > 1$). Если число особей уменьшается до величины меньшей, чем $x_c = c/(a-1)$, то популяция погибает. В противоположном случае (при численности сообщества $x > x_c$) численность популяции увеличивается.

б) **с учётом конкуренции.** Учёт конкуренции приводит к изменению кинетического уравнения, которое принимает вид $x_{n+1} = (a - bx_n)x_n - c$. Если скорость отлова невелика ($c < (a-1)^2/4b$), то два стационарных состояния системы определяются неустойчивым $x_{c1} = (a-1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4bc})/2b$ и устойчивым $x_{c2} = (a-1 + \sqrt{(a-1)^2 - 4bc})/2b$ корнями эволюционного уравнения. При значениях параметров $a=1.1$, $b=0.1$ и $c=0.02$ решения представлены на рис. 17.2. При $c = (a-1)^2/4b$ критические значения численности

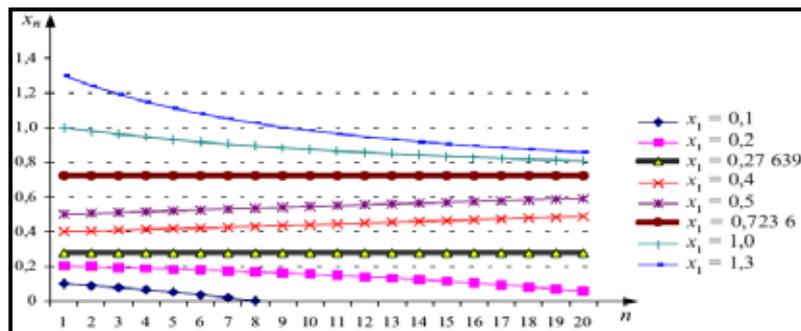


Рис. 17.2. Изменение численности популяции с умеренной квотой отлова.

ности популяций совпадают $x_{c1} = x_{c2}$. Этот случай соответствует возможности катастрофического вымирания вида за короткий промежуток времени при незначительном снижении числа особей ниже критического уровня $x_c = x_{c1} = x_{c2}$ (рис. 17.3).

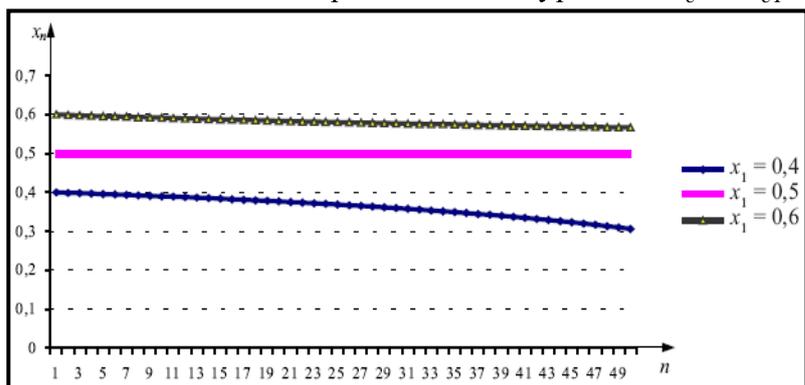


Рис. 17.3. Вымирание вида при критической скорости отлова.

Если выполняется неравенство $c > (a-1)^2/4b$, то при любых начальных условиях биообщество погибает (рис. 17.4). Регулирование скорости отлова в зависимости от

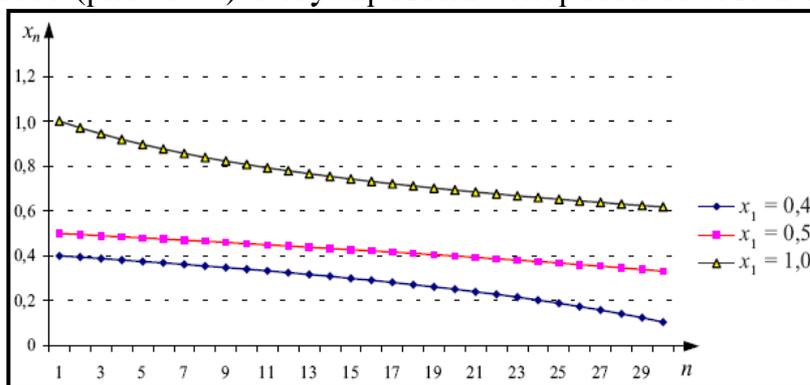


Рис. 17.4. Снижение численности популяции при перелове.

количественного состояния популяции в текущий момент времени (например, линейная зависимость скорости отлова от числа особей вида $c = kx_n$) приводит к возникновению неустойчивости из-за оптимизации параметров системы. Оптимизация может привести к полному уничтожению детерминистически спланированного сценария поведения системы из-за возникновения хаотических процессов при вхождении в область неустойчивости.

По отношению к социуму модели с отловом описывают состояние субъектов экономической деятельности. Например, если какая-либо фирма имеет стартовый капитал ниже критического уровня, то при постоянных налогах (скорость отлова) такая фирма разорится. Если налоги зависят от финансового состояния фирмы, то она может достичь одного из двух стационарных состояний: неустойчивого или устойчивого. В первом случае, даже незначительное снижение финансового обеспечения фирмы ниже критического уровня приводит к её разорению за короткий промежуток времени. Кроме того, рассмотренная модель показала, что плановое хозяйство может быть разрушено оптимизацией параметров управления ввиду возникновения неустойчивости экономической системы. В связи с этим возрастает необходимость в изучении рыночных механизмов, а также влияния на них управления и образовательного уровня менеджеров.

2. Социально-экономические процессы

Рыночные отношения наиболее устойчивы в положении равновесия. Ранние экономические теории основывались на гипотезе о саморегуляции рынка автоколебательными стихийными процессами. Роль государства сводилась к минимизации негативных последствий собственной деятельности и невмешательству в хозяйственную деятельность частных компаний, кооперативных объединений и других компонентов экономической системы. Конкуренция между различными формами собственности выделяет из них ту форму, которая наиболее приспособлена к существующим экономическим условиям. Отбор приводит к прогрессивному развитию одной из форм собственности и к подавлению других форм. Однако из-за *перемещиваемости* в рамках существующей экономической среды должны присутствовать все формы собственности, но в разных пропорциях. Для развития экономической системы государство должно стимулировать наиболее приспособленную форму собственности, защищать её и получать дивиденды (прибыль) от её реализации. Распределение доходов должно осуществляться в соответствии с вышеозначенными пропорциями. Гибкость государственного менеджмента состоит в прогностическом анализе эволюционного развития форм собственности и в умении быстрого реагирования при перераспределении финансовых потоков от одной формы собственности к другой. Именно такое перераспределение может обеспечить устойчивое стационарное состояние экономической системы. Создание критических градиентов финансового стимулирования приводит к разрушению равновесного состояния и переводит экономику в хаотическое состояние. Взаимодействие между компонентами побуждает их к когерентному поведению и созданию новых структур (от артелей к межнациональным корпорациям). Важную роль при создании новообразований играет государство, которое создаёт законодательную базу, информационную поддержку и определяет приоритетные направления хозяйственной деятельности для новых условий (*теория Кейнса*: “Спрос порождает предложение”). Таким образом, государство переводит экономику из точки “депрессивного равновесия” в состояние прогрессивного развития. Теория Кейнса продемонстрировала существование множества *плоскостей Смита*, переход между которыми происходит под воздействием внешнего стимулятора.

Создание совокупного спроса и его государственное регулирование переводит экономическую систему из одной плоскости Смита, которая содержит единственную равновесную точку, в другую. В упрощённом варианте модель Кейнса позволяет проанализировать такую макроэкономическую ситуацию на примере рынка товаров и услуг. Обозначим через N_D совокупный национальный доход (используется на потребление и накопление – предложение товаров и услуг), а через S – совокупный спрос на товары и услуги. Совокупный спрос состоит из спроса на *инвестиции* I (стимулирование производства необходимых социуму товаров и услуг) и спроса на потребление P : $S=I+P$. Основная гипотеза Кейнса состоит в функциональной зависимости потребления от возрастающего совокупного национального дохода, т.е. $P=f(N_D)$, причём первая производная функции $f(N_D)$ удовлетворяет двойному неравенству $0 < f'(N_D) < 1$. Это неравенство обеспечивает более мед-

ленный рост спроса по сравнению с ростом совокупного национального дохода. Линейная аппроксимация спроса на потребление имеет вид $P = a + b N_D$, где параметр a определяет склонность к потреблению при исходном совокупном национальном доходе, а параметр $b = f'(N_D)$ – скорость её нарастания. В равновесии выполняется равенство $N_D(t) = S(t)$. Флуктуационное возрастание спроса (например, возникает потребность в инвестициях у ряда крупнейших предпринимателей) в момент времени T выводит экономическую систему из положения равновесия. При малых смещениях происходит саморегулирование финансового рынка, а при относительно больших – требуется вмешательство государства для перевода экономической системы на новую плоскость Смита. Повышение спроса увеличивает предложение, увеличение предложения порождает рост спроса: возникает устойчивый предельный цикл.

С экономической точки зрения данный процесс отвечает уменьшению избыточного спроса $U(t) = N_D(t) - S(t)$. Итерационный процесс Кейнса описывается уравнением $S(t+1) = N_D(t)$, т.е. избыточный спрос равен скорости нарастания спроса, которая с течением времени уменьшается. Описанный механизм рыночного регулирования должен привести к возникновению нового равновесного значения совокупного национального дохода \tilde{N}_D . Для решения поставленной задачи введём новую переменную $y_t = N_D(t) - \tilde{N}_D$, которая удовлетворяет уравнению $y_{t+1} = b y_t$. Эта формула определяет бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, следовательно, совокупный национальный доход стремится к своему новому равновесному значению. Таким образом, в условиях избыточного спроса экономически выгодными являются процессы инвестирования и расширенного производства товаров и услуг.

При значительных отклонениях от равновесия динамика экономической системы описывается нелинейной моделью. Открытие Н.Д. Кондратьевым “длинных волн” экономики с периодом колебаний порядка 50 лет дало толчок к созданию новых нелинейных экономических теорий, учитывающих цикличность процессов роста и спада спроса-предложения и возможность хаотизации рынка. Одним из таких теоретических построений является модель, которая описывается уравнением Риккера $y_{t+1} = c y_t \exp(-y_t)$, где $c = \exp(-q \tilde{N}_D)$, $q = g(1-b)$, g – положительный параметр. Оно описывает реакцию экономики на дисбаланс между спросом и предложением. Уравнение Риккера обладает бифуркационными свойствами: при увеличении параметра c наблюдается удвоение периода колебаний; при его превышении определённого критического значения система входит в область детерминированного хаоса. Таким образом, экономическая система может находиться в состоянии равновесия или существовать в автоколебательном режиме (стационарное состояние).

Сложность экономической системы требует создания оптимального управления (*менеджмента*) для её эволюционного развития. Рассмотрим многоступенчатую систему менеджмента. Пусть скорость производства продукта y определяется руководителем первого уровня x_1 , указания которому даёт начальник второго уровня x_2 , подчиняющийся менеджеру следующего уровня x_3 и т.д. до уровня n . Это означает, что управление системой описывается цепочкой команд вида $\dot{y} = x_1$;

$\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = x_3; \dots; \dot{x}_{n-1} = x_n$. Владелец фирмы (менеджер высшего уровня n) не подчиняется никому, его интересует только одно: количественное значение произведённого продукта должно соответствовать величине Y . Следовательно, он принимает решение по уменьшению разности между произведённым и желаемым количествами продукта, т.е. уравнение владельца фирмы имеет вид $\dot{x}_n = -k(y - Y)$, причём коэффициент пропорциональности $k > 0$. В случае трёхступенчатого управления система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y} = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k(y - Y) \end{cases} . \text{ Стационарному состоянию отвечает}$$

решение $y = Y, x_1 = x_2 = 0$, устойчивость которого определяется значениями корней характеристического уравнения (показатели Ляпунова, см. пункт 3 § 2), которое в при n -ступенчатом управлении, определяется равенством $\lambda^n = -k$. При $n=1$ управляющий больше всего заинтересован в результатах дела, чем в любом поощрении. При $n \geq 3$ система управления неустойчива: система может находиться в стационарном состоянии только при скрытом материальном поощрении руководителей всех рангов. Это приводит к “тенезации” экономики и движению финансовых потоков с минимальными отчислениями в государственную казну.

Экономическая деятельность хозяйственных организаций неизбежно приводит к их конкуренции, при этом возникают споры и конфликты. Рассмотрим простую модель возникновения конфликта между двумя фирмами, причём в качестве характеристики их взаимоотношений выберем накопленную “напряжённость” U_i ($i=1, 2$) для каждого из участников. Влияние “напряжённостей” U_i друг на друга будем считать линейным, тогда скорости их возрастания опишутся системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{dt} = N_1 + a_{11}U_1 + a_{12}U_2 \\ \frac{dU_2}{dt} = N_2 + a_{21}U_1 + a_{22}U_2 \end{cases} , \text{ где величины}$$

N_i ($i=1, 2$) описывают стартовые условия возникновения конфликтной ситуации, коэффициенты a_{ij} ($i, j=1, 2$) задают реактивность возбуждения сторон конфликта на внутренние мотивации ($i=j$) и действия противоположной стороны ($i \neq j$). Для данной системы дифференциальных уравнений первого порядка характеристическое уравнение всегда имеет положительный корень, который задаётся равенством $\lambda = [a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}] / 2$ и фиксирует наличие неустойчивости конфликта. При воздействии на конфликт извне необходимо, чтобы миротворческие усилия были пропорциональны сумме напряжённостей между сторонами и имели одинаковую амплитуду для обеих сторон. В этом случае конфликтная ситуация стабилизируется и постепенно угасает.

Помимо конфликтов между субъектами хозяйственной деятельности возможны стихийные бедствия (планетарные погодные изменения), социальные кризисы (экономические депрессии; революции; военные действия, в которых участвуют большинство стран планеты Земля) и катастрофы (падение тел астрономических масштабов; смена магнитных полюсов; испытания оружия массового пора-

жения высокой мощности и т.п.). Указанные процессы могут угрожать существованию человечества. В настоящее время основное внимание уделяется ряду наиболее актуальных проблем:

1. Нехватка материальных и энергетических ресурсов в связи с постоянным ростом численности населения на планете.
2. Появление и распространение новых болезней; генетическая модификация продуктов питания; неконтролируемые мутации, связанные с испытанием новых видов вооружения и т.д.
3. Увеличивающийся финансовый разрыв между обеспеченными и бедными людьми; создание мафиозных группировок с планетарным масштабом деятельности; терроризм; возрастание недовольства деятельностью государства и политических партий.
4. Возникновение иллюзорного (виртуального) мира и погружение в него всё увеличивающегося количества людей.
5. Разрушительное влияние на биосферу внедрения научно-технических достижений.
6. Катастрофические изменения физического состояния планеты.

Следовательно, внешнее вмешательство в деятельность социума может привести либо к его сосуществованию с кризисными явлениями и установлением новых связей (*саморегулирование*), либо к его коллапсу с образованием новых структур (*самоорганизация*). В связи с необходимостью контролируемого управления возникает потребность в высококвалифицированных менеджерах. Реализация этой потребности требует реформирования системы подготовки и образования управленческих кадров с учётом новых достижений, полученных в результате научных исследований на всех уровнях организации материи.

3. Подготовка управленческих кадров

Синергетические требования к уровню подготовки и образования управленческих кадров сводятся к формированию менеджеров, способных переводить регулируемую систему из одного стационарного состояния в другое. Быстрая смена условий существования социально-экономической системы требует иного подхода к управлению:

- жёсткие управленческие структуры должны стать более подвижными и изменяющимися в зависимости от потребностей общества;
- конкуренция и отбор могут происходить только при широком разнообразии форм менеджмента;
- иерархичность (вертикальность) управления должна быть заменена на горизонтальную, полуавтономную, разветвлённую сеть обмена избыточными ресурсами и опытом управления;
- осознание нелинейного характера поведения динамических систем должно привести к смене директивного стиля руководства на совещательный и рекомендательный;
- управление должно поддерживать систему в стационарном состоянии до тех пор, пока сохраняется равновесие между спросом и предложением; при нарушении равновесия менеджеры обязаны перевести систему в новое устойчивое со-

стояние, т.е. найти в хаотической области траекторию движения, которая обеспечивает выход к новому аттрактору (алгоритм выхода из кризисной ситуации);

– сложность социально-экономической системы и протекающих в ней процессов требует перехода от повышения квалификации кадров к самоорганизации и самообучению;

– функционирование экономических структур в социуме требует смены целей их деятельности: от извлечения максимальных прибылей к социально обоснованному поведению (создание оптимальных условий для работников, обеспечение страхования на случай травмирования, обеспечение наличия и нормального функционирования детских учреждений и т.п.);

– техногенная деятельность должна сопровождаться минимизацией ущерба для окружающей среды (эволюционное мышление вместо бездумной погони за прибылью);

– образовательный цикл должен формировать у менеджеров не экономический, а синергетический взгляд на деятельность предприятия (понимание природы конкуренции и отбора; осознание и использование знаний о возникновении новых устойчивых структур и процессов, способствующих их появлению; развитие потребности в самоорганизации и самообучении и т.д.).

Эти положения приводят к осознанию того факта, что управление может не только способствовать жизнедеятельности социума, но и вносить дезорганизацию в виде кризисных явлений различного характера (политика насильственного изменения жизненного уклада национальных меньшинств; вмешательство государства в экономическую деятельность частных предприятий; военное вторжение на территорию других государств и т.п.). Эволюционное управление сводится не к подавлению тех или иных социально-экономических образований, а к созданию благоприятных условий для развития тех компонентов, которые ведут к снятию напряжённости в социуме, способствуют его развитию и движению в нужном направлении. Менеджеры всех уровней должны осознать взаимосвязь и взаимное влияние принимаемых решений на динамику и характер управляемой системы (*эффекты бабочки Брэдбери и слона в посудной лавке*: очень маленькие и очень большие флуктуации могут привести к неконтролируемым последствиям).

В этой связи повышается не только роль руководителя, но и исполнителей принятой программы действий. Уникальность, личностные характеристики и взаимодействие участников социально-экономического процесса определяют его динамические характеристики, нелинейную природу поведения и способность к самоорганизации и эволюции. Резонансное увлечение той или иной идеей, которое сопровождается появлением “вождей”, “фюреров” и “мессий” различных мастей, может привести к когерентному поведению части социума, что неизбежно сказывается на его состоянии в целом. В этом случае задачей управления является сохранение стабильности социума при подавлении нежелательных “мутаций” в виде “вождей”, “фюреров” и “мессий”, появление которых является сигналом о возросшей напряжённости в социальной сфере. Отсутствие реакции со стороны государства на появление “вождей”, “фюреров” и “мессий” увеличивает нестабильность социума и может привести к его “перереформированию” или уничтожению.

Изложенные факторы риска нестабильного поведения социума требуют из-

менений программ обучения инженерных и других специальностей. Модель развития высшего образования была предложена Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша (Россия, 1994-95). В рамках этой модели учитываются три основных параметра: X – объём производства; R и A – объём доступных материальных и интеллектуальных ресурсов (уровень развития науки и техники), соответственно. Модель построена на следующих гипотезах:

1. Прирост объёма производства обеспечивается за счёт некоторого количества ранее полученных материальных ресурсов, т.е. $X(t+1) = p\Delta R(t)$, где коэффициент p линейно зависит от интеллектуальных ресурсов A и описывается формулой $p = p_0 + p_1 A$. При экстенсивном развитии производства в условиях избытка материальных и энергетических ресурсов величины $p_0 \approx 1.2$ и $p_1 \approx 10$.
2. Из объёма материальных ресурсов социума ежегодно изымается для производственных целей величина ΔR , причём часть ресурсов h восстанавливается естественным или принудительным способом. Расход материальных ресурсов определяется в модели формулой $\Delta R(t) = X(t)/(1 + g X(t)/R(t))$, где параметр g определяет цену ресурсов. При значительном избытке ресурсов объём производства практически совпадает с затратами на производственные цели ($\Delta R(t) \approx X(t)$). Использование инноваций с приходом нового специалиста учитывается с помощью соотношения $b[A(t)(t - t_R)/A_c]^2$, где параметр b определяет эффективность внедрения новых технологий, коэффициент $A_c \approx 0.03$. Таким образом, объём доступных материальных средств в следующем финансовом году задаётся равенством $R(t+1) = R(t) - \Delta R(t) + h + b[A(t)(t - t_R)/A_c]^2$.
3. Расходы на образование пропорциональны объёму производства и составляют от него порядка одного процента, т.е. $M = eX$ ($e \approx 0.01$). Скорость прироста интеллектуальной сферы ограничена скоростью появления новых знаний, наличием своевременного доступа к ним, общеобразовательным уровнем преподавателей, их переходом в иные области деятельности, временными рамками подготовки молодого специалиста. Стандартный образовательный цикл составляет 5 лет, следовательно, скорость роста благополучия вузов f при щедром финансировании оценивается как $f = 2^{1/5} \approx 1.15$. Прирост интеллектуальной сферы в следующем финансовом году определяется равенством $A(t+1) = qA(t) + [fM/(1 + M/A(t))]$, где коэффициент $q \approx 0.8$ описывает “старение” предлагаемых знаний (данный параметр всегда меньше единицы), величина $1/(1 + M/A(t))$ характеризует освоение вузами выделяемых на образование финансов.

Качественное исследование приведенных уравнений показывает, что в начальный момент времени социум не имел развитого производства при полном отсутствии научно-технической деятельности и значительном объёме нетронутых материальных ресурсов. Модель показывает, что в течение 30 лет объём производства возрастает в 50 раз, а расходы на развитие интеллектуальной сферы увеличиваются в 30 раз. Если интеллектуальные достижения не используются в производстве ($b=0$), то за пять лет наблюдается значительное снижение производства (в 5 раз), ис-

черпание материальных ресурсов и стабилизация вблизи состояния, которое определяется потреблением только возобновляемых ресурсов. Такое состояние отвечает постепенной деградации социума. На рис. 17.5 показаны эволюционные кривые для оговоренных выше переменных социально-экономической системы. Внедре-

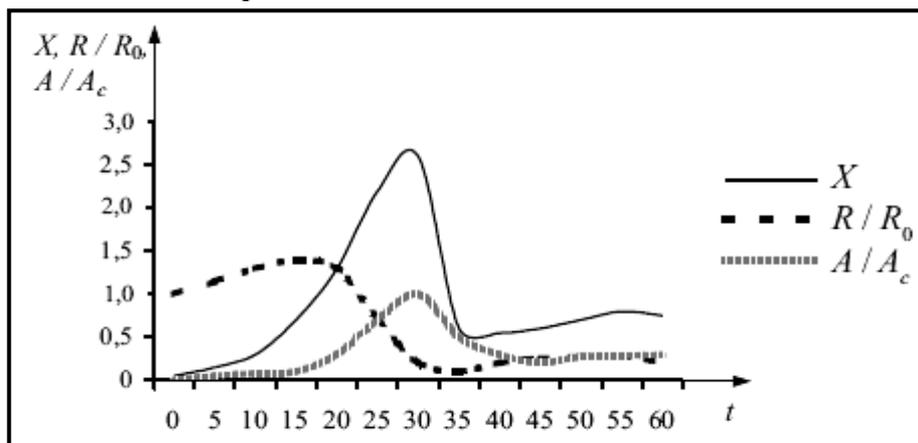


Рис. 17.5. *Временная зависимость переменных состояния социума.*

ние научно-технических достижений приводит к стабилизации состояния социума при исчерпании материальных ресурсов (рис. 17.6). Если финансирование интел-

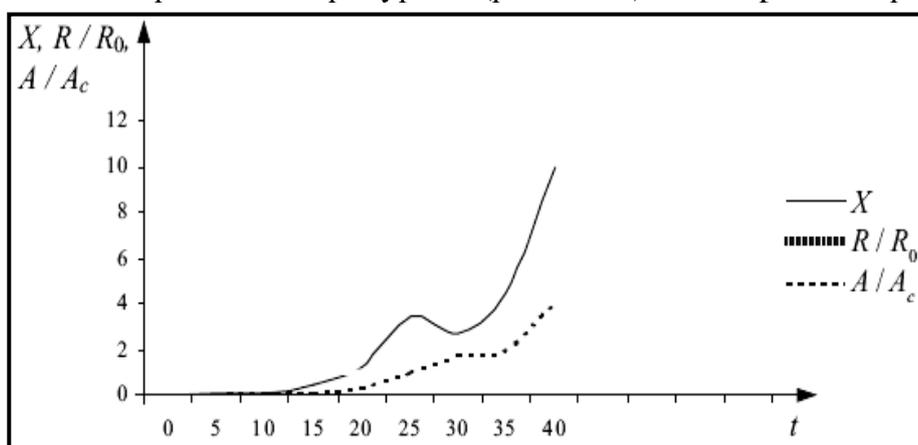


Рис. 17.6. *Эволюция социума при внедрении инноваций.*

лектуальной сферы уменьшается в 2 раза, то развитие человеческого общества при исчерпании материальных ресурсов приводит к его развитию по сценарию, показанном на рис. 17.5. Увеличение финансирования научных и технических исследований на 0.5% приводит к развитию общества по сценарию, изображённом на рис. 17.6.

Исследованная модель показывает наличие порогового значения уровня финансирования интеллектуальной сферы. Финансирование науки и образования ниже критической величины приводит к исчерпанию материальных источников и деградации общества. Финансирование интеллектуальной сферы выше критического значения позволяет экстенсивно развивать производство и обеспечивать его стабильное существование при исчерпании природных ресурсов и их постоянном естественном или искусственном возобновлении. Необходимое финансирование образования и науки постоянно “подпитывает” социум высокообразованными инженерными и управленческими кадрами и стабилизирует его эволюционное развитие.



§ 18. Компьютерный эксперимент

“Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.”

А. Пуанкаре

“То, что можно полностью контролировать, никогда не бывает полностью реальным; то, что реально, никогда не бывает полностью контролируемым.”

В. Набоков

“Все, кто занимается программированием, знают, *насколько тупа на самом деле машина*, не способная устранить даже простейшие ошибки, не будучи предварительно запрограммированной на это.”

Г. Хакен

1. Копирование оригиналов

Моделирование (слово “*модель*” происходит от латинского слова *modus*, которое переводится как *копия* или *образ*) сводится к выделению основных свойств реальной системы. Отсечение качеств, которые слабо влияют на поведение системы, позволяет описать частные и общие характеристики на основе идеализированного представления об устройстве и структуре исследуемого объекта. Численный эксперимент, проводимый на персональном компьютере, позволяет проверить соответствие модели реальным явлениям и предсказать возможные изменения в поведении объекта при изменении модельных параметров. Использование электронно-вычислительной машины (ЭВМ) подразумевает отображение модели в виде уравнений и соотношений. Модель позволяет выяснить не только свойства оригинала, но и установить закономерности его взаимодействия с внешней средой. Если модель адекватна оригиналу, то она применяется для сохранения информации об аналогичных системах в свёрнутом виде (*математический код*) и для дальнейшего совершенствования представлений о таких структурах. Предлагаемые модели могут отображать различные характерные черты, поэтому чем ближе модель к реальности, тем больше свойств различных систем она описывает. При ознакомлении с ранее существующими моделями выделяют их положительные и негативные стороны. Отрицательная сторона модели указывает направление её дальнейшего совершенствования. Набор моделей, отображающих различные стороны материального мира, определяет уровень научного знания о среде обитания.

Модели разделяют на *вещественные* (натурные, физические и др.) и *идеальные* (наглядные, математические и др.). Натурные модели используются для исследования процессов и явлений в реальных условиях. Физические модели воспроизводят свойства оригиналов на макетах и в экспериментальных установках. Наглядные модели отображают изменения системы в виде таблиц, графиков, схем и т. п. материалов. Математические модели используют аналоговые, структурные, геометрические и другие образы исследуемого явления или процесса. Иную классификацию моделей можно предложить, если исходить из схемы воздействия среды-реакция системы (*чёрный ящик с неизвестным строением*). В данном случае моделируется матрица перехода от заданного вектора воздействий к вектору отклика.

Модели разделяют на линейные и нелинейные, однородные и неоднородные, устойчивые и неустойчивые и т.п.

Наивысшей абстрагированностью от конкретного содержания того или иного объекта исследования обладают только математические модели, которые и получили наиболее широкое распространение при научных исследованиях. Использование ЭВМ позволяет существенно ускорить сопоставление предлагаемых моделей с реальными системами, а также проводить независимый компьютерный эксперимент для проверки гипотез и теоретических предсказаний. Конечной целью математического моделирования является отображение реальности с заданной степенью точности и надёжности получаемых результатов. Математические модели используют *имитационный* и *аналитический* подходы. Имитационное моделирование базируется на описании реальности с помощью функциональных зависимостей, связывающих параметры внешних раздражителей с изменением характеристик состояния системы (например, равновесная термодинамика или электродинамика). Аналитическое копирование использует уравнения различной математической природы, аппроксимацию и интерполяцию, оптимизационные и вариационные принципы, детерминизм и стохастику. При определённом уровне сложности объекта исследования аналитическая модель заменяется на имитационную. Следовательно, смена количественного изучения качественным подходом показывает наличие критического значения управляющего параметра (уровень сложности копируемой системы), при котором наблюдается возникновение новой структурной модели (*творчество синергетично*): аналитические формулы и выражения заменяются набором алгоритмов имитации установленных переходов, преобразований, ветвлений и т.п. Аналитическое моделирование даёт возможность прогноза поведения реальной системы в течении длительного промежутка времени в определённом диапазоне числовых значений параметров состояния. Имитационное же моделирование отображает информацию о системе только в заданные промежутки времени при фиксации параметров состояния.

Неотъемлемой частью моделирования является программное обеспечение и возможность его обновления при усовершенствовании модели. Естественно, что основными преимуществами программной среды являются простота ввода исходных данных с их последующей корректировкой и без внесения изменений в само программное обеспечение; *визуализация* (образное отображение на дисплее компьютера) объектов и процессов. Такими универсальными программами являются *Mathcad*, *MathLab*, *Maple*, *SolidWorks*, *AutoCAD Designer* и другие. Это позволяет при проведении компьютерного эксперимента обеспечить контроль за всеми характеристиками объекта, явления или процесса. Другими преимуществами компьютерного эксперимента являются:

- дешевизна;
- безопасность, функциональность и технологичность;
- контролируемая стохастичность;
- возможность проведения опасных и практически неосуществимых экспериментов (например, сценарии планетарных катастроф или эволюционный процесс при тех или иных физико-химических условиях);
- проверка теоретических моделей без проведения экспериментов.

Особое внимание при создании виртуальных образов следует уделять внешнему виду реальных объектов (*дизайн*). Дизайн выполняется с использованием наглядного моделирования: на компьютере прорабатываются различные варианты без их натурального воплощения. Компьютерное варьирование формами экономит материальные, энергетические и информационные ресурсы. Этапы дизайна включают:

1. Разработку концепции, т.е. схематичного наброска будущего изделия или технологии;
2. Детальную проработку узлов, схем, сочленений, необходимых материалов и условий реализации заданного процесса;
3. Создание трёхмерной компьютерной модели;
4. Исследование свойств модели и её корректировку;
5. Оформление технической документации для практической реализации.

Разработка дизайнерской модели всегда осуществляется при наличии обратной связи между исполнителями и заказчиками, которые определяют начальную постановку задачи. Визуальное отображение модели требует совершенствования интерфейса общения между человеком и ЭВМ. Постоянное обновление интерфейса общения человека с компьютером приведёт к вытеснению программ, обеспечивающих ввод данных с клавиатуры или управление курсором с помощью компьютерной мыши. Современные разработки проводятся по следующим направлениям:

- создание компьютеров новой генерации, быстродействие которых будет существенно превышать указанный показатель у предыдущего поколения;
- диалог человек-компьютер будет вестись в удобном для человека режиме;
- геометрические размеры будут значительно уменьшены (вплоть до наноуровня);
- возрастёт информационная ёмкость запоминающих устройств, которые будут построены с использованием фрактальной геометрии;
- в структуру будущих компьютеров закладываются принципы квантовых вычислений, самообучения и самоорганизации.

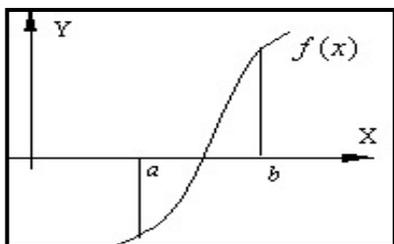
Это приведёт к появлению новой среды – виртуального мира. В виртуальном мире между прототипами оригиналов возникнут новые пространственно-временные соотношения, которые определяют контролируемое развитие копий. Самоорганизация на квантовом уровне материи будет использовать природные закономерности, которые приведут к замене существующих биоструктур. Новые образования будут более стойкими к саморазрушению под воздействием изменений внешней среды, т.е. энтропийные процессы будут вытеснены из внутреннего объёма системы на её границу.

На некотором этапе развития произойдёт переход виртуальных объектов в реальный мир в виде саморазвивающихся структур. Они вступят в конкурентную борьбу не только между собой, но и со своими создателями: эволюция пойдёт по новой спирали. Можно только предполагать, какими новыми свойствами будут обладать возникающие структуры: современное стремление к наноминиатюризации может смениться у таких структур к гигантомании согласно принципу перемешиваемости. Отбор между новыми образованиями возможно будет происходить не по принципу жизнестойкости, а, например, по принципу наивысшей скорости обновляемости пограничной области при сохранении и усложнении внутреннего

строения под контролем самой системы. Структуры, которые не будут удовлетворят данному принципу будут отмирать, так как их внутреннее строение будет бесконтрольно мутировать.

2. Программное обеспечение

В качестве примера рассмотрим простейшие математические модели и алгоритмы их построения. Так как реальные системы описываются нелинейными закономерностями (см., например, рис. 3.4 в § 4), то зачастую приходится решать уравнение вида $f(x) = 0$. Оно встречается при решении задач автоматического управления и регулирования, при вычислении спектра собственных частот в линеаризованных уравнениях нелинейной динамики и т.д. Решение уравнения $f(x) = 0$ проводится с наперёд заданной точностью, т.е. в результате моделирования получают не точное, а *приближённое* значение корня. Для его отыскания применяется ряд математических моделей, использующих свойство непрерывности функции. Вначале выясняется интервал локализации корня $[a; b]$ (рис. 18.1), а затем применяются методы его приближенного вычисления: половинного деления (*дихотомия*); простых итераций; касательных (*метод Ньютона*); секущих (или *модифицированный метод Ньютона*); хорд и другие. Рассмотрим некоторые алгоритмы этих методов.



тоды его приближенного вычисления: половинного деления (*дихотомия*); простых итераций; касательных (*метод Ньютона*); секущих (или *модифицированный метод Ньютона*); хорд и другие. Рассмотрим некоторые алгоритмы этих методов.

а) дихотомия. Метод реализуется по следующей схеме:

Рис. 18.1. Локализация – интервал делится на равные части точкой $t = (a + b) / 2$;
корня уравнения $f(x) = 0$. – в качестве нового интервала изоляции корня выбирается интервал $[a; t]$ (рис. 18.2а или $[t; b]$ – рис. 18.2б),

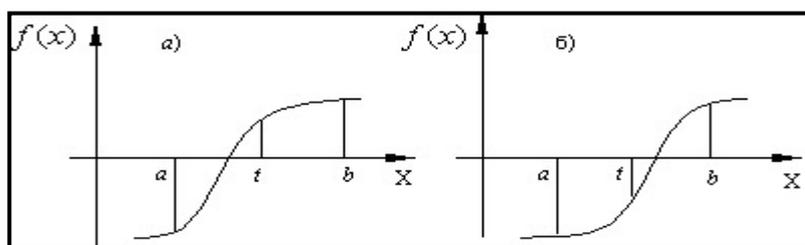


Рис. 18.2. Реализация метода дихотомии.

на концах которого функция имеет значения разных знаков;

– процесс повторяется до тех пор, пока корень не будет локализован в интервале с шириной меньшей или равной заданной точности.

б) простые итерации. В этом методе уравнение $f(x) = 0$ приводится к уравнению с неподвижной точкой $x = \varphi(x)$. В качестве нулевого значения корня принимается любая точка x_0 из интервала $[a; b]$, т.е. первое приближённое значение корня равно $x_1 = \varphi(x_0)$, дальнейшие вычисления находятся по последовательности $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2)$, ..., $x_n = \varphi(x_{n-1})$ (см. также § 2). Процесс прекращается тогда, когда разность между предыдущим и последующим значениями корня становится меньше или равной заданной точности вычислений. Сходимость последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ к истинному значению корня уравнения $f(x) = 0$ определяется услови-

ем $|\varphi'(x)| < 1$.

в) метод касательных. Метод Ньютона относится к градиентным способам поиска корня уравнения $f(x)=0$, так как он использует производную функции $f(x)$. Касательная проводится из того конца интервала $[a; b]$, на котором знаки функции и второй производной функции совпадают (рис.18.3). Итерационный процесс прово-

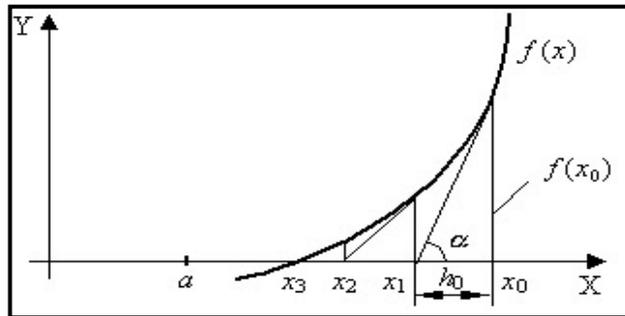


Рис. 18.3. Отыскание корня уравнения $f(x)=0$ по методу Ньютона.

дится по формуле $x_n = x_{n-1} - [f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1})]$. Условием достижения заданной точности ε является выполнение неравенства $|f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1})| < \varepsilon$.

Алгоритмические схемы рассмотренных методов показаны на рис. 18.4.

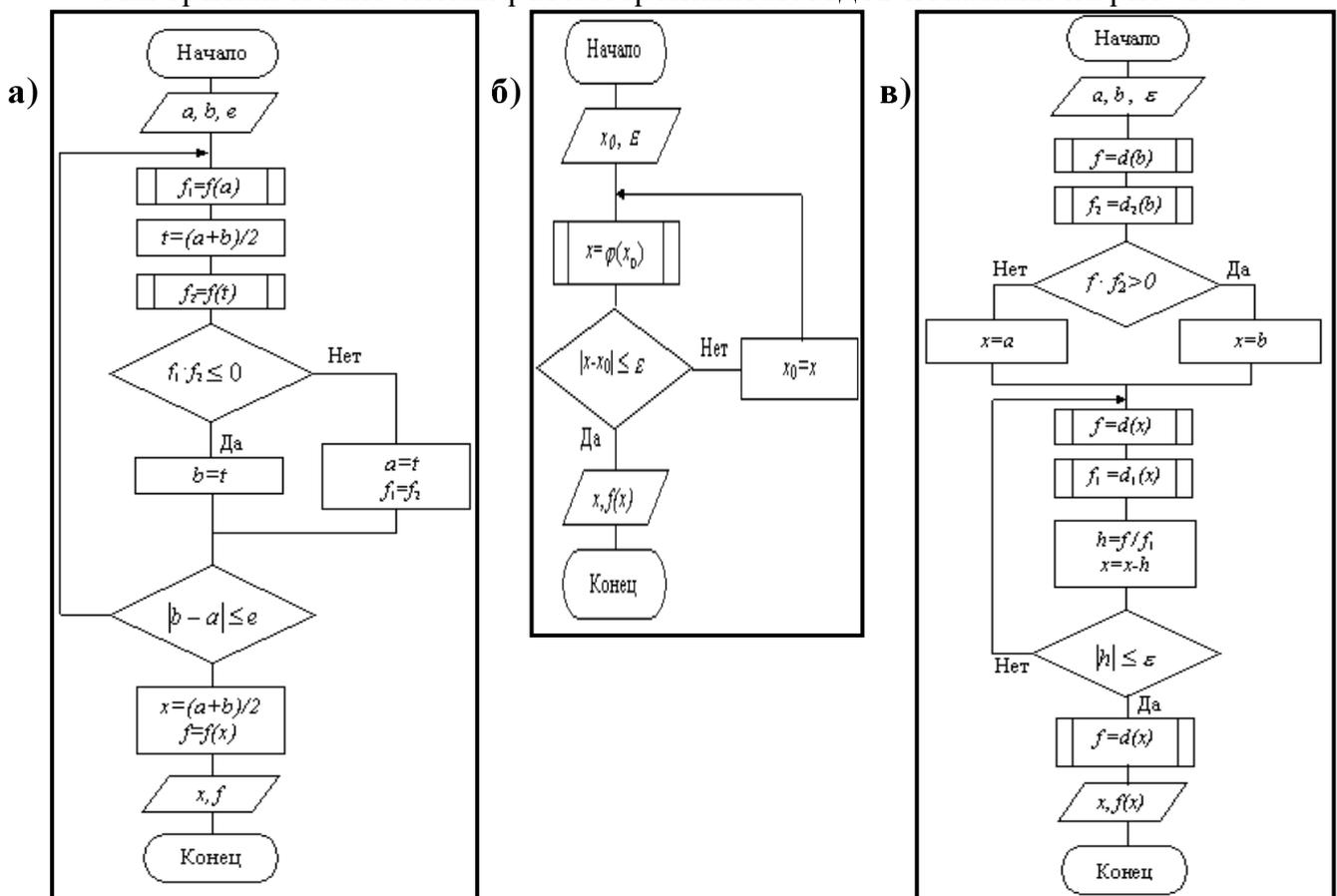


Рис. 18.4. Алгоритмические схемы поиска корня уравнения $f(x)=0$: а) дихотомия; б) простые итерации; в) метод касательных.

Представленные модели являются простейшими представителями *аналитических* моделей. Если сложность моделируемого объекта или процесса достаточно высока, то зачастую не удаётся построить аналитические модели для их описания. В

этом случае используют *имитационное* моделирование, с помощью которого невозможно вычислить или предсказать поведение системы.

Достоинствами имитации являются высокая степень детализации поведения элементов и системы в целом, отсутствие каких-либо ограничительных связей между моделью и состоянием внешней среды для реальной системы, возможность изучения динамических изменений параметров реального объекта или процесса. Имитационное моделирование применяется в следующих случаях:

1. Недостаток информации и познавательное изучение объекта, процесса или явления.
2. Сложность аналитического описания, повышенная трудоёмкость компьютерных вычислений.
3. Необходимость наглядного контроля за поведением составных частей исследуемой системы в течении определённого промежутка времени.
4. Изучение поведения системы при варьировании управляющих параметров с целью выяснения границ существования объекта без качественных изменений.
5. Проверка последовательностей управляющих сигналов при функционировании системы.

К недостаткам имитационного моделирования относятся:

- большие временные затраты и дороговизна создания имитационной модели по сравнению с разработкой аналитического копирования;
- невозможность оценки точности соответствия прототипа оригиналу;
- сложность моделируемого объекта неизбежно приводит к методологическим ошибкам, устранение которых требует существенных материальных и духовных затрат.

Недостатки компьютерного моделирования значительно уменьшаются при использовании специфических интегрированных оболочек, в среде которых может быть смоделирован широкий круг различных явлений и процессов. К таким средам относятся ранее перечисленные программные продукты *Mathcad*, *MathLab* и другие. Применение указанных математических программ предоставляет пользователю возможности проведения численных экспериментов и их визуализации.

Приведём примеры использования математических оболочек при вейвлет-анализе (см. § 6) различных сигналов в оболочках *Mathcad* и *MathLab*:

Пример 1. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции $s(t) = \sin(2\pi/50t)$ (рис. 18.5).

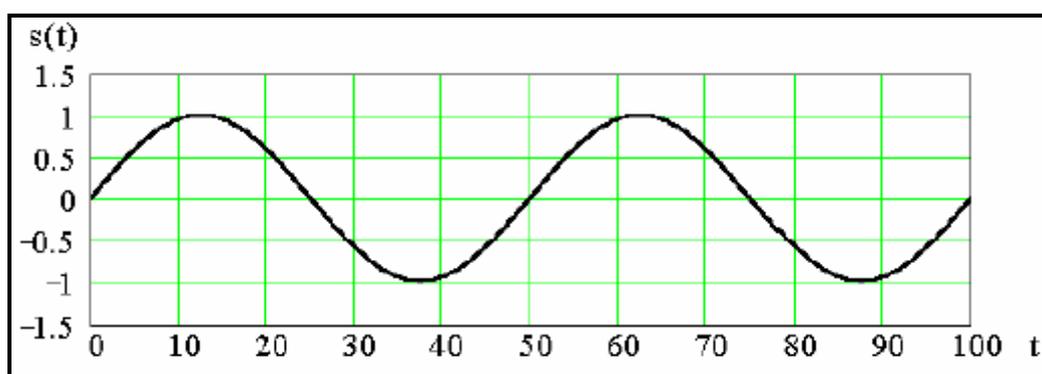


Рис. 18.5. Анализируемый синусоидальный сигнал.

Решение.

Зададим в *Mathcad* вейвлет-образующую функцию, $MHAT(t) := \frac{d^2}{dt^2} \exp(-t^2/2)$, интервалы изменений коэффициентов масштаба и сдвига $a := 1.30$, $b := 0.50$, вид вейвлетов $\psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} MHAT\left(\frac{t-b}{a}\right)$, формулу для вычисления коэффициентов преобразования

и вывода их значений $N := 256$, $W(a, b) := \int_{-N}^N \psi(a, b, t) s(t) dt$, $N_{ab} := W(a, b)$. График двухпараметрического вейвлет-спектра N_{ab} отображается с помощью 3D-изображения и показан на рис. 18.6.

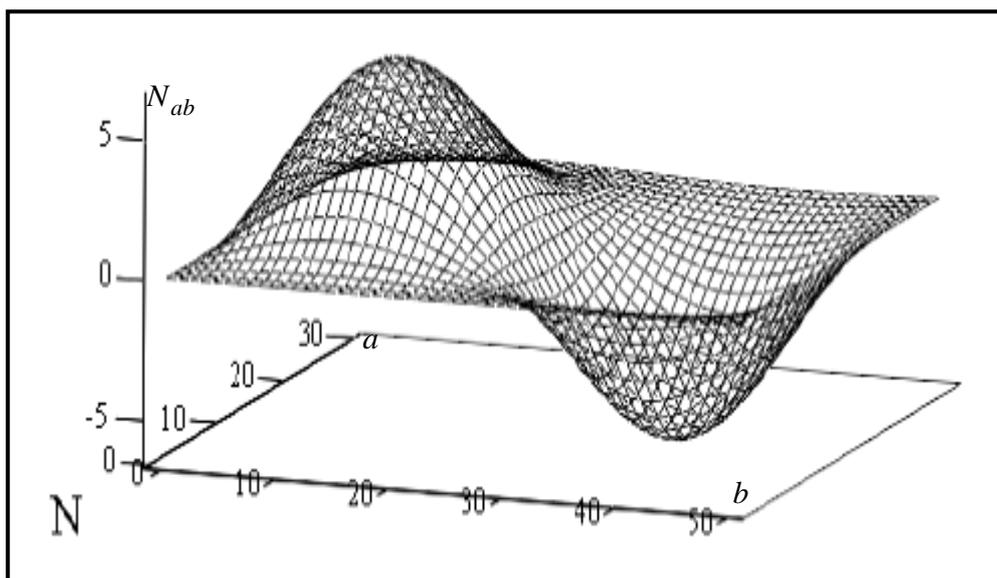


Рис. 18.6. Пространственное изображение вейвлетных коэффициентов.

Пример 2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin(2\pi/50t) + \sin(2\pi/10t)$ (рис. 18.7).

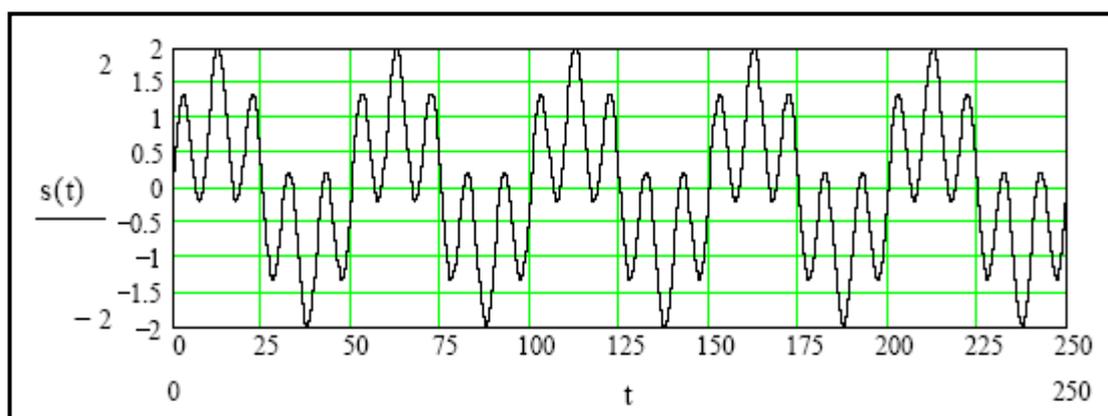


Рис. 18.7. Анализируемый сигнал в виде суммы двух синусоид.

Решение.

По сравнению с первым примером изменилась лишь анализируемая функция $s(t)$. Остальные формулы остаются неизменными (значительное преимущество интегрированных математических оболочек). Результат анализа показан на рис. 18.8.

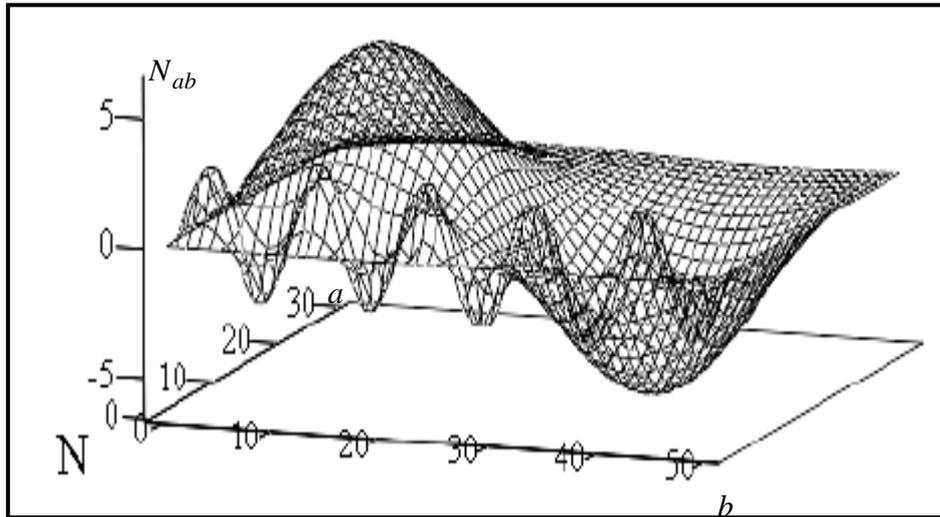


Рис. 18.8. Вейвлет-коэффициенты сигнала в виде суммы двух синусоид.

Такой же анализ может быть проведён с помощью пакета *Wavelet Toolbox* в системе *MathLab*, показанный на примерах 3 и 4.

Пример 3. Провести вейвлет-анализ функции $s(t) = \sin((2\pi/0.0001t) + 45)$.

Решение.

Зададим в *MathLab* программу действий

```
function garm
t=0:0.00001:0.0004; F1=10000; a1=45;
s=sin(2*pi*F1*t+a1);
figure (1); plot (t, s); axis ([0 0.0004 -3 3]); grid on;
subplot (211), plot (t, s); title ('Сигнал S(t)');
subplot (212), c=cwt (s, 1:2:32, 'mexh', 'abslvl', [0 10]);
title ('Вейвлет-спектр W(a, b)'); xlabel ('Временной сдвиг, b');
ylabel ('Временной масштаб, a');
end
```

График сигнала и результат непрерывного вейвлет-преобразования показаны на рис. 18.9.

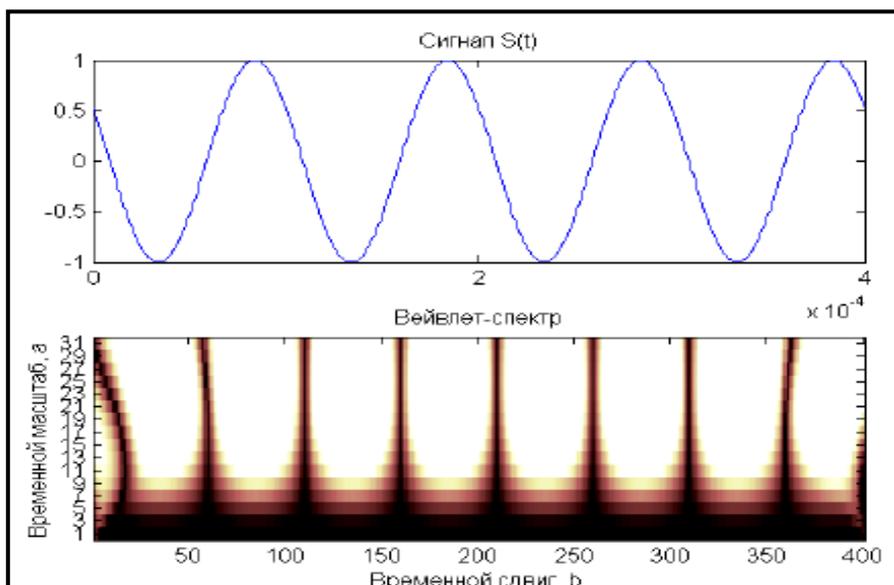


Рис. 18.9. Вейвлет-преобразование синусоидального сигнала со сдвигом фазы.

Пример 4. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin((2\pi/0.0001t) + \varphi) + \sin((2\pi/0.00005t) + \varphi)$$

с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.570797$ и белого гауссова шума $n(t)$ с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратичным отклонением $g = 0.5$.

Решение.

Зададим в *MathLab* программу действий

function bigarm_rauch

`t=0:0.000001:0.001; F1=10000; F2=2*F1; a1=-1.570797;`

`s1(1:200)=0; t2=0.0002:0.000001:0.007;`

`s=sin(2*pi*F1*t2+a1)+ sin(2*pi*F2*t2+a1);`

`s3(1:300)=0; s=[s1 s2 s3];`

`randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t)); x=s+n;`

`figure(1); subplot(211), plot(t, x, 'k'); t`

`title('Сигнал x(t)'); grid on;`

`gtext('F=10 КГц, g=0.5 В');`

`subplot(212), c=cwt(x, 1:124, 'mexh', 'abslb', [0 50]);`

`title('Вейвлет-спектр W(a, b)'); xlabel('Временной сдвиг, b');`

`ylabel('Временной масштаб, a');`

`end`

Исследуемый сигнал и его вейвлет-спектрограмма показаны на рис. 18.10.

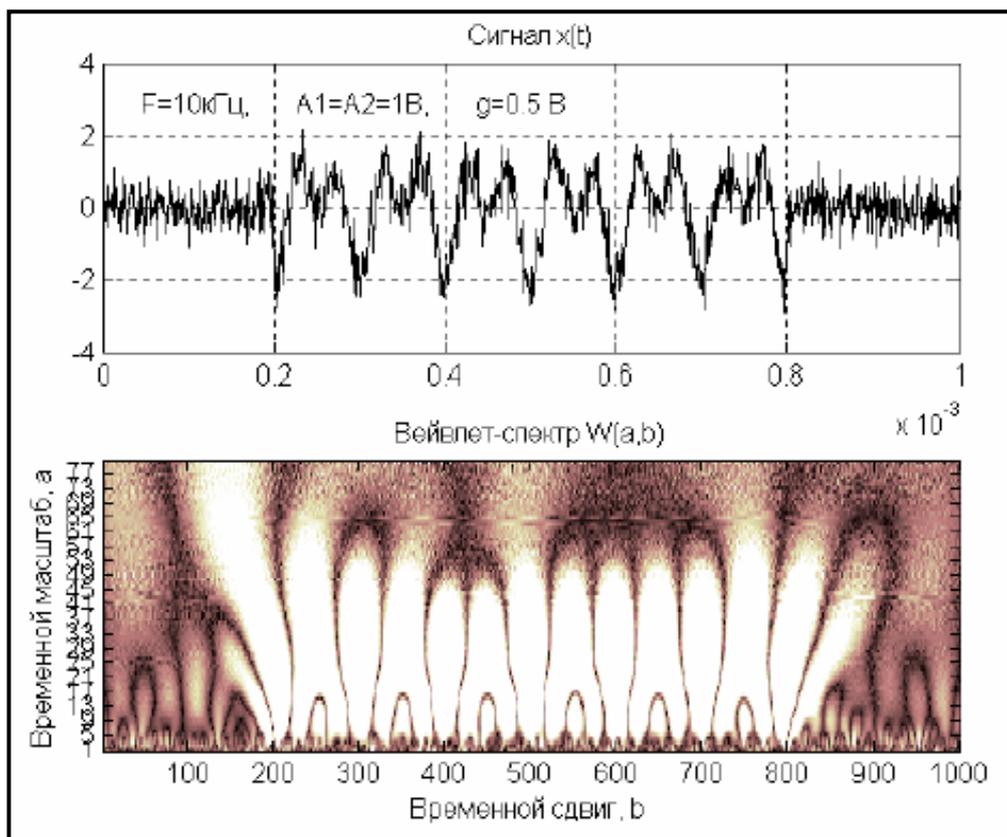


Рис. 18.10. Зашумлённый сигнал и его вейвлет-копия.

Выбор программного обеспечения для проведения компьютерного эксперимента определяется каждым исследователем самостоятельно.

3. Кибернетическая эволюция

Попытки имитационного копирования самоорганизующихся эволюционирующих биосистем привели к разработке моделей “искусственной жизни” и “адаптивного поведения”. Общую концепцию создания кибернетической эволюции высказал К. Лангтон: “...основное предположение искусственной жизни состоит в том, что “логическая форма” организма может быть отделена от материальной основы его конструкции.” Эволюционные модели в виртуальной среде описывают многообразие путей развития материи в зависимости от внешних условий. Эти модели позволяют исследовать поведение роботов в различных агрессивных средах, проводить компьютерные эксперименты в области медицины, технологии, социума и т.д. Под “организмами”, которые заселяют виртуальный мир, понимают программы. Они определяют свойства среды и законы развития кибернетических “существ” (назовём их *кибернетами*).

В настоящее время предложен ряд “жизнеподобных” иллюзий:

1. Клеточные автоматы исследуют эволюционную динамику кибернетов (Лангтон).
2. Структурированная нейронная сеть имитирует поведение кибернетов с цветовым зрением, способных двигаться, питаться, конкурировать, размножаться и вымирать (Полимир Ягера).
3. Эволюционирующие программы, приводящие к размножению самовоспроизводящихся кибернетов (генная подпрограмма Тьерра Рэя).
4. Скачкообразные эволюционные переходы при выяснении характеристик распределений особей в популяциях (Авида Адами с сотруд.).
5. Формирование адаптивной популяции в процессе обучения и развития (Экли, Литтман).
6. Взаимодействующие кибернететы, которые скрещиваются, ведут взаимовыгодную торговлю, образуют мирные симбиозы и воюют между собой (Эхо Холланда).
7. Сосуществующие популяции “хозяев” и “паразитов” показывает, что принимаемые “хозяевами” решения улучшаются под влиянием “паразитов” (модель Хиллиса).
8. Эволюционный поиск клеточных автоматов, которые способны производить простейшие вычисления (Митчелл с сотруд.).
9. Имитация поискового инстинкта в многочисленных популяциях (“Муравьиная ферма” Коллинза-Джефферсона).
10. Классифицирующие системы, основанные на использовании набора детерминированных правил, которые видоизменяются и совершенствуются в процессе обучения и эволюции (Холланд с сотруд.).

Наиболее перспективными имитациями жизни являются программы, которые позволяют изучать самоорганизацию кибернетов в среде с постоянно совершенствующимися правилами конкуренции и отбора. Приспособленность кибернетов не вводится непосредственно: они размножаются при встрече родителей, погибают при недостатке пищи или поедаются хищником (*эндогенная приспособленность*). Управление сообществом кибернетов осуществляется нейронными сетя-

ми. На рис. 18.11 показана блок-схема исследования свойств и эволюции кибернетов, их познавательное значение и возможные практические применения.



Рис. 18.11. Развитие концепций “искусственной жизни” и “адаптивного поведения”.

Применение эволюционного подхода при “воспитании” кибернетов позволяет находить оптимальные схемы управления виртуальными существами и разрабатывать принципиально новые формы адаптивного поведения. Составными частями управления являются:

- удовлетворение всё возрастающих потребностей при стремлении к определённой цели в ходе эволюционного развития;
- мотивационные предпосылки при целеполагании;
- выделение доминантных желаний;
- мобилизация материальных и интеллектуальных ресурсов при достижении и реализации приоритетных задач;
- оценка позитивных и негативных тенденций в окружающей среде;
- разработка очередности реакций на изменения обстановки в ближайшем окружении;
- формирование и выполнение прогностических решений;
- анализ выполненных действий и соответствия прогноза достигнутому результату;
- накопление опыта, его корректировка и использование для постановки и достижения новых целей.

Перечисленные признаки управления подразумевают самоорганизацию записыва-

ющего устройства (*памяти*) с кратковременным (промежуточные знания) и долгосрочным (например, генетическая память) режимами работы. Геометрические размеры памяти подразумевают использование процессов распознавания, сжатия и кодирования информационных образов. Особый интерес представляет роль памяти при построении логических цепочек и формировании абстрактных понятий, являющихся наиболее информационно ёмкими и активно участвующими при обучении подрастающего поколения.

Управление базируется на создании информационных градиентов. При достижении ими критических значений неизбежно происходит кинетический фазовый переход. Уход от стационарного состояния будет сопровождаться возникновением новых самоорганизующихся структур. В этой связи возникает проблема выяснения возможных качественных изменений информационной системы и их влияние на эволюцию не только кибернетов, но человечества. Другой аспект кибернетической эволюции состоит в возникновении параметрического резонанса между виртуальным и реальным мирами, последствия которого могут быть и благоприятными, и катастрофическими. В первом случае может наблюдаться резкий скачок в развитии высших биосуществ и подчинённому существованию кибернетов, а во втором – к расцвету кибернетов и деградации, паразитированию и вымиранию человечества. В этой связи востребованным становится прогностическое исследование условий возникновения этих сценариев развития.

Объединение изложенных данных позволяет сделать следующие выводы:

А). Существует 7 законов эволюции природы, которым подчиняются материальные объекты. К ним относятся: 1) *стремление к значительному удалению от равновесного состояния*; 2) *детерминированное поведение, которое описывается нелинейными кинетическими или динамическими уравнениями*; 3) *хаотизация системы при бифуркационных значениях управляющих параметров*; 4) *множественность стационарных состояний (временная иерархичность)*; 5) *возникновение при кинетических переходах самоорганизующихся структур с качественно новыми характеристиками*; 6) *усложнение внутреннего устройства при переходе с одного уровня организации материи на другой*; 7) *квазифрактальность или чистое самоподобие внутренних образований и внешней оболочки диссипативных систем*.

Б). Практическая реализация этих законов происходит посредством *конкурентной борьбы, отбора и мутационных изменений*, которые обеспечивают самосохранение материального мира в борьбе с энтропийными процессами, стремящимися перевести его в состояние полного хаоса.

В). Целью эволюции, по-видимому, является создание полностью упорядоченных (*информационных*) систем с контролируемым управлением, поведением, развитием и воспроизводством (*кибернетический этап эволюции*).

Г). Создание критических информационных градиентов может привести к параметрическому резонансу между реальным и виртуальным мирами, что может породить либо скачкообразный расцвет человеческого сообщества, либо его полную деградацию.

Д). Развитие *синергетического подхода* к решению эволюционных проблем ведёт к объединению разнородных базовых знаний и выработке интегрального восприятия материального мира.

Список использованных источников

1. *Эбеллинг В.* Образование структур при необратимых процессах. – М.: Мир. – 1979.
2. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся устройствах и системах. – М.: Мир. – 1985.
3. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. – М.: Мир. – 1991.
4. *Хакен Г., Хакен-Крелль М.* Тайны восприятия. – М.: Институт компьютерных исследований. – 2001.
5. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2003.
6. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. – М.: Изд-во иностр. л-ры. – 1960.
7. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М: Наука. – 1973.
8. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир. – 1979.
9. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. – М: Мир. – 1990.
10. *Пригожин И.* Конец определённости. Время, хаос и новые законы природы. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – 1999.
11. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. – М: Наука. – 1990.
12. *Баблюяц А.* Молекулы, динамика и жизнь: Введение в самоорганизацию материи. – М: Мир. – 1990.
13. *Сугаков В.И.* Введение в синергетику. – Киев: КНУ. – 1992.
14. *Олемской А.И.* Синергетика конденсированной среды. – Сумы: СумГУ. – 2003.
15. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М: Мир. – 1983.
16. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. – М: Мир. – 1988.
17. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. – М: Физматлитература. – 2001.
18. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. – М: Наука. – 1988.
19. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М: Мир. – 1991.
20. *Берже П.и др.* Порядок в хаосе: о детерминистическом подходе к турбулентности. – М: Мир. – 1991.
21. *Белоцерковский О.М.* Численный эксперимент в турбулентности: от порядка к хаосу. – М: Наука. – 1997.
22. *Ермолаев Ю.Л., Санин А.Л.* Электронная синергетика. – С.-Пб: ЛГУ. – 1989.
23. *Исаева В.В.* Синергетика для биологов. Вводный курс. – Владивосток: ДВГУ. – 2003.
24. *Sanders J.A., Verhulst F.* Averaging Methods in Nonlinear Dynamical. – New York: Springer-Verlag. – 1985.
25. *Aoki Kazunori.* Nonlinear Dynamics and Chaos in Semiconductors. / Series in condensed matter physics. – Bristol-Philadelphia: IoP. – 2001.

26. *Cicogna Giampaolo, Gaeta Giuseppe*. Symmetry and Perturbation Theory in Nonlinear Dynamics. – New York: Springer. – 1999.
27. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука. – 1966.
28. *Биркгоф Д.* Динамические системы. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – 1999.
29. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение. – М.: Мир. – 1986.
30. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. – М.: Наука. – 1984.
31. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. – М.: Физматлит. – 2002.
32. *Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А.* Колебания и волны. – М.: МГУ. – 2001.
33. *Мун Ф.* Хаотические колебания. – М.: Мир. – 1990.
34. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т.166, № 11. – С.1145-1170.
35. *Дрёмин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т.171, № 5. – С.465-501.
36. *Яковлев А.Н.* Введение в вейвлет-преобразование: Учеб. пособие. – Новосибирск: НГТУ. – 2003.
37. *Петухов А.П.* Введение в теорию всплесков. – С.-Пб.: С-ПбГТУ. – 1999.
38. *Дьяконов В.П., Абраменкова И.В.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – С.-Пб.: Питер. – 2002.
39. *Смоленцев Н.К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab. – М.: LVR Пресс. – 2005.
40. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. – С.-Пб.: ВУС. – 1999.
41. *Добешин И.* Десять лекций по вейвлетам. – М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – 2001.
42. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р. – 2002.
43. *Столниц Э., де Роуз Т., Салениз Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – 2002.
44. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. – М.: Мир. – 1980.
45. *Гилмор Т.* Прикладная теория катастроф. В 2-х книгах. – М.: Мир. – 1984.
46. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. – М.: Мир. – 1985.
47. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука. – 1990.
48. *Брёкер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. – Волгоград: ПЛАТОН. – 1997.
49. *Маневич Л.И.* О теории катастроф. // Соровский образовательный журнал. Математика. – Т.6. – № 7. – 2000. – С. 85-90.
50. *Вукалович М.П., Новиков И.И.* Уравнение состояния реальных газов. – М.: Госэнергоиздат. – 1984.
51. *Филиппов Л.П.* Подобие свойств веществ. – М.: Изд-во МГУ. – 1978.
52. *Вилля Г.* Теория вихрей. – Л.-М.: ОНТИ. – 1936.

53. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: ЛГУ. – 1978.
54. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. – Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”. – 1998.
55. *Пуанкаре А.* Теория вихрей. – М.: Регулярная и хаотическая динамика. – 2000.
56. *Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН. – 2003.
57. *Гельмгольц Г.* Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям // Нелинейная динамика. – Т.2. – № 3. – 2006. – С. 473-507.
58. *Моффагт К.* Вихревая динамика: наследие Гельмгольца и Кельвина // Нелинейная динамика. – Т.2. – № 4. – 2006. – С. 401-410.
59. *Должанский Ф.В.* Лекции по геофизической гидродинамике. – М.: ИВМ РАН. – 2006.
60. *Бриллюэн Л.* Наука и теория информации. – М.: Физматлит. – 1960.
61. *Хазен А.М.* Введение меры информации в аксиоматическую базу механики. – Раменское: “РАУБ”. – 1998.
62. *Кадошцев Б.Б.* Динамика и информация. – М.: Изд-во редакции журнала “Успехи физических наук”. – 1999.
63. *Пригожин И., Дефей Р.* Химическая термодинамика. – Новосибирск: Наука. – 1966.
64. *Толпыго К.Б.* Термодинамика и статистическая физика. – Киев: КГУ. – 1966.
65. *Кубо Р.* Термодинамика. – М.: Мир. – 1970.
66. *Путилов К.А.* Термодинамика. – М.: Наука. – 1971.
67. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. – М.: Наука. – 1977.
68. *Базаров И.П.* Термодинамика. – М.: Высшая школа. – 1983.
69. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир. – 1991.
70. *Смирнов Б.М.* Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука. – 1991.
71. *Пайтген Х.О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир. – 1993.
72. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет. – 2000.
73. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – 2001.
74. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. – 2001.
75. *Газале М.* ГНОМОН. От фараонов до фракталов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2002.
76. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований. – 2002.
77. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2002.
78. *Вильсон К., Когут Дж.* Ренормализационная группа и ϵ -разложение. – М.: Мир – 1975.
79. *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука. – 1982.

80. *Рабинович В.А., Шелудяк Ю.Е.* О значениях критических индексов системы жидкость-газ / Журнал физической химии. – 2003. – Т.77. – № 9. – С.1708-1714.
81. *де Жен П.* Идеи скейлинга в теории полимеров. – М.: Мир. – 1982.
82. *Тоффолли Т., Марголюс Н.* Машины клеточных автоматов. – М.: Мир. – 1991.
83. *де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – М.: Мир. – 1964.
84. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов. – М.: Мир. – 1967.
85. *Кайзер Дж.* Статистическая термодинамика неравновесных процессов. – М.: Мир. – 1990.
86. *Терехов С.В.* Моделирование тепловых и кинетических свойств реальных систем. – Донецк: “Вебер” (Донецкое отделение). – 2007.
87. *Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г.* Курс химической кинетики. – М.: Высшая школа. – 1984.
88. *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. – М.: Наука. – 1974.
89. *Гарел Д., Гарел О.* Колебательные химические реакции. – М.: Мир. – 1986.
90. Физическая химия. Теоретическое и практическое руководство / Под ред. акад. Б.П.Никольского. – Л.: Химия. – 1987.
91. *Шульц Г., Ширмер Р.* Принципы структурной организации белка. – М.: Мир. – 1982.
92. *Исаева В.В.* Клетки в морфогенезе. – Владивосток: Дальнаука. – 1994.
93. *Рубин А.Б.* Термодинамика биологических процессов. – М.: МГУ. – 1984.
94. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. – М.: Мир. – 1983.
95. *Келлен С.Р., Эссинг Э.* Биоэнергетика и линейная термодинамика необратимых процессов (стационарное состояние). – М.: Мир. – 1986.
96. *Бро Г.В., Пожитной Н.М., Чубаров М.П.* Критика “универсального эволюционизма”, “информациологического мировоззрения”, “гомеостатической концепции” и системный подход к выживанию Земной цивилизации. – Иркутск: ИрГТУ. – 2001.
97. *Пугачёва Е.Г., Соловьёнок К.Н.* Самоорганизация социально-экономических систем / Учеб. пособие. – Иркутск: БГУЭП. – 2003.
98. *Луковкин С.Б.* Идеи постнеклассической науки и социально-философские проблемы современности // Вестник МГУ. – Т.9. – № 1. – 2006. – С. 63-69.
99. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. – М.: Наука. – 1997.
100. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Международный научный журнал. – № 1. – 2000.
101. *Коткин Г.Л., Черкасский В.С.* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB / Учеб. пособие. – Новосибирск: НГУ. – 2001.
102. Научная сессия МИФИ-2002. IV Всероссийская научно-техническая конференция “Нейроинформатика-2002”: Лекции по нейроинформатике. – Ч.1. – М.: МИФИ. – 2002.
103. *Дворецкий Д.С., Дворецкий С.И., Муратова Е.И., Ермаков А.А.* Компьютерное моделирование биотехнологических процессов и систем / Учеб. пособие. – Тамбов: ТГТУ. – 2005.

ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ – поведение системы, находящейся в аттракторе: если система испытывает внешнее воздействие, которое выводит её из этого состояния, то спустя определённое время она вновь вернётся в аттрактор.

АТТРАКТОР – *предельный цикл и устойчивый фокус*; реальные структуры в пространстве и времени, на которые выходят процессы самоорганизации в открытых нелинейных средах; под аттрактором в *синергетике* понимают относительно устойчивое состояние системы, притягивающее к себе всё множество траекторий системы, определяемых разными начальными условиями.

БИФУРКАЦИЯ – изменение динамического поведения системы на длительном интервале времени при достижении управляющим параметром критического значения.

ДИСПЕРСИЯ – нелинейная зависимость круговой частоты от волнового числа и амплитуды.

ДИССИПАТИВНАЯ САМООРГАНИЗАЦИЯ – процесс самоупорядочения [пространственного (например, лазер, ячейки Рэля-Бенара), временного или пространственно-временного (автоколебательная реакция Белоусова-Жаботинского или брасселятор)] в открытой системе, за счет согласованного (кооперативного, когерентного) взаимодействия множества элементов её составляющих.

ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ – самопроизвольно возникающие образования.

ДИССИПАЦИЯ – процесс рассеивания энергии.

ЗАКРЫТАЯ СИСТЕМА – система, которая может обмениваться с другой системой только энергией, но не частицами и энтропией (информацией).

ИЗОЛИРОВАННАЯ СИСТЕМА – система, которая не обменивается с термостатом ни энергией, ни веществом, ни энтропией (информацией).

ИНВАРИАНТНЫЙ ТОР – тор, по которому проходят фазовые траектории двух связанных осцилляторов: при периодическом движении траектории замыкаются, в противном случае – проходят сколь угодно близко от любой точки, лежащей на торе.

ИНФОРМАЦИЯ – численная мера степени упорядоченности динамической системы.

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – колебания с двумя и более несоизмеримыми частотами.

КОНСЕРВАТИВНАЯ САМООРГАНИЗАЦИЯ (или **СУПРАМОЛЕКУЛЯРНАЯ ХИМИЯ** и **ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ**) – процесс самосборки высокомолекулярных соединений (образование молекул ДНК и РНК) и наноструктур, кристаллизация (возникновение пространственно-периодических систем – решёток) при равновесных условиях.

НЕЛИНЕЙНОСТЬ – непропорциональность сигналов на входе и выходе динамической системы.

ОТКРЫТАЯ (ДИССИПАТИВНАЯ) СИСТЕМА – система, которая обменивается энергией и веществом с окружающей средой, но не информацией.

ОТОБРАЖЕНИЕ ПЕКАРЯ – преобразование плоскости в плоскость, кото-

рое растягивает в продольном и сжимает в поперечном направлениях прямоугольник, разрезает его пополам и помещает одну половину над другой.

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ – динамический режим с длительными периодами регулярного, периодического или стационарного движений, которые непредсказуемо прерываются короткими всплесками практически хаотического характера.

ПЕРЕНОРМИРОВКА – метод функционального анализа, который использует масштабное (скейлинговое) преобразование переменных величин.

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА – числа, которые определяют экспоненциальное сближение или разбегание двух ближайших фазовых траекторий с течением времени.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ – замкнутая кривая, которая соответствует в фазовом пространстве периодическому процессу.

РАВНОВЕСИЕ – состояние динамической системы после завершения всех перестроечных процессов.

РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА – математическая характеристика фрактальных объектов.

САМОПОДОБИЕ (или **АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ**) – подобие геометрических фигур различных масштабов.

СИНЕРГЕТИКА (от греч. «син» – «со-», «совместно» и «эргос» – «действие») переводится как “энергия совместного действия”.

СТРАННЫЙ АТТРАКТОР – некоторая область фазового пространства (не устойчивый фокус и не предельный цикл, как у устойчивых структур), по которой блуждают параметры системы.

ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ – исследование скачкообразных переходов в динамической системе при плавном изменении её параметров состояния.

ТОЧКА БИФУРКАЦИИ – это точка разветвления путей эволюции открытой нелинейной системы.

УПРАВЛЯЮЩИЕ (или **КОНТРОЛИРУЮЩИЕ**) **ПАРАМЕТРЫ** – некоторые характерные для данной системы параметры, которые могут произвольно меняться.

УСТОЙЧИВЫЙ ФОКУС – точка, к которой фазовые траектории приближаются по спиральям.

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО – абстрактное математическое пространство, в котором положение исследуемого объекта определяют его значения координаты и импульса в обычном пространстве.

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ – множество неподвижных точек и траекторий в фазовом пространстве.

ЧИСЛО ФЕЙГЕНБАУМА – предельное отношение последовательных разностей параметров бифуркации удвоения периода, равно 4,669...

ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩАЯ СИСТЕМА – система, которая способна накапливать, сохранять, перерабатывать и передавать другим системам энергию, вещество и энтропию (информацию).

ЯЧЕЙКА РЭЛЕЯ-БЕНАРА – возникновение пространственно-периодической структуры в результате циркуляционного движения жидкой среды в гравитационном поле при критическом значении градиента температуры.

Собственноручно о себе



Терехов Сергей Владимирович родился 15 сентября 1954 года в городе Донецке (СССР, ныне Украина).

Основные жизненные вехи:

1971 – окончил среднюю школу № 138 г. Донецка с золотой медалью.

1971-1972 – окончил первый курс Ленинградской военно-инженерной Краснознамённой академии им. А.Ф. Можайского; отчислен со второго курса по собственному желанию.

1972-1973 – служба в Советской Армии (г. Воркута).

1974-1979 – студент физического факультета Донецкого государственного университета (ныне Донецкий националь-

ный университет, диплом с отличием **В-1 № 536418**, научный руководитель диплома д.ф.-м.н., проф. Косачевский Л.Я.).

1979-1981 – сотрудник кафедры экспериментальной физики Донецкого государственного университета.

1981-1984 – аспирант при кафедре математической физики Донецкого политехнического института (ДПИ, ныне Донецкий национальный технический университет, научный руководитель к.ф.-м.н., доц. Захаров А.Ю.).

1985-1990 – сотрудник кафедры электрометаллургии сплавов и ферросплавов (ДПИ); **28 января 1987г.** защитил кандидатскую диссертацию по специальности 01.04.07 “Физика твёрдого тела” (тема: “Обобщённая решёточная модель многокомпонентных систем: термодинамика и диффузионная кинетика”, **ФМ № 029368**).

1991-1992 – старший научный сотрудник кооператива-научно-исследовательской лаборатории “Системотехника”.

С июля 1993 по ноябрь 2006 – доцент кафедры “Высшая математика” Донецкого национального технического университета (аттестат доцента **ДЦ АР № 004643**).

С 1 декабря 2006 по 30 мая 2008 – докторант при кафедре “Высшая математика” Донецкого национального технического университета (научный консультант д. ф.-м. н., гл.н.с. Донецкого физико-технического института им. А.А. Галкина Филиппов А.Э.); **29 мая 2008г.** защитил докторскую диссертацию по специальности 01.04.07 “Физика твёрдого тела” (тема: “Определение основных параметров тепло- и массопереноса в смесях, растворах и сплавах с использованием непрерывно-решёточной модели вещества”, **ДД № 006889**).

С ноября 2008 – профессор кафедры “Высшая математика” Донецкого национального технического университета, а также профессор кафедры “Наноп физика” Донецкого национального университета (**с февраля 2009г.**).

Автор 1 монографии, 2 учебных пособий, 11 авторских свидетельств, 71 научных и методических работ.

ПРОГРАММА
курса “*Введение в синергетику*”

Вместо введения: “*И. Пригожин и Г. Хакен – основатели синергетики*”.

§ 1. *Основные понятия синергетики*: Синергетика как новое мировоззрение. Понятие неустойчивости. Неравновесные системы и нелинейная динамика.

§ 2. *Динамические системы и хаос*: Двоичная система исчисления. Динамические системы: хаос, информация, обратимость, циклы. Стационарные состояния и устойчивость.

§ 3. *Осцилляторы и аттракторы*: Общая характеристика осцилляторов. Явления, порождённые нелинейностью. Нелинейные маятники.

§ 4. *Коллективные движения*: Волны. Колебания гитарной струны и звук. Поверхностные волны.

§ 5. *Взаимодействие нелинейных элементов*: Нелинейные эффекты. Нелинейные волны: кноидальные и уединённые (солитоны). Стохастические движения вещества.

§ 6. *Вейвлет-анализ*: Солитоноподобное преобразование. Вейвлет-образы модельных сигналов. Применение вейвлетного анализа.

§ 7. *Катастрофы*: Складка и равновесие. Сборка и фазовые переходы. Галопирование, флаттер и вихри.

§ 8. *Теория вихрей*: Возникновение и свойства вихря. Сферические вихри Хилла и Хикса. Спиральный солитон Хасимото.

§ 9. *Информация и динамика*: Информация в классической механике. Неопределённость квантовой динамики. Квантовый компьютер и когерентность состояний.

§ 10. *Энтропия – мера хаоса*: Силы и обобщённое уравнение энергии. Адиабатические инварианты динамической системы. Энтропия и перемешиваемость.

§ 11. *Фракталы – геометрия природы*: Самоподобие. Фрактальные множества. Различие и размерность Реньи.

§ 12. *Перенормировки и клеточные автоматы*: Степенные законы и скейлинг. Перенормировки. Клеточные автоматы.

§ 13. *Синергетические системы*: Ячейки Рэлея-Бенара и модель Лоренца. Брюсселятор (модель Пригожина-Лефевра). Хищник-жертва (модель Лотки-Вольтерра).

§ 14. *Необратимые процессы*: Стационарное состояние. Модель Онсагера. Диссипативные структуры.

§ 15. *Конкуренция и отбор*: Химическое равновесие. Элементы теории жизни. Детерминизм, случайность и отбор.

§ 16. *Самоорганизация биосистем*: Формирование и устойчивость биоструктур. Уровни организации живых организмов. Фрактальное строение биосферы.

§ 17. *Социум*: Модели количественного роста населения. Социально-экономические процессы. Подготовка управленческих кадров.

§ 18. *Компьютерный эксперимент*: Копирование оригиналов. Программное обеспечение. Кибернетическая эволюция.

Підписано до друку 23.09.2009 р. Формат 60x84 1/16
Ум. друк. арк. 11,63. Друк лазерний. Зам. № 244. Накл. 350 прим.

Надруковано в ТОВ «Цифрова типографія»
Адреса: м. Донецьк, вул. Челюскінців, 291а, тел. (062) 388-07-31; 388-07-30