

Терехов С.В.
Варюхин В.Н.

*Математическая библиотечка
студента-физика*

Том 3

Решение задач

по теории функций нескольких переменных, теории функций
комплексного переменного, операционному исчислению, тензорной
алгебре, уравнениям математической физики, вычислительной
математике, фракталам, вейвлетам, дифференциалам

Донецк

ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина»

2018



Терехов С.В.
Варюхин В.Н.



Математическая библиотечка студента-физика

Том 3

(часть VI, для студентов специальности
«Теоретическая физика»: части I– III)

Решение задач

по теории функций нескольких переменных, теории функций
комплексного переменного, операционному исчислению, тензорной
алгебре, уравнениям математической физики, вычислительной
математике, вейвлетам, фракталам, дифференциалам

Донецк

ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина»

2018

УДК 512.8
PACS 02.10.Ud
Т35

Авторы-составители:

С.В. Терехов, д-р физ.-мат. наук, доцент, в.н.с.,
В.Н. Варюхин, д-р физ.-мат. наук, профессор

Рецензенты:

А.Г. Петренко, д-р физ.-мат. наук, профессор,
В.М. Юрченко, д-р физ.-мат. наук, профессор

*Рекомендовано к изданию ученым советом
ГОУ ВПО Донецкого национального университета
протокол № 1 от «27» января 2017 г.*

Т35 *Терехов С.В., Варюхин В.Н.* Математическая библиотечка студента-физика. Т. 3 (часть VI, для студентов специальности «Теоретическая физика»: части I– III). Решение задач по теории функций нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, операционному исчислению, тензорной алгебре, уравнениям математической физики, вычислительной математике, вейвлетам, фракталам, дифференциалам // Учебное издание для студентов физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов / Донецк: ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина. – 2018. – 521 с.

В учебном пособии изложены основные теоретические сведения по различным разделам математики, приведено большое количество примеров.

Для студентов всех специальностей и форм обучения физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов, молодых преподавателей.

УДК 512.8
PACS 02.10.Ud

© Терехов С.В., 2018
© Варюхин В.Н., 2018
© Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина
© Донецкий национальный университет

Оглавление

	Стр.
VI. Функции нескольких переменных. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление.....	11
Тема: Функции нескольких переменных.....	11
<u>59.</u> Функция двух переменных.....	11
59.1. График и область определения.....	11
59.2. Предел и непрерывность функции двух переменных....	16
<u>60.</u> Частные производные. Касательная плоскость и нормаль.	
60.1. Частные производные и дифференциалы.....	17
60.2. Производная от сложной и неявно заданной функций...	18
60.3. Производная по направлению.....	20
60.4. Касательная плоскость и нормаль.....	21
<u>61.</u> Локальный и условный экстремумы.....	23
61.1. Условия существования локального экстремума.....	23
61.2. Наименьшее и наибольшее значения функции.....	26
61.3. Поиск условного экстремума по методу Лагранжа.....	28
<u>62.</u> Кратные интегралы.....	30
62.1. Кратный интеграл и его свойства.....	30
62.2. Повторный интеграл.....	33
<u>63.</u> Использование кратных интегралов в геометрических и механических задачах.....	38
63.1. Геометрические приложения кратных интегралов.....	38
63.2. Применение кратных интегралов в физических задачах...	43
<u>64.</u> Криволинейные интегралы.....	46
64.1. Криволинейный интеграл 1-го рода.....	46
64.2. Криволинейный интеграл 2-го рода.....	50
64.3. Формула Грина.....	52
<u>65.</u> Теория поля.....	54
65.1. Скалярное поле.....	54
65.2. Потенциальная энергия и сила.....	57

	Стр.
65.3. Поле скоростей и поток.....	59
Задания для самостоятельного решения	62
Список использованных источников	112
Тема: Функции комплексной переменной	114
66. Функция комплексного переменного (ФКП)	114
66.1. Определение ФКП и её непрерывность.....	114
66.2. Дифференцируемость и регулярность ФКП.....	119
66.3. Простейшие свойства аналитических ФКП.....	121
67. Интеграл от функции комплексной переменной	123
67.1. Интеграл от функции комплексной переменной.....	123
67.2. Интегральная формула Коши.....	126
68. Разложение регулярных функций в ряды	129
68.1. Ряды с комплексными членами. Ряд Тейлора.....	129
68.2. Ряд Лорана.....	132
69. Вычеты	135
69.1. Классификация особых точек.....	135
69.2. Вычеты в особых точках.....	138
69.3. Основная теорема о вычетах.....	140
70. Кватернионы и физические уравнения	144
70.1. Кватернионы и формы их записи.....	144
70.2. Гипераналитичность кватернионных функций.....	147
70.3. Псевдогиперфункции и физические законы.....	148
70.4. Диссипативные системы Онзагера и Казимира.....	151
70.5. Гипердуальные кватернионы.....	154
70.6. Преобразование Лоренца.....	157
Задания для самостоятельного решения	161
Тема: Операционное исчисление	186

	Стр.
<u>71.</u> Преобразование Лапласа.....	186
71.1. Оригинал и изображение.....	186
71.2. Свойства преобразования Лапласа.....	189
71.3. Дифференцирование и интегрирование оригинала и изображения.....	191
<u>72.</u> Интеграл Дюамеля. Обращение преобразования Лапласа....	192
72.1. Свёртка функций.....	192
72.2. Интегралы Дюамеля.....	193
72.3. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.....	197
72.4. Теорема Меллина. Обращение преобразования Лапласа..	199
<u>73.</u> Решение уравнений математической физики.....	201
73.1. Уравнение теплопроводности (диффузии).....	201
73.2. Телеграфное уравнение.....	203
73.3. Продольные колебания стержня.....	204
<i>Задания для самостоятельного решения</i>	205
<i>Список использованных источников</i>	230
ТФИ. Тензорная алгебра. Уравнения математической физики...	233
Тема: Тензорная алгебра.....	234
<u>74.</u> Преобразование векторов при изменении системы отсчёта. <i>Понятие тензора</i>	234
74.1. Преобразование векторов при выборе новой системы координат.....	234
74.2. Связь между матрицами прямого и обратного переходов. <i>Понятие тензора</i>	239
<u>75.</u> Тензоры второго ранга и операции над тензорами.....	241
75.1. Тензоры второго ранга.....	241
75.2. Операции над тензорами.....	241
<u>76.</u> Главные векторы и главные значения тензора второго ранга	245

	Стр.
76.1. Главные векторы и главные значения.....	245
76.2. Нахождение главных векторов: случай $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$	247
76.3. Нахождение главных векторов: случай $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$	249
76.4. Нахождение главных векторов: случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$	251
76.5. Главный декартов базис.....	252
<u>77.</u> Геометрический смысл симметричного тензора второго ранга. Его инварианты.....	253
77.1. Геометрический смысл симметричного тензора второго ранга.....	253
77.2. Инварианты тензора второго ранга.....	255
<u>78.</u> Тензор напряжений и его свойства.....	257
78.1. Вектор и тензор напряжений.....	258
78.2. Нормальные и касательные составляющие тензора и вектора напряжений.....	261
78.3. Частные случаи тензора напряжений.....	263
78.4. Симметрия тензора напряжений.....	264
<u>79.</u> Тензор деформаций. Соотношения между тензорами напряжений и деформаций.....	264
79.1. Поле смещений.....	264
79.2. Тензор деформаций. Физический смысл его компонентов	266
79.3. Уравнения движения. Энергия деформированного тела..	269
79.4. Соотношения между тензорами напряжений и деформаций	271
<u>80.</u> Пластические деформации и упрочнение металлов.....	274
80.1. Дислокационная модель пластической деформации.....	274
80.2. Напряжения в окрестности дислокации.....	277
80.3. Упрочнение металлов.....	280
<i>Задания для самостоятельного решения</i>.....	282
<i>Список использованных источников</i>.....	292
<i>Тема: Уравнения математической физики</i>.....	293
<u>81.</u> Экстремумы функционалов.....	293

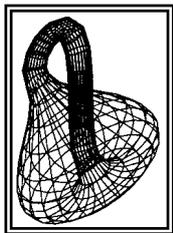
	Стр.
81.1. Функционал.....	293
81.2. Первая и вторая вариации функционала.....	295
81.3. Уравнение Эйлера-Лагранжа.....	297
82. Уравнения математической физики.....	298
82.1. Уравнения в частных производных.....	298
82.2. Колебания струны.....	301
82.3. Уравнение диффузии (теплопроводности).....	303
82.4. Локальное уравнение баланса.....	304
83. Методы решения уравнений математической физики.....	306
83.1. Метод бегущих волн.....	306
83.2. Метод разделения переменных (метод Фурье).....	307
83.3. Метод автомодельной переменной.....	309
83.4. Метод функции Грина.....	310
84. Специальные функции.....	312
84.1. Обобщённые функции и поиск решений уравнений.....	312
84.2. Специальные функции в квантовой механике.....	317
85. Интегральные уравнения.....	319
85.1. Уравнения Фредгольма.....	319
85.2. Методы решения уравнения Фредгольма второго рода...	320
85.3. Теория потенциала и уравнение Вольтерра второго рода	322
Задания для самостоятельного решения.....	325
Список использованных источников.....	335
ТФП. Вычислительная математика. Теория фракталов.....	336
Тема: Вычислительная математика.....	337
86. Приближённые вычисления.....	337
86.1. Погрешность вычислений.....	337
86.2. Аппроксимация, интер- и экстраполяция.....	341
86.3. Методы аппроксимации.....	345
86.3.1. Метод наименьших квадратов.....	345

	Стр.
86.3.2. Сплайн-аппроксимация.....	348
<u>87.</u> Методы решения алгебраических уравнений. Численное интегрирование	351
87.1. Графический и аналитический способы отыскания корней	351
87.2. Численные методы решения уравнений.....	353
87.3. Численное интегрирование.....	357
<i>Задания для самостоятельного решения</i>.....	360
<i>Список использованных источников</i>.....	380
<i>Тема: Теория фракталов</i>.....	381
<u>88.</u> Детерминированные фракталы.....	381
88.1. Размерность Хаусдорфа-Безиковича.....	381
88.2. Размерность Реньи.....	382
<u>89.</u> Конструктивные фракталы.....	385
89.1. “Пыль” Кантора (1883).....	387
89.2. Кривая и “снежинка” Коха (1904).....	388
89.3. Кривые Пеано (1890).....	389
89.4. “Салфетка” и “ковёр” Серпинского (1915).....	390
89.5. “Драконы” Хартера-Хайтвея.....	392
89.6. “Губка” Менгера.....	393
<u>90.</u> Фракталы и природные объекты.....	394
90.1. “Листья папоротника” Барнсли (1988).....	394
90.2. “Деревья” Босмана.....	397
<u>91.</u> Мультифракталы.....	398
91.1. Аналитический способ построения фракталов.....	398
91.2. Мультифракталы.....	400
91.3. Обобщённая статистическая сумма мультифрактала.....	402
<u>92.</u> Размерность фрактальных объектов и спектр сингулярностей мультифракталов.....	404
92.1. Фрактальная, информационная и корреляционная размер-	

	Стр.
ности.....	404
92.2. Спектр сингулярностей мультифрактала.....	407
<i>Задания для самостоятельного решения</i>	411
<i>Список использованных источников</i>	431
ТФШ. Теория вейвлетов. Дифференциалы	432
Тема: Теория вейвлетов	433
<u>93.</u> “Маленькие волны”	433
93.1. Построение базиса вейвлетов.....	433
93.2. Распознавание сигналов с помощью вейвлетов.....	435
<u>94.</u> Компьютерное распознавание образов	437
94.1. Анализ сигналов с помощью компьютерных программ...	437
94.2. Вейвлеты и распознавание реальных образов.....	443
<i>Задания для самостоятельного решения</i>	447
<i>Список использованных источников</i>	457
Тема: Дифференциалы	458
<u>95.</u> Эредитарность, дальноедействие и степенные законы	458
95.1. Эредитарность (наследственность).....	458
95.2. Вынужденные колебания при наличии памяти.....	460
95.3. Степенные законы.....	461
<u>96.</u> «Хвостатые» распределения	464
96.1. Энтропия и её определение.....	464
96.2. Энтропия Цаллиса.....	466
<u>97.</u> Элементы теории дифференциалов	467
97.1. Производные дробного порядка.....	467
97.2. Дифференциалы.....	470

	Стр.
<i>Задания для самостоятельного решения</i>	472
<i>Список использованных источников</i>	472
<i>Приложение А. Поверхности функций комплексного переменного</i>	473
<i>Приложение Б. Латинский и греческий алфавиты</i>	475
<i>Приложение В. Терехов С.В., Варюхин В.Н., Петренко А.Г. Вариационные принципы классической механики</i>	476





VI. Функции нескольких переменных. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление

Тема: Функции нескольких переменных

59. “Функция двух переменных”

59.1. График и область определения

Функцией двух переменных называется закон, по которому каждому значению независимых переменных x и y , называемых **аргументами**, ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной z , называемой **функцией**: $z = f(x; y)$, где f – закон соответствия (аналогично определяются и функции с бóльшим числом переменных).

Областью определения функции (О.О.Ф.: $D(z)$) называется множество допустимых действительных значений аргументов x и y , при которых функция имеет смысл в области действительных чисел; множество значений, которые при этом принимает функция, называется её **областью значений** ($E(z)$).

Геометрическое место точек, абсциссы и ординаты которых равны значениям соответствующих аргументов, а аппликаты – значению функции, называется **графиком функции** или **поверхностью в пространстве**.

Пример 1. Построить графики функций двух переменных: а) $z = xy$; б) $z = x^2 + y^2$; в) $x^2 + y^2 = 1$.

а) Данная поверхность представляет собой гиперболический параболоид, который имеет вид “седла” (рис. 1).

б) Вторая функция определяет параболоид вращения (рис. 2).

в) Третья функция описывает бесконечный круговой цилиндр (рис. 3).

Построение фигур в пространстве производится методом сечений, когда переменной z придаётся постоянное значение C и строится кривая $f(x; y) = C$ на плоскости $z = C$. Для первой фигуры в этих сечениях расположены равнобочные гиперболы, для второй – окружности, которые при $C \rightarrow 0$ стягиваются в точку. Так как в уравнении третьей фигуры отсутствует переменная z , то в любом её сечении $z = C$ лежит окружность с радиусом равным единице.

Функция двух переменных может быть задана в *аналитическом* виде, например, формулой $z = \sin(2x - y)$; в виде *таблицы*; *мультиана-*

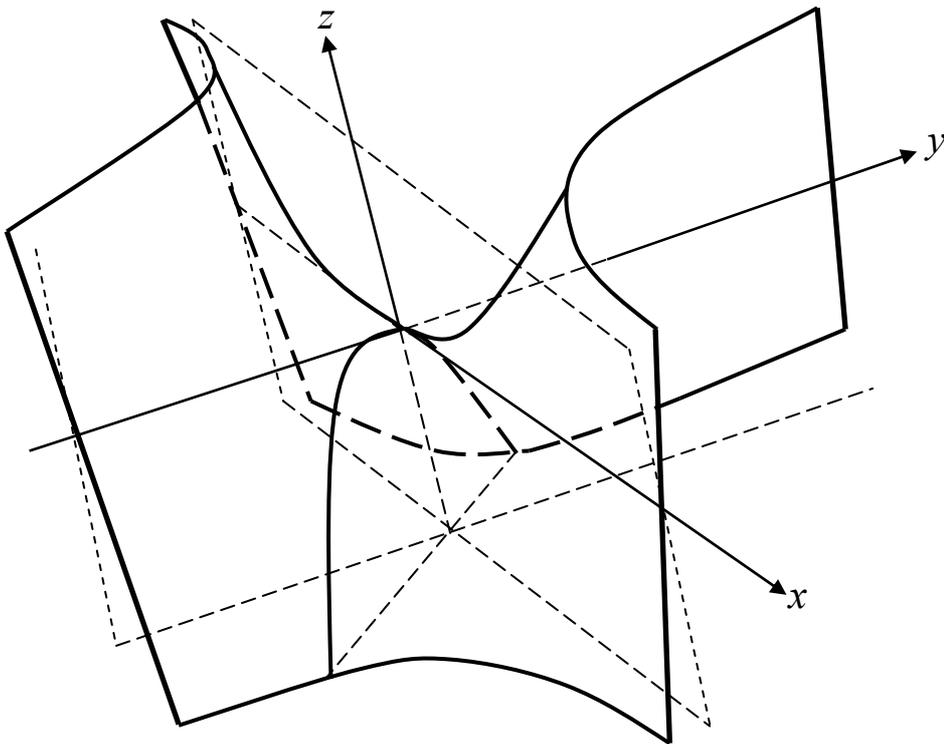


Рис. 1. *Гиперболический параболоид.*

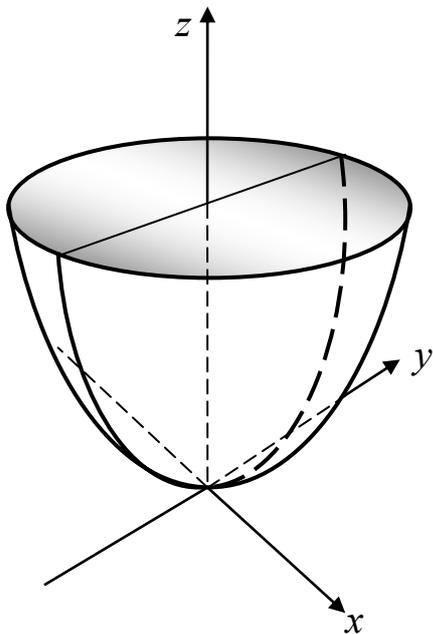


Рис. 2. *Параболоид вращения.*

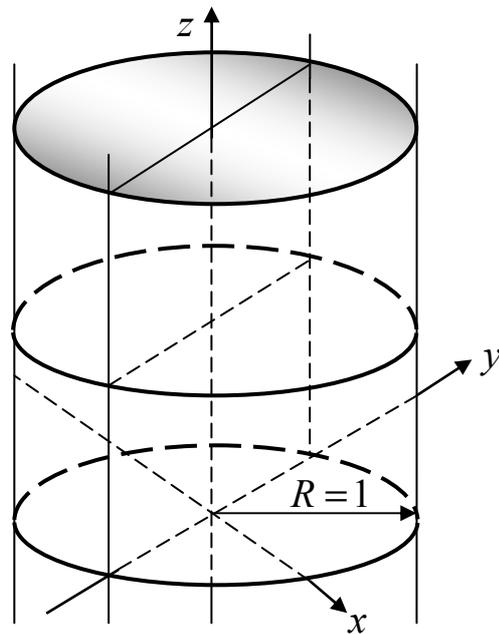


Рис. 3. *Бесконечный круговой цилиндр.*

литическим образом, параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

или в виде неявной

функции $F(x; y; z) = 0$. При нахождении области определения функ-

ции двух (и более) действительных переменных следует помнить о запрещённых действиях в области действительных чисел, которые были изложены в **23**.

Пример 2. Найти и изобразить на плоскости xOy область определения функций:

$$\text{а) } z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + 3 \ln(1 - x); \quad \text{б) } z = \frac{2x - y + 1}{\sqrt{x + y - 3}} + 4 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$\text{а) О.О.Ф.: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x < 1 \end{cases}. \text{ Построим полученные линии:}$$

первая линия ($x^2 + y^2 = 4$) задаёт окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 2$ (см. каноническое уравнение окружности из **8**). Для определения координат точек, удовлетворяющих этому неравенству, возьмём точки с произвольными координатами внутри и вне окружности. Подставим координаты точек в неравенство, например, $M_1(0;0)$ и $M_2(3;0)$. Координаты точки $M_2(3;0)$ удовлетворяют первому неравенству, а координаты точки $M_1(0;0)$ – нет. Следовательно, первому неравенству удовлетворяют все точки, которые лежат на *самой* окружности и *вне* её. Вторая линия является вертикальной прямой ($x = 1$), причём второму неравенству удовлетворяют координаты всех точек, которые лежат слева от этой прямой (проверить *самостоятельно*), но не на самой прямой. Таким образом, множество точек, координаты которых лежат в заштрихованной области на рис. 4, удовлетворяют найденной системе неравенств и задают на плоскости xOy область определения функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + 3 \ln(1 - x).$$

б) Рассуждая аналогично, находим область определения для второй

$$\text{функции: } \begin{cases} x + y - 3 > 0 \\ \left|\frac{x}{2}\right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y > 3 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}. \text{ Эта система неравенств определя-$$

ет на плоскости xOy множество точек, показанных на рис. 5.

● Чем больше аргументов у функции, тем сложнее отобразить её график на плоскости. ●

Для функций двух и более переменных нельзя ввести понятие монотонности. Например, из рис. 1 видно что функция $z = f(x; y)$ в одних направлениях возрастает, а в других – убывает. Это означает, что о возрастании и убывании функции двух переменных можно говорить

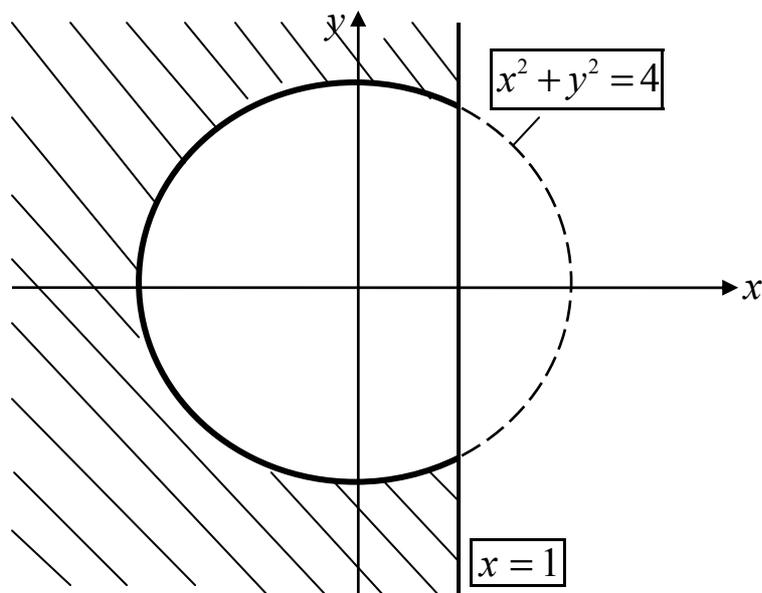


Рис. 4. Область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + 3\ln(1 - x)$.

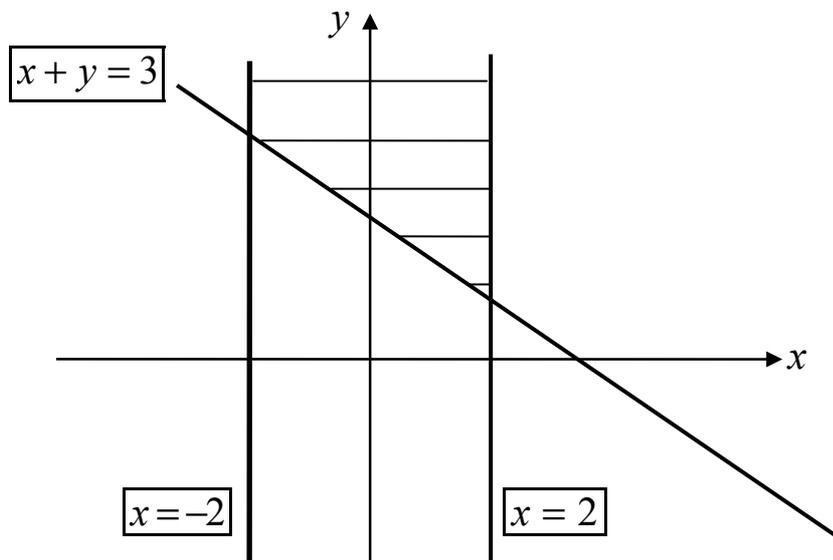


Рис. 5. Область определения функции $z = \frac{2x - y + 1}{\sqrt{x + y - 3}} + 4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.

только в некоторой малой окрестности выделенной точки вдоль определённых направлений. В этой связи функцию двух переменных зачастую изображают на плоскости xOy в виде линий одинаковых значений функции (*изолиний равных значений*) $f(x, y) = C$, получая тем самым её *топографическую карту*. Эта карта наглядно отображает поведение функции в пространстве. Расстояние между линиями определяет скорость возрастания или убывания функции вдоль выбранного направления. Например, топографическая карта параболоида вращения (рис. 2) выглядит так, как показано на рис. 6:

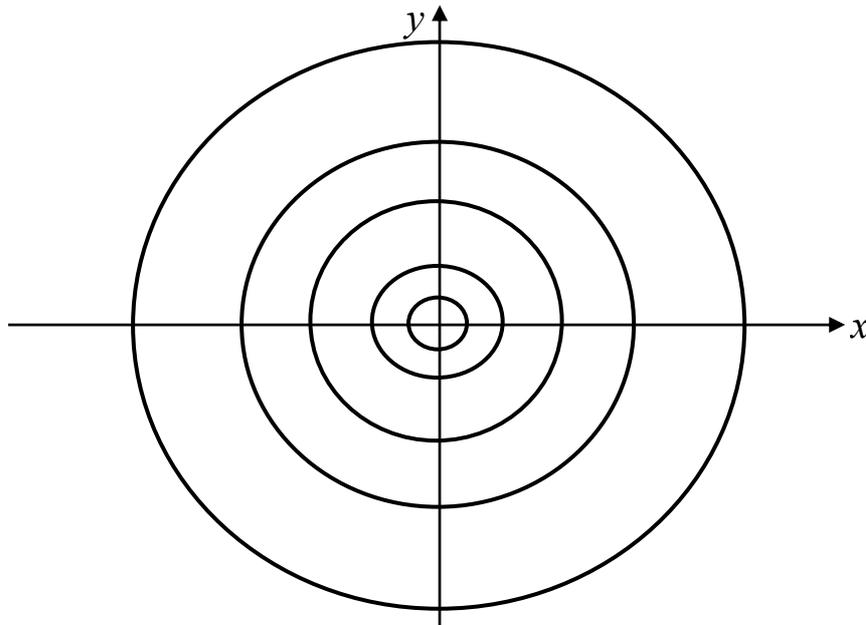


Рис. 6. *Топографическая карта параболоида вращения.*

Необходимость изучения локального поведения функции требует введения понятия “*окрестности*” выбранной точки.

Круговой δ -окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется множество точек $(x; y)$, лежащих внутри окружности радиуса δ , которая описывается уравнением $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$.

Обозначение: $V_\delta(x_0; y_0)$.

Прямоугольной δ -окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется множество точек $(x; y)$, лежащих внутри прямоугольника

$$\begin{cases} x \in (x-\delta; x+\delta) \\ y \in (y-\delta; y+\delta) \end{cases}$$

Обозначение: $P_\delta(x_0; y_0)$.

При анализе поведения функции двух переменных в основном используют *круговые* и *прямоугольные δ -окрестности*, хотя можно ввести в рассмотрение и другие δ -окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Изменения функции в зависимости от принимаемых значений аргументов требует введения понятия *экстремума*.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется **точкой минимума** ($f_{\min}(x_{\min}; y_{\min})$), если $\forall M(x; y) \in V_\delta(x_0; y_0)$ выполняется неравенство $f(x; y) > f(x_0; y_0)$.

Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется **точкой максимума** ($f_{\max}(x_{\max}; y_{\max})$), если $\forall M(x; y) \in V_\delta(x_0; y_0)$ выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$.

Точки минимума и максимума объединяются под общим названием **точки экстремума**.

○ Определяют *локальные* и *условные* экстремумы. Первые характеризуют всю функцию в целом, а вторые – “минимаксы” функции на изолиниях. ○

59.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ при произвольном стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такая δ -окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$ такая, что $\forall M(x, y) \in V_\delta(x_0; y_0)$ имеет место неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ или $\lim_{M(x, y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)} f(x, y) = A$.

Предел от функции двух переменных вычисляется через *повторные пределы*. Обоснование такого перехода даёт следующая теорема:

Теорема 1. Если существует (конечный или бесконечный) двойной предел $\lim_{M(x, y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)} f(x, y) = A$, и существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, то существует *повторный* предел $\lim_{M(x, y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$.

Пример 3. Вычислить $\lim_{M(x, y) \rightarrow M_0(0; 0)} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$.

Рассмотрим разные предельные переходы:

$$\begin{aligned} \lim_{M(x, y) \rightarrow M_0(0; 0)} \left(\frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{-y + y^2}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1 + y) = -1; \\ \lim_{M(x, y) \rightarrow M_0(0; 0)} \left(\frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) = 1. \end{aligned}$$

Этот пример показывает, что в точке $M_0(0; 0)$ двойной предел не существует. В связи с рассмотренным **Примером 3** возникает необходимость обоснования обмена местами пределов по разным переменным.

Двойной предел будет равен повторному пределу, если оба предела по каждой переменной в выбранной точке *существуют*, тогда

$$\lim_{M(x, y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

○ Для функции двух и более переменных справедливы все теоремы о пределах, которые были рассмотрены в **13**. ○

Функция $z = f(x; y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0; y_0)$ из области определения функции $D(z)$, если имеет место равенство

$$\lim_{M(x; y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)} f(x; y) = f(x_0; y_0)$$

при произвольном стремлении точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$.

○ Все функции двух переменных непрерывны в области своего определения. ○

Теорема 2 (теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области $D(z)$, то она ограничена, т.е.

$$m \leq f(x; y) \leq M,$$

где числа $m, M \in R$.

60. “Частные производные. Касательная плоскость и нормаль”

60.1. Частные производные и дифференциалы

Пусть функция $f(x; y)$ определена и непрерывна в области $D(z)$. Возьмём произвольную точку $M(x; y) \in D(z)$ и дадим приращение одной из её переменных, тогда **приращения функции** имеют вид:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \quad \text{и} \quad \Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Выражения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ называются *частными приращениями функции* $f(x; y)$.

Введение частных приращений позволяет ввести понятия частных производных:

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

○ При вычислении частной производной по выбранной переменной, *другой аргумент считается постоянной величиной*. ○

Пример 1. Найти частные производные функции $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$.

Найдём частные производные от данной функции (следует повторить

правила дифференцирования и таблицу производных из **17** и **18**, соответственно):

$$z'_x = \left[\sin\left(\frac{x}{y}\right) \right]'_x = \left(\frac{x}{y}\right)'_x \cos\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$z'_y = \left[\sin\left(\frac{x}{y}\right) \right]'_y = \left(\frac{x}{y}\right)'_y \cos\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Введение *частных производных* позволяет рассматривать *частные дифференциалы* $d_x z = z'_x dx$, $d_y z = z'_y dy$ и *полный дифференциал функции двух переменных*: $d z = z'_x dx + z'_y dy$.

Аналогичным образом могут быть введены дифференциалы и производные высших порядков, например:

$$d^2 z = z''_{xx} (dx)^2 + z''_{xy} dx dy + z''_{yx} dy dx + z''_{yy} (dy)^2,$$

где

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x, \quad z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y, \quad z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y.$$

Отметим, что в силу того, что двойной предел вычисляется через повторный и не всегда обмен порядка взятия предела по аргументам приводит к одному и тому же результату, то в общем случае

$$z''_{xy} \neq z''_{yx}.$$

Если

$$z''_{xy} = z''_{yx},$$

т.е. функция дифференцируема, то она *непрерывна*. В этом случае *не существует порядок взятия частных производных*.

Производные z''_{xy} и z''_{yx} называются *смешанными*, так как они берутся по разным аргументам.

60.2. Производная от сложной и неявно заданной функций

Пусть дана функция $z = f(u; v)$, причём $u = u(x; y)$ и $v = v(x; y)$.

Функция вида $z = f(u(x; y); v(x; y))$ называется *сложной функцией двух переменных*.

Функция, заданная соотношением $F(x; y; z(x; y)) = 0$, из которого нельзя в явном виде выразить функцию $z = f(x; y)$, называется *неявной*.

Вычисление частных производных от таких функций проводят также, как и в случае функции одной переменной:

$$1) \boxed{z = f(u(x; y); v(x; y))}: \quad \boxed{z'_x = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}}, \quad \boxed{z'_y = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Пример 2. Найти частные производные от функции двух переменных

$$z = \sqrt{x^2 - 4y^3 + 2xy - 3}.$$

$$z'_x = \frac{(x^2 - 4y^3 + 2xy - 3)'_x}{2\sqrt{x^2 - 4y^3 + 2xy - 3}} = \frac{2x + 2y}{2\sqrt{x^2 - 4y^3 + 2xy - 3}} = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - 4y^3 + 2xy - 3}};$$

$$z'_y = \frac{(x^2 - 4y^3 + 2xy - 3)'_y}{2\sqrt{x^2 - 4y^3 + 2xy - 3}} = \frac{-12y^2 + 2x}{2\sqrt{x^2 - 4y^3 + 2xy - 3}} = \frac{x - 6y^2}{\sqrt{x^2 - 4y^3 + 2xy - 3}}.$$

$$2) \boxed{F(x; y; z(x; y)) = 0}: \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}},$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}}.$$

Пример 3. Найти частные производные от функции двух переменных

$$x \sin\left(\frac{z}{y}\right) - 2e^x y z = 7.$$

Используя правила дифференцирования и помня о том, что производная вычисляется от функции двух переменных $z = z(x; y)$, найдём

$$\sin\left(\frac{z}{y}\right) + x \cos\left(\frac{z}{y}\right) \frac{z'_x}{y} - 2e^x y z - 2e^x y z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = y \frac{\sin(z/y) - 2e^x y z}{2e^x y^2 - x \cos(z/y)};$$

$$x \cos\left(\frac{z}{y}\right) \frac{z'_y y - z}{y^2} - 2e^x z - 2e^x y z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{z}{y} \cdot \frac{\cos(z/y) - 2e^x y^2}{2e^x y^2 - x \cos(z/y)}.$$

Функции двух переменных и их частные производные входят в различные соотношения, и поэтому возникает задача о проверке, удовлетворяет ли данная функция заданному дифференциальному уравнению в частных производных.

Пример 4. Удовлетворяет ли функция e^{xy} равенству $x z''_{xx} = y z''_{yx}$?

Вычислим первые частные производные от функции e^{xy} : $z'_x = e^{xy} y$ и $z'_y = e^{xy} x$, а затем указанные в заданном равенстве вторые производные: $z''_{xx} = e^{xy} y^2$ и $z''_{yx} = e^{xy} xy$. Найденные производные подставим в заданное соотношение:

$$x e^{xy} y^2 \equiv y e^{xy} xy.$$

Полученное тождество позволяет утверждать, что заданная функция удовлетворяет заданному равенству.

60.3. Производная по направлению

Пусть функция $z = f(x; y)$ задана в виде топографической карты на плоскости xOy . Выберем на карте точку $M_0(x_0; y_0)$ и рассмотрим изменение функции вдоль прямой, которая расположена под углом α к положительному направлению оси абсцисс. Точки на прямой имеют координаты $x = x_0 + t \cos \alpha$ и $y = y_0 + t \sin \alpha$, где $t \in R$. Обозначим эту прямую (l) .

Производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ **по направлению** (l) называется число

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha; y_0 + t \sin \alpha) - f(x_0; y_0)}{t}.$$

Расчётная формула для **производной по направлению** может быть получена из формулы взятия производной от сложной функции

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \sin \alpha.$$

Иначе полученную формулу можно интерпретировать так: введём в рассмотрение **вектор-градиент** (**оператор Гамильтона**)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j},$$

который показывает направление наибольшего изменения функции, и единичный вектор прямой (l) : $\mathbf{e}_l = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}$. Тогда **производная по направлению** равна **скалярному произведению** (см. **5**) этих векторов:

$\frac{\partial}{\partial l} = \mathbf{e}_l \cdot \nabla$. Если направления градиента ∇ и единичного вектора \mathbf{e}_l прямой (l) совпадают, то производная по направлению принимает наибольшее значение. Отсюда следует **вывод**: градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции в выбранной точке. При этом наибольшее значение производной по направлению или наибольшая скорость возрастания функции равна **длине (модулю)** градиента, т.е.

$$\left[\frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial l} \right]_{\max} = |\nabla z(x_0; y_0)| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}.$$

Пример 5. Вычислить производную по направлению от функции двух переменных $z = \frac{x}{x+2y}$ в точке $M_0(-1; 2)$, если прямая (l) образует

угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси абсцисс.

Вычислим первые частные производные от заданной функции:

$$z'_x = \frac{x+2y-x}{(x+2y)^2} = \frac{2y}{(x+2y)^2}; \quad z'_y = -\frac{2x}{(x+2y)^2}$$

и их значения в заданной точке:

$$z'_x(-1; 2) = \frac{2 \cdot 2}{(-1+2 \cdot 2)^2} = \frac{4}{9}; \quad z'_y(-1; 2) = -\frac{2 \cdot (-1)}{(-1+2 \cdot 2)^2} = \frac{2}{9}.$$

Найдём проекции единичного вектора e_l прямой (l) :

$$e_l = (\cos \alpha; \sin \alpha) = \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right); \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Производная по направлению равна:

$$\frac{\partial z(-1; 2)}{\partial l} = \frac{\partial z(-1; 2)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(-1; 2)}{\partial y} \sin \alpha = \frac{4}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}+1}{9}.$$

Пример 6. Вычислить производную от функции $z = \sin(x-2y)$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$ в направлении вектора $s = (1; 1)$.

Вычислим первые частные производные от заданной функции в точке

$M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$: $z'_x = \cos(x-2y)|_{M_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $z'_y = -2 \cos(x-2y)|_{M_0} = -\sqrt{3}$. На-

правление прямой (l) задаётся вектором $s = (1; 1)$, поэтому вычислим его направляющие косинусы (см. 4):

$$|s| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}; \quad \cos \alpha = \frac{s_x}{|s|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{s_y}{|s|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, производная по направлению равна

$$\frac{\partial z\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)}{\partial l} = \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)}{\partial y} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

60.4. Касательная плоскость и нормаль

Касательной плоскостью к поверхности в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, называемой **точкой касания**, называется плоскость, в которой располо-

жены любые касательные в этой точке к любым кривым, проходящим по данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности называется прямая перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если поверхность задана уравнением $F(x; y; z) = 0$, то уравнение **касательной плоскости** в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0) = 0,$$

а уравнение **нормали** –

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}.$$

В случае задания поверхности явной функцией $z = f(x; y)$ вышеприведенные равенства принимают вид

касательная плоскость:

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}(y-y_0) - (z-z_0) = 0,$$

нормаль:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример 7. Составить уравнения касательной плоскости и нормали для функции $z^3 + y - 9x + e^{x-2y+3z} = 3$ в точке $M_0(1; -1; -1)$.

В этом примере функция двух переменных задана в неявном виде, т.е. в виде равенства $F(x; y; z) = 0$, где $F(x; y; z) = z^3 + y - 9x + e^{x-2y+3z} - 3 = 0$. Вычислим частные производные от этой функции и их значения в указанной точке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x; y; z)}{\partial x} &= -9 + e^{x-2y+3z}; \Rightarrow \frac{\partial F(1; -1; -1)}{\partial x} = -9 + e^0 = -8; \\ \frac{\partial F(x; y; z)}{\partial y} &= 1 - 2e^{x-2y+3z}; \Rightarrow \frac{\partial F(1; -1; -1)}{\partial y} = 1 - 2e^0 = -1; \\ \frac{\partial F(x; y; z)}{\partial z} &= 3z^2 + 3e^{x-2y+3z}; \Rightarrow \frac{\partial F(1; -1; -1)}{\partial z} = 3(-1)^2 + 3e^0 = 6. \end{aligned}$$

касательная плоскость: $-8(x-1) - (y+1) + 6(z+1) = 0$ или после раскрытия всех скобок, приведения подобных и умножения всего уравнения на (-1) , получим $8x + y - 6z - 13 = 0$;

нормаль: $\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-6}$.

Пример 8. Составить уравнения касательной плоскости и нормали для функции $z = \ln(2x - y)$ в точке $M_0(2; 3; 1)$.

Поверхность задана **явной** функцией $z = \ln(2x - y)$, поэтому в этом случае $z = f(x, y) = \ln(2x - y)$. Вычислим первые частные производные функции в точке $M_0(2; 3; 1)$:

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = \frac{2}{2x-y} \Big|_{M_0} = 2; \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = -\frac{1}{2x-y} \Big|_{M_0} = -1.$$

Следовательно: **касательная плоскость**: $2(x-2) - (y-3) - (z-1) = 0$ или после раскрытия скобок и приведения подобных: $2x - y - z = 0$;

нормаль: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

61. “Локальный и условный экстремумы”

61.1. Условия существования локального экстремума

Точки, в которых первые частные производные функции двух переменных обращаются в нуль или не существуют называют **подозрительными на экстремум** (**критическими** или **стационарными**).

● Обращение в нуль первых частных производных функции двух переменных является **необходимым** (как и в случае функции одной переменной), но **не достаточным условием существования экстремума**. ●

Пример 1. Найти критические точки функции двух переменных

$$z = x^2 - 5yx + 2y^2 - 10x + 2y - 3.$$

Вычислим первые частные производные функции и приравняем их к

нулю: $\begin{cases} z'_x = 2x - 5y - 10 = 0 \\ z'_y = -5x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$. Решением этой системы алгебраических

уравнений является точка $M\left(-\frac{46}{17}; -\frac{30}{17}\right)$. В этой точке наблюдается ми-

нимум в соответствии с **достаточным условием существования локального экстремума** (**Теорема 1**, см. ниже).

Для упрощения формы записи введём следующие обозначения:

$$A = z''_{xx}(x_0; y_0); \quad B = z''_{xy}(x_0; y_0) = z''_{yx}(x_0; y_0); \quad C = z''_{yy}(x_0; y_0) \text{ и}$$

$$\Delta = A \cdot C - B^2.$$

Теорема 1. Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$ и её некоторой δ -окрестности, причём в самой точке первые частные производные функции либо равны нулю, либо не существуют. Тогда:

– при $\Delta > 0$ в точке M_0 наблюдается экстремум:

а) если $A < 0$ (или $C < 0$), то **максимум**;

б) если $A > 0$ (или $C > 0$), то **минимум**;

– при $\Delta < 0$ в точке M_0 **нет экстремума**;

– при $\Delta = 0$ в точке M_0 **необходимо проводить дополнительные исследования с привлечением частных производных более высокого порядка.**

Пример 2. Определить, есть ли экстремум в точке $M\left(-\frac{46}{17}; -\frac{30}{17}\right)$ из

Примера 1?

Вычислим в этой точке значения всех вторых производных заданной в **Примере 1** функции:

$$A = z''_{xx}\left(-\frac{46}{17}; -\frac{30}{17}\right) = 2; \quad B = z''_{xy}\left(-\frac{46}{17}; -\frac{30}{17}\right) = -2 \quad \text{и} \quad C = z''_{yy}\left(-\frac{46}{17}; -\frac{30}{17}\right) = 4.$$

Величина $\Delta = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 4 - 4 = 4 > 0$ и $A = 2 > 0$ – функция имеет минимум в точке $M\left(-\frac{46}{17}; -\frac{30}{17}\right)$.

Пример 3. Исследовать на наличие экстремумов функцию двух переменных $z = x^3 + y^3 - 3xy - 6x$.

Определим стационарные точки: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y - 6 = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$. Вы-

ражая переменную $x = y^2$ из второго уравнения системы и подставляя это выражение в первое уравнение, получим $y^4 - y = 2$. Это уравнение имеет очевидный корень $y_1 = -1$, а $x_1 = y_1^2 = 1$. Выполним деление полинома $y^4 - y - 2$ на простой множитель $y + 1$ (см. **27**):

$$\begin{array}{r|l} -y^4 - y - 2 & y+1 \\ \hline y^4 + y^3 & y^3 - y^2 + y - 2 \\ \hline -y^3 - y - 2 & y^2 + y \\ -y^3 - y^2 & -2y - 2 \\ \hline & -2y - 2 \\ & \hline & 0 \end{array}$$

Итак, получаем

$$y^4 - y - 2 = (y+1)(y^3 - y^2 + y - 2) = 0.$$

Отсюда

$$y^3 - y^2 + y - 2 = 0.$$

Кубическое уравнение путём замены $y = u - \frac{b}{3a} = u + \frac{1}{3}$ перепишем в при-

веденном виде $u^3 + pu + q = 0$: $u^3 + \frac{2}{3}u - \frac{56}{27} = 0$, т.е. $p = \frac{2}{3}$ и $q = -\frac{56}{27}$. Решим это уравнение с помощью **формул Кардано** (см. Таблицу 6 в п. 0.4, **0**) с введением следующих обозначений:

$$E = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3; K = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{E}}; L = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{E}}.$$

В зависимости от знака величины E возможны три случая:

- а) $E > 0$; $u = K + L$; $u \in R$ (1 действительный и 2 комплексных корня);
 б) $E = 0$; ($K = L$); $u_1 = 2K$; $u_2 = u_3 = -K$; $u_{1,2,3} \in R$ (3 действительных корня, причём два из них совпадают – корень кратности 2);
 в) $E < 0$ (неприводимый случай)

$$u_1 = 2 \sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right); u_2 = 2 \sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right); u_3 = 2 \sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right),$$

где $r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$; $\cos \phi = -\frac{q}{2r}$, при этом все корни действительные. Вы-

числим параметры этого уравнения $E = \left(-\frac{28}{27}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{792}{729} = \frac{88}{81} > 0$

(случай а)). Вычислим величины

$$K = \sqrt[3]{\frac{28}{27} + \sqrt{\frac{88}{81}}} \approx 1,3 \text{ и } L = \sqrt[3]{\frac{28}{27} - \sqrt{\frac{88}{81}}} \approx -0,2$$

(использована программа *Mathcad Professional*). Следовательно, второй корень уравнения $y_2 = 1,3 - 0,2 + \frac{1}{3} \approx 1,4$, а $x_2 = y_2^2 = 1,96 \approx 2$.

Два других корня уравнения комплексные и поэтому не рассматриваются. Итак, точки $M_{01}(1; -1)$ и $M_{02}(2; 1,4)$ являются критическими точками. Вычислим вторые частные производные в этих точках, т.е.

1) $M_{01}(1; -1)$:

$$A = z''_{xx}(1; -1) = 6x|_{M_0} = 6; B = z''_{xy}(1; -1) = -3; C = z''_{yy}(1; -1) = 6y|_{M_0} = -6;$$

$\Delta = A \cdot C - B^2 = 6 \cdot (-6) - (-3)^2 = -45 < 0$ – в точке $M_{01}(1; -1)$ **экстремума нет**.

2) $M_{02}(2; 1,4)$:

$$A = z''_{xx}(2; 1, 4) = 6x|_{M_0} = 12; \quad B = z''_{xy}(2; 1, 4) = -3; \quad C = z''_{yy}(2; 1, 4) = 6y|_{M_0} = 8,4;$$

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 12 \cdot 8,4 - (-3)^2 = 91,8 > 0 -$$

в точке $M_{02}(2; 1, 4)$ наблюдается *минимум*, так как $A > 0$ (или $C > 0$).

61.2. Наименьшее и наибольшее значения функции

Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в области D , то по **теореме Вейерштрасса** (см. **Теорему 2, 66**) она ограничена. Следовательно, она может достичь своих наименьшего и наибольшего значений либо во внутренних экстремальных точках области D , либо в её граничных точках. Отыскание этих значений проводится по следующей **схеме**:

– находят первые частные производные z'_x и z'_y ;

– решают систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и находят критические точки, от-

бирая из них те, которые принадлежат области D или её границе;

– исследуют поведение функции на граничных участках, подставляя вместо одного из аргументов его функциональную зависимость от другой переменной, т.е. отыскивают наименьшее и наибольшее значения функции одной переменной (см. **23**) на соответствующих участках границы области D ;

– вычисляют значения функции в найденных точках;

– сравнивая полученные числа, выбирают наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x; y)$ в области D .

Пример 4. Найти в области D , ограниченной линиями $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$,

наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$.

Вначале найдём стационарные точки данной функции, решив систему

уравнений $\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0 \\ z'_y = 2y - 2x = 0 \end{cases}$. Выражая переменную $y = x$ из второ-

го уравнения системы и подставляя найденное равенство в первое уравнение системы, получим неполное квадратное уравнение

$$6x^2 + 8x - 2x = 0 \text{ или } 6x(x + 1) = 0.$$

Следовательно, $x_1 = -1$; $y_1 = x_1 = -1$ и $x_2 = 0$; $y_2 = x_2 = 0$. Таким образом, точками подозрительными на экстремум являются точки $M_{01}(-1; -1)$ и $M_{02}(0; 0)$. Построим область D и отберём из критических точек те, которые попадают в эту область (рис. 7).

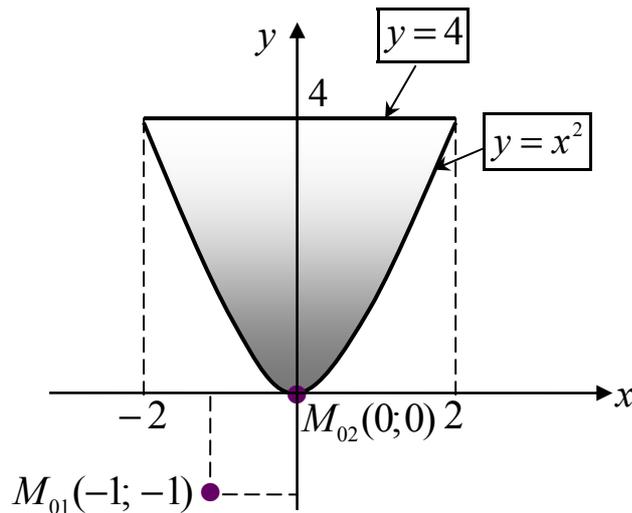


Рис. 7. Область D , в которой ведётся поиск наименьшего и наибольшего значений функции $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$.

Из рис. 7 видно, что из точек, подозрительных на экстремум, точка $M_{02}(0; 0)$ находится на границе области D . Поэтому исследуем поведение функции на граничных участках области D :

1) Участок $y = x^2$, $x \in [-2; 2]$ (см. рис. 7): на этом участке подстановка выражения $y = x^2$ в функцию $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ приводит к новой функции, которую обозначим $z_1(x) = 2x^3 + 4x^2 + x^4 - 2x^3 = x^4 + 4x^2$. Исследуем эту функцию на наименьшее и наибольшее значения при $x \in [-2; 2]$: $z'_1 = 4x^3 + 8x = 0$ или $4x(x^2 + 2) = 0$. Корень уравнения: $x = 0$. Вычислим значения функции $z_1(x) = x^4 + 4x^2$ в критической точке и конечных точках интервала $[-2; 2]$:

$$z_1(\pm 2) = x^4 + 4x^2 \Big|_{x=\pm 2} = 32; \quad z_1(0) = x^4 + 4x^2 \Big|_{x=0} = 0.$$

2) Участок $y = 4$, $x \in [-2; 2]$ (см. рис. 7): на этом участке подстановка выражения $y = 4$ в функцию $z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ приводит к новой функции, которую обозначим

$$z_2(x) = 2x^3 + 4x^2 + 16 - 8x = 2(x^3 + 2x^2 - 4x + 8).$$

Исследуем эту функцию на наименьшее и наибольшее значения при $x \in [-2; 2]$: $z'_2 = 2(3x^2 + 4x - 4) = 0$ или $3x^2 + 4x - 4 = 0$ (квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, в данном случае $a = 3$, $b = 4$ и $c = -4$). Дискриминант уравнения $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{16 + 48} = 8$. Следовательно,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - 8}{2 \cdot 3} = -2; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + 8}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

Вычислим значения функции $z_2(x) = 2(x^3 + 2x^2 - 4x + 8)$ в критических точках и конечных точках интервала $[-2; 2]$:

$$z_2(-2) = 32; \quad z_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{352}{27} \approx 13,04; \quad z_2(2) = 32.$$

Среди полученных чисел выбираем наименьшее $\min_{(x, y) \in D} z(x) = z_1(0) = 0$ и наибольшее $\max_{(x, y) \in D} z(x) = z_1(\mp 2) = z_2(\mp 2) = 32$.

61.3. Поиск условного экстремума по методу Лагранжа

Пусть функция двух переменных $F(x, y, z) = 0$ задана в неявном виде, аргументы которой связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0$. Требуется найти экстремум функции $F(x, y, z) = 0$ при наличии связи $\varphi(x, y) = 0$.

Экстремум неявной функции $F(x, y, z) = 0$, найденный при наличии связи между аргументами $\varphi(x, y) = 0$, называется **условным (относительным)**.

С геометрической точки зрения поиск экстремума данной неявной функции проводится на некоторой кривой, которая описывается заданным уравнением. Например, задана топографическая карта непрерывной функции (рис. 8).

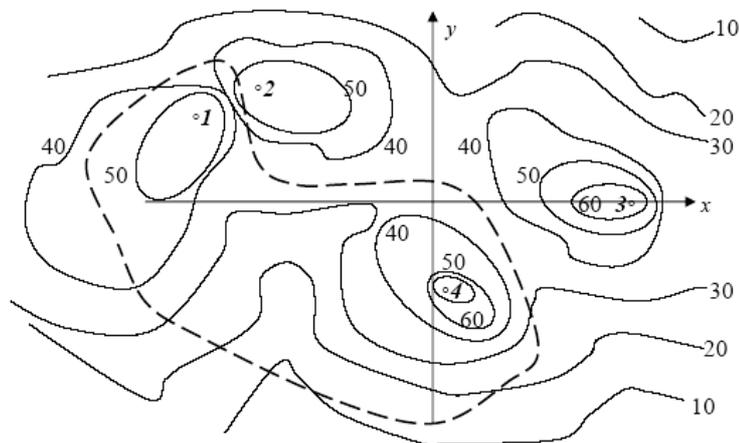


Рис. 8. Топографическая карта неявной функции:

1 – 52; 2 – 54; 3 – 67; 4 – 69.

Требуется: определить экстремумы этой функции на штрих-пунктирной линии. Из рис. 8 видно, что функция достигает максимумов в точках 1 и 4, а минимум где-то ниже топографической линии с отметкой 10. Для аналитического решения вопроса о поиске условного экстремума от данной функции на заданной кривой **Лагранж** предложил ме-

тод неопределённых коэффициентов.

Суть этого **метода** заключается в следующем:

– составляют новую вспомогательную функцию

$$\boxed{L(x; y; z) = F(x; y; z) + \lambda \varphi(x; y)},$$

где λ – неопределённый коэффициент;

– находят критические точки функции $L(x; y; z)$;

– определяют вид экстремума по достаточному признаку (см. **Теорему 1** этого раздела).

Пример 5. Найти условные экстремумы функции $x^2 - 2yz + 3y + z^2 = 0$ на окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Создадим новую функцию $L(x, y, z) = x^2 - 2yz + 3y + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ и определим её критические точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -2z + 3 + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = -2y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы находим, что $x = 0$ (параметр λ всегда определяется из уравнения связи, т.е. из последнего уравнения системы). Третье уравнение системы сводится к равенству $y = z$, подстановка которого во второе уравнение системы даёт соотношение

$$2(\lambda - 1)z + 3 = 0, \text{ т.е. } z = y = -\frac{3}{2(\lambda - 1)}.$$

Параметр λ найдём из последнего уравнения системы, подставив найденные значения переменных $0^2 + \left(-\frac{3}{2(\lambda - 1)}\right)^2 = 4$. Следовательно, уравнение

$\frac{9}{4(\lambda - 1)^2} = 4$ даёт значения неопределённого коэффициента $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$

и $\lambda_2 = \frac{7}{4}$. Тогда ординаты и аппликаты критических точек равны

$$z_1 = y_1 = -\frac{3}{2(\lambda_1 - 1)} = 2 \text{ и } z_2 = y_2 = -\frac{3}{2(\lambda_2 - 1)} = -2.$$

Точками условного экстремума являются точки

$$M_{01}(0; 2; 2) \text{ и } M_{02}(0; -2; -2).$$

Вычислим значения функции в каждой точке:

$$F(0; 2; 2) = 2 \text{ и } F(0; -2; -2) = -10.$$

62. “Кратные интегралы”

Аналогично тому, как понятие определённого интеграла задавалось на замкнутом отрезке, могут быть построены понятия кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, которые базируются на плоских и объёмных областях, линиях и поверхностях. Рассмотрим определение двойного интеграла.

62.1. Кратный интеграл и его свойства

Цилиндрическим телом называют трёхмерный объект, ограниченный снизу плоскостью xOy (область D); сверху – поверхностью $z = f(x; y)$, из любой точки которой опущенный перпендикуляр пересекает плоскость xOy не более чем в одной точке, и боковой цилиндрической поверхностью, образующая L которой параллельна оси Oz (рис. 9).

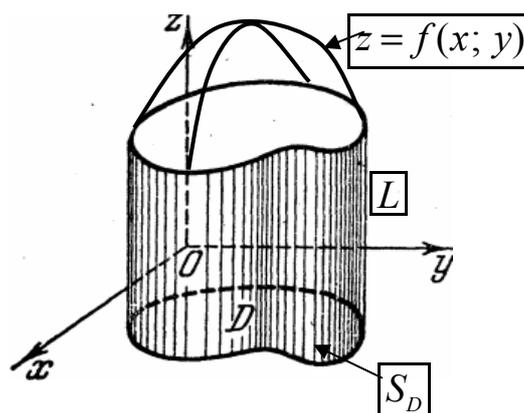


Рис. 9. Цилиндрическое тело.

Диаметром d_D области D называется наибольшее расстояние между точками её границы.

Любое заданное тело можно представить в виде совокупности цилиндрических тел, т.е. исследуемый объект разбивается на цилиндрические части, сумма объёмов которых равна объёму исходного объекта. **Объём цилиндрического тела** определяется по формуле: произведение площади его основания (площадь S_D области D) на длину образующей L , т.е.

$$V = S_D \cdot L.$$

Пусть функция $z = f(x; y)$ непрерывна в области D . Для определённости будем считать, что поверхность $z = f(x; y)$ целиком лежит над

плоскостью xOy , т.е. что $f(x; y) > 0 \forall (x; y) \in D$. Выполним следующие действия:

- разобьём основание цилиндрического тела (область D) произвольными линиями на n произвольных элементарных областей;
- обозначим площади элементарных областей через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$;
- восстановим из границы каждой элементарной области цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz , до пересечения с поверхностью $z = f(x; y)$, т.е разобьём эту поверхность произвольным образом на n частей (рис. 10);

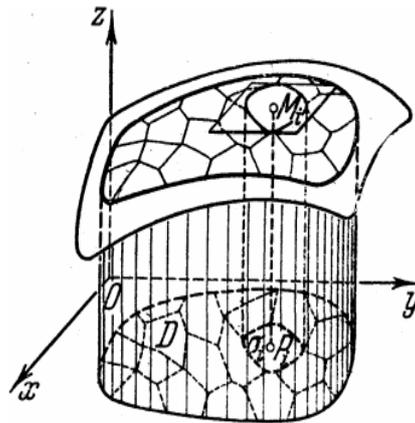


Рис. 10. Разбиение заданного объекта на n цилиндрических тел.

- в каждой элементарной области $\Delta\sigma_i$ выберем произвольную точку $P(x_i; y_i)$ и вычислим значение функции z в этой точке, т.е.

$$z_i = f(x_i; y_i),$$

которое примем за длину образующей i -го элементарного цилиндрического тела $z_i = f(x_i; y_i) = L_i$;

- подсчитаем объём i -го элементарного цилиндрического тела по формуле: $V_i = \Delta\sigma_i \cdot L_i$;

- просуммируем объёмы всех элементарных цилиндрических тел, в результате получим приближенное значение объёма заданного тела:

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta\sigma_i;$$

Объём V_n называется **n -ой интегральной суммой**.

- устремим число элементарных областей к бесконечности ($n \rightarrow \infty$, область D разбивается на дифференциально малые части), для того чтобы наибольший из диаметров элементарных областей стремился к нулю ($\max\{d_i\} \rightarrow 0$).

Тогда объём исходного объекта будет равен предельному значению n -ой интегральной суммы V_n : $V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta\sigma_i$.

Если предел n -ой интегральной суммы существует, то он называется **двойным интегралом**.

$$\text{Обозначение: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta \sigma_i = \iint_D f(x; y) d\sigma = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

Функция $f(x; y)$ называется **подынтегральной функцией**, выражение $f(x; y) d\sigma = f(x; y) dx dy$ – **подынтегральным выражением**; $d\sigma = dx dy$ – **элементом площади**; x и y – **переменными интегрирования**; область D – **областью интегрирования**.

Из определения **двойного интеграла** следует, что он равен объёму цилиндрического тела, которое ограничено снизу плоскостью xOy (область D); сверху – поверхностью $z = f(x; y)$, из любой точки которой опущенный перпендикуляр пересекает плоскость xOy не более чем в одной точке, и боковой цилиндрической поверхностью, образующая L которой параллельна оси Oz , т.е.

$$V = \iint_D f(x; y) d\sigma = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

Аналогично могут быть определены интегралы любой кратности, например, тройной интеграл равен:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta v_i = \iiint_V f(x; y; z) dv = \iiint_V f(x; y; z) dx dy dz.$$

Теорема 1 (существование двойного интеграла). Если функция двух переменных $z=f(x; y)$ непрерывна в области D , ограниченной замкнутой линией, то существует предел n -ой интегральной суммой, причём двойной интеграл $\iint_D f(x; y) d\sigma$ не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные части, ни от выбора произвольных точек $P_i(x_i; y_i)$.

Двойной интеграл (как и любой другой кратный интеграл) представляет собой число, которое зависит от подынтегральной функции и области интегрирования. Он обладает следующими **свойствами**:

1. Двойной интеграл от линейной комбинации непрерывных в одной области D функций равен той же самой линейной комбинации двойных интегралов от этих функций:

$$\begin{aligned} & \iint_D [C_1 f_1(x; y) + C_2 f_2(x; y) + \dots + C_n f_n(x; y)] d\sigma = \\ & = C_1 \iint_D f_1(x; y) d\sigma + C_2 \iint_D f_2(x; y) d\sigma + \dots + C_n \iint_D f_n(x; y) d\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда следуют два важных **практических** случая:

a) двойной интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) двойных интегралов от этих функций

$$\iint_D [f(x; y) \pm g(x; y)] d\sigma = \iint_D f(x; y) d\sigma \pm \iint_D g(x; y) d\sigma;$$

б) постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла $\iint_D A \cdot f(x; y) d\sigma = A \cdot \iint_D f(x; y) d\sigma$.

2. Если область определения функции D представляет собой точку на плоскости xOy , то двойной интеграл равен нулю.

3. $\iint_D d\sigma = S_D$ – двойной интеграл по области D равен её площади.

4. (свойство аддитивности) Если область D состоит из двух областей D_1 и D_2 , то двойной интеграл по области D равен сумме двойных интегралов по областям D_1 и D_2 :

$$\iint_D f(x; y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x; y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x; y) d\sigma.$$

5. Двойной интеграл не зависит от того, какими буквами обозначаются переменные интегрирования:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_D f(s; t) ds dt = \iint_D f(\rho; \varphi) d\rho d\varphi = \dots$$

62.2. Повторный интеграл

Способ вычисления двойного интеграла определяется следующей теоремой:

Теорема 2. Пусть функция $z = f(x; y)$ непрерывна в области D , которая ограничена сверху линией $y = \psi(x)$, снизу – $y = \zeta(x)$, слева – $x = a$ и справа $x = b$ (рис. 11а) и при каждом значении $x \in [a; b]$ существует интеграл $I(x) = \int_{\zeta(x)}^{\psi(x)} f(x; y) dy$. Тогда существует интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{\zeta(x)}^{\psi(x)} f(x; y) dy = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

Интеграл $\int_a^b dx \int_{\zeta(x)}^{\psi(x)} f(x; y) dy$ называется **повторным интегралом**.

Область D , удовлетворяющая условиям **Теоремы 2**, называется **правильной**.

○ Если область D имеет более сложную конфигурацию, чем указана в **Теореме 2**, то она разбивается на такие области, которые удовлетворяют данной теореме, при этом используется свойство **4 (свойство аддитивности)**. ○

○ Если возможно установить взаимно-однозначное соответствие между аргументами x и y , то можно изменять порядок интегрирования, т.е. если $x \in [\alpha(y); \beta(y)]$ и $y \in [m; n]$ (рис. 11б), то

$$\int_a^b \left[\int_{\zeta(x)}^{\psi(x)} f(x; y) dy \right] dx = \int_m^n \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x; y) dx \right] dy = \iint_D f(x; y) dx dy. \quad \bullet$$

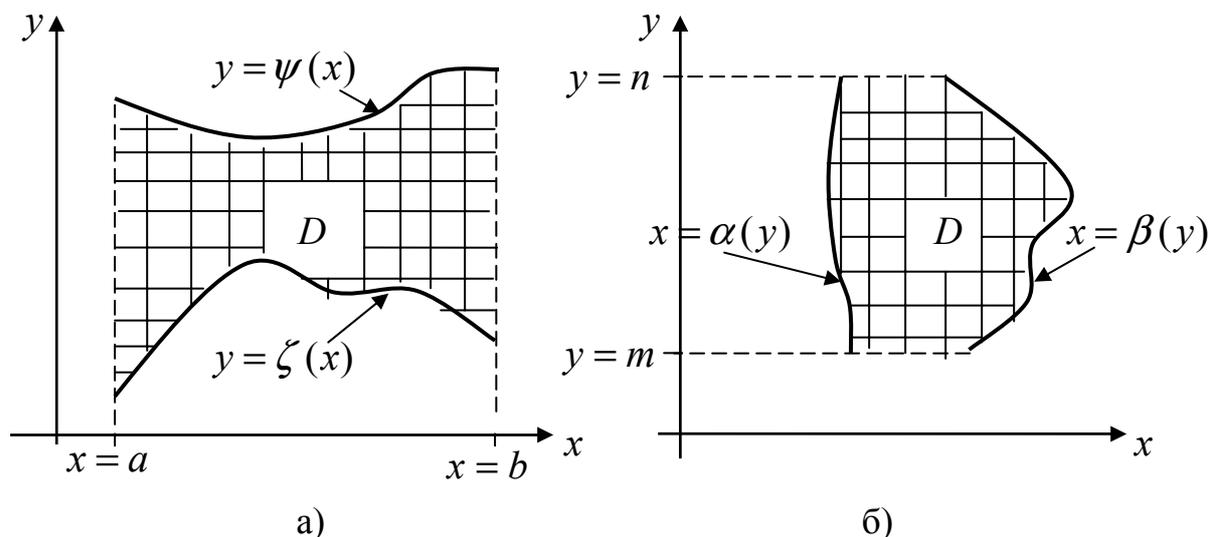


Рис. 11. Область D , удовлетворяющая условиям *Теоремы 2*.

● Также через повторный интеграл вычисляют и тройной интеграл:

$$\int_a^b \left\{ \int_{\zeta(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\omega(x,y)}^{\gamma(x,y)} f(x; y; z) dz \right] dy \right\} dx = \iiint_V f(x; y; z) dx dy dz . \bullet$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy \, dx \, dy$ с изменением порядка интегрирования, где область D ограничена линиями: снизу – $y = x$, сверху – $y = 2x$ и $x \in [2; 4]$.

Изобразим область D на рис. 12. Для того чтобы правильно расставить

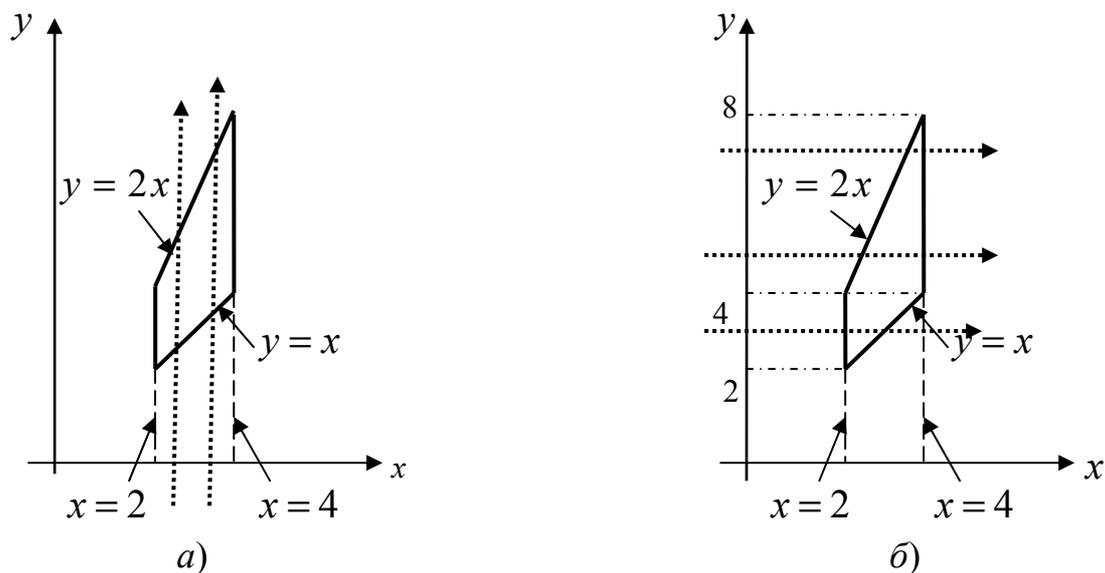


Рис. 12. Область D , по которой вычисляется двойной интеграл.

пределы интегрирования, проведём в случае *a)* пунктирные линии в положительном направлении оси ординат параллельно этой оси; в случае *б)* – в положительном направлении оси абсцисс параллельно Ox . Рассмотрим случай *a)*, когда $x \in [2; 4]$: если двигаться вдоль пунктир-

ных линий, то все **точки входа** в область D лежат на прямой $y=x$ (это нижний предел интегрирования), а все **точки выхода** принадлежат прямой $y=2x$ (верхний предел интегрирования). Таким образом,

$$\iint_D x y \, dx \, dy = \int_2^4 \left[\int_x^{2x} x y \, dy \right] dx =$$

(при интегрировании по переменной y другая переменная x считается постоянной величиной, поэтому она выносится как постоянный множитель за знак внутреннего интеграла)

$$\begin{aligned} &= \int_2^4 x \left[\int_x^{2x} y \, dy \right] dx = \int_2^4 x \frac{y^2}{2} \Big|_x^{2x} dx = \int_2^4 x \frac{1}{2} (4x^2 - x^2) dx = \frac{3}{2} \int_2^4 x^3 dx = \frac{3}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_2^4 = \\ &= \frac{3}{8} (4^4 - 2^4) = 90. \end{aligned}$$

Из рис. 12 видно, что при изменении порядка интегрирования в случае б) область D надо разбивать на две области для удовлетворения условиям **Теоремы 2**. При $y \in [2; 4]$ **точки входа** в область D (см. по пунктирной прямой) лежат на прямой $x=2$, а все **точки выхода** – на прямой $x=y$. При $y \in [4; 8]$ **точки входа** в область D (см. по пунктирной прямой) лежат на прямой $x=\frac{y}{2}$, а все **точки выхода** – на прямой $x=4$.

Используя свойство аддитивности разобьём двойной интеграл на сумму двух повторных интегралов

$$\begin{aligned} \iint_D x y \, dx \, dy &= \int_2^4 \left[\int_2^y x y \, dx \right] dy + \int_4^8 \left[\int_{\frac{y}{2}}^4 x y \, dx \right] dy = \int_2^4 y \left[\int_2^y x \, dx \right] dy + \int_4^8 y \left[\int_{\frac{y}{2}}^4 x \, dx \right] dy = \\ &= \int_2^4 y \frac{x^2}{2} \Big|_2^y dy + \int_4^8 y \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{y}{2}}^4 dy = \int_2^4 y \frac{1}{2} (y^2 - 2^2) dy + \int_4^8 y \frac{1}{2} \left(4^2 - \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_2^4 y^3 dy - 4 \int_2^4 y dy + 16 \int_4^8 y dy - \frac{1}{4} \int_4^8 y^3 dy \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y^4}{4} \Big|_2^4 - 4 \frac{y^2}{2} \Big|_2^4 + 16 \frac{y^2}{2} \Big|_4^8 - \frac{1}{4} \frac{y^4}{4} \Big|_4^8 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} (4^4 - 2^4) - 2 (4^2 - 2^2) + 8 (8^2 - 4^2) - \frac{1}{16} (8^4 - 4^4) \right) = 90. \end{aligned}$$

● Из этого примера видно, что очень важно правильно выбрать порядок интегрирования. ●

В геометрических и физических приложениях кратных интегралов зачастую используют не только декартовы координаты, но и другие координаты. В этой связи возникает необходимость перехода от одних координат к другим, например, от переменных (x, y, z) к переменным (x', y', z') .

Якобианом перехода называют *определитель вида*

$$J_{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{vmatrix} \text{ при переходе } (x; y) \Rightarrow (x'; y') \text{ или } J_{(3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix}$$

при переходе $(x; y; z) \Rightarrow (x'; y'; z')$. Тогда кратные интегралы записываются в виде:

$$\boxed{\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_D f(x'; y') J_{(2)} dx' dy'}$$

$$\boxed{\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_V f(x'; y'; z') J_{(3)} dx' dy' dz'}$$

Пример 2. Найти якобианы переходов при преобразовании в декартовы координаты: а) полярных; б) цилиндрических; в) сферических.

а) преобразование *полярных* координат в *декартовы* задаётся форму-

лами (см. 11): $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$, поэтому якобиан перехода

$$J_{(2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Следовательно, $\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_D f(\rho; \varphi) \rho d\rho d\varphi$.

б) преобразование *цилиндрических* координат в *декартовы* задаётся

формулами $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$, поэтому

$$J_{(3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

т.е.

$$\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho; \varphi; z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

в) преобразование *сферических* координат в *декартовы* задаётся фор-

$$\text{мулами } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \text{ следовательно,} \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

$$J_{(3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta,$$

$$\text{и } \iiint_V f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_V f(\rho; \varphi; \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Пример 3. Вычислить $\iint_D dx dy$, если $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq x, x \geq 0 \end{cases}$.

Изобразим область D на рис. 13.

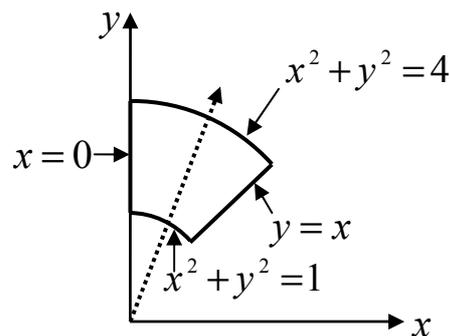


Рис. 13. Область D .

Вычислить двойной интеграл по области D проще в полярных координатах, поэтому перепишем область D в переменных ρ и φ :

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4; \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1;$$

$$y = x \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}; \quad x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2},$$

т.е. угол φ изменяется в пределах $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$. Тогда:

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_1^2 \rho d\rho \right] d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_1^2 d\varphi = \frac{3\varphi}{2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить $\iint_D dx dy$, если D ограничена линией $x^2 + y^2 = R^2$. В этом случае $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2 \rightarrow \rho \in [0; R]$, а угол φ изменяется в пределах $\varphi \in [0; 2\pi]$. Так как окружность симметрична относительно координатных осей, то достаточно вычислить данный интеграл в первой четверти и умножить результат на 4:

$$\iint_D dx dy = \iint_D \rho d\rho d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R \rho d\rho \right] d\varphi = 2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi R^2.$$

Вычислим этот же интеграл в декартовых координатах:

$$\iint_D dx dy = 4 \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R-x^2}} dy \right] dx = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \left| \begin{array}{l} x = R \sin t \\ dx = R \cos t dt \end{array} \right| =$$

x	0	R
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$$= 4 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2t)] dt = 2 R^2 \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2.$$

Отсюда видно, что выбор тех или иных переменных может значительно упростить вычисление кратных интегралов.

63. “Использование кратных интегралов в геометрических и механических задачах”

63.1. Геометрические приложения кратных интегралов

1. Вычисление площади плоской области. Площадь плоской фигуры равна $S_D = \iint_D dx dy$. Если область D правильная, то площадь вычисляется с помощью повторного интеграла

$$S = \int_a^b \left[\int_{\zeta(x)}^{\psi(x)} dy \right] dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b [\psi(x) - \zeta(x)] dx$$

(см. также п.32.1, **32**).

Пример 1. Вычислить площадь области D (рис. 14), которая ограничена линиями $y = 3 - x^2$ и $y = 2x$.

Определим точки пересечения данных кривых. В точках пересечения линий $y = 3 - x^2$ и $y = 2x$ ординаты точек пересечения равны между собой, т.е. $2x = 3 - x^2$, откуда $x^2 + 2x - 3 = 0$. По **теореме Виета** корни квадратного уравнения удовлетворяют системе равенств

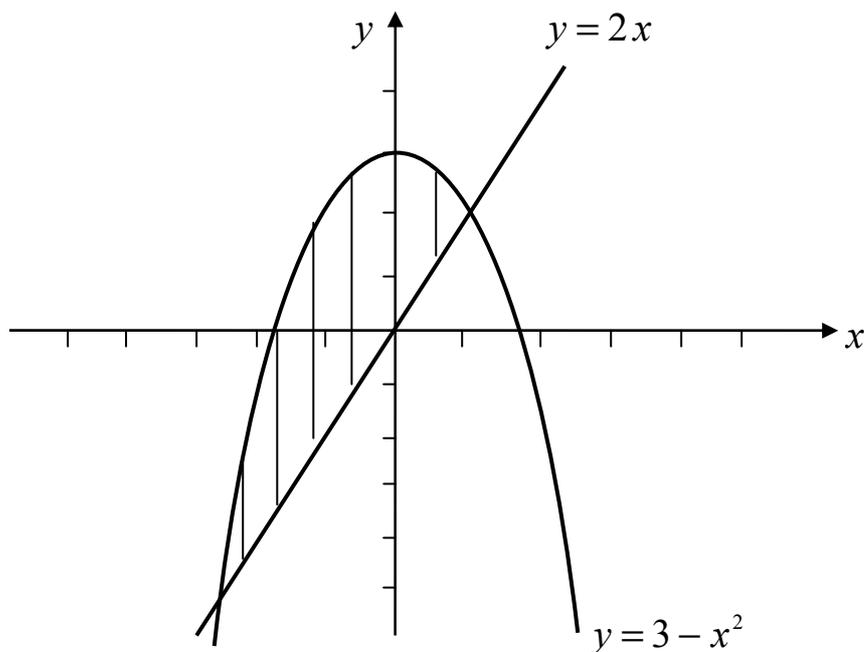


Рис. 14. Плоская фигура.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases}, \text{ т.е. } x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 1. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_{-3}^1 \left[\int_{2x}^{3-x^2} dy \right] dx = \int_{-3}^1 y \Big|_{2x}^{3-x^2} dx = \int_{-3}^1 (3 - x^2 - 2x) dx = \\ &= 3 \int_{-3}^1 dx - \int_{-3}^1 x^2 dx - 2 \int_{-3}^1 x dx = 3x \Big|_{-3}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^1 - 2 \frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^1 = \\ &= 3(1 - (-3)) - \frac{1}{3}(1^3 - (-3)^3) - (1^2 - (-3)^2) = \frac{32}{3} \text{ (ед. пл.)}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры D , ограниченную линиями $y = 2$; $y = 4$; $y = \frac{4}{x}$ и $y = 3e^x$ (рис. 15).

Определим точки пересечения данных кривых.

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_2^4 \left[\int_{\ln\left(\frac{y}{3}\right)}^{\frac{4}{y}} dx \right] dy = \int_2^4 x \Big|_{\ln\left(\frac{y}{3}\right)}^{\frac{4}{y}} dy = \int_2^4 \left(\frac{4}{y} - \ln\left(\frac{y}{3}\right) \right) dy = 4 \int_2^4 \frac{dy}{y} - \int_2^4 \ln\left(\frac{y}{3}\right) dy = \\ &= 4 \ln y \Big|_2^4 - \left. \begin{array}{l} t = \frac{y}{3} \\ y = 3t, \quad dy = 3 dt \end{array} \right|_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} = 4 \ln\left(\frac{4}{2}\right) - 3 \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \ln t dt = 4 \ln 2 - 3 \left. \begin{array}{l} U = \ln t \quad dV = dt \\ dU = \frac{dt}{t} \quad \leftarrow V = t \end{array} \right|_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} = \end{aligned}$$

y	2	4
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

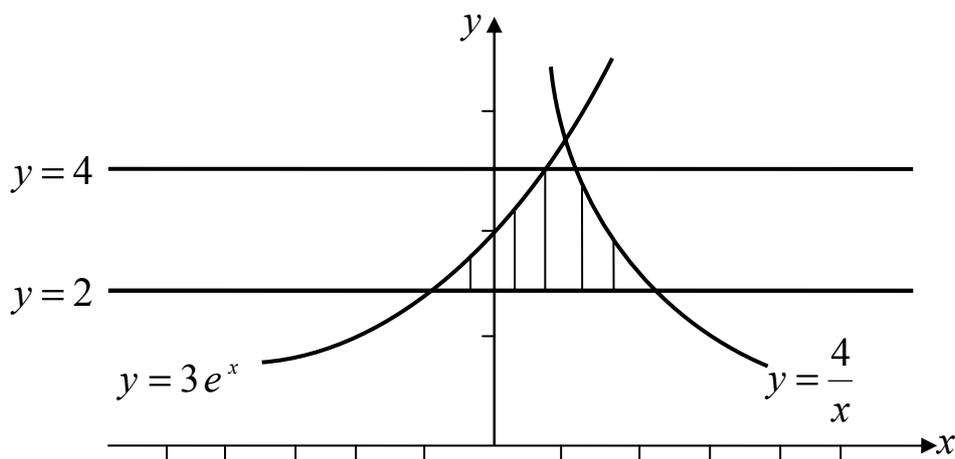


Рис. 15. Плоская фигура.

$$\begin{aligned}
 &= 4 \ln 2 - 3 \left(t \ln t \Big|_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} - \int dt \right) = 4 \ln 2 - 3 \left(\frac{4}{3} \ln \left(\frac{4}{3} \right) - \frac{2}{3} \ln \left(\frac{2}{3} \right) - t \Big|_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \right) = \\
 &= 4 \ln 2 - 4 \ln 4 + 4 \ln 3 + 2 \ln 2 + 2 \ln 3 + 2 = 6 \ln 3 - 2 \ln 2 + 2 \ln e = \ln \left(\frac{729 \cdot e^2}{4} \right) \text{ (ед.пл.)}.
 \end{aligned}$$

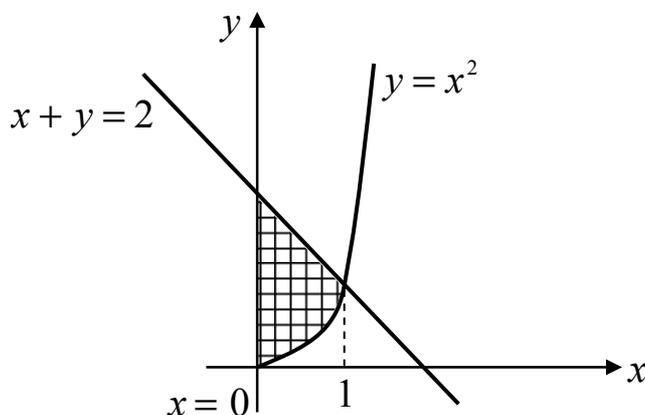
2. Объём цилиндрического тела, которое ограничено сверху поверхностью $z = f(x; y)$, вычисляется по формуле:

$$V_{\text{цил.}} = \iint_D f(x; y) dx dy = \iiint_V dx dy dz.$$

Пример 3. Вычислить объём тела V , которое ограничено заданными

$$\text{поверхностями: } \begin{cases} x + y = 2, & y = x^2 \\ z = \frac{9x}{5}, & z = 0 \end{cases}.$$

На плоскости xOy проекция заданного цилиндрического тела имеет вид, показанный на рис. 16 (плоскость $z = \frac{9x}{5}$ проектируется на эту плоскость в виде прямой $x = 0$):

Рис. 16. Проекция цилиндрического тела на плоскости xOy .

Определим абсциссу точки пересечения линий $y = x^2$ и $x + y = 2$, для чего приравняем ординаты: $x^2 = 2 - x$, откуда $x^2 + x - 2 = 0$. По **теореме Виета** корни квадратного уравнения удовлетворяют системе равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}, \text{ т.е. } x_1 = -2 \text{ (лежит вне заданной области)} \text{ и } x_2 = 1.$$

Следовательно (будем использовать тройной интеграл),

$$\begin{aligned} V_{\text{цил.}} &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{2-x} \left\{ \int_0^{\frac{9x}{5}} dz \right\} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{2-x} z \Big|_0^{\frac{9x}{5}} dy \right] dx = \frac{9}{5} \int_0^1 x y \Big|_{x^2}^{2-x} dx = \\ &= \frac{9}{5} \int_0^1 x y \Big|_{x^2}^{2-x} dx = \frac{9}{5} \left(\int_0^1 x(2-x-x^2) dx \right) = \frac{9}{5} \left(2 \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx \right) = \\ &= \frac{9}{5} \left(2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \frac{9}{5} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} \text{ (ед. об.)}. \end{aligned}$$

Пусть данное цилиндрическое тело ограничено сверху поверхностью $z = f(x; y) \geq 0$, а снизу – поверхностью $z = \psi(x; y) \geq 0$, причём проекция-ми обеих поверхностей на плоскость xOy является область D . Объём V тела равен разности объёмов двух цилиндрических тел: первое из этих тел имеет нижним основанием область D , а верхним – поверхность $z = f(x; y)$ (объём V_1); второе тело имеет нижним основанием область D , а верхним – поверхность $z = \psi(x; y)$ (объём V_2) (рис. 17).

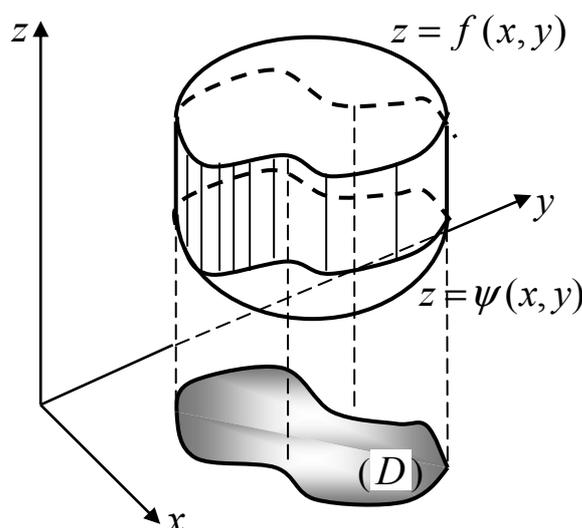


Рис. 17. Объём цилиндрического тела.

Поэтому объём V равен

$$V_{\text{цил.}} = \iint_D [f(x; y) - \psi(x; y)] dx dy = \iiint_{V_1} dx dy dz - \iiint_{V_2} dx dy dz.$$

Формула остаётся неизменной во всех случаях, когда $f(x; y) \geq \psi(x; y)$.

○ Если в области D функция $f(x,y)$ изменяет свой знак, то область D разбивается на две части: 1) область D_1 , в которой $f(x,y) \geq 0$; 2) область D_2 , в которой $f(x,y) \leq 0$. Если области D_1 и D_2 таковы, что двойные (тройные) интегралы по этим областям существуют, то интеграл по области D равен разности соответствующих объёмов по областям D_1 и D_2 . ○

○ Для определения области D находим линию, которая ее ограничивает, и проектируем её на плоскость xOy . ○

3. Площадь криволинейной поверхности S , заданной уравнением $z = f(x,y)$ вычисляется по формуле: $S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$, где область D – проекция поверхности S на плоскость xOy .

Пример 4. Вычислить поверхность S сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Вычислим поверхность верхней четверти сферы (рис. 18а) по области D (рис. 18б).

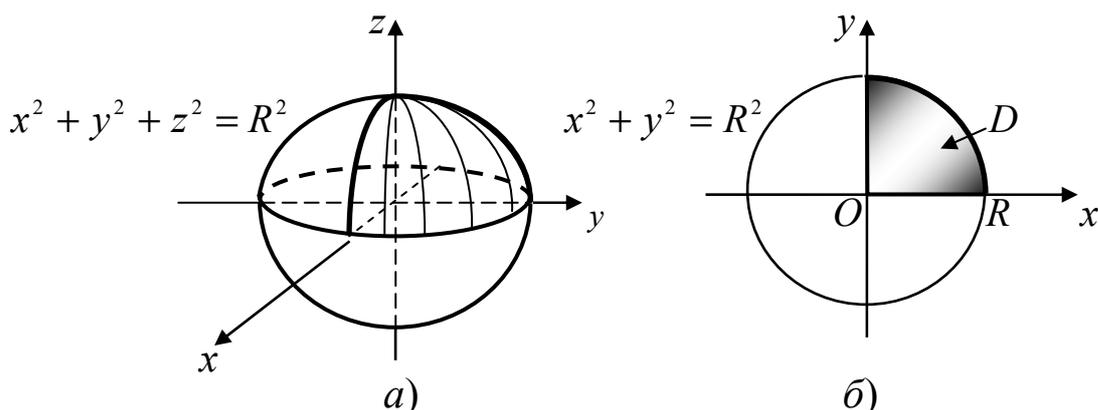


Рис. 18. Площадь поверхности сферы и область D .

В данном случае $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, следовательно, первые частные производные равны:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \text{ и } z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Подынтегральная функция принимает вид:

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Поверхность сферы определим по формуле:

$$S = 8 \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy \right) dx =$$

(перейдём в полярную систему координат)

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\varphi =$$

(воспользуемся методом замены переменной интегрирования в определённом интеграле, при этом пересчитаем пределы интегрирования)

$$= 8 \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{R^2 - \rho^2} \\ dt = -\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \end{array} \right| = (\text{для того чтобы убрать возникающий от } dt \text{ знак}$$

ρ	0	R
t	R	0

минус, обменяем местами пределы интегрирования)

$$= 8R \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R dt \right) d\varphi = 8R \int_0^{\pi/2} t \Big|_0^R d\varphi = 8R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = 8R^2 \varphi \Big|_0^{\pi/2} = 4\pi R^2.$$

63.2. Применение кратных интегралов в физических задачах

Объёмной плотностью тела $\gamma = \gamma(x, y)$ называют отношение его массы к его объёму.

Бесконечно тонкой пластиной называют такую пластину, изменением плотности которой в направлении оси аппликат можно пренебречь по сравнению с изменениями плотности вещества в плоскости xOy .

1. Масса бесконечно тонкой пластины с плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$.

Рассмотрим *бесконечно тонкую пластину*, расположенную на плоскости xOy в виде области D . При *постоянной плотности* пластины ($\gamma = \text{const}$) масса однородной пластины равна $M = \gamma S_D$, где S_D – площадь пластины.

Масса неоднородной пластины ($\gamma \neq \text{const}$) вычисляется по формуле: $M = \iint_D \gamma(x; y) dx dy$. В трёхмерном пространстве масса пластины определяется формулой $M = \iiint_V \gamma(x; y; z) dx dy dz$.

Пример 5. Найти массу бесконечно тонкой пластины D , ограниченной линиями $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, если ее плотность в каждой точке равна

$$\gamma(x, y) = xy.$$

Область D в **Примере 5** соответствует области рис. 18б при $x \in [0; 2]$ и $y \in [0; \sqrt{4 - x^2}]$. Следовательно, масса пластины равна:

$$M = \iint_D \gamma(x, y) dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy \right] dx = \int_0^2 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x(4-x^2) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} t = 4 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{4} \int_4^0 t dt = \frac{1}{4} \int_0^4 t dt = \frac{1}{4} \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 = 2 \text{ (ед. массы).}$$

x	0	2
t	4	0

2. Координаты центра тяжести бесконечно тонкой пластины вычисляются по формулам:

$$x_{ц.м.} = \frac{\iint_D xy(x; y) dx dy}{\iint_D \gamma(x; y) dx dy}, \quad y_{ц.м.} = \frac{\iint_D y \gamma(x; y) dx dy}{\iint_D \gamma(x; y) dx dy}.$$

Из этих формул видно, что в знаменателях дробей стоит масса пластины, а величины, которые находятся в числителях дробей называются **статическими моментами**.

В трёхмерном пространстве эти формулы имеют вид:

$$x_{ц.м.} = \frac{\iiint_V x \gamma(x; y; z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x; y; z) dx dy dz}, \quad y_{ц.м.} = \frac{\iiint_V y \gamma(x; y; z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x; y; z) dx dy dz},$$

$$z_{ц.м.} = \frac{\iiint_V z \gamma(x; y; z) dx dy dz}{\iiint_V \gamma(x; y; z) dx dy dz}.$$

Пример 6. Вычислить координаты центра тяжести пластины, вид которой определяется областью $D: \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 0, y = 0 \end{cases}$, если её плотность в каждой точке определяется зависимостью $\gamma(x; y) = x + y$.

Изобразим область D на плоскости (рис. 19). Вначале вычислим массу пластины:

$$M = \iint_D \gamma(x, y) dx dy = \int_0^6 \left[\int_0^{6-x} (x+y) dy \right] dx = \int_0^6 \left(xy \Big|_0^{6-x} + \frac{y^2}{2} \Big|_0^{6-x} \right) dx = \int_0^6 \left(x(6-x) + \frac{(6-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= 18 \int_0^6 dx - \frac{1}{2} \int_0^6 x^2 dx = 18x \Big|_0^6 - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^6 = 108 - 36 = 72 \text{ (ед. массы).}$$

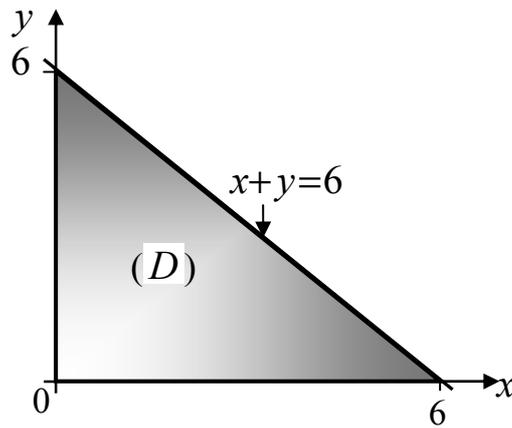


Рис. 19. Треугольная бесконечно тонкая пластина.

Найдём статические моменты для данной бесконечно тонкой пластины:

$$M_x = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy = \int_0^6 \left[\int_0^{6-x} x(x+y) dy \right] dx = \int_0^6 \left(x^2 y \Big|_0^{6-x} + x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{6-x} \right) dx =$$

$$= \int_0^6 \left(-x^3 + 18x + \frac{x^3}{2} \right) dx = 18 \int_0^6 x dx - \frac{1}{2} \int_0^6 x^3 dx = 18 \frac{x^2}{2} \Big|_0^6 - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^6 = 162 .$$

$$M_y = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy = \int_0^6 \left[\int_0^{6-x} y(x+y) dy \right] dx = \int_0^6 \left(x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{6-x} + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{6-x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^6 (6-x)^2 (12+x) dx = \frac{1}{6} \left(\int_0^6 x^3 dx - 108 \int_0^6 x dx + 432 \int_0^6 dx \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^6 - 108 \frac{x^2}{2} \Big|_0^6 + 432 x \Big|_0^6 \right) = 162 .$$

Таким образом, координаты центра масс равны:

$$x_{ц.м.} = \frac{M_x}{M} = \frac{162}{72} = \frac{9}{4}, \quad y_{ц.м.} = \frac{M_y}{M} = \frac{162}{72} = \frac{9}{4}.$$

3. Моменты инерции пластины.

Моментом инерции материальной точки P , имеющей массу m относительно произвольной оси называется произведение массы на квадрат расстояния от точки P до этой оси.

Моменты инерции пластины относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x; y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x; y) dx dy.$$

Центробежным моментом инерции называется величина, вычисляемая по формуле: $I_{xy} = \iint_D xy \gamma(x; y) dx dy$.

Полярным моментом инерции называется величина, вычисляемая по формуле:
$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x; y) dx dy = I_x + I_y.$$

В трёхмерном пространстве эти величины задаются формулами:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy \gamma(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_{yz} = \iiint_V yz \gamma(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_{zx} = \iiint_V zx \gamma(x; y; z) dx dy dz;$$

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x; y; z) dx dy dz.$$

Пример 7. Найти все моменты пластины $D: \begin{cases} x=0, & x=1 \\ y=0, & y=1 \end{cases}$, если её плотность в каждой точке определяется зависимостью $\gamma(x; y) = x$.

Вычислим требуемые характеристики

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x; y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 y^2 x dy \right] dx = \int_0^1 x \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x dx = \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6};$$

$$I_y = \iint_D x^2 \gamma(x; y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 x^3 dy \right] dx = \int_0^1 x^3 y \Big|_0^1 dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4};$$

$$I_{xy} = \iint_D xy \gamma(x; y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 yx^2 dy \right] dx = \int_0^1 x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6};$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x; y) dx dy = I_x + I_y = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

64. “Криволинейные интегралы”

64.1. Криволинейный интеграл 1-го рода

Плоской кривой называется линия, все точки которой лежат в одной плоскости.

Плоская кривая называется **ориентированной**, если указано направление её обхода от одного её конца к другому.

○ Направление обхода плоской кривой обычно указывают либо “по часовой стрелке”, либо “против часовой стрелки”. ○

Пусть дана незамкнутая плоская кривая $L = AB$, на которой определена функция $z = f(x; y)$ (рис. 20). Выполним следующие действия:
– произвольными точками разобьём кривую $L = AB$ на n частей;

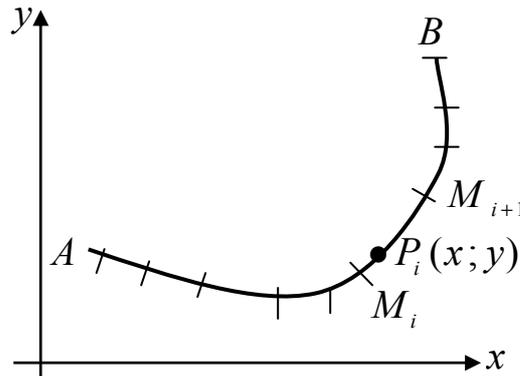


Рис. 20. Разбиение плоской кривой на произвольные части.

– обозначим длину элементарного отрезка Δl_i , а наибольшую из длин этих отрезков через $\Delta l = \max_i \{ \Delta l_i \}$;

– на каждом отрезке $M_i M_{i+1}$ выберем произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$ и вычислим значение функции $z_i = f(x_i; y_i)$;

– просуммируем произведения $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta l_i$.

Если существует предел $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta l_i$, то он называется **криволинейным интегралом 1-го рода**.

$$\text{Обозначение: } \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta l_i = \int_L f(x; y) dl.$$

○ Если кривая, по которой ведётся интегрирование замкнутая, то произвольная точка на ней принимается за начальную и конечную точки. ○

○ В определении криволинейного интеграла 1-го рода не упоминается об ориентации кривой L , поэтому он не зависит от направления обхода данной кривой. ○

Теорема 1. (о существовании криволинейного интеграла первого рода) Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна и ограничена на кривой L , за исключением конечного числа точек, то криволинейный интеграл 1-го рода существует.

Криволинейный интеграл 1-го рода путём параметризации кривой

L сводится к обычному определённому интегралу, поэтому он обладает всеми его свойствами. Например, если кривая L задаётся системой

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

то криволинейный интеграл 1-го рода сводится к интегралу:

$$\int_L f(x; y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t); y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

(см. вычисление длин плоских линий в **32**). Если кривая L задаётся в виде явной функции $y = y(x)$, то криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_L f(x; y) dl = \int_a^b f(x; y(x)) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

В случае, когда кривая L задаётся в полярной системе координат функцией $\rho = \rho(\varphi)$, криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\int_L f(x; y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho; \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} d\varphi.$$

● Если функция $f(x; y) = 1$, то криволинейный интеграл первого рода приводит к вычислению длины кривой L . ●

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L (x + 2y) dl$,

если L задана уравнениями $\begin{cases} y = 0, \text{ при } x \in [0; 1] \\ x = 1, \text{ при } y \in [0; 2] \end{cases}$.

Вид кривой L показан на рис. 21:

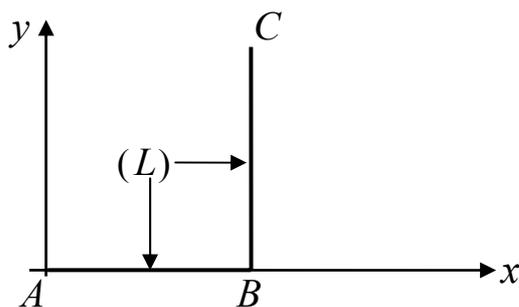


Рис. 21. Кривая L , по которой ведётся интегрирование.

Так как криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления интегрирования и обладает свойством аддитивности, то данный интеграл разбивается на два интеграла:

$$\int_L (x + 2y) dl = \int_{AB} (x + 2y) dl + \int_{BC} (x + 2y) dl.$$

В первом интеграле переменная $y = 0$ при $x \in [0; 1]$, а во втором — $x = 1$ при $y \in [0; 2]$. Следовательно,

$$\int_{AB} (x+2y)dl = \int_0^1 (x+2 \cdot 0)dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \int_{BC} (x+2y)dl = \int_0^2 (1+2y)dy = (y+y^2) \Big|_0^2 = 6,$$

а криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L (x+2y)dl = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$.

○ Аналогично криволинейный интеграл 1-го рода вводится и на пространственной кривой. ○

Пример 2. Вычислить массу части параболы $y=1-x^2$ от точки $A(-2;-3)$ до точки $B(1;0)$, если её линейная плотность $\gamma(x; y)=2x$.

Масса линии определяется формулой $M = \int_L \gamma(x; y) dl$. В силу того, что линия задана в виде явной функции, то масса заданной части параболы равна (обращаем внимание на неверное решение, которое приведено ниже):

$$M = \int_L \gamma(x; y) dl = \int_L \gamma(x; y) \sqrt{1+(y'_x)^2} dx = \int_{-2}^1 2x \sqrt{1+(-2x)^2} dx = \left. \begin{array}{l} t = 1+4x^2 \\ dt = 8x dx \\ 2x dx = dt/4 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{17}^5 \sqrt{t} dt = -\frac{1}{4} \int_5^{17} \sqrt{t} dt = -\frac{1}{4} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_5^{17} = -\frac{1}{6} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) < 0,$$

x	-2	1
t	17	5

но масса – величина всегда положительная!!! Ошибка состоит в том, что при $x \in [-2; 0]$ линейная плотность становится отрицательной, хотя она тоже всегда положительная величина. Поэтому бездумное применение математических формул приводит к физически неправильным результатам. Правильное (и математическое, и физическое) решение имеет вид:

$$M = \int_L \gamma(x; y) dl = \int_L \gamma(x; y) \sqrt{1+(y'_x)^2} dx = -\int_{-2}^0 2x \sqrt{1+(-2x)^2} dx + \int_0^1 2x \sqrt{1+(-2x)^2} dx =$$

$$= -\left. \begin{array}{l} t = 1+4x^2 \\ dt = 8x dx \\ 2x dx = dt/4 \end{array} \right|_{-2}^0 + \left. \begin{array}{l} t = 1+4x^2 \\ dt = 8x dx \\ 2x dx = dt/4 \end{array} \right|_0^1 = \frac{1}{4} \left(-\int_{17}^1 \sqrt{t} dt + \int_1^5 \sqrt{t} dt \right) = \frac{1}{4} \left(\int_1^{17} \sqrt{t} dt + \int_1^5 \sqrt{t} dt \right) =$$

x	-2	0
t	17	1

x	0	1
t	1	5

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_1^{17} + \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_1^5 \right) = \frac{1}{6} (17\sqrt{17} + 5\sqrt{5} - 2) (\text{ед. массы}).$$

64.2. Криволинейный интеграл 2-го рода

Простой замкнутой кривой называется линия без самопересечений.

Пусть дана ориентированная плоская кривая $L = AB$, на которой определена функция $z = f(x; y)$ (рис. 22). Выполним следующие действия:

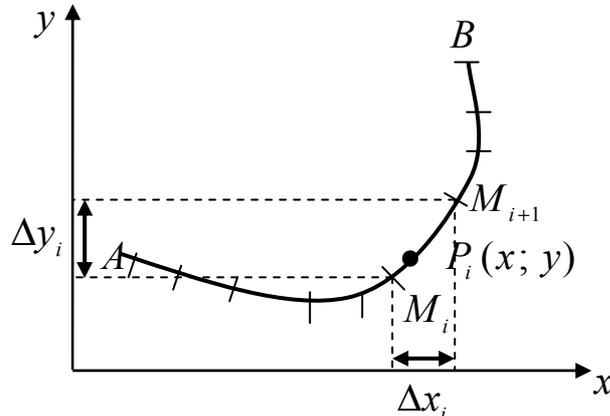


Рис. 22. Разбиение плоской кривой на произвольные части.

- произвольными точками разобьём кривую $L = AB$ на n частей;
- обозначим проекции длин элементарных отрезков Δl_i на соответствующие координатные оси через Δx_i и Δy_i , а наибольшую из длин этих отрезков через $\Delta l_x = \max_i \{ \Delta x_i \}$ и $\Delta l_y = \max_i \{ \Delta y_i \}$;
- на каждом отрезке $M_i M_{i+1}$ выберем произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$ и вычислим значение функции $z_i = f(x_i; y_i)$;
- просуммируем произведения $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta x_i$ или $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta y_i$.

Если существует предел $\lim_{\Delta l_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta x_i$ $\left(\lim_{\Delta l_y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta y_i \right)$, то он называется **криволинейным интегралом 2-го рода**.

Обозначение:
$$\lim_{\Delta l_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta x_i = \int_L f(x; y) dx$$

$$\left(\lim_{\Delta l_y \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta y_i = \int_L f(x; y) dy \right).$$

Для криволинейных интегралов 2-го рода сохраняются свойства линейности, аддитивности (см. **30**) и дополнительно появляется свойство **антиориентированности**: $\int_{AB} f(x; y) dx = - \int_{BA} f(x; y) dx$, которое связано с изменением знака приращения Δx_i при изменении направления обхода кривой.

Пусть на *ориентированной плоской кривой* заданы две функции $f(x; y)$ и $g(x; y)$, существуют криволинейные интегралы второго рода $\int_L f(x; y) dx$ и $\int_L g(x; y) dy$. Тогда их сумма

$$\int_L f(x; y) dx + \int_L g(x; y) dy = \int_L [f(x; y) dx + g(x; y) dy]$$

называется **общим криволинейным интегралом 2-го рода**.

Если кривая L задаётся системой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то криволинейный интеграл 2-го рода сводится к интегралу:

$$\int_L [f(x; y) dx + g(x; y) dy] = \int_{t_1}^{t_2} [f(x(t); y(t)) x'_t + g(x(t); y(t)) y'_t] dt$$

Если кривая L задаётся в виде явной функции $y = y(x)$, то криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_L [f(x; y) dx + g(x; y) dy] = \int_a^b [f(x; y(x)) + g(x; y(x)) y'_x] dx.$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\int_L [y^2 dx + x dy]$, если кривая L задана уравнением $4x = y^2$ при $y \in [0; 2]$.

В этом примере переменная x задана как функция аргумента y , следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L [y^2 dx + x dy] &= \int_0^2 [y^2 x'_y(y) + x(y)] dy = \int_0^2 \left[y^2 \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y^3 dy + \frac{1}{4} \int_0^2 y^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 + \frac{1}{4} \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Пусть надо вычислить работу, совершаемую силой

$$\mathbf{F} = (F_x(x; y); F_y(x; y)),$$

по перемещению материальной точки вдоль *ориентированной плоской кривой* L . При бесконечно малом движении вдоль кривой L , которое задаётся вектором смещения $ds = (dx; dy)$, сила совершает работу, равную скалярному произведению вектора силы на вектор смещения

$$dA = \mathbf{F} \cdot ds \text{ (см. } \underline{5}\text{),}$$

следовательно,

$$dA = F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy.$$

Таким образом, работа, которую выполнила сила, равна

$$A = \int_L [F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy].$$

Пример 4. Вычислить работу, совершаемую силой $F = (x; y)$, по перемещению материальной точки вдоль данной *ориентированной* плоской кривой L : $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, при $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Вычислим работу с учётом параметрического задания кривой L :

$$\begin{aligned} A &= \int_L [F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 \cos t (-2 \sin t) + \sin t \cos t] dt = \\ &= -3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \cos t dt = -\frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t) dt = -\frac{3}{2} \left(-\frac{\cos(2t)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \cos 0 \right) = \\ &= -\frac{3}{4} \text{ (ед. работы)}. \end{aligned}$$

64.3. Формула Грина

Обход области D называется *положительным*, если при движении по границе области D *против часовой стрелки* она остаётся слева; в *противном* случае обход называется *отрицательным*.

Теорема 2. Пусть функции $f(x; y)$, $g(x; y)$ и их первые частные производные непрерывны в замкнутой области D , тогда справедлива **формула Грина**:

$$\oint_{\Gamma_D} [f(x; y) dx + g(x; y) dy] = \iint_D \left[\frac{\partial g(x; y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right] dx dy.$$

Из **формулы Грина** видно, что при равенстве частных производных $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x; y)}{\partial x}$ криволинейный интеграл 2-го рода обращается в нуль,

причём его подинтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции. Другими словами, если подинтегральное выражение в криволинейном интеграле второго рода является полным дифференциалом, то интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю и интеграл не зависит от вида кривой интегрирования.

Пример 5. Проверить выполнимость **формулы Грина** путём непосредственного вычисления криволинейного интеграла $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right]$ и с помо-

щью двойного интеграла, если область D : $\begin{cases} y = 1, \text{ при } x \in [1; 2] \\ x = 2, \text{ при } y \in [1; 2] \\ y = x, \text{ при } x \in [1; 2] \end{cases}$.

Изобразим область D на плоскости xOy (рис. 23).

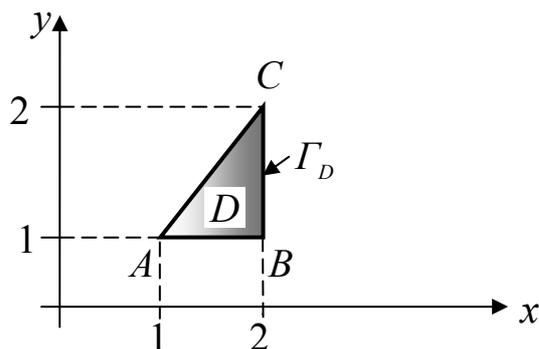


Рис. 23. Область D и её граница Γ_D .

Проведём непосредственное вычисление криволинейного интеграла при положительном обходе области D (на участке AB имеем $y=1$, $dy=0$, $x \in [1;2]$; на участке BC имеем $x=2$, $dx=0$, $y \in [1;2]$; на участке CA имеем $y=x$, $dy=dx$, $x \in [1;2]$):

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right] &= \int_{AB} \left[\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right] + \int_{BC} \left[\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right] + \int_{CA} \left[\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right] = \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{1} - \int_1^2 \frac{dy}{2} + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right] dx = x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} y \Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим этот интеграл, применив формулу Грина, здесь

$$f(x; y) = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \text{ и } g(x; y) = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial g(x; y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D \left[\frac{\partial g(x; y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \right] dx dy &= \iint_D \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right] dx dy = \int_1^2 \left[\int_1^x \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) dy \right] dx = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{y}{x^2} \Big|_1^x - \frac{1}{y} \Big|_1^x \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 \right) dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= x \Big|_1^2 + \frac{1}{x} \Big|_1^2 = 2 - 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть введены на кривых поверхностях поверхностные интегралы

$$\begin{aligned} &1\text{-го } \iint_D f(x; y; z) ds \text{ и } 2\text{-го родов } \iint_D f(x; y; z) dx dy \\ & \left(\iint_D f(x; y; z) dy dz \text{ или } \iint_D f(x; y; z) dx dz \right). \end{aligned}$$

Если криволинейный интеграл второго рода задаётся на пространственной кривой, то **формула Грина** преобразовывается в **формулу**

Стокса:

$$\oint_{\Gamma_D} [f(x; y; z) dx + g(x; y; z) dy + h(x; y; z) dz] = \iint_D \left[\frac{\partial g(x; y; z)}{\partial x} - \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial y} \right] dx dy + \\ + \iint_D \left[\frac{\partial h(x; y; z)}{\partial y} - \frac{\partial g(x; y; z)}{\partial z} \right] dy dz + \iint_D \left[\frac{\partial f(x; y; z)}{\partial z} - \frac{\partial h(x; y; z)}{\partial x} \right] dz dx.$$

Эту формулу можно записать в свёрнутом виде, если использовать обозначения векторной алгебры. Введём в рассмотрение следующие векторы:

$$\mathbf{H} = (f(x; y; z); g(x; y; z); h(x; y; z)), \\ d\mathbf{l} = (dx; dy; dz), \quad \mathbf{n} ds = (dxdy; dydz; dzdx),$$

ротора (“вихрь”)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \left(\frac{\partial h(x; y; z)}{\partial y} - \frac{\partial g(x; y; z)}{\partial z}, \frac{\partial h(x; y; z)}{\partial x} - \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial z}, \frac{\partial g(x; y; z)}{\partial x} - \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial y} \right)$$

$$\boxed{\oint_{\Gamma_D} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_D \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} ds.}$$

Введённый ранее **оператор Гамильтона** “**градиент**” (grad)

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}}$$

и оператор “**вихря**”

$$\text{rot} = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

используются при исследовании скалярных, векторных и тензорных полей.

65. “Теория поля”

65.1. Скалярное поле

Размерностью геометрического объекта называется количество характеристик, определяющих этот объект.

Пример 1. Точка – объект размерности нуль, так как она не имеет ни длины, ни широты, ни высоты; линия – объект с топологической размерностью один, так как она имеет длину, но не имеет ни широты, ни высоты; плоскость – объект размерности два, так как она имеет длину и широту, но не имеет высоты; тело – объект размерности три, так как оно имеет длину, широту и высоту.

Понятие размерности геометрических тел было перенесено на размерность пространства, в котором исследуют поведение физических систем.

Говорят, что в пространстве с определённой размерностью *задано поле*, если в каждой точке этого пространства известно значение некоторой функции.

Поля разделяют на *скалярные* (например, поле температур), *векторные* (например, поле сил) и *тензорные* (например, поле деформаций) поля.

Поле называется *стационарным*, если в каждой точке пространства оно не меняется с течением времени, в противном случае поле называется *нестационарным*.

● Если поле задано функцией $f(x; y; z; t)$, то *стационарное* поле характеризуется отсутствием явной зависимости от времени t , т.е. оно определяется функцией $f(x; y; z)$. ●

Поле называется *плоским*, если оно задано в одной из координатных плоскостей, например, $f(x; y)$.

Если в пространстве дано *скалярное, стационарное* поле, то оно характеризуется своим градиентом, который указывает направления наиболее быстрого роста функции. Рассмотрим горячий объект в термостате (рис. 24). Из рис. 24 видно: чем быстрее меняется поле, тем длиннее градиент, который всегда направлен в сторону возрастания функции (к “печке”).

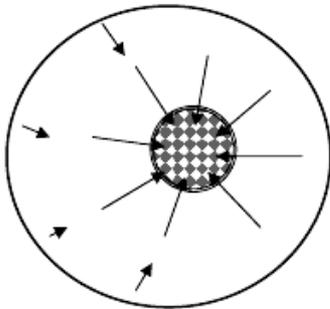


Рис. 24. Нагретое тело и направление градиента температуры.

Градиент скалярного поля образует векторное поле. Далее (раздел “*Тензорная алгебра*”) будет показано, что при преобразовании декартовой системы координат изменяются проекции вектора, но не сам вектор. Следовательно, градиент является инвариантной (*не изменяющейся*) величиной при переходе от одной декартовой системы отсчёта к другой. Градиент тесно связан с *поверхностями уровня*, которым он перпендикулярен, и на которых скалярное поле постоянно, т.е. $f(x; y; z) = const$. В зависимости от физического содержания исследуемого поля такие поверхности называются *изотермическими, изобарическими* и т.п. Там, где поверхности уровня сближаются, градиент увеличивается.

Поле называется *центрально-симметричным*, если оно задаётся функцией, которая зависит только от расстояния между точками, но не от углов, т.е. описывается функцией $f(r)$, где расстояние между точками определяется формулой

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример 2. Вычислить градиент центрально-симметричного, плоского поля, если источник поля помещён в начало координат.

Для данного примера расстояние между точками определяется формулой $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вычислим первые частные производные функции, задающей центрально-симметричное поле:

$$f'_x(r) = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r} \quad \text{и} \quad f'_y(r) = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{df}{dr} \frac{y}{r}.$$

Следовательно, градиент поля равен

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \left(\frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} \right) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{df}{dr} \mathbf{e}_r,$$

где \mathbf{e}_r – единичный вектор в направлении радиус-вектора \mathbf{r} . На рис. 25 показаны линии уровня и направления полей в зависимости от знака производной $\frac{df}{dr}$.

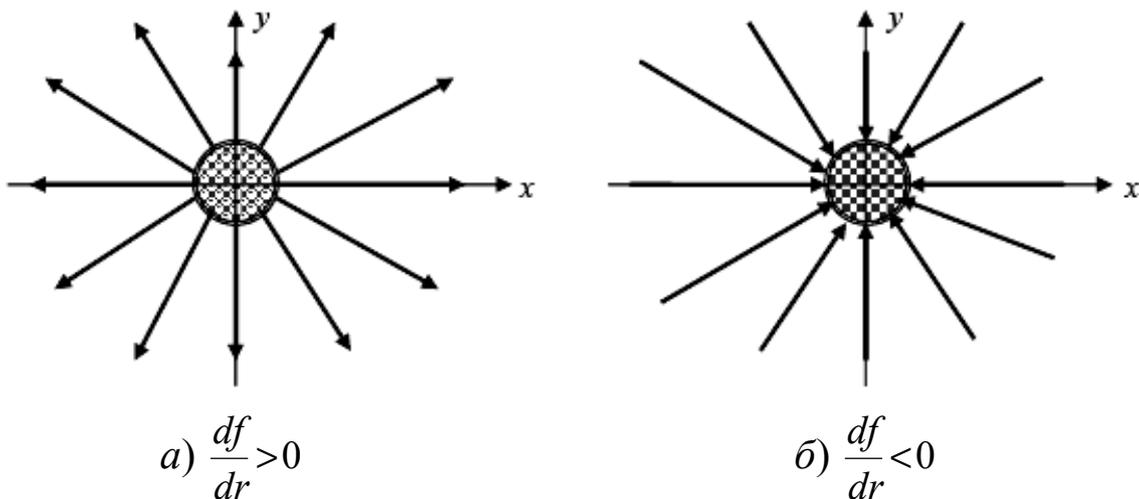


Рис. 25. Направление градиентов и линии уровня для двух знаков производной $\frac{df}{dr}$.

В теории электромагнетизма Максвелла стационарное электрическое поле определяется как векторная величина противоположно направленная градиенту потенциала $f(r)$, т.е. $\mathbf{E} = -\nabla f(r)$. В этой теории принято в случае а) говорить об отрицательном заряде (электрическое поле направлено к заряду), а в случае б) – о положительном (электрическое поле направлено от заряда). Таким образом, изучение *скалярного поля* позволяет описать его поведение с помощью градиента и ввести дополнительно две новые величины: положительный и отрицательный заряды.

65.2. Потенциальная энергия и сила

Поле называется **силовым**, если в каждой точке пространства задано векторное поле $\mathbf{F} = (F_x(x; y; z); F_y(x; y; z); F_z(x; y; z))$.

Перепишем работу, производимую силой, т.е её выражение с использованием векторной формы (материальная точка перемещается силой \mathbf{F} на расстояние $d\mathbf{r}$ вдоль линии L со скоростью движения $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$):

$$A = \int_L [F_x(x; y; z)dx + F_y(x; y; z)dy + F_z(x; y; z)dz] = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} dt.$$

Произведение действующей силы \mathbf{F} на скорость перемещения \mathbf{V} называется **мощностью** и обозначается $N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$.

Это понятие позволяет определить работу, как выделенную мощность за определённый промежуток времени и записать работу в виде следующей формулы:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} N dt.$$

Тогда мощность можно переопределить, как работу, выполняемую силой \mathbf{F} за единицу времени $N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = \frac{dA}{dt}$. Для целого ряда физических полей совершаемая работа на замкнутой траектории движения равна нулю, т.е. $A = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Это означает, что на одном участке сила производит работу, а на другом участке тело движется против силы, возвращая накопленную им энергию силовому полю.

Интеграл вида $\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ называется **циркуляцией**.

Если **циркуляция равна нулю**, то криволинейный интеграл 2-го рода не зависит от вида линии L , а подинтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $U(\mathbf{r})$, причём изменение работы, произведённой силой, противоположно по знаку изменению потенциальной энергии: $dA = -dU(\mathbf{r})$.

Функция $U(\mathbf{r})$ называется **потенциальной энергией**, а определяемые такой функцией поля – **потенциальными**.

Так как $dA = -dU(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, то

силу можно определить через градиент потенциальной энергии

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U(r)}$$

Пример 3. Определить вид функциональной зависимости силы \mathbf{F} в случае *центрально-симметричного поля*, если потенциальная энергия поля задаётся формулой $U(r) = -\frac{k}{r}$.

Сила $\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U(r) = \frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r}$.

○ Закону обратной пропорциональности квадрату расстояния между телами подчиняются электрическое поле Кулона и гравитационное поле Ньютона, которые являются *потенциальными*. Иногда возникает необходимость построения линий, которые в каждой точке поля касаются вектора силы \mathbf{F} . ○

*Линия, которая в каждой точке силового поля касается вектора силы, называется **силовой**.*

Уравнение *силовой линии* получим из коллинеарности векторов (см. **4**) $d\mathbf{r} = (dx; dy; dz)$ и $\mathbf{F} = (F_x(x; y; z); F_y(x; y; z); F_z(x; y; z))$:

$$\boxed{\frac{dx}{F_x(x; y; z)} = \frac{dy}{F_y(x; y; z)} = \frac{dz}{F_z(x; y; z)}}$$

или в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{F_z}{F_x} \end{cases}$$

Иногда удаётся без непосредственного решения этой системы найти некоторое соотношение $I(x; y; z; C) = 0$ (C – константа интегрирования), связывающее переменные между собой.

Соотношение $I(x; y; z; C) = 0$ (C – константа интегрирования), связывающее переменные между собой, называется **интегралом движения**.

Если удаётся найти 2 интеграла движения, то силовые линии определяются системой уравнений $\begin{cases} I_1(x; y; z; C_1) = 0 \\ I_2(x; y; z; C_2) = 0 \end{cases}$.

Пример 4. Найти интеграл движения для уравнения одномерных упругих линейных колебаний без трения (см. **40**).

Данный физический процесс описывается уравнением второго поряд-

ка $m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$, которое перепишем в виде системы дифференциаль-

ных уравнений первого порядка: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V \\ m \frac{dV}{dt} = -kx \end{cases}$. Умножим второе урав-

нение системы на скорость V и сделаем следующие преобразования:

$$m V \frac{dV}{dt} + V kx = 0 \Leftrightarrow$$

$$m V \frac{dV}{dt} + \frac{dx}{dt} kx = 0 \Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2} m V^2\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{2} kx^2\right)}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right)}{dt} = 0 \Leftrightarrow I(x; C) = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Функция $I(x; C) = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ называется *полной энергией* колеблющейся материальной точки; величина $\frac{mV^2}{2}$ – *кинетической энергией*; $\frac{kx^2}{2}$ – *потенциальной энергией* упругих колебаний.

В каждой точке пространства $\nabla U(r)$ перпендикулярен к *эквипотенциальной поверхности* $U(r) = const$, проходящей через эту точку. Следовательно, наибольшая работа совершается силой при перемещении материального тела в направлении перпендикулярном к эквипотенциальной поверхности. Если тело смещается по эквипотенциальной поверхности, а сила направлена вдоль нормали этой поверхности, то её работа равна нулю, так как векторы силы и смещения перпендикулярны.

65.3. Поле скоростей и поток

Аналогично тому, как определялось силовое поле, задаётся поле скоростей, которое характеризуется *линиями тока*. *Линии тока* L определяются уравнениями:

$$\frac{dx}{V_x(x; y; z)} = \frac{dy}{V_y(x; y; z)} = \frac{dz}{V_z(x; y; z)}.$$

Определим поток вектора через ориентированную поверхность.

Поверхность называется **ориентированной**, если указано, какая её сторона является *внешней*, а какая *внутренней*.

Потоком физической характеристики λ называется её произведение на скорость движения $\mathbf{J} = \lambda \mathbf{V}$ (например, поток массы m называется **импульсом** и равен $\mathbf{J} = \mathbf{p} = m\mathbf{V}$).

Потоком вектора \mathbf{J} через ориентированную поверхность S с нормальным вектором \mathbf{n} , направленным перпендикулярно к наружной стороне поверхности, называется интеграл вида

$$J_n = \iint_D \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Поток вектора через **ориентированную площадку** существенно зависит от ориентации поверхности S : изменение знака нормального вектора (смена ориентации элементарной площадки) приводит к изменению знака потока вектора. Кроме того, он определяет число линий тока, которые выходят из объёма тела через его поверхность, т.е.

$$J_n = \iint_D \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, dx dy dz$$

(**формула Остроградского**), где оператор “**дивергенция**” (“**расходимость**”) определяется формулой:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{J},$$

т.е. равен скалярному произведению **векторного оператора Гамильтона** на поток физической величины. Можно показать, что при отсутствии источников и стоков для исследуемой физической величины обращение в нуль дивергенции приводит к стационарности этой величины. Например, **закон неразрывности сплошной среды** имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0,$$

где ρ – объёмная плотность вещества, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}$. Если $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, то плотность среды сохраняется (не изменяется с течением времени), следовательно, сохраняется масса внутри объёма V . В этой связи **уравнение неразрывности** называют **дифференциальным законом сохранения массы**. Если **поток является постоянным вектором**, то **поток через замкнутую поверхность всегда равен 0**. В частности, в теории электромагнетизма установлено, что расходимость магнитного поля равна 0 ($\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$), а дивергенция электрического поля равна произведению 4π на объёмную плотность зарядов, т.е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Отсюда следует, что магнитное поле не имеет зарядов, т.е. количество силовых линий, выходящих из объёма V равно количеству линий, входящих в этот объём. Отметим, что плотность возникновения силовых линий электрического поля пропорционально плотности зарядов в исследуемом объёме. Так как стационарное электрическое поле определяется формулой $E = -\nabla f(r)$, то потенциал $f(r)$ удовлетворяет уравнению:

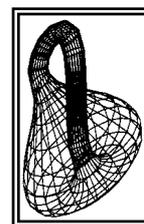
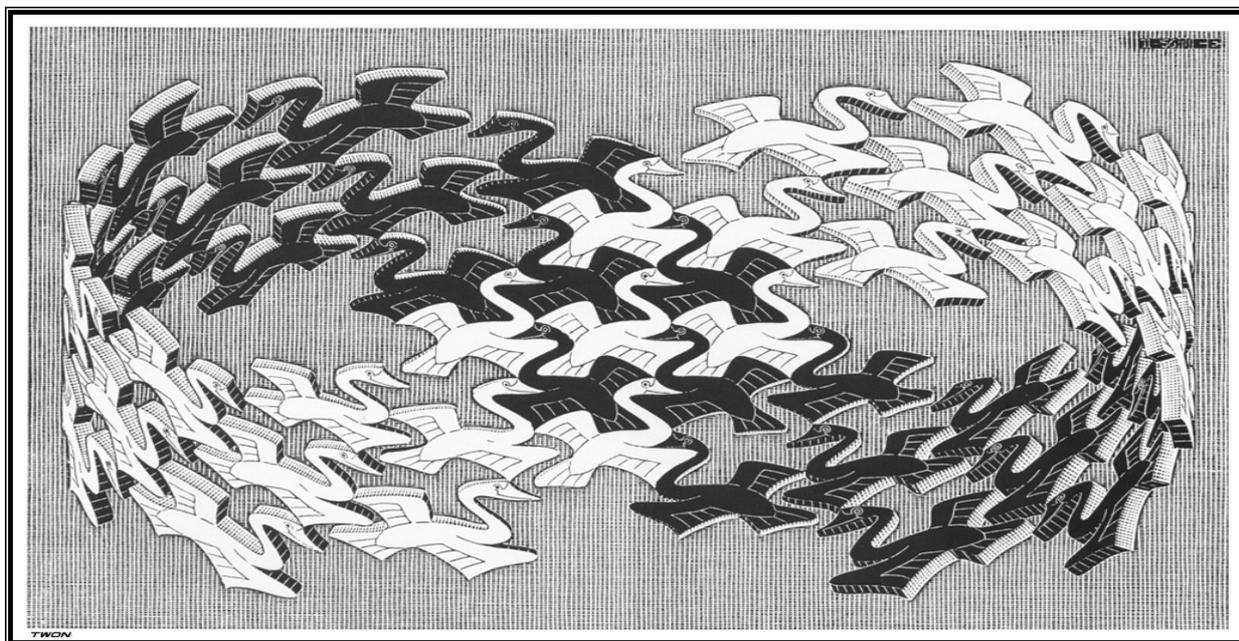
$$\operatorname{div}(-\nabla f(r)) = 4\pi\rho \quad \text{или} \quad \Delta f(r) = -4\pi\rho,$$

здесь оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ является оператором Лапласа. Полученное уравнение называется уравнением Пуассона. Если рассматривать часть пространства, свободную от электрических зарядов, то уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta f(r) = 0.$$

Функция, являющаяся решением уравнения Лапласа, называется гармонической.

Гармоническая функция в центре любой сферы, которая окружает выделенную точку пространства без зарядов, равна своему среднему значению по этой сфере. Такая функция не может иметь экстремумов в области своего определения.



VI

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 1**

1. Изобразить область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \ln\left(-\frac{x}{3}\right)$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = -2\frac{x-y}{x+y} + 3\sin(xy)$; б) $z = 2x^3y - 4x^2y^2 + e^{x-2y}$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = 5\sin\left(\frac{u}{v}\right)$, $u = x + 4y$, $v = y - 2x$; б) $z^3 + y - 9x + 4^{x-2y+3z} - 3 = 0$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sin^2(2y - x)$ соотношению: $4z''_{xx} = z''_{yy}$.

5. Найти в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$ градиент и производную по направлению

при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ от функции $z = \sin(x - y)$.

6. Составить в точке $M_0(1; -1; 3)$ уравнение касательной плоскости и

нормали для поверхности $z = \frac{x-y}{2x-y}$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1-x \leq y \leq 1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения

функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$.

9. Найти на линии $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} xy = 4 \\ y = x \\ x = 4 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^2 \left[\int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить интеграл в полярной системе координат

$$\int_0^2 \left[\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (x-y) dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} xy=4 \\ y+x-5=0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x^2 y$, а область $D: \begin{cases} xy=4 \\ y+x-5=0 \end{cases}$.

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = y$, а область $D: \begin{cases} xy=1 \\ y+x-4=0 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (x+2y) dl$ по треугольной области $ABC: A(1; 1), B(2; -1), C(1; 3)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [y dx + x dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} xy=1 \\ y+x-4=0 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{3}{r^2}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (\sqrt{x-2y+3z}; x-y+5z; \sqrt{xz})$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (\sqrt{x}; 5z; -x+2y-z)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения
Функции нескольких переменных
Вариант 2

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2} - 1 + \arccos\left(\frac{2+x}{3}\right).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = 5xe^{2x-y} + 7\cos\left(\frac{x}{y}\right)$; б) $z = 6x^2 - 4y + x + \operatorname{tg} y$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = -2\cos(uv)$, $u = x^2$, $v = y^3$; б) $4y^2z + 3xy - \sin(z + 2x - y) = 0$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{\frac{y}{x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)'_x = y^2 z''_{yy}$.

5. Найти в точке $M_0\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$ градиент и производную по направлению в направлении $S = (0; 1)$ от функции $z = \cos(x + y)$.

6. Составить в точке $M_0(3; 1; 2)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z^2 - 2xy + e^{x-3z} + 1 = 0$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 4xy + y^3 - 2x^2 - 2y^2$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = 4 - x^2 - y^2$.

9. Найти на линии $x^2 - y^2 = 1$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1-x \\ y = 1+x \end{cases}$

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{1-(x^2+y^2)} dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y = x \\ y = 5x \\ x = 1 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2x + y$, а область $D:$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 5x \\ x = 1 \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x$, а область $D: \begin{cases} y = 2x \\ y = 4x, x = 1 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (x - y) dl$ по треугольной области $ABC: A(0; -1), B(4; -1), C(4; 1)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [x^2 y dx + xy^2 dy]$ не-

посредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y = 2x \\ y = 4x, x = 1 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -2r$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $\mathbf{F} = \left(\frac{x-y}{x+y}; \frac{y-z}{y+z}; \frac{z-x}{z+x} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $\mathbf{J} = \left(-\frac{2x}{y+1}; \frac{y}{3z+2}; -\frac{4z}{x+1} \right)$ через поверхность

единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения
Функции нескольких переменных
Вариант 3

1. Изобразить область определения функции $z = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{y^2 - x}}$.
2. Найти *первые* (а) и *вторые* (б) частные производные функций:
 - а) $z = 8 \operatorname{ctg}\left(\frac{x-2y}{x+3y}\right) - \log_3(\sin(x-3y))$; б) $z = x^4 y^2 + 5x - y^2 + \arcsin y$.
3. Найти *первые частные производные* сложной и неявной функций:
 - а) $z = \operatorname{ctg}(u+v)$, $u = e^{xy}$, $v = 3x - 2y^2$;
 - б) $\cos(z^2 - x^4) - y^2 x + \arccos(y + 2z) = 5$.
4. Удовлетворяет ли функция $z = \ln(e^x + e^y)$ соотношению: $z''_{xx} \cdot z''_{yy} = (z''_{xy})^2$.
5. Найти в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ *градиент и производную по направлению* при $\alpha = \frac{\pi}{6}$ от функции $z = \operatorname{ctg}(2x - y)$.
6. Составить в точке $M_0(0; 2; -2)$ *уравнение касательной плоскости и нормали* для поверхности $z = y^2 \arcsin(x+1)$.
7. Найти *экстремумы* функции $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x + 2$.
8. Найти в области $D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 4 \end{cases}$ *наименьшее и наибольшее значения* функции $z = 3x^2 - xy - 4x + y$.
9. Найти на линии $2x - 4y = 12$ *условные экстремумы* функции двух аргументов $z = x^2 - 4xy - 4x$.
10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x^2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$.
11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_1^4 \left[\int_x^{3x} f(x, y) dy \right] dx$.
12. Вычислить в *полярной системе координат* интеграл $\int_0^{12} \left[\int_0^{\sqrt{144-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \right] dx$.

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y^2 = 10x + 25 \\ y^2 = 6x + 9 \end{cases}$.
14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$.
15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 4$, а область $D: \begin{cases} y = x \\ y = 2 - x \\ x = 0, x = 2 \end{cases}$.
16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 5$, а область $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L x^2 dl$ по треугольной области $ABC: A(2; 1), B(2; 4), C(1; 1)$.
18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [2 dx + y dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = 5 \sin(kr)$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.
20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(\frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.
21. Вычислить *поток* вектора $J = (2x; -x + 3z; xy)$ через поверхность *единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения
Функции нескольких переменных
Вариант 4

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{x - y - 3} + \log_2(x + y - 1).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = 9x \cos y - 5 \frac{2^y}{x^2}$; б) $z = 5x^2 y^3 + 6xy + \log_3(x - y)$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = -9 \lg(u - v)$, $u = \sin(xy^2)$, $v = x^2$;

б) $\operatorname{arctg}(z + y) + 6xy + \lg(2x + 3y) + 4 = 0$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$ соотношению: $x z''_{xx} = -y z''_{yy}$.

5. Найти в точке $M_0(-1; 1)$ градиент и производную по направлению в направлении $S = (1; -1)$ от функции $z = \lg(x^2 y)$.

6. Составить в точке $M_0(-2; -1; -1)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $\operatorname{arctg}(z - x + y) - 4z = 0$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x + 1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$.

9. Найти на линии $x + 2y = 6$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = 4x^2 + 8xy - 2y^2 - x + y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x = 6 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^e \left[\int_0^{\ln x} f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^5 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{25-x^2}} (x + y) dy \right] dx.$$

13. Вычислить площадь плоской фигуры (обл. D), где $D: \begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \\ x \geq 0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x^3 y$, а область D :

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 - x \\ x = 0 \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x - y$, а область $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L y dl$ по треугольной области $ABC: A(0; 1), B(-1; -2), C(-1; 4)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{y} + dy \right]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -7 \cos(kr)$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(\frac{x+y}{x}; \frac{y+z}{y}; \frac{z+x}{z} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = \left(-\frac{x^2}{7}; 2y^2; -\frac{3z^2}{5} \right)$ через поверхность *единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 5**

1. Изобразить область определения функции $z = -\sqrt{x^2 - y} + \frac{\sqrt[3]{1-x}}{8\sqrt{(x-2y)}}$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = 3y \operatorname{tg} x - \frac{\sin(2x-y)}{y}$; б) $z = 2xy - 4xy^2 + \operatorname{ctg} x$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = 3 \operatorname{tg} \left(\frac{\sin u}{v} \right)$, $u = x - 4y^2$, $v = x + y$; б) $\operatorname{ctg} \left(\frac{z}{x-y} \right) + x^3 y - 8y^4 = 2$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \arcsin \left(\frac{x}{x+y} \right)$ соотношению: $xz'_x + yz'_y = 0$.

5. Найти в точке $M_0(3; 1)$ градиент и производную по направлению при $\alpha = \pi$ от функции $z = \frac{x-3y}{y-3x}$.

6. Составить в точке $M_0(2; 1; -2)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = 9x^2 - 4yx$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 4y + 5$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1-x \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 3xy + 6y^2 + 4$.

9. Найти на линии $x^2 + y^2 = 1$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -x^2 + 4xy + y^2 - 2y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y = 3x \\ y = 4-x \\ y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^3 \left[\int_y^{\frac{y}{4}} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{16-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y^2 = 2x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x=2y^2, y=0, z=0 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x$, а область $D: \begin{cases} y^2 = 2x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2y$, а область $D: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (2x^2 - 3y) dl$ по треугольной области $ABC: A(0; 0), B(0; 4), C(4; 0)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[2 dx + \frac{dy}{x} \right]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -\frac{4}{r}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (3x^2 - y + z; x - 5y^2 + z; x + y + z^2)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (3x^2; x - 5z; x + 3y)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 6**

1. Изобразить область определения функции $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\sqrt[6]{4 - x^2 - y^2}} + \arcsin(x)$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = \frac{x^2}{3x + 2y} + 3 \arcsin(xy^2)$; б) $z = xy^5 + 3x^2 - 4y^2 + \arccos y$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = 4 \arcsin(ue^v)$, $u = 2xy$, $v = y - 2x$;

б) $z^5 + 3xy - 2yz + \arccos(2x - 5y + z) = 4$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ соотношению: $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

5. Найти в точке $M_0(2; -2)$ градиент и производную по направлению в направлении $S = (3; 4)$ от функции $z = x^2 \arcsin(y - 1)$.

6. Составить в точке $M_0(-2; -1; -1)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $\operatorname{arctg}(z - x + y) - 4z = 0$.

7. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 10$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x - 4 \leq y \leq 0 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2xy + y^2 + 4x - 4$.

9. Найти на линии $4x^2 + 9y^2 = 36$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -x^2 - 2xy + 4x + 6$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} x = y^2 \\ x = 1 - y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{2-x^2}^4 f(x, y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2 - 1) dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y=4x-x^2 \\ y=2x^2-5x \end{cases}$.
14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} z=4-x^2, x=0, y=0 \\ 2x+y=4, z=0 \end{cases}$.
15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2$, а область $D: \begin{cases} y=4x-x^2 \\ y=2x^2-5x \end{cases}$.
16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 1$, а область $D: \begin{cases} y=4+4x-x^2 \\ y=-2 \end{cases}$.
17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (y-3x)dl$ по треугольной области $ABC: A(2; 3), B(4; 2), C(-1; 3)$.
18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [(y+1)dx+(x-1)dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y=4+4x-x^2 \\ y=-2 \end{cases}$.
19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{6r}{r-r_0}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.
20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (x^2 y; yz; xz^2)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.
21. Вычислить *поток* вектора $J = (x^2 - y; 4y^2; xz^2)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 7**

1. Изобразить область определения функции $z = \frac{6}{\sqrt{x^2 - y}} + \frac{\sqrt{1 - xy}}{x + y}$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = y3^x + \frac{x^2}{\sin(3y - 2x)}$; б) $z = -6xy - x^3y^2 - 5\cos(x - 2y)$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = 3u^2 - 4\cos v$, $u = x + 3y$, $v = \frac{y}{x}$;

б) $z - 6xyz^2 + 5y^2z^2 - 2\cos(x - 2y + z) = 0$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = e^{\frac{y}{3x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)' = y^2 z''_{yy}$.

5. Найти в точке $M_0(-2; 0)$ градиент и производную по направлению при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ от функции $z = 9x^2 - 4yx$.

6. Составить в точке $M_0(5; 2; 3)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = \frac{x^2 y}{\sqrt{y + 2x}}$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^3 - 4xy + 12y^3 - 11$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4$.

9. Найти на линии $x + y = 4$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = 2y^2 - 4x + 6y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y^2 - x^2 = 1 \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^3 \left[\int_{x^3}^x f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{16-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} x=4-y^2 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} y = \sqrt{25-x^2}, x=0, x=4 \\ z=0, z=4 \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x,y) = xy^2$, а область $D:$

$$\begin{cases} x=9-y \\ x+y+4=0 \\ x \in [0;3] \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная

плотность вещества $\gamma(x,y) = 1+y$, а область $D: \begin{cases} x=1-y \\ x+y-2=0 \\ x \in [0;1] \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (2x-y^2) dl$ по треугольной области $ABC: A(3; -1), B(0; -1), C(0; 4)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [x dx - y dy]$ непо-

средственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} x=1-y \\ x+y-2=0 \\ x \in [0;1] \end{cases}$

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -9 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(\frac{x-2}{x} + 3y; x+y-z; xy \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (3y; 2x+y^2-2z; 3xyz)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 8**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4} + \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right).$$

2. Найти *первые* (а) и *вторые* (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = \frac{3x+4y}{y} + 2\ln(x+3y); \quad \text{б) } z = 8xy - x^2y^4 + 7\sin(y-3x).$$

3. Найти *первые частные производные* сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = -5\ln(4u-3v), \quad u = xy^2, \quad v = x^3y; \quad \text{б) } 8xy - x^2z^4 - 3\sin(y+2zx) = 9.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = e^{\frac{x}{y^2}}$ соотношению: $2xy z''_{xx} + z'_y = 0$.5. Найти в точке $M_0(2; 1)$ *градиент* и *производную по направлению* в направлении $S = (2; -2)$ от функции $z = x \ln(2x - y^2)$.6. Составить в точке $M_0(2; -2; 2)$ *уравнение касательной плоскости* и *нормали* для поверхности $\cos(z^2 - xy) + y^2x - 2 = 0$.7. Найти *экстремумы* функции $z = x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 3$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -2 \leq y \leq x+1 \end{cases}$ *наименьшее* и *наибольшее значения* функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 4$.9. Найти на линии $3x - 2y = 6$ *условные экстремумы* функции двух аргументов $z = 6x^2 - 2xy + 4y$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 1 \\ x \in [1; 3] \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\sin y} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в *полярной системе координат* интеграл

$$\int_0^6 \left[\int_0^{\sqrt{36-y^2}} (x^2 + y^2)^2 dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} xy=4 \\ y=x \\ x=4, y=0 \end{cases}$.
14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} 2x^2 + y^2 + 1 = z \\ x + y = 1, x = y = z = 0 \end{cases}$.
15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x + 1$, а область $D: \begin{cases} xy = 4 \\ y = x \\ x = 4, y = 0 \end{cases}$.
16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x - 2$, а область $D: \begin{cases} xy = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$.
17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L 3x^2 y dl$ по треугольной области $ABC: A(1; 1), B(1; 5), C(2; 2)$.
18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [(y-x)dx + (y+x)dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} xy = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$.
19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{e^{-kr}}{r}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.
20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(xyz; x + y + z; \frac{xy}{z} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.
21. Вычислить *поток* вектора $J = \left(\frac{x+y-3z}{3}; \frac{xyz}{5}; \frac{x-y}{2} \right)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 9**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - y^2} + \arccos(x - 2).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = 7x \operatorname{tg}\left(\frac{y-1}{x+2}\right) + 3e^{x^2-3y}; \quad \text{б) } z = xy^2 - x^2y + \log_7(x+y-2).$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = 8 \operatorname{tg}\left(\frac{u+2v}{v-1}\right), \quad u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}; \quad \text{б) } 4xy^2z - x^2z^2 + \log_7(x-3y-2z) = 0.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \ln(x^2 - y^2)$ соотношению:

$$\left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2 = 2z''_{yy}.$$

5. Найти в точке $M_0(1; 1)$ градиент и производную по направлению при

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ от функции } z = -\frac{x^3}{y+2x}.$$

6. Составить в точке $M_0(2; 1; 2)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.7. Найти экстремумы функции $z = x^3 - xy + y^3 - x - 3y + 2$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 10$.9. Найти на линии $x + y^2 = 2$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -4x^2 + 8xy - 12x$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

$$\text{повторные интегралы, если область } D: \begin{cases} x = 9 - y^2 \\ x = 1 - y^2 \\ x \in [0; 7] \end{cases}.$$

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_3^5 \left[\int_{y+1}^{y+2} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} (2x-3y) dx \right] dy.$$

13. Вычислить площадь плоской фигуры (обл. D), где $D: \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=x \\ x \geq 0, y \geq 0, y < x \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла объём цилиндрического тела (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2+y^2=4x \\ x-z=0, 4x-z=0 \end{cases}$.

15. Вычислить массу тела (обл. D) и координаты его центра тяжести, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2x$, а область $D: \begin{cases} x^2+(y-1)^2=9 \\ y \geq x \end{cases}$.

16. Вычислить моменты инерции тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 5$, а область $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

17. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L (4x+3y) dl$ по треугольной области $ABC: A(-1; -2), B(3; 0), C(-1; 2)$.

18. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{3y} - \frac{dy}{2x} \right]$ непосредственно и по формуле Грина, если область $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на скалярный потенциал $f(r) = 8 \frac{\sin(kr)}{r}$. Выяснить, является ли данная функция гармонической.

20. Найти результат действия операторов rot и div на векторный потенциал $F = (2x - y; 2y + z; x)$. Если для данного поля отсутствует циркуляция, то найти уравнения силовых линий.

21. Вычислить поток вектора $J = (-3y; 2y^2; z^2 - 2)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 10**

1. Изобразить область определения функции $z = \sqrt{x - \frac{y^2}{4}} + \lg(x^2 - 3x + 2)$.

2. Найти *первые* (а) и *вторые* (б) частные производные функций:

а) $z = 9y \ln\left(\frac{2x-9y}{y+4}\right) - \operatorname{arctg}(x^2 y)$; б) $z = x^5 + y^2 - xy + 7^{2x+9y}$.

3. Найти *первые частные производные* сложной и неявной функций:

а) $z = \ln\left(\frac{u-9}{v+4}\right)$, $u = e^{y-2x}$, $v = e^{3x-y}$; б) $\sin(z + 2x^3) + 6xy + 7^{x+y-z^2} = 8$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \frac{\cos^2(x-y)}{y}$ соотношению: $y^2 z''_{xx} = (y^2 z'_y)'_y$.

5. Найти в точке $M_0(-1; 0)$ *градиент и производную по направлению* в направлении $S = (-1; 0)$ от функции $z = 8xe^{3y-5x}$.

6. Составить в точке $M_0(1; 1; 0)$ *уравнение касательной плоскости и нормали* для поверхности $\operatorname{ctg}\left(\frac{z}{x-y}\right) - 3x^2y^4 - 2 = 0$.

7. Найти *экстремумы* функции $z = -2x^2 - xy - 4y^2 + 3x$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 1-x \leq y \leq 1 \end{cases}$ *наименьшее и наибольшее значения* функции $z = -x^2 + 3y^2 + 2x + 6y$.

9. Найти на линии $x - 4y^2 = 0$ *условные экстремумы* функции двух аргументов $z = -2x^2 + 3y^2 + 4y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ x \in [-2; 3] \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в *полярной системе координат* интеграл

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2 + 9) dy \right] dx.$$

13. Вычислить площадь плоской фигуры (обл. D), где $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{2} \\ x \in [1; 2] \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла объём цилиндрического тела (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 6 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$.

15. Вычислить массу тела (обл. D) и координаты его центра тяжести, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 7$, а область $D:$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{2}, y = 2 \end{cases}$$

16. Вычислить моменты инерции тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = xy$, а область $D: \begin{cases} x = y^2 \\ x \in [0; 2] \end{cases}$.

17. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L 3xy \, dl$ по треугольной области $ABC: A(-2; 0), B(2; 0), C(2; 4)$.

18. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{x} + \frac{dy}{3y} \right]$ непосредственно и по формуле Грина, если область $D: \begin{cases} x = y^2 \\ x \in [0; 2] \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на скалярный потенциал $f(r) = \frac{11r + 2r_0}{r^2}$. Выяснить, является ли данная функция гармонической.

20. Найти результат действия операторов rot и div на векторный потенциал $F = (x^2y - 3z; y^2z - 2x; xz^2 + 5y)$. Если для данного поля отсутствует циркуляция, то найти уравнения силовых линий.

21. Вычислить поток вектора $J = \left(\frac{x^2y}{6}; x; \frac{xz^2}{4} \right)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 11**

1. Изобразить область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \ln\left(-\frac{x}{3}\right)$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = 5xe^{2x-y} + 7\cos\left(\frac{x}{y}\right)$; б) $z = 6x^2 - 4y + x + \operatorname{tg} y$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = \operatorname{ctg}(u + v)$, $u = e^{xy}$, $v = 3x - 2y^2$;

б) $\cos(z^2 - x^4) - y^2x + \arccos(y + 2z) = 5$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$ соотношению: $xz''_{xx} = -yz''_{xy}$.

5. Найти в точке $M_0(3; 1)$ градиент и производную по направлению при

$\alpha = \pi$ от функции $z = \frac{x-3y}{y-3x}$.

6. Составить в точке $M_0(-2; -1; -1)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $\operatorname{arctg}(z-x+y) - 4z = 0$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^3 - 4xy + 12y^3 - 11$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -2 \leq y \leq x+1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения

функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 4$.

9. Найти на линии $x + y^2 = 2$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -4x^2 + 8xy - 12x$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ x \in [-2; 3] \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^2 \left[\int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{1-(x^2+y^2)} dx \right] dy.$$

13. Вычислить площадь плоской фигуры (обл. D), где $D: \begin{cases} y^2 = 10x + 25 \\ y^2 = 6x + 9 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла объём цилиндрического тела (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases}$.

15. Вычислить массу тела (обл. D) и координаты его центра тяжести, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x$, а область $D:$

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

16. Вычислить моменты инерции тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 1$, а область $D: \begin{cases} y = 4 + 4x - x^2 \\ y = -2 \end{cases}$.

17. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L (2x - y^2) dl$ по треугольной области $ABC: A(3; -1), B(0; -1), C(0; 4)$.

18. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\oint_{\Gamma_D} [(y-x)dx + (y+x)dy]$

непосредственно и по формуле Грина, если область $D: \begin{cases} x = 4y \\ x \in [0; 2] \end{cases}$

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на скалярный потенциал $f(r) = 8 \frac{\sin(kr)}{r}$. Выяснить, является ли данная функция гармонической.

20. Найти результат действия операторов rot и div на векторный потенциал $F = (x^2y - 3z; y^2z - 2x; xz^2 + 5y)$. Если для данного поля отсутствует циркуляция, то найти уравнения силовых линий.

21. Вычислить поток вектора $J = (\sqrt{x}; 5z; -x + 2y - z)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 12**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2} - 1 + \arccos\left(\frac{2+x}{3}\right).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = 8 \operatorname{ctg}\left(\frac{x-2y}{x+3y}\right) - \log_3(\sin(x-3y)); \quad \text{б) } z = x^4 y^2 + 5x - y^2 + \arcsin y.$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = -9 \lg(u-v), \quad u = \sin(xy^2), \quad v = x^2;$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg}(z+y) + 6xy + \lg(2x+3y) + 4 = 0.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \arcsin\left(\frac{x}{x+y}\right)$ соотношению: $xz'_x + yz'_y = 0$.5. Найти в точке $M_0(2; -2)$ градиент и производную по направлению в направлении $S=(3; 4)$ от функции $z = x^2 \arcsin(y-1)$.6. Составить в точке $M_0(5; 2; 3)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = \frac{x^2 y}{\sqrt{y+2x}}$.7. Найти экстремумы функции $z = x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 3$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 10$.9. Найти на линии $x - 4y^2 = 0$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -2x^2 + 3y^2 + 4y$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами черезповторные интегралы, если область $D: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ x \in [-2; 3] \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^{12} \left[\int_0^{\sqrt{144-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \right] dx.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \\ x \geq 0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x=2y^2, y=0, z=0 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2$, а область $D: \begin{cases} y=4x-x^2 \\ y=2x^2-5x \end{cases}$.

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 1 + y$, а область $D: \begin{cases} x=1-y \\ x+y-2=0 \\ x \in [0; 1] \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L 3x^2 y dl$ по треугольной области $ABC: A(1; 1), B(1; 5), C(2; 2)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{3y} - \frac{dy}{2x} \right]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{11r + 2r_0}{r^2}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(\frac{x-y}{x+y}; \frac{y-z}{y+z}; \frac{z-x}{z+x} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (2x; -x + 3z; xy)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 13**

1. Изобразить область определения функции $z = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{y^2 - x}}$.
2. Найти *первые* (а) и *вторые* (б) частные производные функций:
 - а) $z = 9x \cos y - 5 \frac{2^y}{x^2}$; б) $z = 5x^2y^3 + 6xy + \log_3(x - y)$.
3. Найти *первые частные производные* сложной и неявной функций:
 - а) $z = 3 \operatorname{tg} \left(\frac{\sin u}{v} \right)$, $u = x - 4y^2$, $v = x + y$; б) $\operatorname{ctg} \left(\frac{z}{x - y} \right) + x^3y - 8y^4 = 2$.
4. Удовлетворяет ли функция $z = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$ соотношению: $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.
5. Найти в точке $M_0(-2; 0)$ *градиент и производную по направлению* при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ от функции $z = 9x^2 - 4yx$.
6. Составить в точке $M_0(2; -2; 2)$ *уравнение касательной плоскости и нормали* для поверхности $\cos(z^2 - xy) + y^2x - 2 = 0$.
7. Найти *экстремумы* функции $z = x^3 - xy + y^3 - x - 3y + 2$.
8. Найти в области $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 1 - x \leq y \leq 1 \end{cases}$ *наименьшее и наибольшее значения* функции $z = -x^2 + 3y^2 + 2x + 6y$.
9. Найти на линии $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *условные экстремумы* функции двух аргументов $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y$.
10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 - x \\ y = 1 + x \end{cases}$
11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_1^4 \left[\int_x^{3x} f(x, y) dy \right] dx$.
12. Вычислить в *полярной системе координат* интеграл

$$\int_0^5 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{25-x^2}} (x+y) dy \right] dx.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y^2 = 2x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} z = 4-x^2, x=0, y=0 \\ 2x+y=4, z=0 \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x,y) = xy^2$, а область $D: \begin{cases} x=9-y \\ x+y+4=0 \\ x \in [0;3] \end{cases}$.

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x,y) = x-2$, а область $D: \begin{cases} xy=1 \\ y=2-x \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (4x+3y) dl$ по треугольной области $ABC: A(-1; -2), B(3; 0), C(-1; 2)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{x} + \frac{dy}{3y} \right]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} x = y^2 \\ x \in [0; 2] \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{3}{r^2}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $\mathbf{F} = \left(\frac{x+2y}{x+y}, \frac{y+3z}{y+z}, \frac{z+4x}{z+x} \right)$. Если для данного поля отсутствует

циркуляция, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $\mathbf{J} = (4x; -x-3z; xy)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 14**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{x - y - 3} + \log_2(x + y - 1).$$

2. Найти *первые* (а) и *вторые* (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = 3y \operatorname{tg} x - \frac{\sin(2x - y)}{y}; \quad \text{б) } z = 2xy - 4xy^2 + \operatorname{ctg} x.$$

3. Найти *первые частные производные* сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = 4 \arcsin(ue^v), \quad u = 2xy, \quad v = y - 2x;$$

$$\text{б) } z^5 + 3xy - 2yz + \arccos(2x - 5y + z) = 4.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = e^{\frac{y}{3x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)' = y^2 z''_{yy}$.5. Найти в точке $M_0(2; 1)$ *градиент* и *производную по направлению* в направлении $S = (2; -2)$ от функции $z = x \ln(2x - y^2)$.6. Составить в точке $M_0(2; 1; 2)$ *уравнение касательной плоскости* и *нормали* для поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.7. Найти *экстремумы* функции $z = -2x^2 - xy - 4y^2 + 3x$.8. Найти в области $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x \leq y \leq 1 \end{cases}$ *наименьшее* и *наибольшее значения*функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$.9. Найти на линии $x^2 - y^2 = 1$ *условные экстремумы* функции двух аргументов $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4y$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x^2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^3 \left[\int_y^{\frac{y}{4}} f(x, y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в *полярной системе координат* интеграл

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2 - 1) dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} x=4-y^2 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$.
14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} 2x^2+y^2+1=z \\ x+y=1, x=y=z=0 \end{cases}$.
15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2x$, а область $D: \begin{cases} x^2+(y-1)^2=9 \\ y \geq x \end{cases}$.
16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = xy$, а область $D: \begin{cases} x=y^2 \\ x \in [0; 2] \end{cases}$.
17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (x+2y)dl$ по треугольной области $ABC: A(1; 1), B(2; -1), C(1; 3)$.
18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [x^2 y dx + xy^2 dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y=2x \\ y=4x, x=1 \end{cases}$.
19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = 5 \sin(kr)$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.
20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(\frac{x+y}{y}, \frac{y+z}{z}, \frac{z+x}{x} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.
21. Вычислить *поток* вектора $J = (3x^2; x-5z; x+3y)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 15**

1. Изобразить область определения функции $z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\sqrt[6]{4 - x^2 - y^2}} + \arcsin x$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = y3^x + \frac{x^2}{\sin(3y - 2x)}$; б) $z = -6xy - x^3y^2 - 5\cos(x - 2y)$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = -5\ln(4u - 3v)$, $u = xy^2$, $v = x^3y$; б) $8xy - x^2z^4 - 3\sin(y + 2zx) = 9$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \ln(x^2 - y^2)$ соотношению:

$$(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 2z''_{yy}.$$

5. Найти в точке $M_0(-1; 0)$ градиент и производную по направлению в направлении $S = (-1; 0)$ от функции $z = 8xe^{3y-5x}$.

6. Составить в точке $M_0(1; -1; 3)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = \frac{x - y}{2x - y}$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^3 - 4xy + 12y^3 - 11$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 4 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения

функции $z = 3x^2 - xy - 4x + y$.

9. Найти на линии $x + 2y = 6$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = 4x^2 + 8xy - 2y^2 - x + y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y = 3x \\ y = 4 - x \\ y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{2-x^2}^4 f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{16-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} xy=4 \\ y=x \\ x=4, y=0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2+y^2=4x \\ x-z=0, 4x-z=0 \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 7$, а область $D:$

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{x^2}{2}, y=2 \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = y$, а область $D: \begin{cases} xy=1 \\ y+x-4=0 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (x-y)dl$ по треугольной области $ABC: A(0; -1), B(4; -1), C(4; 1)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [2dx + ydy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -7 \cos(kr)$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (3x^2 - y + z; x - 5y^2 + z; x + y + z^2)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (x^2 - y; 4y^2; xz^2)$ через поверхность *единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 16**

1. Изобразить область определения функции $z = \frac{6}{\sqrt{x^2 - y}} + \frac{\sqrt{1 - xy}}{x + y}$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = \frac{3x + 4y}{y} + 2 \ln(x + 3y)$; б) $z = 8xy - x^2 y^4 + 7 \sin(y - 3x)$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = 8 \operatorname{tg}\left(\frac{u + 2v}{v - 1}\right)$, $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$; б) $4xy^2z - x^2z^2 + \log_7(x - 3y - 2z) = 0$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \frac{\cos^2(x - y)}{y}$ соотношению: $y^2 z''_{xx} = (y^2 z'_y)'_y$.

5. Найти в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$ градиент и производную по направлению

при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ от функции $z = \sin(x - y)$.

6. Составить в точке $M_0(3; 1; 2)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z^2 - 2xy + e^{x-3z} + 1 = 0$.

7. Найти экстремумы функции $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x + 2$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x + 1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$.

9. Найти на линии $x^2 + y^2 = 1$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -x^2 + 4xy + y^2 - 2y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} x = y^2 \\ x = 1 - y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^3 \left[\int_{x^3}^x f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^6 \left[\int_0^{\sqrt{36-y^2}} (x^2+y^2)^2 dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где D :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x \\ x \geq 0, y \geq 0, y < x \end{cases}.$$

14. Вычислить с применением *тройного интеграла объём цилиндриче-*

$$\text{ского тела (обл. } V), \text{ если } V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 6 \\ x + y + z = 10 \end{cases}.$$

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = x^2 y$, а область D :

$$\begin{cases} xy = 4 \\ y + x - 5 = 0 \end{cases}.$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = x$, а область D : $\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x, x = 1 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L x^2 dl$ по *треуголь-*

ной области ABC : $A(2; 1)$, $B(2; 4)$, $C(1; 1)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{y} + dy \right]$ *непосредственно и по формуле Грина*, если область D : $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -\frac{4}{r}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (x^2 y; yz; xz^2)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (3y; 2x + y^2 - 2z; 3xyz)$ через *поверхность единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 17**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4} + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = 7x \operatorname{tg}\left(\frac{y-1}{x+2}\right) + 3e^{x^2-3y}; \quad \text{б) } z = xy^2 - x^2y + \log_7(x+y-2).$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = \ln\left(\frac{u-9}{v+4}\right), \quad u = e^{y-2x}, \quad v = e^{3x-y}; \quad \text{б) } \sin(z+2x^3) + 6xy + 7^{x+y-z^2} = 8.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sin^2(2y-x)$ соотношению: $4z''_{xx} = z''_{yy}$.5. Найти в точке $M_0\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$ градиент и производную по направлениюв направлении $S = (0; 1)$ от функции $z = \cos(x+y)$.6. Составить в точке $M_0(0; 2; -2)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = y^2 \arcsin(x+1)$.7. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1-x \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значенияфункции $z = x^2 - 3xy + 6y^2 + 4$.9. Найти на линии $4x^2 + 9y^2 = 36$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -x^2 - 2xy + 4x + 6$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами черезповторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y^2 - x^2 = 1 \\ y = \sqrt{4-x^2} \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\sin y} f(x, y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} (2x-3y) dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{2} \\ x \in [1; 2] \end{cases}$.

14. Вычислить с применением *тройного интеграла объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = 2x + y$, а область

$$D: \begin{cases} y = x \\ y = 5x \\ x = 1 \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = 5$, а область $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L y \, dl$ по *треугольной области* $ABC: A(0; 1), B(-1; -2), C(-1; 4)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[2 \, dx + \frac{dy}{x} \right]$ *непосредственно и по формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{6r}{r - r_0}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(\frac{x-2}{x} + 3y; x + y - z; xy \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = \left(\frac{x+y-3z}{3}; \frac{xyz}{5}; \frac{x-y}{2} \right)$ через *поверхность единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 18**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - y^2} + \arccos(x - 2).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = 9y \ln\left(\frac{2x - 9y}{y + 4}\right) - \operatorname{arctg}(x^2 y); \quad \text{б) } z = x^5 + y^2 - xy + 7^{2x+9y}.$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = 5 \sin\left(\frac{u}{v}\right), \quad u = x + 4y, \quad v = y - 2x; \quad \text{б) } z^3 + y - 9x + 4^{x-2y+3z} - 3 = 0.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{\frac{y}{x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)' = y^2 z''_{yy}$.5. Найти в точке $M_0(1; 1)$ градиент и производную по направлению при

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ от функции } z = -\frac{x^3}{y + 2x}.$$

6. Составить в точке $M_0(-2; -1; -1)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $\operatorname{arctg}(z - x + y) - 4z = 0$.7. Найти экстремумы функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 4y + 5$.8. Найти в области $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x - 4 \leq y \leq 0 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2xy + y^2 + 4x - 4$.9. Найти на линии $x + y = 4$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = 2y^2 - 4x + 6y$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 1 \\ x \in [1; 3] \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_3^5 \left[\int_{y+1}^{y+2} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2 + 9) dy \right] dx.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} xy = 4 \\ y + x - 5 = 0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 4$, а область D :

$$\begin{cases} y=x \\ y=2-x \\ x=0, x=2 \end{cases}.$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x - y$, а область $D: \begin{cases} y=x^2 \\ y=1 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (2x^2 - 3y) dl$ по треугольной области $ABC: A(0; 0), B(0; 4), C(4; 0)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [(y+1)dx + (x-1)dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y=4+4x-x^2 \\ y=-2 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -9 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(xyz; x + y + z; \frac{xy}{z} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (-3y; 2y^2; z^2 - 2)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 19**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{x - \frac{y^2}{4}} + \lg(x^2 - 3x + 2).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = -2 \frac{x-y}{x+y} + 3 \sin(xy); \quad \text{б) } z = 2x^3 y - 4x^2 y^2 + e^{x-2y}.$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = \operatorname{ctg}(u+v), \quad u = e^{xy}, \quad v = 3x - 2y^2;$$

$$\text{б) } \cos(z^2 - x^4) - y^2 x + \arccos(y + 2z) = 5.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = e^{\frac{y}{3x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)'_x = y^2 z''_{yy}$.5. Найти в точке $M_0(-1; 1)$ градиент и производную по направлению в направлении $S=(1; -1)$ от функции $z = \lg(x^2 y)$.6. Составить в точке $M_0(2; 1; -2)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = 9x^2 - 4yx$.7. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 10$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4$.9. Найти на линии $3x - 2y = 6$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = 6x^2 - 2xy + 4y$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} x = 9 - y^2 \\ x = 1 - y^2 \\ x \in [0; 7] \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{1-(x^2+y^2)} dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} xy=4 \\ y=x \\ x=4, y=0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением *тройного интеграла объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = 4$, а область D :

$$\begin{cases} y=x \\ y=2-x \\ x=0, x=2 \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = x - y$, а область $D: \begin{cases} y=x^2 \\ y=1 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (2x^2 - 3y) dl$ по *треугольной области* $ABC: A(0; 0), B(0; 4), C(4; 0)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [x dx - y dy]$ *непосредственно и по формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} x=1-y \\ x+y-2=0 \\ x \in [0; 1] \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{2}{r^2}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(xyz; x+y+z; \frac{xy}{z} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (-3y; 2y^2; z^2 - 2)$ через *поверхность единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 20**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln\left(\frac{6x-1}{3}\right).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = 5xe^{2x-y} + 7\cos\left(\frac{x}{y}\right); \quad \text{б) } z = 6x^2 - 4y + x + \operatorname{tg} y.$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = \operatorname{ctg}(u+v), \quad u = e^{xy}, \quad v = 3x - 2y^2;$$

$$\text{б) } \cos(z^2 - x^4) - y^2x + \arccos(y + 2z) = 5.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$ соотношению: $xz''_{xx} = -yz''_{xy}$.5. Найти в точке $M_0(3; 1)$ градиент и производную по направлению при

$$\alpha = \pi \text{ от функции } z = \frac{x-3y}{y-3x}.$$

6. Составить в точке $M_0(-2; -1; -1)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $\operatorname{arctg}(z-x+y) - 4z = 0$.7. Найти экстремумы функции $z = x^3 - 4xy + 12y^3 - 11$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -2 \leq y \leq x+1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 4$.9. Найти на линии $x + y^2 = 2$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -4x^2 + 8xy - 12x$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами черезповторные интегралы, если область $D: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ x \in [-2; 3] \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^2 \left[\int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^{12} \left[\int_0^{\sqrt{144-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy \right] dx.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y = x \\ y = 5x \\ x = 1 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x^3 y$, а область D :

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 - x \\ x = 0 \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2y$, а область $D: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (y - 3x) dl$ по треугольной области $ABC: A(2; 3), B(4; 2), C(-1; 3)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [x dx - y dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} x = 1 - y \\ x + y - 2 = 0 \\ x \in [0; 1] \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{e^{-kr}}{r}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (x^2 y - 3z; y^2 z - 2x; x z^2 + 5y)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = \left(-\frac{2x}{y+1}; \frac{y}{3z+2}; -\frac{4z}{x+1} \right)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 21**

1. Изобразить область определения функции $z = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{y^2 - x}}$.

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = 9x \cos y - 5 \frac{2^y}{x^2}$; б) $z = 5x^2 y^3 + 6xy + \log_3(x - y)$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = 3 \operatorname{tg} \left(\frac{\sin u}{v} \right)$, $u = x - 4y^2$, $v = x + y$; б) $\operatorname{ctg} \left(\frac{z}{x - y} \right) + x^3 y - 8y^4 = 2$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = e^{\frac{y}{3x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)'_x = y^2 z''_{yy}$.

5. Найти в точке $M_0(1; 1)$ градиент и производную по направлению при

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$ от функции $z = -\frac{x^3}{y + 2x}$.

6. Составить в точке $M_0(1; 1; 0)$ уравнение касательной плоскости и

нормали для поверхности $\operatorname{ctg} \left(\frac{z}{x - y} \right) - 3x^2 y^4 - 2 = 0$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = 4 - x^2 - y^2$.

9. Найти на линии $2x - 4y = 12$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = x^2 - 4xy - 4x$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x = 6 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^3 \left[\int_y^{\frac{y}{4}} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2 - 1) dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} x=4-y^2 \\ x+2y-4=0 \end{cases}$.
14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} 2x^2+y^2+1=z \\ x+y=1, x=y=z=0 \end{cases}$.
15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2x$, а область $D: \begin{cases} x^2+(y-1)^2=9 \\ y \geq x \end{cases}$.
16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = xy$, а область $D: \begin{cases} x=y^2 \\ x \in [0; 2] \end{cases}$.
17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (2x - y^2) dl$ по треугольной области $ABC: A(3; -1), B(0; -1), C(0; 4)$.
18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{3y} - \frac{dy}{2x} \right]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{1}{r^n}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.
20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (\sqrt{x-2y+3z}; x-y+5z; \sqrt{xz})$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.
21. Вычислить *поток* вектора $J = \left(-\frac{2x}{y+1}; \frac{y}{3z+2}; -\frac{4z}{x+1} \right)$ через поверхность *единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 22**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{x - \frac{y^2}{4}} + \lg(x^2 - 3x + 2).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

а) $z = 7x \operatorname{tg}\left(\frac{y-1}{x+2}\right) + 3e^{x^2-3y}$; б) $z = xy^2 - x^2y + \log_7(x+y-2)$.

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

а) $z = -5\ln(4u - 3v)$, $u = xy^2$, $v = x^3y$; б) $8xy - x^2z^4 - 3\sin(y + 2zx) = 9$.

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{\frac{y}{x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)'_x = y^2 z''_{yy}$.

5. Найти в точке $M_0(2; -2)$ градиент и производную по направлению в направлении $S = (3; 4)$ от функции $z = x^2 \arcsin(y-1)$.

6. Составить в точке $M_0(2; 1; -2)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $z = 9x^2 - 4yx$.

7. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

8. Найти в области $D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 4 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения

функции $z = 3x^2 - xy - 4x + y$.

9. Найти на линии $x^2 - y^2 = 1$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4y$.

10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

повторные интегралы, если область $D: \begin{cases} xy = 4 \\ y = x \\ x = 4 \end{cases}$.

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} (2x - 3y) dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} xy = 4 \\ y = x \\ x = 4, y = 0 \end{cases}$.
14. Вычислить с применением *тройного интеграла объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2}, x = 0, x = 4 \\ z = 0, z = 4 \end{cases}$.
15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = 2$, а область $D: \begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 2x^2 - 5x \end{cases}$.
16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если *поверхностная плотность вещества* $\gamma(x; y) = 2y$, а область $D: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$.
17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L y dl$ по *треугольной области* $ABC: A(0; 1), B(-1; -2), C(-1; 4)$.
18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [2dx + ydy]$ *непосредственно и по формуле Грина*, если область $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = -2r$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.
20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (\sqrt{x-2y+z}; x-y+z; \sqrt{xz})$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.
21. Вычислить *поток* вектора $J = \left(\frac{x^2 y}{6}; x; \frac{xz^2}{4} \right)$ через *поверхность единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 23**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4} - y^2} + \arccos(x - 2).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = \frac{3x + 4y}{y} + 2 \ln(x + 3y); \quad \text{б) } z = 8xy - x^2 y^4 + 7 \sin(y - 3x).$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = 3u^2 - 4 \cos v, \quad u = x + 3y, \quad v = \frac{y}{x};$$

$$\text{б) } z - 6xyz^2 + 5y^2z^2 - 2 \cos(x - 2y + z) = 0.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ соотношению: $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.5. Найти в точке $M_0(3; 1)$ градиент и производную по направлению при

$$\alpha = \pi \text{ от функции } z = \frac{x - 3y}{y - 3x}.$$

6. Составить в точке $M_0(-2; -1; -1)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $\arctg(z - x + y) - 4z = 0$.7. Найти экстремумы функции $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x + 2$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения функции $z = 4 - x^2 - y^2$.9. Найти на линии $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

$$\text{повторные интегралы, если область } D: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ x \in [-2; 3] \end{cases}.$$

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^3 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{1-(x^2+y^2)} dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} xy=4 \\ y+x-5=0 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x$, а область $D: \begin{cases} y^2=2x+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$.

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 1+y$, а область $D: \begin{cases} x=1-y \\ x+y-2=0 \\ x \in [0; 1] \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (4x+3y) dl$ по треугольной области $ABC: A(-1; -2), B(3; 0), C(-1; 2)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} \left[\frac{dx}{x} + \frac{dy}{3y} \right]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} x=y^2 \\ x \in [0; 2] \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = 8 \frac{\sin(kr)}{r}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = (2x-y; 2y+z; x)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = \left(\frac{x+y-3z}{3}; \frac{xyz}{5}; \frac{x-y}{2} \right)$ через поверхность *единичной сферы*, которая описывается уравнением $x^2+y^2+z^2=1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 24**

1. Изобразить область определения функции

$$z = -\sqrt{x^2 - y} + \frac{\sqrt[3]{1-x}}{8\sqrt{(x-2y)}}.$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = 5xe^{2x-y} + 7 \cos\left(\frac{x}{y}\right); \quad \text{б) } z = 6x^2 - 4y + x + \operatorname{tg} y.$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = -5 \ln(4u - 3v), \quad u = xy^2, \quad v = x^3y; \quad \text{б) } 8xy - x^2z^4 - 3 \sin(y + 2zx) = 9.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \ln(x^2 - y^2)$ соотношению:

$$(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 2z''_{yy}.$$

5. Найти в точке $M_0(-1; 1)$ градиент и производную по направлению в направлении $S=(1; -1)$ от функции $z = \lg(x^2y)$.6. Составить в точке $M_0(1; 1; 0)$ уравнение касательной плоскости инормали для поверхности $\operatorname{ctg}\left(\frac{z}{x-y}\right) - 3x^2y^4 - 2 = 0$.7. Найти экстремумы функции $z = x^3 - 4xy + 12y^3 - 11$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -2 \leq y \leq x+1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значенияфункции $z = x^2 - 2xy + y^2 + 4$.9. Найти на линии $3x - 2y = 6$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = 6x^2 - 2xy + 4y$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами черезповторные интегралы, если область $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1-x \\ y = 1+x \end{cases}$

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^3 \left[\int_{x^3}^x f(x; y) dy \right] dx.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{9-y^2}} (2x-3y) dx \right] dy.$$

13. Вычислить *площадь плоской фигуры* (обл. D), где $D: \begin{cases} y^2 = 10x + 25 \\ y^2 = 6x + 9 \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла *объём цилиндрического тела* (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 6 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$.

15. Вычислить *массу тела* (обл. D) и *координаты его центра тяжести*, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 2$, а область $D:$

$$\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 2x^2 - 5x \end{cases}$$

16. Вычислить *моменты инерции* тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = x$, а область $D: \begin{cases} y = 2x \\ y = 4x, x = 1 \end{cases}$.

17. Вычислить *криволинейный интеграл 1-го рода* $\int_L (2x - y^2) dl$ по треугольной области $ABC: A(3; -1), B(0; -1), C(0; 4)$.

18. Вычислить *криволинейный интеграл 2-го рода* $\oint_{\Gamma_D} [(y+1)dx + (x-1)dy]$ непосредственно и по *формуле Грина*, если область $D: \begin{cases} y = 4 + 4x - x^2 \\ y = -2 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на *скалярный потенциал* $f(r) = \frac{2^{-kr}}{r}$. Выяснить, является ли данная функция *гармонической*.

20. Найти результат действия операторов rot и div на *векторный потенциал* $F = \left(\frac{x-y}{3x+y}, \frac{y-z}{4y+z}, \frac{z-2x}{z+x} \right)$. Если для данного поля отсутствует *циркуляция*, то найти *уравнения силовых линий*.

21. Вычислить *поток* вектора $J = (3x^2; x-5z; x+3y)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Функции нескольких переменных**Вариант 25**

1. Изобразить область определения функции

$$z = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4} + \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right).$$

2. Найти первые (а) и вторые (б) частные производные функций:

$$\text{а) } z = \frac{3x+4y}{y} + 2\ln(x+3y); \quad \text{б) } z = 8xy - x^2y^4 + 7\sin(y-3x).$$

3. Найти первые частные производные сложной и неявной функций:

$$\text{а) } z = \operatorname{ctg}(u+v), \quad u = e^{xy}, \quad v = 3x - 2y^2;$$

$$\text{б) } \cos(z^2 - x^4) - y^2x + \arccos(y + 2z) = 5.$$

4. Удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{\frac{y}{x}}$ соотношению: $(x^2 z'_x)'_x = y^2 z''_{yy}$.5. Найти в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ градиент и производную по направлению при

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ от функции } z = \operatorname{ctg}(2x - y).$$

6. Составить в точке $M_0(-2; -1; -1)$ уравнение касательной плоскости и нормали для поверхности $\operatorname{arctg}(z-x+y) - 4z = 0$.7. Найти экстремумы функции $z = -2x^2 - xy - 4y^2 + 3x$.8. Найти в области $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq x+1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения

$$\text{функции } z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x.$$

9. Найти на линии $4x^2 + 9y^2 = 36$ условные экстремумы функции двух аргументов $z = -x^2 - 2xy + 4x + 6$.10. Записать двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ двумя способами через

$$\text{повторные интегралы, если область } D: \begin{cases} x = y^2 \\ x = 1 - y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

11. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_3^5 \left[\int_{y+1}^{y+2} f(x; y) dx \right] dy.$$

12. Вычислить в полярной системе координат интеграл

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2 - 1) dx \right] dy.$$

13. Вычислить площадь плоской фигуры (обл. D), где $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{2} \\ x \in [2; 4] \end{cases}$.

14. Вычислить с применением тройного интеграла объём цилиндрического тела (обл. V), если $V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ x - z = 0, 4x - z = 0 \end{cases}$.

15. Вычислить массу тела (обл. D) и координаты его центра тяжести, если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = xy^2$, а область $D:$

$$\begin{cases} x = 9 - y \\ x + y + 4 = 0 \\ x \in [0; 3] \end{cases}$$

16. Вычислить моменты инерции тела (обл. D), если поверхностная плотность вещества $\gamma(x; y) = 5$, а область $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

17. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода $\int_L 3x^2 y dl$ по треугольной области $ABC: A(1; 1), B(1; 5), C(2; 2)$.

18. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\oint_{\Gamma_D} \left[2 dx + \frac{dy}{x} \right]$ непосредственно и по формуле Грина, если область $D: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

19. Найти результат действия операторов grad и Δ на скалярный потенциал $f(r) = \frac{6r}{r - r_0}$. Выяснить, является ли данная функция гармонической.

20. Найти результат действия операторов rot и div на векторный потенциал $F = (3x^2 - y + z; x - 5y^2 + z; x + y + z^2)$. Если для данного поля отсутствует циркуляция, то найти уравнения силовых линий.

21. Вычислить поток вектора $J = (3y; 2x + y^2 - 2z; 3xyz)$ через поверхность единичной сферы, которая описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Список использованных источников

1. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. – Москва: МГУ. – 1990. – 384 с.
 2. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – Москва: Наука. – 1974. – 176 с.
 3. Игнатъев Ю.Г. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. – Казань: КГУ. – 2013. – 204 с.
 4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – Москва: Наука. – 1967. – 736 с.
 5. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2000. – 456 с.
 6. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – Москва: МЦНМО. – 2002. – 664 с.
 7. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.2. – Москва: МЦНМО. – 2002. – 787 с.
 8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.
 9. Бугров Я.С. Высшая математика. Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.
 10. Зубков В.Г., Ляховский В.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б. Курс высшей математики: Учебное пособие для студентов заочной (дистанционной) формы обучения. Т.2. – Москва: МИИР. – 2007. – 269 с.
 11. Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. – М.: Наука. – 1991. – 248 с.
 12. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Ч.1. – Москва: МФТИ. – 2000. – 359 с.
 13. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Ч.2. – Москва: МФТИ. – 2000. – 230 с.
 14. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2003. – 496 с.
 15. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 648 с.
 16. Гурса Э. Курс математического анализа. Т.1. Ч.1. Производные и дифференциалы. Определенные интегралы. – Москва-Ленинград: Гос.
-

тех.-теор. изд.-во. – 1933. – 368 с.

17. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч.2. – Минск: Высшэйшая школа. – 1985. – 221 с.

18. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч.4. – Минск: Высшэйшая школа. – 1987. – 240 с.

19. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. – Москва: МГУ. – 1987. – 358 с.

20. Син Л.И., Алейникова О.А. Методические указания к самостоятельной работе по теме “Кратные и криволинейные интегралы”. – Шахты: ЮРГУЭС. – 2001. – 35 с.

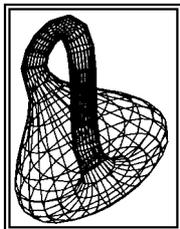
21. Коноплева И.В., Скрынников А.В. Методические указания к выполнению типового расчета. – Ульяновск.: УлГТУ. – 2003. – 28 с.

22. Анкилов А.В., Горячева Н.Я., Распутько Т.Б. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: типовой расчет по высшей математике. – Ульяновск.: УлГТУ. – 2004. – 32 с.

23. Васильева О.А., Михалкина С.А. Применение функций нескольких переменных в теории поля: метод. указания. – Самара: СГАУ. – 2006. – 25 с.

24. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.1. Инструментарий (методика решения задач). – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 540 с.

25. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.



VI. Функции многих переменных. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление

Тема: Функции комплексной переменной

66. “Функция комплексного переменного (ФКП)”

66.1. Определение ФКП и её непрерывность

Понятие *комплексного числа* было введено в **26**. В этом разделе рассмотрим основные определения теории функций комплексного переменного.

ε -*окрестностью точки* z_0 называется открытый круг радиуса ε с центром в точке z_0 , т.е. совокупность точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \varepsilon$.

Областью D комплексной плоскости называется множество точек, обладающее следующими свойствами: вместе с точкой из D этому множеству принадлежит и достаточно малый круг с центром в этой точке (*открытость области*); две любые точки области D можно соединить ломаной линией, состоящей из точек области D (*связность области*).

Границей области D называется совокупность граничных точек, которые не принадлежат области D , но в любой их ε -окрестности лежат точки, которые принадлежат области D .

Обозначение: Γ_D .

Область D с присоединённой к ней границей называется *замкнутой*, в противном случае – *открытой* (рис. 1).

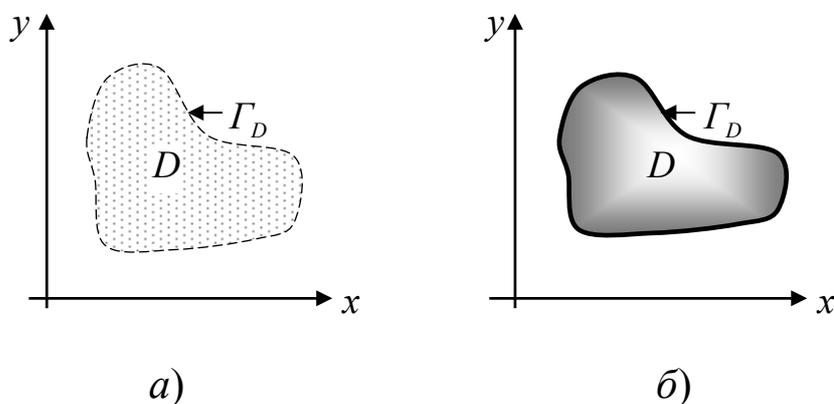


Рис. 1. Открытая (а) и замкнутая (б) области D .

Пример 1. Отобразить на комплексной плоскости области D , заданные условиями:

$$\text{а) } 2 < |z+i| < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{б) } |z-1-i2| \leq 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 1, \quad \operatorname{Im} z > 1.$$

а) Комплексное число $z+i = x+iy+i = x+i(y+1)$, а его модуль равен:

$$|z+i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}.$$

Двойное неравенство $2 < |z+i| < 3$ эквивалентно системе уравнений:

$$2 < |z+i| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |z+i| < 3 \\ |z+i| > 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{x^2 + (y+1)^2} < 3 \\ \sqrt{x^2 + (y+1)^2} > 2 \end{cases}.$$

Эти неравенства описывают две окружности с общим центром, расположенным в точке $A(0; -1)$, радиусами 3 и 2, соответственно, которые находятся одна внутри другой. Значения z лежат между ними. Изменение аргумента φ происходит в пределах от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, область D имеет вид, показанный на рис. 2:

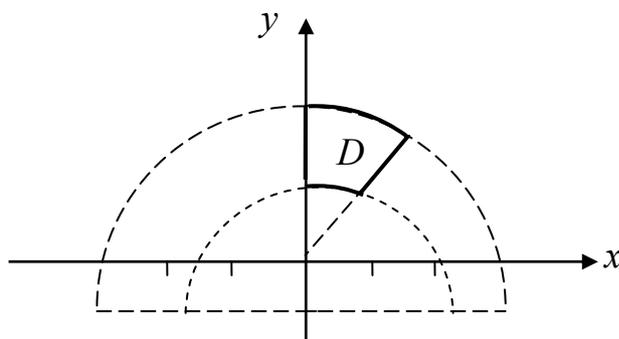


Рис. 2. Область $D : 1 < |z+i| < 4, \quad \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

б) Комплексное число $z-1-i2 = x+iy-1-i2 = (x-1)+i(y-2)$, а его модуль равен: $|z-1-i2| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$. Неравенство $|z-1-i2| \leq 1$ описывает внутреннюю часть окружности вместе с её границей (присутствует знак “=” в неравенстве) с центром в точке $A(1;2)$ и радиусом 1. Неравенство $\operatorname{Re} z \geq 1$ означает, что $\operatorname{Re} z = x \geq 1$ все значения переменной x лежат справа от прямой $x = 1$ и на ней самой. Неравенство $\operatorname{Im} z > 1$ означает, что $\operatorname{Im} z = y > 1$ все значения переменной y лежат выше прямой $y = 1$, но не на ней самой. Следовательно, область D имеет вид, показанный на рис. 3.

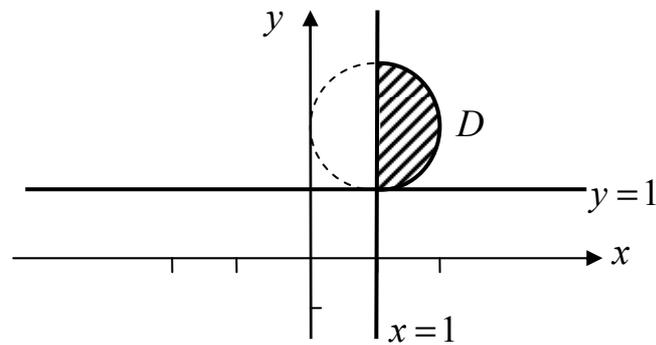


Рис. 3. Область $D : |z-1-i2| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 1, \operatorname{Im} z > 1$.

Функцией комплексного переменного называется закон, по которому каждому значению аргумента $z \in D$ ставится в соответствие одно или несколько значений функции $w = f(z)$ (область E). В первом случае функция называется **однозначной**, а во втором – **многозначной**.

● В дальнейшем будем рассматривать только *однозначные функции комплексного переменного*, и указывать особо на её многозначность при необходимости. ●

Очевидно, что *функция комплексного переменного* содержит действительную и мнимую части, т.е. представляется в виде:

$$\boxed{f(z) = u(x; y) + i v(x; y)},$$

где i – комплексная единица ($i^2 = -1$).

● Если откладывать значения комплексного числа $z = x + iy$ на одной комплексной плоскости (D), а значения функции $f(z)$ на другой (E), то функцию комплексного переменного можно рассматривать как некоторое отображение области D в область E . ●

Пример 2. Определить вещественную и мнимую части функций

а) $f(z) = z^2$; б) $f(z) = \ln z$; в) $f(z) = \sin z$.

Так как число $z = x + iy$, то

а) $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow u(x, y) = x^2 - y^2$ и $v(x, y) = 2xy$;

б) $f(z) = \ln z = \ln(x + iy) = \ln(|z| e^{i\varphi}) = \ln|z| + i\varphi$, где модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргумент $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

в) $f(z) = \sin z = \sin(x + iy)$. Воспользуемся **формулой Эйлера** (её легко получить при использовании стандартных разложений указанных функций, см. п. 46.2, **46**) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, из которой следует, что

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \text{ и } \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} = \\ &= \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^y}{2i} = \frac{\cos x(e^{-y} - e^y)}{2i} + \frac{i \sin x(e^y + e^{-y})}{2i} = \\ &= -i \frac{\cos x(e^{-y} - e^y)}{2} + \frac{\sin x(e^y + e^{-y})}{2} = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x,\end{aligned}$$

где введены *гиперболические синус и косинус*:

$$\boxed{\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}} \quad \text{и} \quad \boxed{\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}},$$

графики которых показаны на рис. 4:

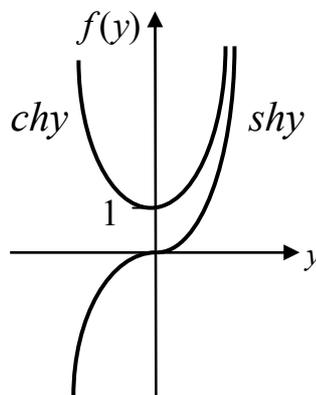


Рис. 4. Гиперболические синус и косинус.

Таким образом, $u(x; y) = \sin x \operatorname{ch} y$ и $v(x; y) = \operatorname{sh} y \cos x$.

Пример 3. Доказать справедливость формул (*самостоятельно*):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \quad \operatorname{sh}(2z) = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z; \quad \operatorname{ch}(2z) = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z.$$

Пусть функция $f(z)$ определена некоторой ε -окрестности точки z_0 , кроме, может быть, самой этой точки.

Комплексное число A называется **пределом функции комплексного переменного** $f(z)$ при стремлении z к z_0 , если для любого сколь угодно малого положительного числа δ существует число $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что из выполнения неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует выполнение неравенства $|f(z) - A| < \varepsilon(\delta)$ или $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной** в точке z_0 , если она определена в некоторой её ε -окрестности, включая и саму точку z_0 , и выполняется равенство $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ была непрерывна в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ были непрерывны в точке $(x_0; y_0)$.

Док-во: Необходимость. Обозначим через $f_0 = f(z_0) = u_0 + iv_0$ значение функции в точке z_0 (здесь $u_0 = u(x_0; y_0)$ и $v_0 = v(x_0; y_0)$), тогда модуль разности между значением функции и этим числом равен:

$$|f(z) - f_0| = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2},$$

т.е. $|u - u_0| \leq |f(z) - f_0|$ и $|v - v_0| \leq |f(z) - f_0|$. Если функция $f(z)$ непрерывна в заданной точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то для любого сколь угодно малого положительного числа δ существует число $\varepsilon(\delta) > 0$ такое, что из выполнения неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует выполнение неравенства

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon(\delta),$$

следовательно, справедливы неравенства

$$|u - u_0| \leq |f(z) - f_0| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |v - v_0| \leq |f(z) - f_0| < \varepsilon.$$

Эти неравенства означают, что функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ непрерывны в точке $(x_0; y_0)$.

Достаточность. Пусть функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ непрерывны в заданной точке $(x_0; y_0)$. Тогда для любого сколь угодно малого положи-

тельного числа δ существует число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ такое, что из выполнения неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует выполнение неравенств

$$|u - u_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |v - v_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2} \leq |u - u_0| + |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Выполнение этого неравенства говорит о непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 .

Доказанная теорема не только определяет непрерывность функции, но и позволяет распространить на функции комплексного переменного все свойства, которыми обладает непрерывная функция действительного аргумента (см. **16**). Для таких функций сумма непрерывных функций есть непрерывная функция; в замкнутых областях существуют наименьшее и наибольшее значения и т.д. Так как для непрерывных функций можно ввести понятие производной, то рассмотрим дифференцируемость ФКП.

66.2. Дифференцируемость и регулярность ФКП

Производной функции $f(z)$ **в точке** z называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего произвольным образом к нулю, т.е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z , если в этой точке *существует конечная первая производная данной функции*.

Пример 4. Дифференцируема ли функция $f(z) = \bar{z} = x - iy$?

В этом примере $u(x; y) = x$ и $v(x; y) = -y$. Согласно определению производной, величина Δz должна стремиться к нулю произвольным образом. Рассмотрим два способа стремления Δz к нулю:

$$1) \Delta y = 0; \Delta z = \Delta x \rightarrow 0; \quad 2) \Delta x = 0; \Delta z = i\Delta y \rightarrow 0.$$

Вычислим первую производную от ФКП по способу 1):

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - i(y + \Delta y)|_{\Delta y=0} - x + iy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

аналогично по способу 2):

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)|_{\Delta x=0} - i(y + \Delta y) - x + iy}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Следовательно, данная функция *не дифференцируема*.

● Согласно **Примеру 4**, не любая ФКП является дифференцируемой функцией. ●

Для того чтобы ФКП была дифференцируема, функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ должны удовлетворять условиям следующей теоремы:

Теорема 2. Для того чтобы функция $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ была дифференцируема в точке z , необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ были дифференцируемы в точке $(x; y)$ и при этом выполнялись равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Док-во: **Необходимость** (**достаточность** доказать самостоятельно). Поступим также, как и в **Примере 4**. Вычислим первую производную от ФКП по способу

$$1): \Delta y = 0; \Delta z = \Delta x \rightarrow 0.$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x; y + \Delta y) + iv(x + \Delta x; y + \Delta y) - u(x; y) - iv(x; y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично по способу 2): $\Delta x=0$; $\Delta z=i\Delta y \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x; y+\Delta y) + iv(x+\Delta x; y+\Delta y) - u(x; y) - iv(x; y)}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i \Delta v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Приравнивая полученные выражения, получим условия дифференцируемости (*регулярности*) ФКП:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \text{ и } \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Эти уравнения традиционно называют уравнениями Коши-Римана, хотя такие же результаты независимо друг от друга получили Даламбер и Эйлер.

Функция $f(z)$ называется *регулярной (аналитической)* в области D , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

К регулярным ФКП применимы те же правила дифференцирования, что и для функции действительного переменного, а также таблица производных с оговоркой однозначного определения функции комплексного переменного (см. 17 и 18), например:

$$(z^n)' = nz^{n-1}, (e^z)' = e^z, (\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z.$$

Поэтому говорят, что функция комплексного переменного является аналитическим продолжением функции действительного аргумента на комплексную плоскость.

Из условий регулярности ФКП также вытекает одно важное уравнение, называемое уравнением Лапласа: продифференцируем первое уравнение условий по переменной x , второе уравнение – по переменной y и сложим полученные равенства. В результате этих действий получим уравнение

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0} \text{ или } \boxed{\Delta u = 0}$$

($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, такому же уравнению удовлетворяет и функция v). Следовательно, исходная ФКП подчиняется уравнению Лапласа, которое можно записать в комплексных переменных.

Введём в рассмотрение бесконечно малый оператор Ли (градиент Ли)

$$\nabla_L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

и подействуем им на функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Из установленного соотношения

$$\nabla_L f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

видно, что выполнение условий Коши-Римана отвечает обращению в нуль градиента Ли ($\nabla_L f(z) = 0$) от функции комплексной переменной.

Используя градиент Ли, можно переписать уравнение Лапласа в виде: $(\nabla_L^* \nabla_L) f(z) = \Delta u + i \Delta v = 0$, где комплексно-сопряжённый оператор

Ли $\nabla_L^* = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$.

Функция $f(z)$ называется *гармонической*, если она является решением уравнения Лапласа.

● Отметим удобные в некоторых случаях обозначения

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \nabla_L^* f; \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \nabla_L f$$

($\nabla_L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ – оператор Ли), которые следуют из записи дифференциала функции комплексного переменного, как функции двух переменных $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ с учётом дифференциалов аргументов

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{i}{2}(d\bar{z} - dz). \quad \bullet$$

● Другая форма записи дифференциала функции комплексного переменного имеет вид

$df(z; \bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$. Если функция $f(z; \bar{z})$ не зависит от переменной \bar{z} , то она называется *аналитической*, так как условие

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (или $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \nabla_L f = 0$) эквивалентно уравнениям Коши-Римана. ●

66.3. Простейшие свойства аналитических ФКП

1. Растяжение (сжатие) и поворот на комплексной плоскости определяет производная аналитической функции $f' = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}$. Поэтому ма-

лые фигуры отображаются функцией $f(z)$ в подобные с сохранением углов и пропорциональным увеличением (уменьшением) размеров исходного объекта.

2. Свойство **1** указывает на сохранение ориентации объекта при аналитическом преобразовании $w=f(z)$. Это означает, что правые винты не преобразуются в левые, в силу чего для них отсутствуют отражения. В этой связи дифференцируемость функции $f(z)$ запрещает дифференцируемость комплексно-сопряжённой функции $f^*(z)$, но не двукратно-сопряжённой функции $f^*(\bar{z})$.

3. Знание одной из функций $u(x,y)$ или $v(x,y)$ позволяет, согласно **уравнениям Коши-Римана** определять другую функцию с точностью до константы.

4. Для аналитической функции справедливо соотношение

$$\nabla u(x; y) \cdot \nabla v(x; y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0,$$

т.е. градиенты функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ перпендикулярны в любой точке z комплексной плоскости. Следовательно, линии постоянного уровня функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ будут также перпендикулярны в точках их пересечения.

5. Если функция $f(z)$ аналитическая в области D и не является константой, то её модуль $|f(z)|$ не может принимать максимального значения внутри области D , а может его достигать только на её границе Γ_D (**принцип максимума модуля**). Для того чтобы выражение $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ было максимально, необходимо и достаточно выполнения соотношения $[2u\nabla u + 2v\nabla v = 0]$, что в силу свойства **4** и отличия от нуля функций u и v возможно лишь при одновременном обращении в нуль обоих градиентов. Это означает, что точка максимума $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ должна быть экстремальной точкой как для функции u , так и для функции v . Наложить так картинки линий постоянного уровня для функций u и v не удаётся, поэтому максимум модуля $|f(z)|$ достигается только на границе области Γ_D .

6. Если функция $f(z)$ гармоническая в области D , то её задание на границе Γ_D полностью определяет её значения внутри области D .

Пример 5. Решить **уравнение Лапласа** в виде “волнового миража”. Для решения поставленной задачи

$$\Delta U(x; y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

разложим **оператор Лапласа** на операторные сомножители

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla_L^* \nabla_L = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Следовательно, переменная y играет роль “времени”, а мнимая единица i – “скорости распространения сигнала”. Тогда функция “волнового миража” $U(x; y) = U(z; \bar{z}) = \varphi(x - iy) + \psi(x + iy) = \varphi(\bar{z}) + \psi(z)$, где приведенные функции $\varphi(x; y)$ и $\psi(x; y)$ определяются равенствами

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \quad \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial y} = i \frac{\partial \psi}{\partial x}}.$$

Эти функции удовлетворяют **уравнениям Коши-Римана**, если их записать в виде $\varphi(x; y) = v(x; y) + iu(x; y)$ и $\psi(x; y) = u(x; y) + iv(x; y)$.

67. “Интеграл от функции комплексной переменной”

67.1. Интеграл от функции комплексной переменной

В силу того, что функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ зависят от двух переменных, то интегрирование ФКП сводится к интегралу от этой функции по некоторой, обладающей определёнными характеристиками кривой L .

Кривая L называется **гладкой (кусочно-гладкой)**, которая состоит из **конечного числа гладких частей**, если она допускает параметрическое представление

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$
 функции $x(t)$, $y(t)$ и их производные $x'(t)$,

$y'(t)$ непрерывны, причём $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода (см. п. 64.2, **64**) по гладким кривым сводится к вычислению обычных определённых интегралов (см. **30**). Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна на гладкой кривой L , на которой задано направление от точки A к точке B . Выполнив стандартные действия по разбиению кривой на n гладких элементарных частей с введением обозначения $\delta = \max_i \Delta z_i$, составлении интегральной суммы и предельному переходу в выражении для нее $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$, приходим к определению интеграла от ФКП.

Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i$ существует, не зависит от способа раз-

биения кривой L и выбора точек ζ_i , в которых вычисляется значение функции на элементарных отрезках, то он называется *интегралом от ФКП* и обозначается $\int_L f(z) dz$.

Интеграл от ФКП обладает теми же свойствами, что и криволинейный интеграл второго рода. Если выделить вещественную и мнимую части этого интеграла, то можно записать:

$$\int_L f(z) dz = \int_L [u(x; y)dx - v(x; y)dy] + i \int_L [v(x; y)dx + u(x; y)dy].$$

Ранее считалось, что кривая L имела концы, однако приведенное определение пригодно и для замкнутых гладких кривых.

Поэтому рассмотрим *интегральную теорему Коши*.

Теорема 1. Пусть регулярная функция $f(z)$ определена в области D с гладкой замкнутой границей Γ_D , тогда интеграл от этой функции по любой замкнутой, гладкой кривой (в том числе и по границе области D), лежащей внутри области D равен нулю, т.е.

$$\oint_{L \in D} f(z) dz = 0.$$

Док-во: Выберем внутри области D любой замкнутый контур L , ограничивающий область D_1 . Так как функция $f(z)$ регулярна в области D , то она регулярна и в области D_1 , т.е. в каждой точке этой области существует непрерывная производная $f'(z)$. Следовательно, непрерывны и первые частные производные функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$. Применим к криволинейному интегралу *формулу Грина* (см. п. 64.3, 64):

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_L [u(x; y)dx - v(x; y)dy] + i \int_L [v(x; y)dx + u(x; y)dy] = \\ &= \iint_{D_1} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial(-v)}{\partial x} \right] dx dy + i \iint_{D_1} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy = 0, \end{aligned}$$

так как выражения в квадратных скобках равны нулю по *уравнениям Коши-Римана-Даламбера-Эйлера*.

Следствие. Пусть кривая L представляется в виде двух кривых L_1 и L_2 , которые имеют общие концы, в этом случае интегралы от функции $f(z)$ по кривым L_1 и L_2 равны между собой.

Док-во: Представим кривую L в виде двух кривых L_1 и L_2 , имеющих общие концы (рис. 5). На рис. 5 показано положительное направление обхода контура L . По *Теореме 1* имеем $\oint_{L \in D_1} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz =$
 $= \int_{L_1} f(z) dz - \int_{-L_2} f(z) dz =$ (обход по линии L_2 выбран в противоположном

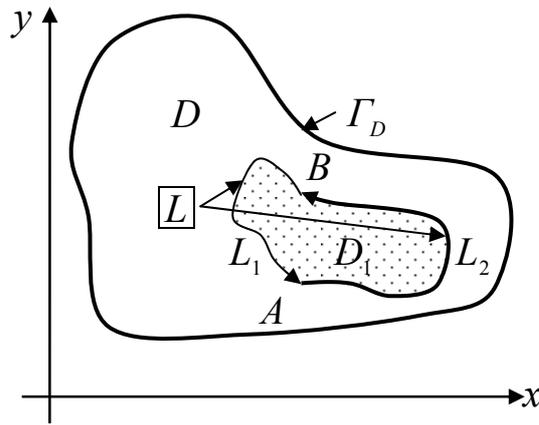


Рис. 5. Представление кривой L в виде двух кривых L_1 и L_2 .

направлении, т.е. по часовой стрелке) $= 0$. Отсюда следует, что

$$\int_{L_1} f(z) dz = \int_{-L_2} f(z) dz.$$

○ Отметим, что справедлива и обратная к **Теореме 1 теорема Морера**: если функция $f(z)$ непрерывна в области D с гладкой замкнутой границей Γ_D и интеграл по любой замкнутой, гладкой кривой (в том числе и по границе области D), лежащей внутри области D равен нулю, т.е. $\oint_{L \in D} f(z) dz = 0$, то функция $f(z)$ в этой области *регулярна*. ○

Пример 1. Доказать, что интеграл $\oint_L e^z dz = 0$ по любому замкнутому контуру, лежащему на комплексной плоскости.

Так как по условию задачи задан любой замкнутый контур, то возьмём окружность с центром в начале координат и радиусом 1 (*единичная окружность* O). Подынтегральную функцию с учётом **формулы Эйлера** представим в виде: $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, т.е.

$$u(x; y) = e^x \cos y \text{ и } v(x; y) = e^x \sin y.$$

Вычислим интеграл $\oint_L e^z dz = 0$ через двойной интеграл (см. **Док-во Теоремы 1**):

$$\oint_L e^z dz = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial(-v)}{\partial x} \right] dx dy + \iint_{D_1} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy, \text{ для чего найдём}$$

первые частные производные от функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y + e^x \sin y = 0,$$

т.е. $\int_L e^z dz = 0$.

В силу того, что интеграл $\int_L f(z) dz$ зависит только от подинтегральной функции $f(z)$, начальной z_0 и конечной z точек кривой L , то его можно переписать в виде *определённого интеграла* от функции комплексной переменной:

$$\int_L f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0) = F(z) + C.$$

Функция $F(z)$ регулярна в той же области, что и функция $f(z)$, её производная $F'(z) = f(z)$ и она называется *первообразной функции* $f(z)$.

● Интегралы от регулярных ФКП, заданных в односвязных, замкнутых областях, можно вычислять как обычные определённые интегралы от функции действительного переменного и они обладают теми же свойствами, что и определённые интегралы от функции действительного переменного. ●

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_{1+i}^{3-2i} z dz$.

Так как функция $f(z) = z$ регулярна на всей комплексной плоскости, то

$$\int_{1+i}^{3-2i} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{1+i}^{3-2i} = \frac{1}{2} [(3-2i)^2 - (1+i)^2] = \frac{1}{2} (9 - 12i - 4 - 1 - 2i + 1) = \frac{5 - 14i}{2}.$$

67.2. Интегральная формула Коши

Очень важное значение в теории ФКП и её приложениях играет *интегральная формула Коши*, но вначале рассмотрим пример вычисления интеграла от ФКП с точкой нерегулярности внутри области интегрирования.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_L (z - z_0)^n dz$, где n – целое число, принадлежащее интервалу $[-1; \infty)$, L – любой замкнутый контур на комплексной плоскости.

Первообразной этой функции будет $F(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n+1}$, которая при $n \geq 0$

регулярна на всей комплексной плоскости, а при $n = -1$ – на всей комплексной плоскости, за исключением точки z_0 . Если замкнутый контур L не содержит внутри себя точку z_0 , то по *Теореме 1* интеграл ра-

вен нулю. Если точка z_0 лежит внутри замкнутого контура L , то в этой точке функция обращается в бесконечность, т.е. не является регулярной. Для вычисления интеграла $\int_L \frac{dz}{z - z_0}$ в этом случае поступим следующим образом: окружим точку z_0 окружностью O с центром в точке z_0 и малым радиусом ρ таким, что окружность целиком лежит внутри замкнутого контура. Тогда подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

будет регулярна в кольце между окружностью и контуром L (рис. 6).

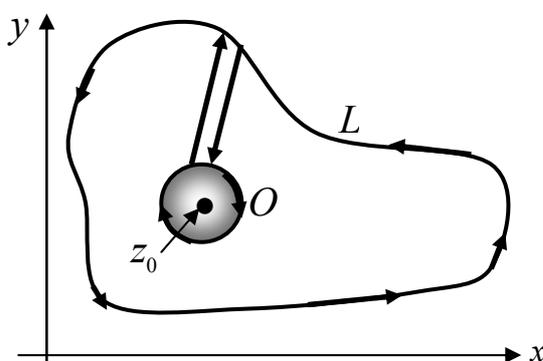


Рис. 6. Выделение окружностью точки нерегулярности.

Для обоснования этого поступим следующим образом: соединим бесконечно тонким разрезом контур L с окружностью O с целью образования нового замкнутого контура, внутри которого отсутствует точка нерегулярности функции $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$. Тогда, согласно **Теореме 1**

(с учётом следствия из неё), находим, что $\int_{L+O} \frac{dz}{z - z_0} = 0$ (с учётом обхода

окружности O по часовой стрелке и компенсацией интегралов на разрезах (см. следствие из **Теоремы 1**)) $= \int_L \frac{dz}{z - z_0} - \int_O \frac{dz}{z - z_0} = 0$. Отсюда по-

лучаем: $\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_O \frac{dz}{z - z_0}$. Следовательно, интегрирование по замкнутому контуру L можно заменить интегрированием по окружности O . На

окружности

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}, \text{ отсюда } dz = i \rho e^{i\varphi} d\varphi.$$

Подставим эти соотношения в вычисляемый интеграл, получим

$$\int_0^1 \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i \rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = 2\pi i.$$

Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует такая её ε -окрестность, что функция $f(z)$ регулярна во всех точках этой окрестности, за исключением самой точки z_0 .

Пусть дана регулярная функция $f(z)$, составим новую функцию с изолированной особой точкой $\frac{f(z)}{z - z_0}$ и определим интеграл от такой функции. Значение такого интеграла определяет **интегральная теорема Коши**:

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и L – кусочно-гладкая кривая, ограничивающая область D_1 , целиком лежащую в области D . Тогда для каждой точки $z_0 \in D_1$ справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

- Полученная формула выражает значение функции $f(z_0)$ в любой точке $z_0 \in D$ через её значения на границе этой области. ●
- Функция $f(z_0)$ регулярна в области D_1 и зависит от комплексной переменной z_0 , поэтому её можно дифференцировать по этому аргументу, т.е.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2};$$

$$f''(z_0) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3};$$

$$f'''(z_0) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^4}; \dots$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Отсюда вытекают следующие следствия:

Следствие 1. Если функция $f(z)$ регулярна в области D , то в этой области регулярны её производные всех порядков.

Следствие 2. Если функция $f(z) = const$, то интегралы

$$\oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^2} = \oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^3} = \oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^4} = \dots = \oint_L \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \dots = 0. \odot$$

Пример 4. Доказать, что $\int_0^{2\pi} e^{\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = 2\pi \frac{\rho^n}{n!}$.

Вычислить этот интеграл в области действительной переменной даже с помощью степенных рядов (см. **45**) весьма затруднительно. Поэтому применим **интегральную теорему Коши**. Рассмотрим показательную функцию $f(z) = e^z$, которая регулярна на всей комплексной плоскости. К этой функции можно применить **формулу Коши**, взяв в качестве контура L окружность O с центром в точке z_0 и малым фиксированным радиусом ρ . Тогда величина

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow e^{z-z_0} = e^{\rho e^{i\varphi}}.$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, получим

$$e^{z-z_0} = e^{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)},$$

при этом дифференциал $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$. Воспользуемся формулой:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \Rightarrow e^{z_0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{e^z dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Разделим последнюю формулу на e^{z_0} и подставим в ранее полученные выражения:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{e^{z-z_0} dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} i \rho e^{i\varphi} d\varphi}{(\rho e^{i\varphi})^{n+1}} = \\ &= \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} e^{-in\varphi} d\varphi}{\rho^n} = \\ &= \frac{n!}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} e^{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) - in\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Выделяя действительную часть этого интеграла (мнимая часть равна нулю, доказать *самостоятельно*), получим требуемый результат:

$$\int_0^{2\pi} e^{\rho \cos \varphi} \cos(\rho \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = 2\pi \frac{\rho^n}{n!} \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} e^{\rho \cos \varphi} \sin(\rho \sin \varphi - n\varphi) d\varphi = 0.$$

68. “Разложение регулярных функций в ряды”

68.1. Ряды с комплексными членами. Ряд Тейлора

Основные определения числовых рядов с комплексными членами соответствуют аналогичным определениям теории рядов действительного переменного (см. **Тему: Ряды, 42-48**). Поэтому напомним лишь

основные понятия теории рядов.

Бесконечная сумма комплексных чисел
$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называется *числовым рядом с комплексными членами*, z_i ($i = 1 \div \infty$) – членами ряда, $z_n = f(n)$ – *общим членом ряда*.

Сумма n первых членов ряда $S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$ называется *n -ой частичной суммой*.

Числовой ряд с комплексными членами называется *сходящимся*, если существует конечный предел n -ой частичной суммой, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \neq \infty,$$

в противном случае – *расходящимся*.

Необходимым, но не достаточным признаком сходимости ряда является стремление общего члена ряда к нулю при стремлении n к бесконечности: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. Достаточными признаками являются признак сравнения, Даламбера и другие (43 и 44).

Степенным рядом называется выражение вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

или более общего вида

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

где $a_i \in C$ (C – множество комплексных чисел).

Теорема 1 (теорема Абеля). Если степенной ряд *сходится* в точке $z_1 \neq z_0$, то он *абсолютно сходится* в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, а в случае, когда ряд *расходится* в этой точке, то он *расходится во всех точках* вне этого круга.

Суммой степенного ряда называется функция $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, регулярная в круге сходимости ряда.

Регулярность суммы обеспечивается теоремой:

Теорема 2. Сумма степенного ряда внутри круга сходимости является *регулярной функцией*, а её первая производная вычисляется путём почленного дифференцирования степенного ряда.

Док-во: Пусть $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ – сумма степенного ряда, который схо-

дится в круге $|z - z_0| < R$ ($R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ – радиус сходимости). Возьмём

произвольный кусочно-гладкий, замкнутый контур L , целиком лежащий внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$. Тогда

$$\oint_L S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_L (z - z_0)^n dz = 0$$

по **интегральной теореме Коши**. Отсюда по **теореме Морера** (п. 67.1, **67**) функция $S(z)$ регулярна внутри замкнутого контура L , а, следовательно, и внутри круга $|z - z_0| < R$. Известно, что сходящийся ряд можно почленно дифференцировать, следовательно,

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}.$$

Следствие. Если ряд $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ сходится в области $|z - z_0| > R$, то его сумма в этой области регулярна.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D , в которой лежит точка z_0 . Обозначим через O окружность с центром в точке z_0 и малым фиксированным радиусом ρ таким, чтобы окружность целиком лежала в области D . Для любой точки z_1 , расположенной внутри окружности O , справедлива **интегральная теорема Коши**

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_1}.$$

Преобразуем дробь $\frac{1}{z - z_1}$ следующим образом:

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - z_1} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

(вторую дробь представили в виде степенного ряда воспользовавшись стандартным разложением $\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ из **45**). Этот ряд абсолютно

сходится, так как $\left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right| < 1$, и его можно почленно интегрировать.

Таким образом, будет получено разложение регулярной функции в **ряд Тейлора**:

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \oint_L \frac{f(z) (z_1 - z_0)^n dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z_1 - z_0)^n.$$

В силу произвольности точки z_1 индекс “1” можно опустить и записать **ряд Тейлора** в обычном виде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

где $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$.

Пример 1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z+3}$ в **ряд Тейлора** в точке $z_0 = 1$.

Воспользуемся стандартным разложением $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, преобразовав заданную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z-1+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}.$$

68.2. Ряд Лорана

Пусть даны две окружности O_r и O_R с радиусами r и R , соответственно, с общим центром в точке z_0 (рис. 7).

Область между окружностями O_r и O_R называется **кольцом** и определяется неравенствами $r \leq |z - z_0| \leq R$.

Обозначение $K(r; R)$.

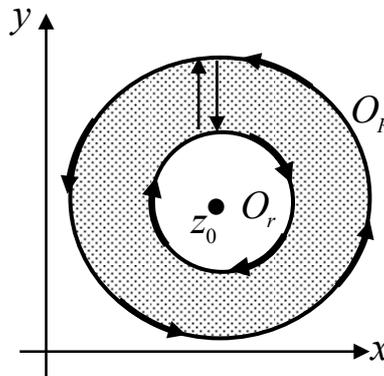


Рис. 7. Кольцо.

Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $K(r; R)$, то для любой точки z , расположенной в кольце ($z \in K(r; R)$) справедливо равенство:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-O_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где “ $-O_r$ ” означает, что обход окружности O_r происходит *по часовой стрелке*; обход окружности O_R происходит *против часовой стрелки*, т.е. в положительном направлении. Изменим направление обход ок-

ружности O_r на положительное, тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-O_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}. \end{aligned}$$

Выполним вышерассмотренное преобразование подинтегральных дробей:

1) $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$ – получен-

ный ряд абсолютно сходится в каждой точки внутри окружности O_R ;

2) $\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - \zeta} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n$ – этот ряд абсо-

лютно сходится в каждой точки вне окружности O_r . Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{O_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ где коэффици-$$

енты $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$. Аналогично получим для второ-

го интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{O_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n}} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

где $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{O_r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}$. Таким образом, получим для данной функции

ряд: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$.

Ряд вида $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ называется **рядом Лорана**.

на.

Первая сумма в ряде Лорана называется **правильной**, а вторая – **главной**.

Ряд Лорана можно переписать в виде **ряда Тейлора**, если ввести суммирование по индексу n от $-\infty$ до ∞ , а коэффициенты ряда вычислять через интегралы по любому замкнутому контуру L , расположен-

ному внутри кольца $K(r; R)$, т.е. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, где коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 2$.

Для представления функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в виде ряда Лорана разложим данную функцию на сумму простых дробей (см. 27):

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Представим каждую дробь в виде ряда:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}};$$

для второй дроби разложение имеет вид (точка $z_0 = 1$ является изолированной особой точкой и находится внутри контура L):

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Следовательно, ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Ряды Лорана и Фурье связаны между собой. Пусть функция $f(z)$ регулярна в сколь угодно узком кольце $K(1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$, тогда в этом кольце её можно представить в виде ряда Лорана вида $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, где коэффициенты определяются формулами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

В частности, для точек $z = e^{it}$, лежащих на единичной окружности, получим: $F(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, где $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$. Полученный ряд

можно переписать в привычном виде ряда Фурье:

$$F(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n \cos(nt) + c_n \sin(nt)\},$$

где введены обозначения $b_0 = 2a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi$, а все остальные коэффициенты ряда Фурье:

$$b_n = a_n + a_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \text{ и } c_n = \frac{a_{-n} - a_n}{i} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

69. “Вычеты”

69.1. Классификация особых точек

В п. 67.2, 67 было дано определение изолированной особой точки. Введение ряда Лорана позволяет классифицировать точки такого вида.

Если *отсутствует главная часть ряда Лорана*, т.е. функция $f(z)$ представляется в виде ряда Тейлора: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, то точка z_0 называется *устранимой особой точкой*.

○ Для *устранимой особой точки* $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, где $A \neq \infty$. ○

Если *главная часть ряда Лорана имеет конечное число членов*, т.е. ряд имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k},$$

то z_0 называется *полюсом кратности k ($k \neq 1$)*, а при $k=1$ – *простым полюсом*.

○ Для *полюса любой кратности* $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. ○

Если *главная часть ряда Лорана имеет бесконечное число членов*, т.е. ряд имеет вид: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, то точка z_0 называется *существенно особой точкой*.

○ Для *существенно особой точки* $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует. ○

Признаки существования особых точек дают следующие теоремы:

Теорема 1. Для того чтобы точка z_0 была *устранимой особой точкой*, необходимо и достаточно существования конечного предела

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Док-во: Представим функцию $f(z)$ в виде ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots$$

Из разложения видно, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ будет конечным тогда и только тогда

да, когда отсутствует главная часть ряда Лорана, т.е. только в случае, когда точка z_0 является устранимой особой точкой, причём

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A = a_0.$$

Теорема 2. Для того чтобы точка z_0 была полюсом кратности k , необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$, где $\varphi(z)$ – регулярная функция в ε -окрестности точки z_0 .

Док-во: Необходимость. Пусть функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс кратности k . Это означает, что её ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}.$$

Вынесем множитель $\frac{1}{(z - z_0)^k}$, получим

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n (z - z_0)^k + a_{-1} (z - z_0)^{k-1} + a_{-2} (z - z_0)^{k-2} + \dots + a_{-k} \right] = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}.$$

Ряд Лорана сходится в некотором кольце $0 < |z - z_0| < r$ ($K(0; r)$). Пусть z_1 произвольная точка из кольца $K(0; r)$, а функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n (z - z_0)^k + a_{-1} (z - z_0)^{k-1} + a_{-2} (z - z_0)^{k-2} + \dots + a_{-k}$$

представлена в виде ряда Тейлора. По теореме Абеля, этот ряд сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, $\varphi(z)$ является суммой ряда и регулярной функцией.

Достаточность. Разложим регулярную функцию $\varphi(z)$ в ряд Тейлора:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \text{ тогда}$$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k} = \frac{b_0}{(z - z_0)^k} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + b_k + b_{k+1}(z - z_0) + b_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots$$

т.е. главная часть ряда Лорана имеет конечное число членов. Следовательно, функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс кратности k .

Следствие. Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс кратности k , то существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} \{(z - z_0)^k f(z)\} = A$, в частности, при $k = 1$ предел для простого полюса равен первому коэффициенту

главной части ряда Лорана: $\lim_{z \rightarrow z_0} \{(z - z_0) f(z)\} = a_{-1}$.

Точка κ_0 называется **нулём (корнем)** функции $f(z)$, если выполняется равенство $f(\kappa_0) = 0$.

Точка κ_0 называется **нулём кратности k** функции $f(z)$, если её можно представить в виде $f(z) = (z - \kappa_0)^k \varphi(z)$, причём $\varphi(\kappa_0) \neq 0$, при $k=1$ нуль называется **простым**.

Теорема 3. Если функция $f(z)$ имеет в точке κ_0 нуль кратности k , то функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке **полюс той же кратности**.

Док-во: Согласно определению, $f(z) = (z - \kappa_0)^k \varphi(z)$ и $\varphi(\kappa_0) \neq 0$. Следовательно, $\lim_{z \rightarrow \kappa_0} \left\{ \frac{(z - \kappa_0)^k}{f(z)} \right\} = \lim_{z \rightarrow \kappa_0} \left\{ \frac{(z - \kappa_0)^k}{(z - \kappa_0)^k \varphi(z)} \right\} = \frac{1}{\varphi(\kappa_0)} \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$. Это означает, что функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в точке κ_0 **полюс кратности k** .

Пример 1. Найти и классифицировать **изолированные особые точки** функции $f(z) = \frac{z-1}{(z^2+4)(z-2)^3}$.

Особыми точками являются комплексные числа, для которых знаменатель дроби обращается в нуль

$$z^2 + 4 = 0, \quad z^2 = -4, \quad z_1 = -i2, \quad z_2 = i2;$$

$$z - 2 = 0, \quad z_3 = 2.$$

Вычислим пределы в этих точках:

а) $z_1 = -i2$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -i2} \left\{ (z+i2) \frac{z-1}{(z+i2)(z-i2)(z-2)^3} \right\} &= \lim_{z \rightarrow -i2} \left\{ \frac{z-1}{(z-i2)(z-2)^3} \right\} = \frac{-1-i2}{-i4(-i2-2)^3} = \\ &= -\frac{1+i2}{i4(i2+2)^3} = i \frac{1+i2}{32(1+i)^3} = \frac{i(1+i2)(1-i)^3}{32 \cdot 8} = \frac{8+i3}{256} - \text{простой полюс.} \end{aligned}$$

б) $z_2 = i2$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i2} \left\{ (z-i2) \frac{z-1}{(z+i2)(z-i2)(z-2)^3} \right\} &= \lim_{z \rightarrow i2} \left\{ \frac{z-1}{(z+i2)(z-2)^3} \right\} = \frac{-1+i2}{i4(i2-2)^3} = \\ &= -\frac{1-i2}{i4(i2-2)^3} = i \frac{1-i2}{32(-1+i)^3} = -\frac{i(1-i2)(1+i)^3}{32 \cdot 8} = \frac{3-i}{128} - \text{простой полюс.} \end{aligned}$$

$$в) z_3 = 2: \lim_{z \rightarrow 2} \left\{ (z-2)^3 \frac{z-1}{(z^2+4)(z-2)^3} \right\} = \lim_{z \rightarrow 2} \left\{ \frac{z-1}{z^2+4} \right\} = \frac{1}{8} - \text{ полюс кратности 3.}$$

69.2. Вычеты в особых точках

Пусть функция $f(z)$ имеет в точке z_0 простой полюс, тогда интеграл по любому контуру, внутри которого лежит полюс z_0 , зависит лишь от вида функции $f(z)$ и точки z_0 . Значение этого интеграла равно первому коэффициенту в главной части ряда Лорана, т.е.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz.$$

Коэффициент a_{-1} называется **вычетом функции $f(z)$ в точке z_0** и обозначается $a_{-1} = \text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$.

Сформулируем ряд теорем о вычетах в изолированных особых точках:

Теорема 4. Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Док-во: Согласно определению устранимой особой точки, главная часть ряда Лорана отсутствует, следовательно, все коэффициенты a_{-n} при $n \geq 1$ равны нулю, т.е. и коэффициент $a_{-1} = 0$.

Теорема 5. Вычет в простом полюсе

$$\text{res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \{ (z - z_0) f(z) \}.$$

Док-во: Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 *простой полюс*, то её ряд

Лорана имеет вид: $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$. Поэтому

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{ (z - z_0) f(z) \} = \lim_{z \rightarrow z_0} \{ a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots \} = a_{-1}.$$

Следствие. Пусть функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и функция $\psi(z)$ имеет в точке z_0 *простой нуль*, причём $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда точка z_0 является *простым полюсом* функции $f(z)$.

Док-во: Вычислим вычет $\text{res}_{z_0} f(z) = \text{res}_{z_0} \left\{ \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right\} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right\} =$

$$(\text{так как } \psi(z_0) = 0, \text{ можно переписать предел в виде)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} \right\} =$$

$$= \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \text{ Таким образом, } \operatorname{res}_{z_0} \left\{ \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right\} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Теорема 6. Если точка z_0 полюс кратности k функции $f(z)$, то

$$a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-z_0)^k f(z) \right\}$$

Док-во: Так как функции $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс кратности k , то её **ряд Лорана** имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}.$$

Умножив это равенство на $(z-z_0)^k$, получим

$$(z-z_0)^k f(z) = a_0 (z-z_0)^k + a_1 (z-z_0)^{k+1} + a_2 (z-z_0)^{k+2} + \dots + a_{-1} (z-z_0)^{k-1} + \dots + a_{-k}.$$

Дифференцируя это выражение $k-1$ раз, получим:

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-z_0)^k f(z) \right\} = (k-1)! a_0 (z-z_0) + k! a_1 (z-z_0)^2 + \dots + (k-1)! a_{-1}.$$

Переходя к пределу при $z \rightarrow z_0$, получим утверждение теоремы.

Пример 2. Найти $\operatorname{res}_{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\sin(2z)}{z \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^3} \right\}$.

Заданная функция имеет в точке $z_0 = \frac{\pi}{4}$ полюс кратности 3, поэтому применим **Теорему 6**:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\sin(2z)}{z \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^3} \right\} &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^3 \frac{\sin(2z)}{z \left(z - \frac{\pi}{4} \right)^3} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{\sin(2z)}{z} \right\} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{(1-2z^2) \sin(2z) - 2z \cos(2z)}{z^3} \right\} = \frac{64 - 8\pi^2}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\oint_L \frac{\cos z dz}{z - \frac{\pi}{2}}$, где L – прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\pi$, $y=-1$ и $y=1$.

Особой точкой подынтегральной функции $f(z) = \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}}$ является точка

$z_0 = \frac{\pi}{2}$, которая лежит внутри контура L . Вычислим предел функции

при $z \rightarrow \frac{\pi}{2}$: $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = \left[\frac{0}{0} \right] =$ (воспользуемся правилом Лопиталя, см.

21) $= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{1} = 1$. Следовательно, точка $z_0 = \frac{\pi}{2}$ является *устранимой*

особой точкой, поэтому

$$\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\cos 2z}{z - \frac{\pi}{2}} \right\} = 0 \quad \text{и} \quad \oint_L \frac{\cos z \, dz}{z - \frac{\pi}{2}} = 0.$$

69.3. Основная теорема о вычетах

Теорема 7. Если функция $f(z)$ регулярна в каждой точке замкнутой области D , ограниченной кривой Γ_D , за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , лежащих внутри контура Γ_D , то

$$\oint_{\Gamma_D} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

Док-во: Заключим каждую точку z_k в окружность $|z - z_k| \leq \rho_k$ ($k=1 \div n$) столь малого радиуса ρ_k , чтобы все эти окружности лежали внутри области D и не пересекались. Границы этих окружностей обозначим через g_k ($k=1 \dots n$). Соединим разрезами границу области D с окружностями и окружности между собой так, чтобы они образовали единый замкнутый контур L (рис. 8). В области, ограниченной контуром L , функция $f(z)$ регулярна в каждой точке и к ней применимо **Следствие** из **Теоремы 1 68**, т.е. интеграл по общей границе Γ_D заменяется на интеграл по замкнутому контуру L , состоящему из кусочно-гладких участков:

$$\oint_{\Gamma_D} f(z) \, dz = \oint_{g_1} f(z) \, dz + \oint_{g_2} f(z) \, dz + \dots + \oint_{g_n} f(z) \, dz.$$

По определению вычета $\oint_{\Gamma_D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{res}_{z_k} f(z)$, следовательно,

$$\oint_{\Gamma_D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z_k} f(z).$$

Пример 4. Вычислить $\oint_L \frac{zdz}{(z-1)(z+2)(z+i)}$, если контур L охватывает все особые точки.

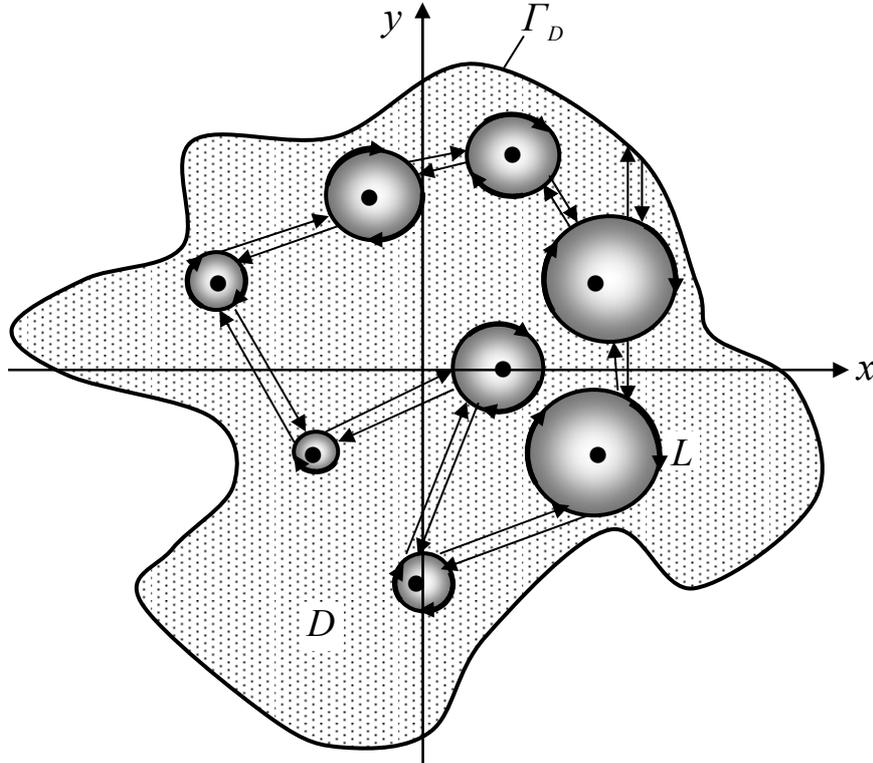


Рис. 8. Область D , внутри которой расположены особые точки.

Особыми точками подынтегральной функции $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+i)}$ являются точки $z_1 = -2$, $z_2 = 1$ и $z_3 = -i$, которые по условию задачи лежат внутри контура L и являются простыми полюсами. Согласно **Теореме 5**, необходимо найти вычеты в этих точках:

а) $z_1 = -2$:

$$\text{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -2} \left\{ (z+2) \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+i)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -2} \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+i)} \right\} = -\frac{2+i}{6};$$

б) $z_2 = 1$:

$$\text{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (z-1) \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+i)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z}{(z+2)(z+i)} \right\} = \frac{1-i}{6};$$

в) $z_3 = -i$:

$$\operatorname{res}_{z_3} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \left\{ (z+i) \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+i)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -i} \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+2)} \right\} = \frac{1+3i}{10}.$$

Таким образом, искомый интеграл равен:

$$\oint_L \frac{z dz}{(z^2-1)(z+i)} = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{z_k} f(z) = 2\pi i \left(-\frac{2+i}{6} + \frac{1-i}{6} + \frac{1+3i}{10} \right) = \frac{\pi(1-2i)}{15}.$$

Таким образом, *схема* применения вычетов для вычисления интегралов имеет вид:

- найти все особые точки подынтегральной функции;
- отобразить на комплексной плоскости контур интегрирования и особые точки подынтегральной функции;
- вычислить вычеты в тех особых точках, которые находятся внутри контура интегрирования;
- просуммировать значения вычисленных вычетов, после чего умножить сумму на $2\pi i$.

Пример 5. Вычислить $\oint_L \frac{e^{\frac{\pi z}{2}} dz}{z^4 + z^2}$, если контур $L: |z-i|=3$.

а) находим все особые точки подынтегральной функции:

$$z^4 + z^2 = z^2(z^2 + 1) = z^2(z-i)(z+i).$$

Особыми точками являются точки $z_1=0$, $z_2=-i$ и $z_3=i$.

б) нарисуем на комплексной плоскости контур интегрирования и особые точки (рис. 9):

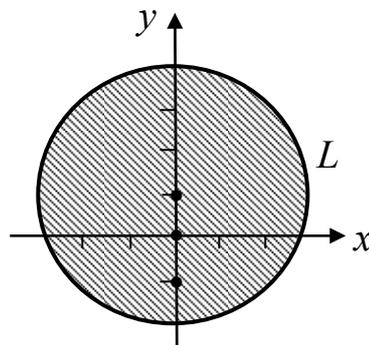


Рис. 9. Контур L и особые точки подынтегральной функции.

в) так как пределы подынтегральной функции во всех точках равны бесконечности, то все особые точки являются *полюсами*.

Найдём вычеты:

1) полюс кратности 2 $z_1=0$:

$$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left\{ z^2 \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2 (z^2 + 1)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi z}{2}} \left[\frac{\pi}{2} (z^2 + 1) - 2z \right]}{(z^2 + 1)^2} \right\} = \frac{\pi}{2};$$

2) простой полюс $z_2=-i$:

$$\operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \left\{ (z+i) \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2 (z-i)(z+i)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -i} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2 (z-i)} \right\} = -\frac{1}{2};$$

3) простой полюс $z_2=i$:

$$\operatorname{res}_{z_3} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z-i) \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2 (z-i)(z+i)} \right\} = \lim_{z \rightarrow i} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2 (z+i)} \right\} = -\frac{1}{2};$$

2) просуммируем значения вычисленных вычетов и умножим её на $2\pi i$, получим значение исходного интеграла:

$$\oint_L \frac{e^{\frac{\pi z}{2}} dz}{z^2 (z^2 + 1)} = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{z_k} f(z) = 2\pi i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \pi(\pi - 2)i.$$

Рассмотрим поведение комплексной функции при удалении изолированной особой точки z в бесконечность.

Точка $z=\infty$ называется *бесконечно удалённой точкой*.

Путём замены $\zeta = \frac{1}{z}$ бесконечно удалённая точка может быть переведена в начало координат комплексной плоскости. Тогда функция $f(z)$ будет регулярна в кольце $K(r; \infty)$, где r – радиус окружности O_r , центр которой находится в точке $\zeta=0$. Выберем замкнутый контур L , внутри которого целиком расположена окружность O_r (рисунок аналогичен рис. 6). В силу регулярности функции $f(z)$ интеграл

$$\oint_{L+O_r} f(z) dz = \oint_L f(z) dz + \oint_{-O_r} f(z) dz = 0,$$

следовательно, $\oint_L f(z) dz = -\oint_{-O_r} f(z) dz = -\operatorname{res}_{\infty} f(z) = -a_{-1}$. Отсюда следует

интересный **вывод**:

Если функция имеет особые точки в конечном числе точек z_1, z_2, \dots, z_n , лежащих внутри контура Γ_D , ограничивающего область D , то сумма всех вычетов и вычета на бесконечности равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z) + \operatorname{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

Поэтому для вычисления суммы всех вычетов достаточно вычислить вычет на бесконечности и взять его со знаком “–”.

В заключение данного раздела приведём теорему, позволяющую вычислять интегралы по замкнутым контурам от логарифмической производной комплексной функции.

Теорема 8. Пусть функция $f(z)$ регулярна в каждой точке замкнутой области D , ограниченной кривой Γ_D , за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , лежащих внутри контура Γ_D , и $f(z) \neq 0 \forall z \in \Gamma_D$. Тогда

$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$, где N – число нулей, P – число полюсов функции $f(z)$ в области D с учётом их кратности.

Таким образом, вычисление интеграла от логарифмической производной сводится к вычислению разности между количеством нулей и полюсов функции $f(z)$.

70. “Кватернионы и физические уравнения”

70.1. Кватернионы и формы их записи

Решение квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ (z – неизвестная величина, a, b, c – действительные числа) вне зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ можно записать в виде:

$$z_{1,2} = \frac{-b \mp t \sqrt{|D|}}{2a} = x \mp t y,$$

здесь $x = \frac{-b}{2a} = \operatorname{Re}(z_{1,2})$ – действительная часть комплексного числа $z_{1,2}$,

а $y = \frac{\sqrt{|D|}}{2a} = \operatorname{Im}(z_{1,2})$ – мнимая часть этого числа. Эти числа принадлежат множеству действительных чисел. Квадрат комплексной единицы $t^2 = \operatorname{sign}(D)$ определяется знаком дискриминанта, т.е.

$$t^2 = \text{sign}(D) = \begin{cases} -1, & D < 0 \text{ – комплексные числа;} \\ 0, & D = 0 \text{ – идеальные числа;} \\ 1, & D > 0 \text{ – дуальные числа.} \end{cases}$$

В общем случае, если числа x и y принадлежат другому множеству комплексных чисел с другой комплексной единицей (**принцип удвоения комплексного числа**, например, $x = u + t_1 v$ и $y = w + t_1 p$), то возникают гиперкомплексные числа вида $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$, где введены обозначения:

$$q = u + t_1 v + t(w + t_1 p) = u + t_1 v + tw + tt_1 p = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3.$$

Кватернионом называется гиперкомплексное число, которое получается из комплексного числа с использованием **принципа удвоения комплексных единиц**.

Однако принципа удвоения комплексных чисел недостаточно для однозначного определения множества гиперкомплексных чисел (H). Для оперирования с ними надо знать таблицу произведений комплексных единиц, так как все операции над новыми числами не должны выводить результат действия за границы множества H .

Итак, если дано комплексное число $z = x + iy$, то, полагая $x = x_0 + jx_2$ и $y = x_1 + jx_3$ ($j^2 = -1$), получим кватернион: $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$ (произведения комплексных единиц приведены в табл. 1), где x_0 – числовая (скалярная), а $ix_1 + jx_2 + kx_3$ – векторная (мнимая) части кватерниона.

Таблица 1.

Произведения комплексных единиц

$e_m \wedge e_n$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Кватернионы подчиняются всем арифметическим действиям. Особый интерес представляет произведение мнимых частей двух разных кватернионов:

$$\text{Im}(q_1) \text{Im}(q_2) = -(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) i + (x_3 y_1 - x_1 y_3) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k.$$

Действительная часть этого выражения представляет собой скалярное произведение вектора $X = (x_1; x_2; x_3)$ на вектор $Y = (y_1; y_2; y_3)$, т.е. $-(X \cdot Y)$ (см. **5**). Мнимая часть кватерниона представляет собой векторное произведение этих векторов $[X \times Y]$ (см. **6**). Исходя из вышеизло-

женного материала, можно предложить иную форму записи кватерниона:

$$\boxed{q = q_0 + \alpha q}, \alpha^2 = \begin{cases} -1, & \text{гиперкомплексные числа;} \\ 0, & \text{гиперидеальные числа;} \\ 1, & \text{гипердуальные числа.} \end{cases}$$

Форма записи кватерниона вида $\boxed{q = q_0 + \alpha q}$ называется *алгебраической (векторной)*.

Перемножение мнимых частей гиперкомплексных чисел осуществляется по правилу: $\alpha q_1 \alpha q_2 = \alpha^2 (q_1 \cdot q_2 - \alpha [q_1 \times q_2])$.

Комплексно-сопряжённым гиперкомплексным числом называется кватернион $\boxed{q^* = q_0 - \alpha q}$.

Длиной (модулем) $|q|$ кватерниона называется его произведение на комплексно-сопряжённое к нему гиперкомплексное число.

Нормой $\|q\|$ кватерниона будем называть скалярную часть произведения кватерниона самого на себя.

Вычислим длину $|q|$ и норму $\|q\|$ кватерниона:

$$q^* q = |q|^2 = (q_0 + \alpha q)(q_0 - \beta q) = q_0^2 + |q|^2;$$

$$q^2 = q \cdot q = q_0^2 - |q|^2 + \alpha 2q_0 |q| e_q \Rightarrow \|q\|^2 = q_0^2 - |q|^2,$$

здесь e_q – единичный вектор (**4**) в направлении вектора q . Полученные формулы указывают на то, что введение кватернионов объединяет *псевдоевклидовое, идеальное и евклидовое* пространства. Поэтому это пространство будем называть *гиперпространством*. В евклидовом неискривлённом пространстве из первого равенства следует, что

$$\boxed{\left(\frac{q_0}{|q|}\right)^2 + \left(\frac{|q|}{|q|}\right)^2 = 1}.$$

Это равенство означает, что после введения угла φ между кватернионом и осью Oq_0 : $q_0 = |q| \cos \varphi$ и $|q| = |q| \sin \varphi$. В псевдоевклидовой части гиперпространства из определения нормы кватерниона следует равенство

$$\boxed{\left(\frac{q_0}{\|q\|}\right)^2 - \left(\frac{|\bar{q}|}{\|q\|}\right)^2 = 1},$$

т.е. $q_0 = \|q\| \operatorname{ch} \varphi$ и $|q| = \|q\| \operatorname{sh} \varphi$.

Рассмотрим другие *формы записи* кватерниона:

а) тригонометрическая форма записи дуального кватерниона

$$q = |q| (\cos \varphi + \alpha e_q \sin \varphi),$$

здесь единичный вектор αe_q называют **цветом** кватерниона.

б) *показательная форма* записи *дуального* кватерниона

$$q = |q| \exp(\alpha e_q \varphi) = |q| \exp(i\xi + j\psi + k\zeta),$$

где угол φ связан с углами ξ , ψ и ζ соотношением $\varphi^2 = \xi^2 + \psi^2 + \zeta^2$.

Если в евклидовом подпространстве кватернион разделить на его модуль, то получим ортомодулированный кватернион в евклидовом пространстве:

$\frac{q}{|q|} = \cos \alpha_0 + i \cos \alpha_1 + j \cos \alpha_2 + k \cos \alpha_3$, где α_n ($n = 0 \dots 3$) – углы,

которые образует кватернион с осями ортогональной системы координат в евклидовом гиперпространстве.

Косинусы $\cos \alpha_n$ называются **направляющими косинусами** кватерниона.

Направляющие косинусы кватерниона связаны между собой соотношением $\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$. Установим связь между *направляющими косинусами* кватерниона и углами ξ , ψ и ζ . Используя формулу Эйлера $e^{i\gamma} = \cos \gamma + i \sin \gamma$, нетрудно показать, что

$$\cos \alpha_0 = \cos \xi \cos \psi \cos \zeta - \sin \xi \sin \psi \sin \zeta;$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \xi \sin \psi \sin \zeta + \sin \xi \cos \psi \cos \zeta;$$

$$\cos \alpha_2 = \cos \xi \sin \psi \cos \zeta - \sin \xi \cos \psi \sin \zeta;$$

$$\cos \alpha_3 = \cos \xi \cos \psi \sin \zeta + \sin \xi \sin \psi \cos \zeta.$$

При значении углов $\psi = 2\pi n$, $\zeta = 2\pi m$, ($n, m \in Z$) получаем стандартные формулы для комплексного числа: $\cos \alpha_0 = \cos \xi$ и $\cos \alpha_1 = \sin \xi$. В псевдоевклидовом пространстве (гиперкомплексный кватернион) ортонормированный кватернион равен:

$$\frac{q}{\|q\|} = ch \alpha_0 + i ch \alpha_1 + j ch \alpha_2 + k ch \alpha_3,$$

где α_n ($n = 0 \dots 3$) – углы, которые образует кватернион с осями ортогональной системы координат в псевдоевклидовом подпространстве. Направляющие косинусы связаны между собой равенством:

$$ch^2 \alpha_0 - ch^2 \alpha_1 - ch^2 \alpha_2 - ch^2 \alpha_3 = 1.$$

70.2. Гипераналитичность кватернионных функций

Комплексная функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ($u(x, y), v(x, y) \in R(x, y)$), называется **аналитической (регулярной, голоморфной)** в области D ,

если она удовлетворяет условиям Коши-Римана (п. 66.2, **66**).

Если рассматривать комплексное число $z = x + iy$, как преобразование базисных элементов $e_1 = 1$ и $e_2 = i$, то, согласно теории Ли, можно ввести инфинитезимальный комплексный оператор $\nabla_L = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$. По-

действуем этим оператором на комплексную функцию $f(z)$, получим

$$\nabla_L f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

В силу условий Коши-Римана регулярная функция $f(z)$ будет удовлетворять уравнению $\boxed{\nabla_L f(z) = 0}$.

Для получения условий, аналогичных соотношениям Коши-Римана, и определяющих регулярность гиперкомплексной кватернионной функции $f(t, \mathbf{r}) = U(t, \mathbf{r}) + \alpha V(t, \mathbf{r})$ в области D , подействуем оператором $\nabla_L = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ на эту функцию

$$\nabla_L f = \frac{\partial U}{\partial t} - \operatorname{div} V + \alpha \left(\operatorname{grad} U + \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{rot} V \right) = A + \alpha B.$$

Учитывая уравнение $\nabla_L f(z) = 0$, получим условия регулярности функции f в области D :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div} V \quad \text{и} \quad \operatorname{grad} U = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{rot} V \right).$$

Если гиперфункция $f(t, \mathbf{r})$ не удовлетворяет полученным соотношениям, то она *нерегулярна*. Предположим, что такая функция является *гармонической* функцией, тогда она удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div} B = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial B}{\partial t} - \operatorname{grad} A - \operatorname{rot} B = 0,$$

причём функции U и V удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \Delta U = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \Delta V = 0.$$

Решение первого уравнения, которое убывает с ростом координаты t имеет вид $U = U_0 \exp(-|\mathbf{m}|t + i\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})$, где \mathbf{m} – волновой вектор. Оно описывает волну в 3-пространстве, которая затухает с ростом значения координаты t .

70.3. Псевдогиперфункции и физические законы

Рассмотрим псевдогиперфункцию $f(\tau, \mathbf{r}) = iu(\tau, \mathbf{r}) + \alpha v(\tau, \mathbf{r})$ (величина $\tau = ct$ определяет время в единицах измерения пространственных

координат, c – граничная скорость распространения сигнала в веществе), которая описывает скалярно-векторное поле в замкнутой псевдоевклидовой области D (комплексные числа $i^2 = \alpha^2 = -1$ и $i\alpha = \alpha i$). Выясним условия регулярности этой псевдогиперфункции. Для решения задачи подействуем оператором

$$\diamond = i \frac{\partial}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = i \frac{\partial}{\partial \tau} + \alpha \nabla$$

на данную функцию $f(\tau, \mathbf{r})$ и воспользуемся уравнением $\diamond f = 0$, тогда получим *условия регулярности*:

$$-K = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \operatorname{grad} u = 0,$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Условия регулярности не изменятся, если произвести замены

$$u \rightarrow u + \frac{\partial q(\tau)}{\partial \tau} \quad \text{и} \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \operatorname{grad} g(\mathbf{r}),$$

причём функции $q(\tau)$ и $g(\mathbf{r})$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 q(\tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta g(\mathbf{r}) = 0.$$

Эти равенства определяют *калибровочную инвариантность* псевдогиперфункций.

Из уравнения $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ следует, что функция $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \sigma$. Вводя обозначение $\chi = \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + u$ и подставляя функцию $u = \chi - \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$ в первое уравнение условий регулярности, получим $\frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \square \sigma = 0$ (здесь $\square = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ –

оператор Даламбера); функция χ удовлетворяет уравнению $\operatorname{grad} \chi = 0$ (см. уравнение для функции \mathbf{E}). Если вещественная функция σ подчиняется *уравнению Даламбера* $\square \sigma = 0$, то регулярная псевдогиперфункция определяется однозначно.

Преобразуем первое уравнение условий регулярности к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \operatorname{div} \left(u \frac{\mathbf{V}}{c} \right) = \operatorname{div} \left(u \frac{\mathbf{V}}{c} - \mathbf{v} \right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{J}_u = \sigma_u,$$

где $\mathbf{J}_u = u \frac{\mathbf{V}}{c}$ – поток величины $u(\tau, \mathbf{r})$; $\sigma_u = \operatorname{div}(\mathbf{J}_u - \mathbf{v})$ – производство величины u в области D за счёт наличия “стоков” и “источников”. Ес-

ли в области D отсутствуют “стоки” и “источники” ($\sigma_u = 0$) и среда несжимаема ($\operatorname{div} V = 0$), то величина u сохраняется. Таким образом, первое уравнение условий регулярности определяет в общем случае уравнение баланса величины u , а в частном случае ($\sigma_u = 0$) – дифференциальный закон сохранения временной составляющей псевдогиперфункции. Второе уравнение условий регулярности путём преобразования

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \left(\frac{V}{c} \operatorname{grad} \right) v = \left(\frac{V}{c} \operatorname{grad} \right) v - \operatorname{grad} u \text{ сводится к виду}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \left(\frac{V}{c} \operatorname{grad} \right) v - \operatorname{grad} u.$$

Формула определяет закон изменения векторной функции $v(\tau, r)$, т.е. закон движения величины, описываемой этой функцией. Из последнего уравнения условий регулярности следует, что векторное поле v является *потенциальным полем* (безвихревым, т.е. $v(\tau, r) = -\operatorname{grad} \lambda(\tau, r)$), здесь $\lambda(\tau, r)$ – потенциал векторного поля v).

Используя условия регулярности, установим гипераналитичность поля импульсов **теории Ньютона**:

1 уравнение: $\frac{\partial E}{c \partial \tau} + \operatorname{div}(mV) = 0 \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div}(mV) = 0$ – закон сохранения массы, записанный в дифференциальной форме;

2 уравнение: $\frac{dp}{d\tau} = \left(\frac{V}{c} \operatorname{grad} \right) (mV) - \frac{\operatorname{grad} E}{c} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \operatorname{grad} \left(\frac{mV^2}{2} - E \right)$, где учтено

постоянство массы m . Обозначая через $K = \frac{mV^2}{2}$ – кинетическую энергию, а через $U = E - K$ – потенциальную энергию, перепишем последнее уравнение в виде **второго закона Ньютона** $\boxed{\frac{dp}{dt} = -\nabla U = F}$.

3 уравнение: показывает *потенциальность поля импульсов*.

Полученные условия регулярности псевдогиперфункций применим для изучения кинетических процессов. **Законы Фика** для диффузии и **Фурье** для теплопроводности наблюдаются при отсутствии источников и стоков ($\sigma_u = \operatorname{div}(J_u - v) = 0$). Следовательно, векторная часть псевдокватерниона $v = J_u$, где J_u – поток характеристики u . Термодинамическая сила, вызывающая поток, $X = -\nabla u = \frac{\partial J_u}{\partial \tau}$. По *линейной* **тео-**

рии Онзагера термодинамическая сила и поток связаны соотношением $J_u = kX = -k \nabla u$, где k – коэффициент пропорциональности, при этом

третье уравнение условий регулярности при постоянстве k выполняется автоматически. Отсюда следует **вывод**:

Законы Фика и **Фурье** имеют место в том случае, когда выполняется дифференциальное уравнение $\frac{\partial J_u}{\partial \tau} = \frac{J_u}{k}$. Решением этого уравнения является функция $J_u = J_{u0}(r) \exp\left(\int \frac{d\tau}{k}\right)$. Из первого и второго уравнений условий регулярности следует, что параметр u описывается функцией, которая удовлетворяет **уравнению Даламбера** $\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0$.

70.4. Диссипативные системы Онзагера и Казимира

Запишем выражение для *безразмерной энтропии* m -компонентной системы в виде: $\sigma = \frac{\theta_s}{\theta} \frac{U}{\theta_s} + \frac{PV_s}{\theta} \frac{V}{V_s} - \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\theta} N_i$ (V_s и θ_s – характерные объём и температура системы), которое позволяет ввести безразмерные обобщённые силы $f_1 = \frac{\theta_s}{\theta}$, $f_2 = \frac{PV_s}{\theta}$ и $f_{3i} = -\frac{\mu_i}{\theta}$ (*интенсивные* величины), и координаты $q_1 = \frac{U}{\theta_s}$, $q_2 = \frac{V}{V_s}$ и $q_{3i} = N_i$ (*экстенсивные* характеристики). Введём в рассмотрение векторы, описывающие положение системы в некотором пространстве термодинамических переменных: *вектор обобщённой термодинамической силы* $F = (f_1; f_2; f_{31}; \dots; f_{3m})$ и *вектор состояния* системы $Q = (q_1; q_2; q_{31}; \dots; q_{3m})$.

Формула для *безразмерной энтропии* определяет “работу” обобщённых термодинамических сил как скалярное произведение векторов F и Q : $\sigma = F \cdot Q$. Изменение энтропии задаётся формулой:

$$d\sigma = F \cdot dQ + Q \cdot dF.$$

Бесконечно малые смещения *изолированной системы* (система не обменивается ни энергией, ни частицами, ни энтропией с окружающей средой) из положения равновесия таковы, что выполняется равенство

$$Q \cdot dF = 0.$$

Следовательно, скорость изменения энтропии системы определяется формулой (производная вычисляется по безразмерному времени τ): $\frac{d\sigma}{d\tau} = F \cdot \frac{dQ}{d\tau}$. Если вектор состояния постоянен, то система не производит энтропию. Постоянство вектора состояния соответствует сохранению *экстенсивных* характеристик (внутренней энергии, объёма и чис-

ла частиц каждого сорта) или коллективного вектора состояния системы.

Положение системы в гиперпространстве зададим псевдокватернионами $Q_k(\tau, r) = iq_k(\tau, r) + \alpha J_k(\tau, r)$, где $J_k(\tau, r)$ – безразмерный поток величины $q_k(\tau, r)$. Силы, которые действуют на термодинамическую систему, определим функциями $F_k(\tau, r) = if_k(\tau, r) + \alpha X_k(\tau, r)$, где $X_k(\tau, r)$ – обобщённые, векторные, термодинамические силы. Так как термодинамические силы стремятся вернуть изолированную систему в состояние равновесия, то их действие аналогично действию упругих сил в растянутой пружине. Следовательно, эти силы прямо пропорциональны изменениям координат $Q_k(\tau, r)$:

$$F_k(\tau, r) = \sum_{j=1}^g L_{kj} Q_j(\tau, r).$$

Невырожденность матрицы $L = (L_{kj})$ соответствует существованию обратной матрицы $L^{-1} = (L_{jk})$, которая связывает обобщённые координаты и силы $Q_j(\tau, r) = \sum_{k=1}^g L_{jk} F_k(\tau, r)$, которое эквивалентно выполнению двух равенств $q_k = \sum_j L_{kj} f_j$ и $J_k = \sum_j L_{kj} X_j$. Характеристическую функцию *состояния* системы определим произведением псевдокватернионов

$$F_k = if_k + \alpha X_k \text{ и } Q_k = iq_k + \alpha J_k :$$

$$\begin{aligned} F_1 = \sum_k F_k Q_k^+ &= \sum_k (f_k q_k - X_k \cdot J_k + i\alpha (f_k J_k - q_k X_k) + \alpha [X_k \times J_k]) = \\ &= \dot{\sigma}_0 - \dot{\sigma}_p + \alpha (iW + Y), \end{aligned}$$

здесь

$\dot{\sigma}_0 = \sum_k f_k q_k$ – диссипативная функция, связанная со скоростью изменения поля потенциалов термодинамической системы;

$\dot{\sigma}_p = \sum_k X_k \cdot J_k$ – диссипативная функция, определяющая производство энтропии;

$W = \sum_k (f_k J_k - q_k X_k)$ – градиентная функция движения, определяющая симметрию процессов;

$Y = \sum_k [X_k \times J_k]$ – векторная функция *перемешивания*.

Линейная связь между обобщённой термодинамической силой и вектором состояния приводит к тому, что градиентная функция движения принимает вид $W = \sum_{k,j} (L_{kj} - L_{jk}) f_k X_k$. При выполнении условий симметричности матричных элементов $L_{kj} = L_{jk}$ (**соотношения взаимности Онзагера**) функция W обращается в нуль. Коллинеарность потоков и соответствующих им обобщённых термодинамических сил тождественно обращению в нуль градиентной функции перемешивания Y . В данном приближении состояние неравновесной системы может быть охарактеризовано в рамках **теории Онзагера** функцией

$$F_1 = \dot{\sigma}_0 - \dot{\sigma}_p.$$

Это равенство показывает, что неравновесная система имеет меньшее производство энтропии, чем равновесная система в силу положительности диссипативной функции $\dot{\sigma}_p$. Следовательно, необратимые процессы понижают производство энтропии в неравновесной системе; их протекание приводит к возрастанию функции F_1 неравновесной системы, так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \dot{\sigma}_p = 0$. Систему с таким поведением энтропии и диссипативной функции $\dot{\sigma}_p$ назовём **системой Онзагера**.

Если состояние системы определяется функцией

$$\begin{aligned} F_2 &= \sum_k F_k \cdot Q_k = \sum_k (-f_k q_k - X_k \cdot J_k + i\alpha (f_k J_k + q_k X_k) + \alpha [X_k \times J_k]) = \\ &= -\dot{\sigma}_0 - \dot{\sigma}_p + i\alpha W_K + \alpha Y, \end{aligned}$$

то оно будет описываться скалярной **функцией Казимира**

$$F_2 = -\dot{\sigma}_0 - \dot{\sigma}_p$$

при выполнении равенств

$$Q_j(\tau, r) = \sum_{k=1}^g L_{jk} F_k(\tau, r) \quad (F_k(\tau, r) = \sum_{j=1}^g L_{kj} Q_j(\tau, r))$$

и **условий Казимира** $L_{kj} = -L_{jk}$.

Таким образом, состояние диссипативной системы описывается скалярной функцией $F = \pm \dot{\sigma}_0 - \dot{\sigma}_p$ при выполнении **условий Онзагера** или **Казимира** (магнитная или вращающаяся системы).

70.5. Гипердуальные кватернионы

Рассмотрим гиперкомплексные структуры (кватернионы) вида

$$A = a + A_1i + A_2j + A_3k,$$

где a, A_n ($n=1,2,3$) – действительные числа. Исследуем изоморфизм **алгебры Гамильтона**, когда комплексные единицы i, j, k подчиняются правилам умножения, приведенным в табл. 2. Отметим, что обход чисел i, j, k осуществляется против часовой стрелки, т.е. они образуют правую упорядоченную тройку чисел (рис. 10б).

Таблица 2.

Правила умножения комплексных единиц

	i	j	k
i	1	$-k$	j
j	k	1	$-i$
k	$-j$	i	1

Мнемоническое правило

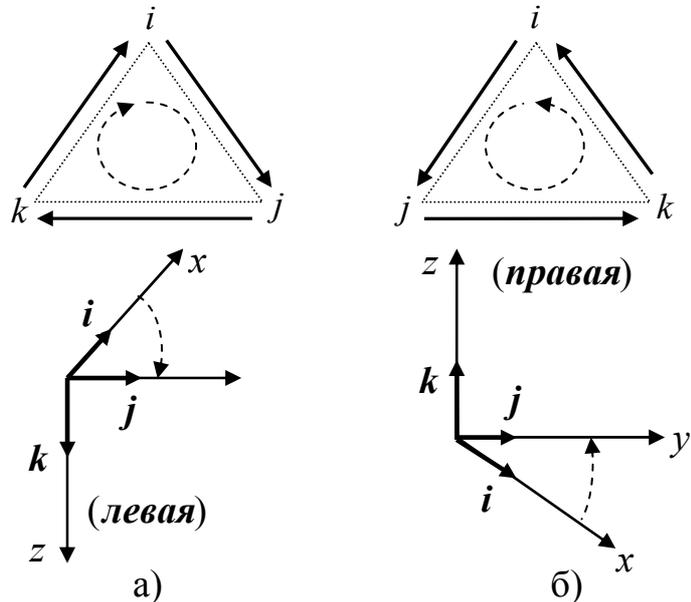


Рис. 10. Левая (а) и правая (б) упорядоченные тройки чисел.

В **векторной алгебре Гиббса** такому правилу соответствует выбор левой тройки базисных векторов, поэтому запишем левоориентированные кватернионы Гамильтона-Гиббса в скалярно-векторной форме: $A = a + \gamma A$, где $a = \text{Sc}(A)$ – скалярная, $A = \text{Ve}(A)$ – векторная части кватерниона A , а γ – его “цвет” ($\gamma^2 = 1$).

Кватернион вида $O = 0 + \gamma \theta$ назовём **нулевым**, а кватернион $E = 1 + \gamma \theta$ – **единичным** (θ – нуль-вектор).

Две гиперкомплексные структуры $A = a + \gamma A$ и $B = b + \gamma B$ равны между собой, если $\begin{cases} a = b \\ A = B \end{cases}$.

Для гипердуальных кватернионов выполняются все арифметические действия:

а) Сумма (разность) кватернионов $A = a + \gamma A$ и $B = b + \gamma B$ равна

$$C = c + \gamma C = A \pm B = a \pm b + \gamma(A \pm B),$$

следовательно, $A + A^* = 2a = 2\text{Sc}(A)$, $A - A^* = 2\gamma A = 2\gamma\text{Ve}(A)$.

Если выполняется равенство $A - B = 0$, то векторы A и B сонаправленные ($A \uparrow \uparrow B$) и имеют одинаковую длину ($|A| = |B|$), а при выполнении равенства $A - B^* = 0$ равные по длине векторы A и B направлены в противоположные стороны ($A \uparrow \downarrow B$), т.е. для обоих равенств векторные части кватернионов являются коллинеарными ($A \parallel B$). В общем случае такие векторы связаны между собой соотношением $B = \beta A$, при-

чём $\begin{cases} A \uparrow \uparrow B, \beta > 0 \\ A \uparrow \downarrow B, \beta < 0 \end{cases}$, поэтому кватернионы, удовлетворяющие равенству

$B = \beta A$, будем называть пропорциональными.

б) Произведение кватернионов $A = a + \gamma A$ и $B = b + \gamma B$ зависит от порядка следования сомножителей и равно:

– левое $D_1 = d_1 + \gamma D_1 = BA = (b + \gamma B)(a + \gamma A) = ab + A \cdot B + \gamma\{aB + bA - [B \times A]\}$,

– правое $D_2 = d_2 + \gamma D_2 = AB = (a + \gamma A)(b + \gamma B) = ab + A \cdot B + \gamma\{aB + bA - [A \times B]\}$,

Левое и правое произведения кватернионов A и B отличаются друг от друга только знаком в последнем слагаемом. Отметим, что произведение векторных частей кватернионов A и B выполняется по правилу

$$\gamma A \gamma B = A \cdot B - \gamma[A \times B].$$

○ Легко проверить, что произведение $AE = EA = A$. ○

Произведение гиперкомплексных структур $A = a + \gamma A$ и $B = b + \gamma B$ равно единичному кватерниону при выполнении условий

$$AB = E : \begin{cases} ab + A \cdot B = 1 \\ aB + bA - [A \times B] = 0 \end{cases}.$$

Второе равенство этой системы (в силу того, что вектор $[A \times B]$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы A и B) выполняется только тогда, когда векторы A и B связаны между собой условием коллинеарности $aB + bA = 0$ или при выполнении равенств $A = B = 0$.

Если квадрат нормы положителен ($\|A\|^2 > 0$, норма кватерниона является действительной величиной), то гипердуальный кватернион будем называть **скалярно-подобным**, в противном случае ($\|A\|^2 < 0$, норма кватерниона является комплексной величиной) – **векторно-подобным**.

Кватернион с нулевой нормой ($\|A\| = 0$) назовём *изохронным*.

Теорема 1. Пусть даны кватернионы $A=a+\gamma A$ и $B=b+\gamma B$. Их произведение $AB=A$ (или $BA=A$), если:

- а) при значениях параметров $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ кватернион A – *изохронный*, а норма кватерниона B равна $\|B\| = \sqrt{2b-1}$;
- б) при значениях параметров $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ векторы A и B перпендикулярные.

Док-во: а) Пусть при значениях параметров $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$ произведение $AB = A$. Тогда выполняется система равенств

$$\begin{cases} ab + A \cdot B = a \\ aB + bA - [A \times B] = A \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a(b-1) + A \cdot B = 0 \\ aB + (b-1)A - [A \times B] = 0 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение системы на число $a \neq 0$ и вычтем из результата второе уравнение, умноженное скалярно на вектор A , получим $(a^2 - |A|^2)(b-1) = \|A\|^2(b-1) = 0$. При значении параметра $b \neq 1$ норма кватерниона A равна нулю ($\|A\|^2 = 0$, $|A|=|a|$, $A=|a|e_A$, e_A – единичный вектор в направлении вектора A), т.е. кватернион A является *изохронным*. Умножим первое уравнение системы на число $b-1 \neq 0$ и вычтем из результата второе уравнение, умноженное скалярно на вектор B , получим $a((b-1)^2 - |B|^2) = 0$ ($|B|=|b-1|$, $B=|b-1|e_B$, e_B – единичный вектор в направлении вектора B). По условию теоремы число $a \neq 0$, тогда норма кватерниона B равна $\|B\|^2 = b^2 - |B|^2 = 2b-1$ или $\|B\| = \sqrt{2b-1}$. С другой стороны, с учётом найденных выражений для векторов A и B первое уравнение преобразованной системы можно записать в виде

$$a(b-1)(1 \pm \cos \xi) = 0$$

(ξ – угол между единичными векторами e_A и e_B). Из этого равенства следует, что единичные векторы e_A и e_B коллинеарные ($e_A \parallel e_B$), так как угол между ними будет равен 0 ($e_A \uparrow \uparrow e_B$) или π ($e_A \uparrow \downarrow e_B$).

- б) Если параметры $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$, то система уравнений сводится к одному равенству $A \cdot B = 0$, т.е. векторы A и B *перпендикулярные*.

○ Отметим, что **Теорема 1** указывает на наличие в гиперпространстве необычных кватернионов, отличных от единичной гиперструктуры $E=1+\gamma\theta$, произведение которых равно одному из них. ○

Операция комплексного сопряжения от произведения двух кватернионов приводит к выражению $(AB)^* = B^* A^*$, т.е. она приводит не только к комплексному сопряжению перемножаемых кватернионов, но и к перестановке местами сомножителей.

Произведение двух кватернионов Гиббса некоммутативно, поэтому их коммутатор отличен от нуля и равен

$$[A, B] = AB - BA = -2\gamma[A \times B],$$

при этом выполняются равенства $[A, B] = -[A^*, B] = -[A, B^*] = [A^*, B^*]$. Антиккоммутатор равен $\{A, B\} = AB + BA = 2(ab + A \cdot B + \gamma(aB + bA))$ и справедливы соотношения $\{A, B\} = (\{A^*, B^*\})^*$; $\{A^*, B\} = (\{A, B^*\})^*$. Удвоенное произведение кватернионов A и B равно $2AB = [A, B] + \{A, B\}$, т.е. произведение двух кватернионов представляется в виде полусуммы их коммутатора и антикоммутатора. В случае комплексно-сопряжённых гиперструктур коммутатор равен нулю, а антикоммутатор – удвоенному значению квадрата нормы: $[A, A^*] = 0$ и $\{A, A^*\} = 2\|A\|^2$.

○ Произведение трёх и более кватернионов Гиббса неассоциативно, т.е. зависит от порядка умножения гиперструктур. ○

в) Деление кватерниона $A = a + \gamma A$ на неизохронный ($\|B\| \neq 0$) кватернион $B = b + \gamma B$ выполняется по правилам:

$$\text{левое частное} - \frac{A}{B} = \frac{B^* A}{B^* B} = \frac{B^* A}{\|B\|^2}; \quad \text{правое частное} - \frac{A}{B} = \frac{AB^*}{BB^*} = \frac{AB^*}{\|B\|^2}.$$

Если коммутатор $[A, B^*] = 2\gamma[A \times B] = 0$ ($A \parallel B$ – векторы A и B коллинеарные), то левое и правое частные равны между собой.

70.6. Преобразование Лоренца

Положение математической точки в пространственно-временном континууме инерциальной системы отсчёта будем задавать безразмерным кватернионом $r = \tau + \gamma r$, где $\tau = \frac{ct}{l}$, c и l – предельная скорость (например, скорость света в вакууме (скорость звука в среде и др.)) и характерное значение длины (длина свободного пробега частицы (корреляционная длина и др.)) для рассматриваемой задачи об устройстве континуума, t – время; $r = \frac{R(x, y, z)}{l}$, в выбранной системе отсчёта

$\mathbf{R}(x, y, z)$ – радиус-вектор, определяющий положение точки с пространственными координатами x , y и z .

Движение математической точки порождает *мировую линию*, на которой интервал между событиями s во *временноподобной области гиперпространства* определяется нормой кватерниона

$$s^2 = \|\mathbf{r}\|^2 = \mathbf{r}\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*\mathbf{r} = \tau^2 - |\mathbf{r}|^2.$$

На пространственно-временной евклидовой плоскости $\tau O|\mathbf{r}|$ эта формула определяет равнобочную гиперболу, ветви которой вытянуты вдоль временной оси. Если ввести тригонометрические функции для гиперболы (синус $\text{sh}\psi = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2}$ и косинус $\text{ch}\psi = \frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2}$), то в гиперболической полярной системе координат

$$\begin{cases} \tau = s \cdot \text{ch}\psi \\ |\mathbf{r}| = s \cdot \text{sh}\psi \end{cases}$$

(ψ – полярный угол) равенство для интервала s превращается в гиперболическое тождество

$$\text{ch}^2 \psi - \text{sh}^2 \psi = 1.$$

Гиперболический поворот отвечает в евклидовом пространстве гомотетии (сжатию или растяжению) гиперболы к координатным осям, т.е. *скейлинговому преобразованию* гиперболы.

Из формул для времени и модуля приведенного радиус-вектора видно, что при равномерном прямолинейном движении скорость перемещения инерциальной системы отсчёта определяется равенством

$$u = \frac{|\mathbf{r}|}{\tau} = \frac{v}{c} = \text{th} \psi \left(\text{th} \psi = \frac{\text{sh} \psi}{\text{ch} \psi} \right),$$

где v – модуль скорости движения инерциальной системы.

Теорема 2. Если интервал между событиями s не изменяется ($s_1 = s$) при переходе в новую гиперболическую полярную систему координат, то новые и старые координаты событий связаны между собой **преобразованием Лоренца**.

Док-во: Пусть новая гиперболическая полярная ось G_1 расположена под углом α к старой полярной оси G , причём угол α отсчитывается в том же направлении, что и угол ψ (рис. 11). Новые координаты

события вычислим по формулам: $\begin{cases} \tau_1 = s_1 \cdot \text{ch}\psi_1 \\ |\mathbf{r}_1| = s_1 \cdot \text{sh}\psi_1 \end{cases}$. По условию теоремы

интервал между событиями остаётся неизменным ($s_1 = s$), следовательно

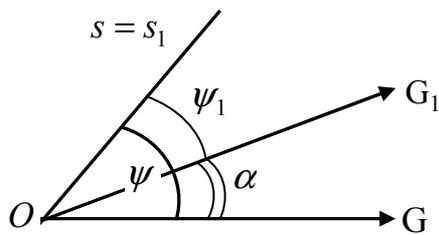


Рис. 11. Старая (G) и новая (G_1) гиперболические полярные системы координат.

но, изменяется только полярный угол $\psi_1 = \psi - \alpha$ (новая система координат отличается от старой системы только скоростью прямолинейного равномерного движения). Тогда новые координаты события связаны со старыми координатами соотношениями поворота одной системы координат по отношению к другой системе отсчёта относительно общего начала координат:

$$\begin{cases} \tau_1 = s_1 \cdot \text{ch } \psi_1 = s \cdot \text{ch}(\psi - \alpha) = s \text{ch } \psi \text{ch } \alpha - s \text{sh } \psi \text{sh } \alpha = \tau \text{ch } \alpha - |r| \text{sh } \alpha \\ |r_1| = s_1 \cdot \text{sh } \psi_1 = s \cdot \text{sh}(\psi - \alpha) = s \text{sh } \psi \text{ch } \alpha - s \text{ch } \psi \text{sh } \alpha = |r| \text{ch } \alpha - \tau \text{sh } \alpha \end{cases}$$

В силу того, что

$$\text{ch } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \alpha}}, \quad \text{sh } \alpha = \frac{\text{th } \alpha}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \alpha}}, \quad \text{th } \alpha = \frac{v_0}{c} = u_0,$$

где u_0 – скорость относительного движения координатных систем, равенства принимают вид преобразований Лоренца:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{\tau - u_0 |r|}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ |r_1| = \frac{|r| - u_0 \tau}{\sqrt{1 - u_0^2}} \end{cases}$$

Обратные преобразования Лоренца получают из полученных равенств путём замены скорости относительного движения u_0 на противоположное значение $-u_0$:

$$\begin{cases} \tau = \frac{\tau_1 + u_0 |r_1|}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ |r| = \frac{|r_1| + u_0 \tau_1}{\sqrt{1 - u_0^2}} \end{cases}$$

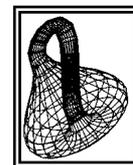
Формулы Лоренца позволяют объяснить эффекты замедления времени и сокращения длины при скоростях движения, близких к скорости c . Из установленных соотношений следует связь между скоростью частицы u в старой инерциальной системе и её скоростью u_1 в новой инерциальной системе (*формула преобразования скоростей*):

$$u = \frac{u_1 + u_0}{1 + u_1 u_0}.$$

Из этой формулы видно, что при выполнении равенства $u_1 = 1$, скорость $u = 1$ вне зависимости от величины скорости относительного перемещения u_0 одной инерциальной системы по отношению к другой. Этот эффект связан с обращением в нуль интервала между событиями в обеих системах координат, т.е. точки, движущиеся со скоростью c , описываются *изохронными* кватернионами.

В гиперпространстве *интервал между событиями* s является действительным и естественным параметром мировой линии таким же, как и параметр длины пространственной линии при движении в трёхмерном пространстве Евклида. Если на мировой линии выбрать начало отсчёта и положительное направление увеличения интервала между событиями (например, в сторону возрастания времени), то кватернион $r(s)$ будет функцией интервала s , а его первые и вторые производные по этому параметру будут характеризовать геометрию мировой линии: *кривизну, кручение, повороты и гомотетии*. С физической точки зрения эти величины определяются скоростью и ускорением частицы.

Таким образом, для описания перемещения частиц в пространственно-временном континууме предлагается использовать физический изоморфизм алгебры кватернионов Гамильтона в сочетании с векторным исчислением Гиббса. Соединение неассоциативной, некоммутативной и зависящей от операции комплексного сопряжения теории Гамильтона с векторным анализом Гиббса существенно увеличивает возможности используемого математического аппарата для отображения физической сущности реального мира. В частности, предлагаемый подход описывает поведение релятивистских частиц без привлечения дополнительных гипотез и позволяет получить все соотношения *специальной теории относительности Пуанкаре-Лоренца-Эйнштейна*. Отметим, что на мировой линии координаты частицы, которая движется с предельной скоростью, описываются *изохронным* кватернионом положения.



VI

Задания для самостоятельного решения

*Функции комплексной переменной**Вариант 1*

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 2 + i3, \quad z_2 = 3 - i.$$

2. Представить $z = 1 + i$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 - 4x + 5 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z + 1| \leq 3$, $\operatorname{Re} z < 1$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \cos z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{z}{z - 1 + i}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{1+i} \frac{z^2}{z^2 + 1} dz$; б) $\int_1^z \frac{\sin z}{(z - 1)^2} dz$.

8. Разложить функцию $\sin(2z)$ в точке $z_0 = i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{2}{z^2 - 1}$ в кольце $1 < |z + 2| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\sin(\pi z)}{z^4 - 1}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1}{\sin z}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{z + 1}{z^2(z - 1)} dz$, $L: |z| = \frac{3}{2}$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной

Вариант 2

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -2 - i, \quad z_2 = 1 + i.$$

2. Представить $z = i$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $2x^2 - x + 1 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z - i| \geq \frac{3}{2}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \operatorname{tg} z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{z+i2}{z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{\pi/3}^{\pi-i} \sin z \, dz$; б) $\int_{2-i}^z \frac{\cos z}{(z-2+i)^3} \, dz$.

8. Разложить функцию $\operatorname{sh} z$ в точке $z_0 = 0$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{5}{z^2 + 1}$ в кольце $1 < |z - i| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\cos(\pi z)}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{z}{(1 - e^z)(z^2 - 1)}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{e^{z^2}}{z^2 - 1} \, dz$, $L: \left| z - \frac{1}{2} \right| = 1$ с помощью вычетов.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной

Вариант 3

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 4 + i, \quad z_2 = 2 + i5.$$

2. Представить $z = -1 - i$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 2x + 2 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $\operatorname{Re} z \leq 2, -2 < \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. *Равен ли нулю интеграл* от функции $f(z) = z e^{-z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{-i\pi/2}^{i\pi/2} e^z dz$; б) $\int_2^z \frac{\ln z}{(z-2)^4} dz$.

8. Разложить функцию $\operatorname{ch} z$ в точке $z_0 = 1$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{2z+1}{z^2-2z-3}$ в кольце $2 < |z+1| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{5z-4}{z^2-4z+5}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{z^2+1}{(z-4)(z+1)}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{z(z-i)(z-2i)}$, $L: |z-i|=2$ с помощью вычетов.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 4**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -1 + i2, \quad z_2 = -2 + i3.$$

2. Представить $z = -3 + i4$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 - x + 3 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z| \leq 2, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{z-i}{z}$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{i}{z-0,5}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{i}{2}} (z^2 - 2z + 3) dz$; б) $\int_{-2-i3}^z \frac{2z+i}{(z+2+i3)^2} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{z+1}{z-i}$ в точке $z_0 = 1+i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{3z-4}{3z+2}$ в кольце $2 < \left| z + \frac{2}{3} \right| < 4$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z+2}{(z^2+z-2)(z+1)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{e^z-1}{z^3}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{\cos z}{z^3} dz$, $L: |z|=1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 5**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 6 - i5, \quad z_2 = -4 - i3.$$

2. Представить $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $\left|z - \frac{1}{2}\right| \leq 2, \quad \text{Im } z > -1$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{z}{3 - i4}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_2^i (3z - i2) dz$; б) $\int_{\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{3}}^z \frac{\text{tg } z}{z} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{3 - z}{z - 2}$ в точке $z_0 = 5$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$ в кольце $1 < |z| < 4$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\text{tg } z}{z^2 + z}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1}{z^3 + i^3}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{e^z}{e^z + 1} dz$, $L: |z - \pi i| = 1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 6**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -i, \quad z_2 = 3 + i2.$$

2. Представить $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + x + 1 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z-1| < 3$, $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = z^2 + z - 2$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{3z-2}{z-1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{-i}^1 \frac{z^2}{4} dz$; б) $\int_{-i}^i \frac{2z^3 - 3z^2 + i}{(z+i)^3} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{4z+1}{z}$ в точке $z_0 = 2i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z-1}{z+i}$ в кольце $1 < |z| < 2$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z}{(z+i)(z-2)^2}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{2z-3}{(z^2+1)(z+2)}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{\sin^2 z}$, $L: |z|=2$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 7**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = i, z_2 = 5 - i4.$$

2. Представить $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $5x^2 + 6x + 2 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z| \leq 4, \operatorname{Im} z > \frac{1}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = sh z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю интеграл от функции $f(z) = \frac{3z - 2}{z - 1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{-1+i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$; б) $\int_{3+i}^z \frac{z^2 - 2z - 3}{(z - 3 - i)^2} dz$.

8. Разложить функцию $\operatorname{arctg} z$ в точке $z_0 = 0$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z}{z^2 - 4}$ в кольце $1 < |z + 2| < 2$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z^2 - 4}{(z^2 - 9)(z^2 + 4)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1 - \cos(2z)}{z^2 \sin(2z)}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{z^3}{4z^4 + 1} dz$, $L: |z| = 1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 8**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 4 - i, \quad z_2 = -1 - i3.$$

2. Представить $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 4x + 9 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z + i| \leq 2$, $\operatorname{Im} z < \frac{1}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = ch z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. *Равен ли нулю интеграл* от функции $f(z) = (z + 1)(z - 3)$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{1-i}^i \frac{dz}{\sqrt{4+z^2}}$; б) $\int_2^{\bar{z}} \frac{6z^5}{(z-2)^5} dz$.

8. Разложить функцию $z^2 - 2z - 3$ в точке $z_0 = -1$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\cos\left(\frac{1}{z+1}\right)$ в кольце $0 < |z+1| < \infty$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z^2 + 2z - 1}{(z-1)(z^2 + 9)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{\operatorname{tg}(\pi z)}{3z}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{(z-2)^2(z-1)}$, $L: |z-1|=2$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

*Функции комплексной переменной***Вариант 9**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -5 + i2, \quad z_2 = -2 - i.$$

2. Представить $z = -1 + i2$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 5x + 12 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $1 < |z| < 2, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{e^z}{z + 1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{i}{4}} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^z \frac{e^z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{5}{z - 1}$ в точке $z_0 = -i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $e^{\frac{1}{1-z}}$ в кольце $0 < |z - 1| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{3z + 2}{z^2 - 1}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{\cos(\pi z)}{(2z - 1)^2}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{1 - \cos(2z)}{z^2(z - 1)} dz$, $L: |z| = 3$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной

Вариант 10

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 5 + i, \quad z_2 = 5 - i.$$

2. Представить $z = 2 + i3$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $3x^2 - 4x + 3 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z+1| > 1, |z+2| < 2$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{2z-i}{z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cos z \, dz$; б) $\int_{-1+i}^z \frac{z-1}{e^z (z+1-i)^2} \, dz$.

8. Разложить функцию $\frac{3z+7}{3z-4}$ в точке $z_0 = 1-i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\ln\left(\frac{z-2}{z-4}\right)$ в кольце $2 < |z+2| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\operatorname{ctg} z}{z-4}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{z}{(z-1)(z-i)^2}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{e^z}{z^3} \, dz$, $L: |z| = \frac{1}{2}$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 11**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 2 + i3, \quad z_2 = 3 - i.$$

2. Представить $z = i$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 2x + 2 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z| \leq 2, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{3z - 2}{z - 1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{-1+i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$; б) $\int_{3+i}^z \frac{z^2 - 2z - 3}{(z - 3 - i)^2} dz$.

8. Разложить функцию $z^2 - 2z - 3$ в точке $z_0 = -1$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $e^{\frac{1}{1-z}}$ в кольце $0 < |z - 1| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\operatorname{ctg} z}{z - 4}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1}{\sin z}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{e^{z^2}}{z^2 - 1} dz$, $L: \left| z - \frac{1}{2} \right| = 1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 12**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 4 + i, \quad z_2 = 2 + i5.$$

2. Представить $z = -3 + i4$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z + i| \leq 2$, $\operatorname{Im} z < \frac{1}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = sh z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. *Равен ли нулю интеграл* от функции $f(z) = (z + 1)(z - 3)$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{i}{4}} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^z \frac{e^z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{3z+7}{3z-4}$ в точке $z_0 = 1 - i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{2}{z^2 - 1}$ в кольце $1 < |z + 2| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\cos(\pi z)}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{z^2 + 1}{(z - 4)(z + 1)}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{\cos z}{z^3} dz$, $L: |z| = 1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 13**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 6 - i5, \quad z_2 = -4 - i3.$$

2. Представить $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $5x^2 + 6x + 2 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z-1| < 3$, $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{2z-i}{z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{1+i} \frac{z^2}{z^2+1} dz$; б) $\int_1^z \frac{\sin z}{(z-1)^2} dz$.

8. Разложить функцию shz в точке $z_0 = 0$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{2z+1}{z^2-2z-3}$ в кольце $2 < |z+1| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z+2}{(z^2+z-2)(z+1)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1}{z^3+i^3}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{\sin^2 z}$, $L: |z|=2$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 14**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = i, \quad z_2 = 5 - i4.$$

2. Представить $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 5x + 12 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z+1| > 1, |z+2| < 2$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \cos z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{z+i2}{z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{-i\frac{\pi}{2}}^{i\frac{\pi}{2}} e^z dz$; б) $\int_2^z \frac{\ln z}{(z-2)^4} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{z+1}{z-i}$ в точке $z_0 = 1+i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z-2}{2z^3+z^2-z}$ в кольце $1 < |z| < 4$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z}{(z+i)(z-2)^2}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1-\cos(2z)}{z^2 \sin(2z)}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{(z-2)^2(z-1)}$, $L: |z-1|=2$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 15**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -2 - i, \quad z_2 = 1 + i.$$

2. Представить $z = -1 - i$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 - x + 3 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $\left|z - \frac{1}{2}\right| \leq 2, \operatorname{Im} z > -1$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = z^2 + z - 2$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{3z - 2}{z - 1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{1-i}^i \frac{dz}{\sqrt{4+z^2}}$; б) $\int_2^z \frac{6z^5}{(z-2)^5} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{5}{z-1}$ в точке $z_0 = -i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\ln\left(\frac{z-2}{z-4}\right)$ в кольце $2 < |z+2| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\sin(\pi z)}{z^4 - 1}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{z}{(1-e^z)(z^2-1)}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{z(z-i)(z-2i)}$, $L: |z-i|=2$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 16**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -1 + i2, \quad z_2 = -2 + i3.$$

2. Представить $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + x + 1 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z| \leq 4$, $\operatorname{Im} z > \frac{1}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \operatorname{ch} z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cos z \, dz$; б) $\int_{-1+i}^z \frac{z-1}{e^z (z+1-i)^2} \, dz$.

8. Разложить функцию $\sin(2z)$ в точке $z_0 = i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{5}{z^2+1}$ в кольце $1 < |z-i| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{5z-4}{z^2-4z+5}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{e^z-1}{z^3}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{e^z}{e^z+1} \, dz$, $L: |z-\pi i|=1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 17**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 4 - i, \quad z_2 = -1 - i3.$$

2. Представить $z = -1 + i2$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $3x^2 - 4x + 3 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z+1| \leq 3, \operatorname{Re} z < 1$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \operatorname{tg} z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. *Равен ли нулю интеграл* от функции $f(z) = z e^{-z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{i}{2}} (z^2 - 2z + 3) dz$; б) $\int_{-2-i3}^z \frac{2z+i}{(z+2+i3)^2} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{3-z}{z-2}$ в точке $z_0 = 5$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z-1}{z+i}$ в кольце $1 < |z| < 2$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z^2-4}{(z^2-9)(z^2+4)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{\operatorname{tg}(\pi z)}{3z}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{1 - \cos(2z)}{z^2(z-1)} dz$, $L: |z|=3$ с помощью вычетов.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 18**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 5 + i, \quad z_2 = 5 - i.$$

2. Представить $z = 1 + i$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 2x + 2 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $\left| z - \frac{1}{2} \right| \leq 2, \quad \operatorname{Im} z > -1$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = sh z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. *Равен ли нулю интеграл* от функции $f(z) = (z + 1)(z - 3)$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{1+i} \frac{z^2}{z^2 + 1} dz$; б) $\int_1^z \frac{\sin z}{(z - 1)^2} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{z + 1}{z - i}$ в точке $z_0 = 1 + i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $e^{\frac{1}{1-z}}$ в кольце $0 < |z - 1| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{ctg z}{z - 4}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1}{\sin z}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{z + 1}{z^2(z - 1)} dz$, $L: |z| = \frac{3}{2}$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 19**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -2 - i, \quad z_2 = 1 + i.$$

2. Представить $z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 4x + 9 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z + 1| > 1$, $|z + 2| < 2$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю интеграл от функции $f(z) = \frac{z}{3 - i4}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{i}{4}} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^z \frac{e^z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz$.

8. Разложить функцию chz в точке $z_0 = 1$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{3z - 4}{3z + 2}$ в кольце $2 < \left|z + \frac{2}{3}\right| < 4$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{3z + 2}{z^2 - 1}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{e^z - 1}{z^3}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{dz}{(z - 2)^2(z - 1)}$, $L: |z - 1| = 2$ с помощью вычетов.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 20**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -1 + i2, \quad z_2 = -2 + i3.$$

2. Представить $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $3x^2 - 4x + 3 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z| \leq 2, \frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{3z - 2}{z - 1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cos z \, dz$; б) $\int_{-1+i}^z \frac{z-1}{e^z (z+1-i)^2} \, dz$.

8. Разложить функцию $\frac{3z+7}{3z-4}$ в точке $z_0 = 1 - i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z}{z^2 - 4}$ в кольце $1 < |z+2| < 2$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\operatorname{ctg} z}{z-4}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{2z-3}{(z^2+1)(z+2)}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{\cos z}{z^3} \, dz$, $L: |z|=1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной

Вариант 21

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -i, \quad z_2 = 3 + i2.$$

2. Представить $z = -1 - i$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 - x + 3 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z + 1| > 1, |z + 2| < 2$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{e^z}{z + 1}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{-1+i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$; б) $\int_{3+i}^z \frac{z^2 - 2z - 3}{(z - 3 - i)^2} dz$.

8. Разложить функцию chz в точке $z_0 = 0$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{2}{z^2 - 1}$ в кольце $1 < |z + 2| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\cos(\pi z)}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{2z - 3}{(z^2 + 1)(z + 2)}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{z^3}{4z^4 + 1} dz$, $L: |z| = 1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 22**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 6 - i5, \quad z_2 = -4 - i3.$$

2. Представить $z = -3 + i4$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + x + 1 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z-1| < 3$, $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \operatorname{tg} z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{2z-i}{z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{-i\frac{\pi}{2}}^{i\frac{\pi}{2}} e^z dz$; б) $\int_2^z \frac{\ln z}{(z-2)^4} dz$.

8. Разложить функцию $z^2 - 2z - 3$ в точке $z_0 = -1$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{3z-4}{3z+2}$ в кольце $2 < \left| z + \frac{2}{3} \right| < 4$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{z}{(z+i)(z-2)^2}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{2z-3}{(z^2+1)(z+2)}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{dz}{(z-2)^2(z-1)}$, $L: |z-1|=2$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной**Вариант 23**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = -1 + i2, \quad z_2 = -2 + i3.$$

2. Представить $z = -3 + i4$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 5x + 12 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z + i| \leq 2$, $\operatorname{Im} z < \frac{1}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. *Равен ли нулю интеграл* от функции $f(z) = (z + 1)(z - 3)$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_{i-i}^i \frac{dz}{\sqrt{4+z^2}}$; б) $\int_2^z \frac{6z^5}{(z-2)^5} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{4z+1}{z}$ в точке $z_0 = 2i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z-2}{2z^3+z^2-z}$ в кольце $1 < |z| < 4$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{\cos(\pi z)}{(4z^2-1)(z^2+1)}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{1}{\sin z}$.

12. Вычислить интеграл $\oint_L \frac{1-\cos(2z)}{z^2(z-1)} dz$, $L: |z|=3$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения

Функции комплексной переменной

Вариант 24

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = 4 + i, \quad z_2 = 2 + i5.$$

2. Представить $z = -3 + i4$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z - 1| < 3$, $\operatorname{Re} z < \frac{3}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = sh z$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{2z - i}{z}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{i}{4}} \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - 1}}$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^z \frac{e^z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{z + 1}{z - i}$ в точке $z_0 = 1 + i$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{5}{z^2 + 1}$ в кольце $1 < |z - i| < 3$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{ctg z}{z - 4}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{e^z - 1}{z^3}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{z^3}{4z^4 + 1} dz$, $L: |z| = 1$ с помощью *вычетов*.

Задания для самостоятельного решения
Функции комплексной переменной**Вариант 25**

1. Выполнить *арифметические действия* над комплексными числами z_1 и z_2 , отобразить все числа на комплексной плоскости, если

$$z_1 = i, z_2 = 5 - i4.$$

2. Представить $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ в *тригонометрической* и *показательной* формах записи.

3. Решить *квадратное уравнение* $x^2 + 5x + 12 = 0$.

4. Отобразить на комплексной плоскости *область*, заданную условиями: $|z + i| \leq 2, \operatorname{Im} z < \frac{1}{2}$.

5. Найти *вещественную* и *мнимую* части функции $f(z) = z^2 + z - 2$. Регулярна ли эта функция? Является ли она гармонической?

6. Равен ли нулю *интеграл* от функции $f(z) = \frac{z}{3 - i4}$ на единичной окружности с центром в начале координат.

7. Вычислить *интегралы*: а) $\int_0^{\frac{i}{2}} (z^2 - 2z + 3) dz$; б) $\int_{-2-i3}^z \frac{2z+i}{(z+2+i3)^2} dz$.

8. Разложить функцию $\frac{2z-5}{z-1}$ в точке $z_0 = 1$ в *ряд Тейлора* и найти *радиус сходимости* полученного ряда.

9. Разложить в *ряд Лорана* функцию $\frac{z-1}{z+i}$ в кольце $1 < |z| < 2$.

10. Найти и классифицировать *особые точки* функции $\frac{5z-4}{z^2-4z+5}$.

11. Найти *вычеты* относительно особых точек функции $\frac{z^2+1}{(z-4)(z+1)}$.

12. Вычислить *интеграл* $\oint_L \frac{e^z}{z^3} dz$, $L: |z| = \frac{1}{2}$ с помощью *вычетов*.

Тема: Операционное исчисление**71. “Преобразование Лапласа”****71.1. Оригинал и изображение**

Операционное исчисление используется при решении дифференциальных уравнений и их систем, переводя их в алгебраические уравнения и системы.

Оригиналом называется комплексная функция $f(t)$ действительного аргумента t , определённая на всей числовой оси и удовлетворяющая условиям:

- функция *непрерывна* на всей числовой оси, за возможным исключением конечного числа точек разрыва первого рода (**16**);
- $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$;
- существуют числа $M > 0$ и $\omega > 0$ (ω – показатель роста) такие, что $\forall t \geq 0$ выполняется неравенство $|f(t)| < M e^{\omega t}$.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $g(p)$ комплексного переменного $p = x + iy$, равная $g(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$, при $\operatorname{Re} p > \omega$.

Операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $g(p)$ называется **преобразованием Лапласа**, а используемый при этом интеграл – **интегралом Лапласа**.

Чаще всего **преобразование Лапласа** записывают в виде

$$f(t) \doteq g(p).$$

Операционное исчисление применяют по **схеме**:

- находят изображение оригинала и подставляют его в данное задание;
- выполняют все действия с изображениями, предусмотренные в задаче, с целью нахождения изображения искомой функции;
- по найденному изображению искомой функции восстанавливают её оригинал.

Единичной функцией $E(t)$ называется функция вида

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Пример 1. Найти изображение единичной функции.

Согласно определению *изображения*,

$$e(p) = \int_0^{\infty} E(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} dt = -\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^A = \frac{1}{p}, \text{ при } \operatorname{Re} p > 0; \text{ или}$$

$$E(t) \doteq \frac{1}{p}, \text{ т.е. } 1 \doteq \frac{1}{p}.$$

Любая элементарная функция действительного переменного $f(t)$ удовлетворяет первому и третьему условиям определения изображения, а будучи умноженной на единичную функцию $E(t)$, – и второму условию. Поэтому в дальнейшем под функцией $f(t)$ понимается произведение $E(t)f(t)$.

Пример 2. Найти изображение функций $f(t) = e^{\alpha t}$.

Найдём изображение заданной функции:

$$g(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(p-\alpha)t} dt = -\lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \right|_0^A = \frac{1}{p-\alpha}, \text{ при } \operatorname{Re}(p-\alpha) > 0; \text{ или}$$

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}.$$

Пример 3. Найти изображение функций $f(t) = t$ и $f(t) = t^n$ при $n \in N$.

На этом примере покажем ещё один приём нахождения изображения, который состоит в дифференцировании по параметру p . В силу того,

что произведение $f(t) = t e^{-pt} = -\frac{d}{dp}(e^{-pt})$, то $t \doteq -\frac{d}{dp} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$. Используя

продемонстрированный приём, находим: $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$ (доказать самостоятельно).

Пример 4. Найти изображение $f(t)$, заданной графиком (рис. 1):

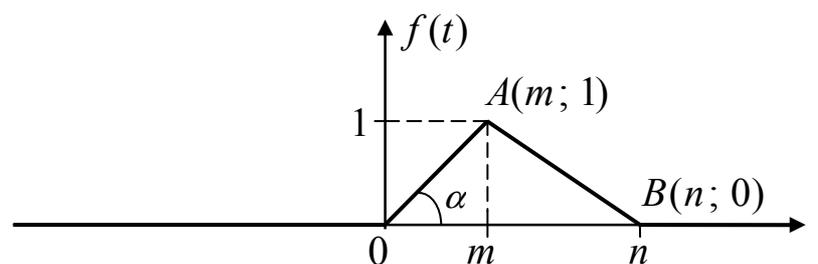


Рис. 1. График оригинала.

В данном примере оригинал $f(t)$ задан в виде графика, опишем функцию мультианалитическим способом, для чего составим аналитические выражения для её поведения на каждом участке:

1) $f(t) = 0$, при $t \in (-\infty; 0)$;

2) при $t \in [0; m]$ функция задаётся прямой, для получения уравнения которой воспользуемся уравнением прямой с угловым коэффициентом

том: $f(t) = kt + b$. Используя геометрический смысл параметров, входящих в уравнение (см. З), получим $k = tg\alpha = \frac{1}{m}$, $b = 0$. Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{m}t, \text{ при } t \in [0; m];$$

3) при $t \in [m; n]$ функция задаётся прямой, проходящей через две известные точки $A(m; 1)$ и $B(n; 0)$ (см. З), тогда уравнение прямой имеет вид: $\frac{f(t)-1}{0-1} = \frac{t-m}{n-m}$. Отсюда находим, что $f(t) = \frac{n-t}{n-m}$ или в удобном для применения преобразования Лапласа виде:

$$f(t) = \frac{n}{n-m} - \frac{1}{n-m}t, \text{ при } t \in [m; n].$$

4) при $t \in [n; \infty)$ функция $f(t) = 0$.

$$\text{Таким образом, } f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{m}t, & t \in [0; m] \\ \frac{n}{n-m} - \frac{1}{n-m}t, & t \in [m; n] \\ 0, & t \in [n; \infty) \end{cases}.$$

Следовательно, её изображение имеет вид:

$$g(p) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{m} \frac{1}{p^2}, & t \in [0; m] \\ \frac{n}{n-m} \frac{1}{p} - \frac{1}{n-m} \frac{1}{p^2}, & t \in [m; n] \\ 0, & t \in [n; \infty) \end{cases}.$$

Приведём в виде таблицы ряд оригиналов и их изображений:

Оригинал $f(t)$	Изображение $g(p)$	Оригинал $f(t)$	Изображение $g(p)$
$E(t)$	$\frac{1}{p}$	$\cos^2(\lambda t)$	$\frac{p^2 + 2\lambda^2}{p(p^2 + 4\lambda^2)}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	\sqrt{p}
$t^n (n \in N)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$sh(\lambda t)$	$\frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}$

$t^\varepsilon (\varepsilon \in R)$	$\frac{\Gamma(\varepsilon + 1)}{p^{\varepsilon+1}}$	$ch(\lambda t)$	$\frac{p}{p^2 - \lambda^2}$
$\sin(\lambda t)$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$	$e^{-\mu t} \sin(\lambda t)$	$\frac{\lambda}{(p + \mu)^2 + \lambda^2}$
$\cos(\lambda t)$	$\frac{p}{p^2 + \lambda^2}$	$e^{-\mu t} \cos(\lambda t)$	$\frac{p}{(p + \mu)^2 + \lambda^2}$
$\sin^2(\lambda t)$	$\frac{2\lambda^2}{p(p^2 + 4\lambda^2)}$	$\sin(\lambda t - \varphi_0)$	$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2} e^{-p\varphi_0}$

○ Так как между оригиналом и изображением существует взаимно-однозначное соответствие, то по изображению можно восстановить оригинал, но для этого функция комплексного переменного должна быть *регулярной функцией*. ○

Теорема 1. Пусть функция $g(p)$ является *изображением* оригинала $f(t)$ и определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \omega$ (ω – показатель роста $f(t)$), тогда в этой полуплоскости она *регулярна*.

Док-во: Регулярность оригинала означает существование производной от функции $g(p)$:

$$g'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt \quad \text{или} \quad g'(p) \doteq -t f(t).$$

Аналогично получают **преобразование Лапласа** для производной любого порядка: $g^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t)$.

71.2. Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность: Если $f_1(t) \doteq g_1(p)$ и $f_2(t) \doteq g_2(p)$, то для любых комплексных чисел C_1 и C_2 функция $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ имеет изображение: $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \doteq g(p) = C_1 g_1(p) + C_2 g_2(p)$. Это свойство отображает свойство *линейности определённого интеграла*.

Пример 5. Найти изображение функции $f(t) = \sin(\lambda t)$.

По формуле Эйлера

$$\sin(\lambda t) = \frac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{i\lambda t} - \frac{1}{2i} e^{-i\lambda t} \doteq \frac{1}{2i} \frac{1}{p - \lambda i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p + \lambda i} = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2},$$

следовательно, $\sin(\lambda t) \doteq \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}$.

2. Подобие: Если $f(t) \doteq g(p)$ и число $a > 0$, то $f(at) \doteq \frac{1}{a} g\left(\frac{p}{a}\right)$.

Пример 6. Найти изображение функции $f(t) = \cos(2t)$.

По свойству подобия $f(t) = \cos(2t) \stackrel{||}{=} \frac{1}{2} \frac{p/2}{(p/2)^2 + \lambda^2} = \frac{p}{p^2 + 4\lambda^2}$.

3. Запоздывание: Если $f(t) \stackrel{||}{=} g(p)$ и число $b > 0$, то $f(t-b) \stackrel{||}{=} e^{-bp} g(p)$.

Док-во: $f(t-b) \stackrel{||}{=} \int_0^{\infty} f(t-b)e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} \tau = t-b \\ d\tau = dt \end{matrix} \right| = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p(\tau+b)} d\tau = e^{-bp} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau = e^{-bp} g(p)$.

Следствие. Совместное применение свойств подобия и запоздывания приводит к результату: $f(at-b) \stackrel{||}{=} \frac{e^{-\frac{bp}{a}}}{a} g\left(\frac{p}{a}\right)$.

Пример 7. Найти изображение функции $f(t) = e^{\omega t - \varphi_0}$.

Для нахождения изображения данной функции воспользуемся следствием из свойств подобия и запоздывания (здесь $a = \omega$ и $b = \varphi_0$):

$$f(t) = e^{\omega t - \varphi_0} \stackrel{||}{=} g(p) = \frac{e^{-\frac{p\varphi_0}{\omega}}}{\omega} \frac{1}{p - \omega}.$$

4. Периодический оригинал: Если $f(t+T) = f(t)$, то

$$f(t) \stackrel{||}{=} g(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt.$$

Пример 8. Найти изображение функции $f(t)$, которая имеет период $T = 2a$ и задана графиком, изображённом на рис. 2.

В данном примере оригинал $f(t) = A$ при $t \in [2an; a + 2an]$, $n \in N$, является периодической функцией, поэтому:

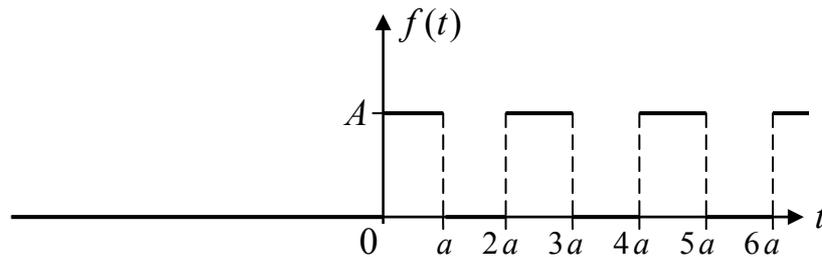


Рис. 2. График периодического оригинала.

$$f(t) = A \stackrel{||}{=} g(p) = \frac{1}{1 - e^{-2ap}} \int_0^a A e^{-pt} dt = -\frac{A}{1 - e^{-2ap}} \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^a = \frac{A}{p(1 + e^{ap})}.$$

5. Смещение: Если $f(t) \stackrel{||}{=} g(p)$ и число $\zeta \in C$, то $f(t)e^{-\zeta t} \stackrel{||}{=} g(p + \zeta)$.

Пример 9. Найти изображение функции $f(t) = e^{i\lambda t} \sin(\omega t)$.

Использование свойства смещения приводит к выражению:

$$f(t) = e^{i\lambda t} \sin(\omega t) \stackrel{||}{=} g(p) = \frac{\omega}{(p - i\lambda)^2 + \omega^2}.$$

71.3. Дифференцирование и интегрирование оригинала и изображения

Решение различных практических задач с использованием операционного исчисления требует умения дифференцировать и интегрировать *оригиналы* и *изображения*. В этой связи рассмотрим следующие теоремы.

а) Дифференцирование оригинала

Теорема 2. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста ω и изображением $g(p)$, а её первая производная $f'(t)$ существует $\forall t \geq 0$ и является оригиналом. Тогда

$$f'(t) \stackrel{!}{=} p g(p) - f(0) \quad (\operatorname{Re} p > \omega),$$

где $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t)$.

Более общая теорема определяет оригинал производной порядка n :

Теорема 3. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста ω и изображением $g(p)$. Если $\forall t \geq 0$ существуют производные $f'(t), f''(t), f'''(t), \dots, f^{(n)}(t)$, которые удовлетворяют определению оригинала, то

$$f^{(n)}(t) \stackrel{!}{=} p^n g(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ – значения функции и её $(n-1)$ производной в нуле.

Пример 9. Найти изображение второй производной от *оригинала*

$$f(t) = \cos(\omega t).$$

Вычислим вторую производную от заданной функции:

$$f'(t) = -\omega \sin(\omega t), \quad f''(t) = -\omega^2 \cos(\omega t),$$

причём $f(0) = 1, f'(0) = 0$, следовательно,

$$f''(t) = -\omega^2 \cos(\omega t) \stackrel{!}{=} p^2 \frac{p}{p^2 + \omega^2} - p = \frac{p^3 - p^3 - \omega^2 p}{p^2 + \omega^2} = -\frac{\omega^2 p}{p^2 + \omega^2}.$$

б) Интегрирование оригинала

Теорема 4. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста ω и $f(t) \stackrel{!}{=} g(p)$. Если $\int_0^t f(u) du$ является оригиналом, то

$$\int_0^t f(u) du \stackrel{!}{=} \frac{g(p)}{p}.$$

Пример 10. Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t e^{-\mu u} \cos(\lambda u) du$.

Используя таблицу изображений, получим:

$$\int_0^t e^{-\mu u} \cos(\lambda u) du \equiv \frac{1}{p} \frac{p}{(p + \mu)^2 + \lambda^2} = \frac{1}{(p + \mu)^2 + \lambda^2}.$$

в) Дифференцирование изображения

Теорема 5. Если $g(p) \equiv f(t)$ при $\operatorname{Re} p > \omega$, то дифференцированию оригинала соответствует умножение оригинала на $(-t)$, т.е.

$$g'(p) \equiv -t f(t) \quad \text{и} \quad g^{(n)}(p) \equiv (-t)^n f(t).$$

Пример 11. Найти изображение функции $f(t) = t^2 \sin(\omega t)$.

Согласно **Теорема 5**,

$$f(t) = t^2 \sin(\omega t) \equiv \left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right)'' = \left(\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2} \right)' = \frac{6\omega p^2 - 2\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^3}.$$

г) Интегрирование изображения

Теорема 6. Если $g(p) \equiv f(t)$ при $\operatorname{Re} p > \omega$ и функция $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал, то интегрированию изображения отвечает деление оригинала на t , т.е. $\frac{f(t)}{t} \equiv \int_p^\infty g(\zeta) d\zeta$.

Пример 12. Найти изображение функции $sit = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ (интегральный синус).

Согласно таблице оригиналов и их изображений, $\sin t \equiv \frac{1}{p^2 + 1}$. Деление оригинала на t отвечает интегрированию изображения, т.е.

$$\frac{\sin t}{t} \equiv \int_p^\infty \frac{du}{u^2 + 1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_p^A \frac{du}{1 + u^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} u \Big|_p^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Используя интегрирование изображения, найдём:

$$sit = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \equiv \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right).$$

72. “Интеграл Дюамеля. Обращение преобразования Лапласа”

72.1. Свёртка функций

В вопросах сжатия и кодирования информации, при вычислении функций распределения различных случайных величин, автокорреляционных функций, при построении фильтров и решении других практических задач используется понятие свёртки функций.

Свёрткой функций $f(t)$ и $q(t)$, являющихся оригиналами ($f(t) \equiv g(p)$ и $q(t) \equiv w(p)$), называется интеграл:
$$(f * q) = \int_0^t f(\tau) q(t - \tau) d\tau.$$

Свёртка обладает следующими **свойствами**:

1. Коммутативность, т.е. свёртка симметрична относительно порядка интегрирования функций $f(t)$ и $q(t)$, т.е.

$$(f * q) = \int_0^t f(\tau) q(t - \tau) d\tau = \int_0^t q(\tau) f(t - \tau) d\tau = (q * f).$$

2. Ассоциативность, т.е. $(f * q) * \psi = f * (q * \psi)$.

3. Дистрибутивность относительно сложения, т.е.

$$(f + q) * \psi = f * \psi + q * \psi.$$

Теорема 1 (теорема Бореля). Пусть функции $f(t)$ и $q(t)$ – оригиналы $f(t) \equiv g(p)$ и $q(t) \equiv w(p)$. Тогда изображением свёртки $(f * q)$ является произведение изображений функций $f(t)$ и $q(t)$, т.е.

$$(f * q) = \int_0^t f(\tau) q(t - \tau) d\tau = g(p) \cdot w(p).$$

Док-во: Рассмотрим изображение свёртки:

$$\begin{aligned} (f * q) &= \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau) q(t - \tau) d\tau \right] dt = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f(\tau) q(t - \tau) d\tau \right] dt = \\ &\text{(изменим порядок интегрирования)} \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \left[\int_0^\infty q(t - \tau) e^{-pt} dt \right] d\tau = \end{aligned}$$

(по свойству запаздывания внутренний интеграл равен $e^{-b\tau} w(p)$, следовательно, сам интеграл преобразовывается к виду)

$$= w(p) \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = w(p) \cdot g(p).$$

Таким образом, изображением свёртки двух оригиналов $f(t)$ и $q(t)$ служит произведение их изображений $g(p)$ и $w(p)$, соответственно.

72.2. Интегралы Дюамеля

В приложениях операционного исчисления зачастую возникают выражения вида $p g(p) w(p)$, где $g(p) \equiv f(t)$ и $w(p) \equiv q(t)$. С помощью этих оригиналов можно найти *оригинал* для выражения $p g(p) w(p)$, для чего перепишем его в следующем виде:

$$p g(p) w(p) = f(0) w(p) + [p g(p) - f(0)] w(p)$$

или

$$p g(p) w(p) = q(0) g(p) + [p w(p) - q(0)] g(p).$$

Применяя свойство линейности, **теорему Бореля** (см. п. 72.1, **72**) и учитывая симметричность свёртки функций $f(t)$ и $q(t)$, оригинал выражения $pg(p)w(p)$ можно записать в одном из четырёх видов:

$$pg(p)w(p) \equiv q(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)q'(t-\tau) d\tau;$$

$$pg(p)w(p) \equiv q(0)f(t) + \int_0^t q'(\tau)f(t-\tau) d\tau;$$

$$pg(p)w(p) \equiv f(0)q(t) + \int_0^t q(\tau)f'(t-\tau) d\tau;$$

$$pg(p)w(p) \equiv f(0)q(t) + \int_0^t f'(\tau)q(t-\tau) d\tau.$$

Полученные формулы называются **интегралами Дюамеля**.

Методику решения дифференциальных уравнений с использованием **интегралов Дюамеля** продемонстрируем на следующем примере.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = \frac{3}{2 + \sin t}$ при начальных условиях $y'(0) = y(0) = 0$.

1. Записываем вспомогательное уравнение для функции $y_1(t)$:

$$y_1'' + y_1 = 1, \quad y_1'(0) = y_1(0) = 0.$$

2. Находим (с учётом начальных условий) *изображения* всех величин, входящих во вспомогательное уравнение, и записываем его в операторном виде, из которого находим *изображение* вспомогательной функции.

$$y_1(t) \equiv Y_1(p), \quad y_1''(t) \equiv p^2 Y_1(p), \quad 1 \equiv \frac{1}{p} : \quad p^2 Y_1(p) + Y_1(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

Для исходного уравнения $Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 1}$, где $F(p) \equiv \frac{3}{2 + \sin t}$. С учётом того

факта, что $pY_1(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$, находим $Y(p) = pY_1(p)F(p)$. Последняя формула справедлива для любого дифференциального уравнения и приводит к необходимости использования **интегралов Дюамеля**.

3. Находим *оригинал* полученного изображения $Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$, для чего

разложим $Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$ на простые дроби (п. 27.2, раздел **27**):

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 1} \quad (\text{сумму простых дробей приводим к обще-})$$

му знаменателю, числитель получившейся дроби приравняем к числителю исходной дроби, т.е. к 1)

$$= \frac{A p^2 + A + B p^2 + C p}{p(p^2 + 1)} \Rightarrow (A+B)p^2 + (A+B)p^2 + C p + A = 1.$$

Из сравнения коэффициентов в левой и правой частях равенства при одинаковых степенях p получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неопределённых коэффициентов A, B, C :

$$\begin{cases} p^2 : A+B=0 \\ p : C=0 \\ p^0 : A=1 \end{cases}.$$

Решение системы $A=1, B=-A=-1$ и $C=0$. Следовательно,

$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Воспользуемся таблицей оригиналов: $\frac{1}{p} \rightleftharpoons 1$ и $\frac{p}{p^2 + 1} \rightleftharpoons \cos t$, т.е. *оригинал*

$$Y_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \rightleftharpoons y_1(t) = 1 - \cos t.$$

4. Вычислим производную *вспомогательного оригинала*

$$y'_1(t) = \sin t.$$

5. Воспользуемся одной из формул Дюамеля:

$$f(t) = \frac{3}{2 + \sin t}, \quad y'_1(t - \tau) = \sin(t - \tau):$$

$$pY_1(p)F(p) \rightleftharpoons y_1(0)f(t) + \int_0^t f(\tau) y'_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t \frac{3 \sin(t - \tau)}{2 + \sin \tau} d\tau.$$

Вычислим этот интеграл:

$$\int_0^t \frac{3 \sin(t - \tau)}{2 + \sin \tau} d\tau = 3 \int_0^t \frac{\sin t \cos \tau - \sin \tau \cos t}{2 + \sin \tau} d\tau = 3 \left(\sin t \int_0^t \frac{\cos \tau d\tau}{2 + \sin \tau} - \cos t \int_0^t \frac{\sin \tau d\tau}{2 + \sin \tau} \right).$$

$$I_1 = \int_0^t \frac{\cos \tau d\tau}{2 + \sin \tau} = \left| \begin{array}{l} u = 2 + \sin \tau \\ du = \cos \tau d\tau \end{array} \right| = (\text{пересчитаем пределы интегрирования}$$

по формуле замены)

τ	0	t
u	2	$2 + \sin t$

$$= \int_2^{2+\sin t} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_2^{2+\sin t} = \ln(2 + \sin t) - \ln 2 = (\text{знак модуля снят в силу положи-$$

$$\text{тельности величин под знаком натурального логарифма}) = \ln \left(\frac{2 + \sin t}{2} \right).$$

$$I_2 = \int_0^t \frac{\sin \tau d\tau}{2 + \sin \tau} = \left. \begin{array}{l} u = \operatorname{tg}\left(\frac{\tau}{2}\right) \quad \tau = 2 \operatorname{arctg} u \\ d\tau = \frac{2 du}{1+u^2} \quad \sin u = \frac{2u}{1+u^2} \end{array} \right| = (\text{пересчитаем пределы интегрирования по формуле замены})$$

τ	0	t
u	0	$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$

$$= 2 \int_0^{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{u du}{(1+u^2)(1+u+u^2)} = (\text{раскладывая подынтегральную функцию на сумму простых дробей (выполнить самостоятельно), получим):}$$

$$= 2 \left(\int_0^{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{du}{1+u^2} - \int_0^{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{du}{u^2+u+1} \right) =$$

$$= 2 \left(\operatorname{arctg} u \Big|_0^{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)} - \left. \begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(u^2+u+1)' = u + \frac{1}{2} \quad dz = du \\ u^2+u+1 = z^2 + \frac{3}{4} \end{array} \right) =$$

u	0	$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$
z	$\frac{1}{2}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$$= 2 \left(\operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \right] - \int_{\frac{1}{2}}^{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}} \frac{dz}{\frac{3}{4} + z^2} \right) = 2 \left(\frac{t}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2z}{\sqrt{3}} \right] \Big|_{\frac{1}{2}}^{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}} \right) =$$

$$= t - \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + 1}{\sqrt{3}} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right) =$$

$$= t - \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left[\frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + 1}{\sqrt{3}} \right] - \frac{\pi}{6} \right).$$

Таким образом, решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = 3 \left(\sin t \ln \left[\frac{2 + \sin t}{2} \right] - \cos t \left\{ t - \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\arctg \left[\frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) + 1}{\sqrt{3}} \right] - \frac{\pi}{6} \right) \right\} \right).$$

72.3. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений

Операционное исчисление широко используется для отыскания решений дифференциальных уравнений, которые возникают при моделировании научных и технических задач (например, для решения задачи о колебательном контуре, см. [40](#)).

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $y''' + 2y'' - 3y' = t \sin t$ при начальных условиях $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$.

Обозначим через $Y(p) \equiv y(t)$ изображение функции. Для отыскания производных оригинала воспользуемся формулой (**Теорема 3 в 70**):

$$f^{(n)}(t) \equiv p^n g(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Следовательно, при нулевых начальных условиях

$$y'(t) \equiv pY(p); \quad y''(t) \equiv p^2 Y(p); \quad y'''(t) \equiv p^3 Y(p).$$

Изображение оригинала $t \sin t$ найдём с использованием дифференцирования изображения функции $\sin t \equiv \frac{1}{p^2 + 1}$, тогда

$$t \sin t \equiv -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное дифференциальное уравнение, получим: $(p^3 + 2p^2 - 3p)Y(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$. Отсюда $Y(p) = \frac{2}{(p^2 + 1)^2 (p^2 + 2p - 3)}$.

Для нахождения оригинала этого изображения разложим полученную дробь на простые дроби:

$$Y(p) = \frac{2}{(p^2 + 1)^2 (p^2 + 2p - 3)} = \frac{2}{(p^2 + 1)^2 (p + 3)(p - 1)} =$$

(полином в знаменателе дроби $p^2 + 2p - 3$ представлен в виде произведения простых сомножителей)

$$= \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{Cp + D}{(p^2 + 1)^2} + \frac{E}{p + 3} + \frac{F}{p - 1}.$$

Приводя эти дроби к общему знаменателю и приравнивая числитель получившейся дроби к числителю исходной дроби (это число 2), найдём:

$$A(p^5 + 2p^4 - 2p^3 + 2p^2 - 3p) + B(p^4 + 2p^3 - 2p^2 + 2p - 3) + \\ + C(p^3 + 2p^2 - 3p) + D(p^2 + 2p - 3) + \\ E(p^5 - p^4 + 2p^3 - 2p^2 + p - 1) + F(p^5 + 3p^4 + 2p^3 + 6p^2 + p + 3) = 2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффици-

$$\text{ентов } A, B, C, D, E \text{ и } F: \begin{cases} p^5 : A + E + F = 0 \\ p^4 : 2A + B - E + 3F = 0 \\ p^3 : -2A + 2B + C + 2E + 2F = 0 \\ p^2 : 2A - 2B + 2C + D - 2E + 6F = 0 \\ p : -3A + 2B - 3C + 2D + E + F = 0 \\ p^0 : -3B - 3D - E + 3F = 2 \end{cases} . \text{Решение}$$

этой системы имеет вид (решите систему методом Гаусса, см. 3):

$$A = -\frac{3}{25}, B = -\frac{7}{50}, C = -\frac{1}{5}, D = -\frac{2}{5}, E = -\frac{1}{200} \text{ и } F = \frac{1}{8} . \text{Следовательно,}$$

$$Y(p) = -\frac{3}{25} \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{7}{50} \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{5} \frac{p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{2}{5} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{200} \frac{1}{p + 3} + \frac{1}{8} \frac{1}{p - 1} .$$

Для нахождения оригинала преобразуем полученное выражение к виду:

$$Y(p) = -\frac{3}{25} \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{7}{50} \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{10} \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{5} \frac{1}{p} \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{200} \frac{1}{p + 3} + \frac{1}{8} \frac{1}{p - 1} = \\ = -\frac{3}{25} \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{7}{50} \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{10} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right) + \frac{1}{5} \frac{1}{p} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right) - \frac{1}{200} \frac{1}{p + 3} + \frac{1}{8} \frac{1}{p - 1} ,$$

воспользуемся таблицей изображений и оригиналов, теоремой о дифференцировании изображения и интегрировании оригинала:

$$Y(p) \rightleftharpoons y(t) = -\frac{3}{25} \cos t - \frac{7}{50} \sin t + \frac{1}{10} t \sin t + \frac{1}{5} \int_0^t u \sin u \, du - \frac{1}{200} e^{-3t} + \frac{1}{8} e^t .$$

Вычислим

$$\int_0^t u \sin u \, du = \begin{vmatrix} \lambda = u & d\mu = \sin u \, du \\ d\lambda = du & \mu = -\cos u \end{vmatrix} = -u \cos u \Big|_0^t + \int_0^t \cos u \, du = -t \cos t + \sin t .$$

Таким образом, после приведения подобных членов окончательный ответ имеет вид:

$$y(t) = -\frac{3}{25} \cos t + \frac{3}{50} \sin t + \frac{1}{10} t \sin t - \frac{1}{5} t \cos t - \frac{1}{200} e^{-3t} + \frac{1}{8} e^t .$$

72.4. Теорема Меллина. Обращение преобразования Лапласа

Решение обратной задачи (*отыскание оригинала по изображению*) или обращение **преобразования Лапласа** опирается на следующие теоремы:

Теорема 2 (теорема Меллина). Пусть регулярная функция $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > \omega$ является изображением кусочно-гладкой на каждом конечном отрезке луча $[0; \infty)$ функции $f(t)$ с показателем роста ω . Тогда имеет место формула

$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{pt} dp$ ($\operatorname{Re} p > \omega$), которая называется **формулой Меллина**.

На основании **теоремы Меллина** можно утверждать, что справедлива теорема об умножении оригиналов.

Теорема 3. Пусть функции $f(t)$ и $q(t)$ являются оригиналами с показателями роста ω_1 и ω_2 , $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, $q(t) \rightleftharpoons Q(p)$. Тогда произведение $f(t) \cdot q(t)$ будет оригиналом с показателем роста $\omega_1 + \omega_2$, при этом

$$f(t) \cdot q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(\zeta) Q(p-\zeta) d\zeta,$$

где $x > \omega_1$ и $\operatorname{Re} p > x + \omega_2$.

Вычисление **интеграла Меллина** производится с помощью вычетов, т.е. $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[e^{pt} F(p)]_{p_k}$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' - 3y = e^{2t}$ при начальных условиях $y'(0) = y(0) = 0$.

Обозначим через $Y(p) \rightleftharpoons y(t)$ изображение искомой функции. Для отыскания производных оригинала воспользуемся формулой:

$$f^{(n)}(t) \rightleftharpoons p^n g(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

При нулевых начальных условиях $y'(t) \rightleftharpoons pY(p)$; $y''(t) \rightleftharpoons p^2 Y(p)$. Изображение оригинала e^{2t} найдём с использованием дифференцирования изображения функции $e^{2t} \rightleftharpoons \frac{1}{p-2}$. Подставляя найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$(p^2 - 2p - 3)Y(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Отсюда, разложив полином $p^2 - 2p - 3 = (p+1)(p-3)$, находим

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)(p-2)}.$$

Для нахождения оригинала изображения воспользуемся вышеприведенной формулой, для чего найдём вычеты функции $e^{pt}Y(p)$ в простых полюсах $p_1 = -1$, $p_2 = 2$ и $p_3 = 3$ с использованием формулы

$$\operatorname{res}_{p_k} \left\{ \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right\} = \frac{\varphi(p_k)}{\psi'(p_k)},$$

где $\varphi(p) = e^{pt}$ и $\psi(p) = (p+1)(p-3)(p-2) = p^3 - 4p^2 + p + 6$:

$$1) \operatorname{res}_{p_1} \left\{ \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right\} = \frac{\varphi(p_1)}{\psi'(p_1)} = \frac{e^{p_1 t}}{3p^2 - 8p + 1} \Big|_{p_1=-1} = \frac{1}{12} e^{-t};$$

$$2) \operatorname{res}_{p_2} \left\{ \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right\} = \frac{\varphi(p_2)}{\psi'(p_2)} = \frac{e^{p_2 t}}{3p^2 - 8p + 1} \Big|_{p_2=2} = -\frac{1}{3} e^{2t};$$

$$3) \operatorname{res}_{p_3} \left\{ \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \right\} = \frac{\varphi(p_3)}{\psi'(p_3)} = \frac{e^{p_3 t}}{3p^2 - 8p + 1} \Big|_{p_3=3} = \frac{1}{4} e^{3t}.$$

Следовательно, частное решение данного дифференциального уравнения имеет вид: $y(t) = \frac{1}{12} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}$.

Таким образом, в данной лекции продемонстрированы разные методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений различных порядков с применением теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. Эти методы применимы и к решению систем дифференциальных уравнений.

Пример 4. При начальных условиях $\begin{cases} x(0)=1 & x'(0)=2 \\ y(0)=1 & y'(0)=0 \end{cases}$ найти решение

системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'' = y \\ y'' = x \end{cases}$.

Обозначим через $X(p) \equiv x(t)$ и $Y(p) \equiv y(t)$ изображения искомых функций. Для отыскания производных оригиналов воспользуемся формулой: $f^{(n)}(t) \equiv p^n g(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$. При учёте заданных начальных условий вторые производные оригиналов равны: $x''(t) \equiv p^2 X(p) - p - 2$ и $y''(t) \equiv p^2 Y(p) - p$. Таким образом, система дифференциальных уравнений превращается в систему линейных алгебраических уравнений:

$\begin{cases} p^2 X(p) - p - 2 = Y(p) \\ p^2 Y(p) - p = X(p) \end{cases}$. Из первого уравнения системы

подставим в её второе уравнение выражение для изображения $Y(p)$, получим: $p^2(p^2 X(p) - p - 2) - p = X(p)$. Отсюда следует, что

$$X(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{p^4 - 1}, \text{ тогда } Y(p) = \frac{p^3 + p + 2}{p^4 - 1}.$$

Для нахождения оригиналов воспользуемся методом неопределённых коэффициентов, продемонстрированным в **Примере 2**. Разложим полученные выражения на сумму простых дробей:

$$\begin{aligned} 1) X(p) &= \frac{p^3 + 2p^2 + p}{p^4 - 1} = \frac{p^3 + 2p^2 + p}{(p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{C}{p - 1} + \frac{D}{p + 1} \Rightarrow \\ & A(p^3 - p) + B(p^2 - 1) + C(p^3 + p^2 + p + 1) + D(p^3 - p^2 + p - 1) = \\ & = p^3 + 2p^2 + p \Rightarrow \begin{cases} p^3: A + C + D = 1 \\ p^2: B + C - D = 2 \\ p: -A + C + D = 1 \\ p^0: -B + C - D = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0, B = 1, C = 1 \text{ и } D = 0, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } X(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p - 1} \Rightarrow \boxed{\sin t + e^t}.$$

$$\begin{aligned} 2) Y(p) &= \frac{p^3 + p + 2}{p^4 - 1} = \frac{p^3 + p + 2}{(p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 1} + \frac{C}{p - 1} + \frac{D}{p + 1} \Rightarrow \\ & A(p^3 - p) + B(p^2 - 1) + C(p^3 + p^2 + p + 1) + D(p^3 - p^2 + p - 1) = \\ & = p^3 + p + 2 \Rightarrow \begin{cases} p^3: A + C + D = 1 \\ p^2: B + C - D = 0 \\ p: -A + C + D = 1 \\ p^0: -B + C - D = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 0, B = -1, C = 1 \text{ и } D = 0, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } Y(p) = -\frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p - 1} \Rightarrow \boxed{y(t) = -\sin t + e^t}.$$

С другой стороны, из первого уравнения исходной системы дифференциальных уравнений $y(t) = x''(t) = -\sin t + e^t$, а из второго уравнения $x(t) = y''(t) = \sin t + e^t$, следовательно, система дифференциальных уравнений решена **верно**.

73. “Решение уравнений математической физики”

73.1. Уравнение теплопроводности (диффузии)

Применим операционное исчисление к решению задачи о распределении температуры (или концентрации вещества в случае диффузии) в полубесконечном стержне. Пусть температура $T(x; t)$ неравномерно распределена по длине полубесконечного стержня ($x \in [0; \infty)$), причём на его левом конце поддерживается температура $T(0; t) = T_0(t)$, а начальная температура стержня $T(x; 0) = 0$. Распределение температу-

ры в стержне описывается уравнением теплопроводности, вывод которого впервые осуществил **Фурье**:

$$\boxed{\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}}, \quad T(x; 0) = 0, \quad T(0; t) = T_0(t).$$

Пусть температура и её производные являются оригиналами по переменной t , т.е. $T(x; t) \equiv U(x; p)$, тогда

$$\frac{\partial T(x; t)}{\partial t} \equiv pU(x; p), \quad \frac{\partial^2 T(x; t)}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 U(x; p)}{\partial x^2}.$$

Уравнение теплопроводности запишется в операторном виде:

$$pU(x; p) = a^2 \frac{\partial^2 U(x; p)}{\partial x^2}, \quad U(0; p) = U_0(p) \equiv T(0; t) = T_0(t).$$

Найдём решение этого уравнения в виде $U(x; p) = e^{kx}$, считая величину p параметром. Характеристическое уравнение (см. **38**)

$$p - a^2 k^2 = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{p}}{a}$. Общее решение операторного уравнения за-

писывается в виде: $U(x; p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$. Функция $U(x; p)$ должна быть ограничена при $x \rightarrow \infty$, поэтому $C_2 = 0$. Другую константу интегрирования найдём из начального условия $U(0; p) = U_0(p) = C_1$. Таким образом, решение операторного уравнения примет вид:

$$U(x; p) = U_0(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Преобразуем это решение так, чтобы можно было применить **интегралы Дюамеля**:

$$U(x; p) = pU_0(p) \cdot \frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Используя справочник по операционному исчислению, получим:

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \equiv 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

где $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$ – интеграл вероятности. Следовательно, распределение температуры задаётся **интегралом Дюамеля**, т.е. функцией

$$T(x; t) = T_0(t) \operatorname{Erf}(\infty) + \int_0^t \left[\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right) \right]_{\tau} T_0(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{T_0(t-\tau)}{\sqrt{\tau^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2\tau}\right\} d\tau.$$

В этом выражении $Erf(\infty) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = 0$, так как входящий в это выражение интеграл Пуассона $\int_0^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

73.2. Телеграфное уравнение

Рассмотрим двухпроводную линию как систему равномерно распределённых величин индуктивностей L , сопротивлений R , ёмкостей C и утечки G (рис. 3). Все эти параметры отнесены к единице длины линии.

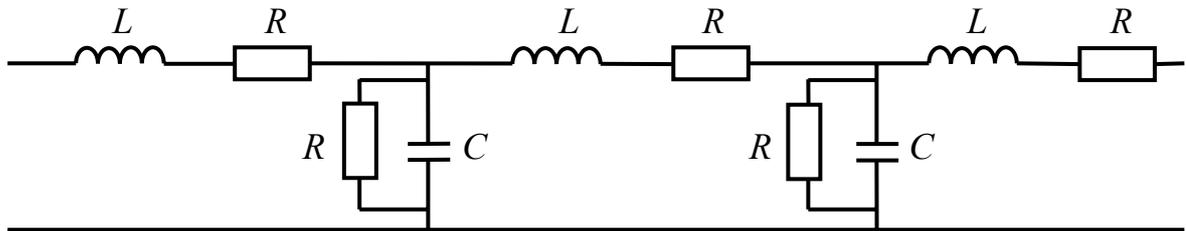


Рис. 3. Телеграфная линия.

Введём также следующие величины $U(x; t)$ и $I(x; t)$ – напряжение и ток, соответственно, в точке x телеграфной линии в момент времени t . Уравнения бесконечно длинной телеграфной линии имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - GU \end{cases}$$

Выберем первое уравнение и решим его при начальном $U(x, 0) = 0$ и граничном $U(0; t) = U_0(t)$ условиях. Предполагая, что искомое решение в виде функций $U(x; t)$, $I(x; t)$, их производные, а также функция $U_0(t)$ являются оригиналами по переменной t , получим при введении обозначений для изображений $U(x; t) \doteq U(x; p)$; $I(x; t) \doteq I(x; p)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x; p)}{\partial x} = -(Lp + R)I \\ \frac{\partial I(x; p)}{\partial x} = -(Cp + G)U \end{cases}$$

при граничном условии $U(0; t) = U_0(t) \doteq U(0; p) = U_0(p)$. Исключая из уравнений функцию $I(x; p)$, получим $\frac{d^2 U(x; p)}{dx^2} - \lambda^2 U(x; p) = 0$, где $\lambda^2 = (Lp + R) \cdot (Cp + G)$. Решением этого уравнения является функция

$$U(x; p) = U_0(p)e^{-\lambda x}$$

(см. рассуждения из п.1 данного раздела). Используя интеграл Меллина, получим оригинал: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} Q(p)e^{-\lambda x} e^{pt} dp$ (найти самостоятельно).

73.3. Продольные колебания стержня

Пусть стержень длиной l , один конец которого закреплён, расположен вдоль оси абсцисс. К другому концу стержня вдоль его оси приложена периодическая сила $G = \sin(\omega t)$. Обозначим через $f(x; t)$ продольное перемещение сечения стержня на расстоянии x от закреплённого конца в момент времени t . Продольные колебания стержня описываются уравнением:

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2}, \quad f(x; 0) = f'_t(x; 0) = 0, \quad f(0; t) = 0, \quad Ef'_x(l; t) = G = \sin(\omega t),$$

где a и E – постоянные параметры, связанные со свойствами материала стержня.

Пусть функция $f(x; t)$ и её частные производные являются оригиналами по переменной t , т.е. $f(x; t) \equiv F(x; p)$, тогда

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2} \equiv p^2 F(x; p), \quad \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} \equiv \frac{d^2 f(x; p)}{dx^2},$$

$$Ef'_x(l; t) = \sin(\omega t) \equiv EF'_x(l; p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Тогда операторное уравнение имеет вид:

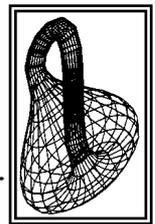
$$p^2 F(x; p) = a^2 \frac{d^2 F(x; p)}{dx^2}, \quad F(0; p) = 0, \quad EF'_x(l; p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Решением уравнения является функция $F(x; p) = \frac{b}{p^2 + \omega^2} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{px}{a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{pl}{a}\right)}$, здесь

$b = \frac{a\omega}{E}$. Оригиналом полученного изображения является функция

$$f(x; t) = \frac{b}{\omega^2} \frac{\sin\left(\frac{\omega x}{a}\right)}{\cos\left(\frac{\omega l}{a}\right)} \sin(\omega t) + \frac{2b}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k_n} \frac{\sin(k_n x)}{\omega^2 - k_n^2 a^2} \sin(k_n a t),$$

где $k_n = \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{1}{2}\right)$ и исключено явление резонанса, т.е. $\omega \neq k_n a$.



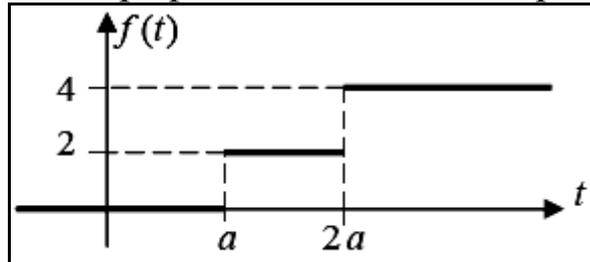
VI

Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 1**1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\sin(4t - 2)$;

б) $t \sin(2t)$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:3. Найти *изображение* выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$y^{(4)} - 2y'' + 3y', \quad y'''(0) = -1, \quad y''(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 3.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{1}{1+e^t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3), \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 2.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений* $\begin{cases} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ 8. Решить *операционным методом*:а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x; t)}{\partial t} = 625 \frac{\partial^2 T(x; t)}{\partial x^2}$,

$$T(x; 0) = 0, \quad T(0; t) = e^{-2t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -0,5 \frac{\partial I}{\partial t} - 2I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -3 \frac{\partial U}{\partial t} + 10U \end{cases}, \quad U(x; 0) = 0, \quad U(0; t) = 3t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2}, \quad f(x; 0) = \frac{\partial f(x; 0)}{\partial t} = 0, \quad f(0; t) = 0, \quad \frac{\partial f(l; t)}{\partial x} = 2 \sin(\omega t).$$

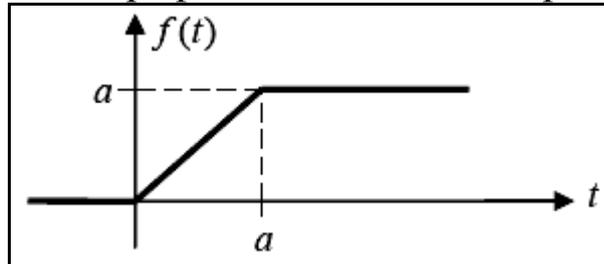
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 2**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\cos(3t + 5)$; б) $t^2 \cos t$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение* выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$4y''' + y'' - 5y', \quad y''(0) = -3, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 1.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p^2}{(p^2 + 9)(p^2 + 4)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + y = \frac{1}{2 + \cos t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y'' + 4y' + 3y = \sin t \cos t, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 400 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial t} - 5I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -5\frac{\partial U}{\partial t} - 2U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = -2t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(t;t)}{\partial x} = 5 \cos(\omega t).$$

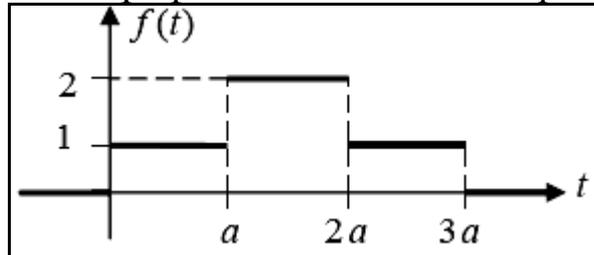
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 3**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) e^{t+7} ; б) $t^3 e^{-2t}$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение* выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$y^{(5)} - y^{(4)} - y''' + 2y'' - 4y' + 6y, \quad y^{(4)} = y'''(0) = 0, \quad y''(0) = y'(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p}{(p-1)(p^2+25)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + y = \frac{1}{1 + \cos^2 t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t), \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' - x + 2y = t \\ -2x + y' - y = t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 144 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x,0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-3t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -4 \frac{\partial I}{\partial t} - 3I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -7 \frac{\partial U}{\partial t} - 4U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0;t) = 5t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x,0) = \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 9 \sin(\omega t).$$

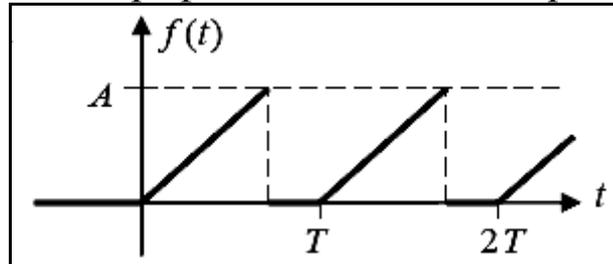
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 4**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $sh(6-t)$; б) $t^2 ch(3t)$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$-2y^{(4)} + 5y''' - 3y'' - y' + y, \quad y'''(0) = y''(0) = y'(0) = y(0) = 0.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля:

$$\frac{1}{(p^2 + 6p + 13)(p^2 - 6p + 10)}.$$

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 9y' = \sin^3(3t)$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \sin t, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x; t)}{\partial t} = 225 \frac{\partial^2 T(x; t)}{\partial x^2},$

$$T(x, 0) = 0, \quad T(0; t) = e^{-4t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -3 \frac{\partial I}{\partial t} - 2I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -7 \frac{\partial U}{\partial t} - 4U \end{cases}, \quad U(x, 0) = 0, \quad U(0; t) = -7t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2}, \quad f(x, 0) = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad f(0; t) = 0, \quad \frac{\partial f(l; t)}{\partial x} = 7 \cos(\omega t).$$

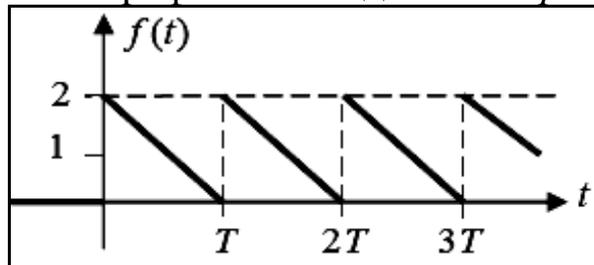
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 5**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $ch(9-5t)$; б) $-t sh t$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$6y'' - 7y' + 5y, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -2.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля: $\frac{1}{(p-5)^2(p-3)^2}$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 16y = \cos^2(4t)$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' - 5y = te^{-5t}, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ -x + y' + y = e^t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 169 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x,0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-2t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -2 \frac{\partial I}{\partial t} - 5I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -2 \frac{\partial U}{\partial t} - 3U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0;t) = 9t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 36 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = \sin(\omega t).$$

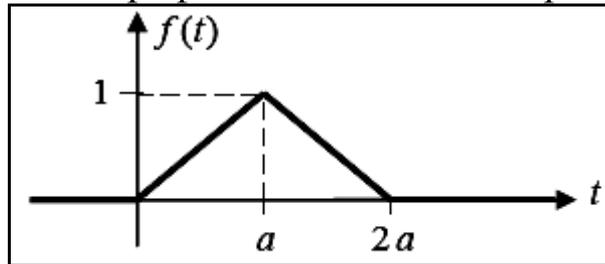
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 6**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $t e^{-2t}$; б) $\int_0^t \frac{e^{4u}}{u} du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$4y^{(4)} + 3y''' + 2y'' + y' - 7y, \quad y'''(0) = 1, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{1+e^t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 5e^{-t} \sin t, \quad y'''(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' + x + y = 5 \\ y'' - 4x - 3y = -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0, x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 441 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x,0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-8t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -8 \frac{\partial I}{\partial t} - 3I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - 8U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0;t) = -4t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 49 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x,0) = \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 2 \cos(\omega t).$$

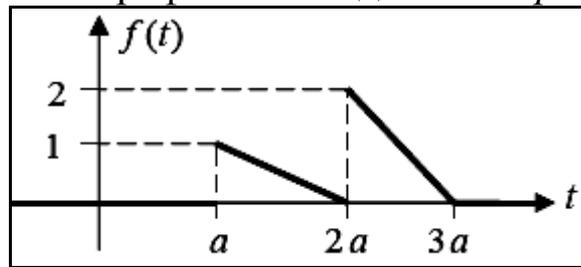
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 7**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $-t \sin(2t)$; б) $\int_0^t u^3 e^u du$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$-3y''' + 9y'' - 6y', \quad y''(0) = -3, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 0.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля: $\frac{1}{p(p-8)^2}$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 16y = \frac{1}{8 + \sin^2(4t)}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y''' - y'' - y' + y = 4e^t(6t-1) + 3t, \quad y''(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - 2x' = y \\ y'' - 2y' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 196 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x,0) = 0, \quad T(0,t) = e^{-9t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -3 \frac{\partial I}{\partial t} - 4I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -6 \frac{\partial U}{\partial t} - 5U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0,t) = t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 121 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x,0) = \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} = 0, \quad f(0,t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 6 \sin(\omega t).$$

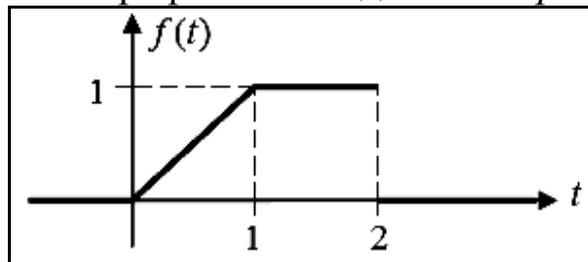
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 8**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $t \cos(8t)$; б) $\int_0^t e^u \sin^2 u \, du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$2y^{(5)} - 3y''' + 2y'' - 3y, \quad y^{(4)}(0) = 0, \quad y'''(0) = 2, \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = -2.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 7)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + 4y = \frac{1}{3 + \cos^2(2t)}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - y' = 3(2 - t^2), \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' + 2x' - 3y = e^t \\ y'' + 4y' - 5x = e^{-t} \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x; t)}{\partial t} = 900 \frac{\partial^2 T(x; t)}{\partial x^2}$,

$$T(x, 0) = 0, \quad T(0; t) = e^{-2t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -2 \frac{\partial I}{\partial t} - 4I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -9 \frac{\partial U}{\partial t} - 3U \end{cases}, \quad U(x, 0) = 0, \quad U(0; t) = -7t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2} = 64 \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2}, \quad f(x, 0) = \frac{\partial f(x; 0)}{\partial t} = 0, \quad f(0; t) = 0, \quad \frac{\partial f(l; t)}{\partial x} = 5 \cos(\omega t).$$

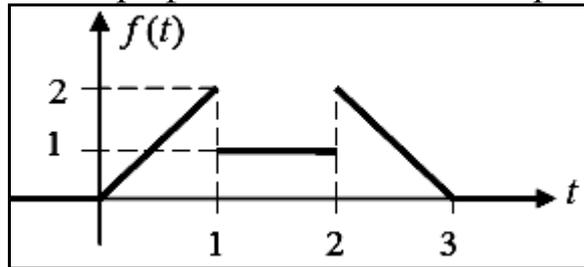
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 9**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\cos^2(\omega_0 t)$; б) $\int_0^t \frac{\cos u}{u} du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$5y''' + 4y' - 2y, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 2.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{p(p^2 + 4p + 21)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = tht$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - 16y' = t^2 + 1, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' = 2y' \\ y'' = 4x' \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1, x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 484 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x,0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-5t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -7 \frac{\partial I}{\partial t} - I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - 2U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0;t) = 6t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 289 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x,0) = \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 3 \sin(\omega t).$$

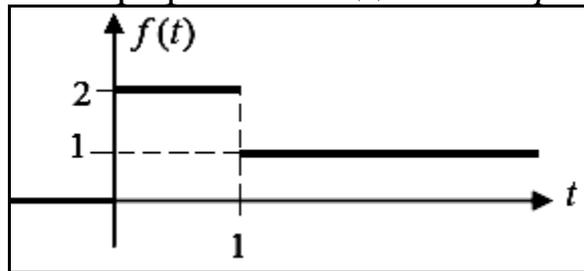
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 10**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\sin^2(3\omega_0 t)$; б) $\int_0^t e^{-2u} \sin(3u) du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$y'' + 4y' + 5y, \quad y'(0) = -4, \quad y(0) = -6.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{(p-1)^2(p+3)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - 3y' + 2y = 8te^{-t}, \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' - x' = y \\ y'' + y' = x' \end{cases} \begin{cases} x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 324 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-7t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial t} - I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = 5t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 361 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 5 \sin(\omega t).$$

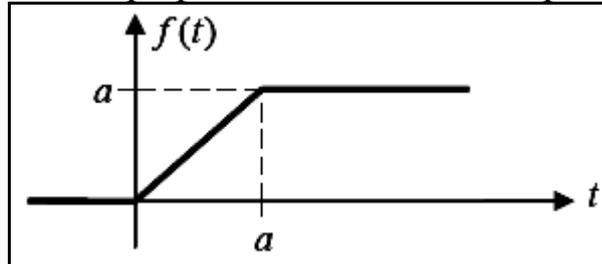
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 11**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $\sin(4t - 2)$; б) $t \sin(2t)$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$y^{(5)} - y^{(4)} - y''' + 2y'' - 4y' + 6y, \quad y^{(4)} = y'''(0) = 0, \quad y''(0) = y'(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля:

$$\frac{1}{(p^2 + 6p + 13)(p^2 - 6p + 10)}.$$

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 16y = \cos^2(4t)$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 5e^{-t} \sin t, \quad y'''(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - 2x' = y & \begin{cases} x(0) = 0, & x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, & y'(0) = 0 \end{cases} \\ y'' - 2y' = x \end{cases}$$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 900 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-2t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -2 \frac{\partial I}{\partial t} - 4I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -9 \frac{\partial U}{\partial t} - 3U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = -7t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 64 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 5 \cos(\omega t).$$

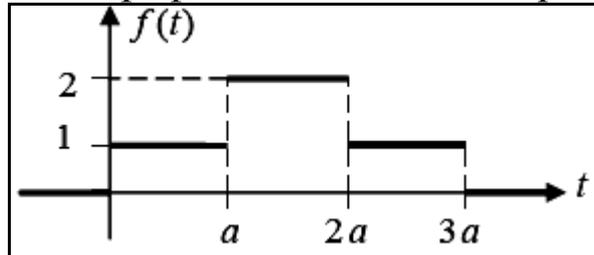
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 12**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $\cos(3t + 5)$; б) $t^2 \cos t$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$-2y^{(4)} + 5y''' - 3y'' - y' + y, \quad y'''(0) = y''(0) = y'(0) = y(0) = 0.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля: $\frac{1}{(p-5)^2(p-3)^2}$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{1+e^t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y''' - y'' - y' + y = 4e^t(6t-1) + 3t, \quad y'''(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' + 2x' - 3y = e^t \\ y'' + 4y' - 5x = e^{-t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 484 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x,0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-5t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -7 \frac{\partial I}{\partial t} - I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - 2U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0;t) = 6t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 289 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x,0) = \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 3 \sin(\omega t).$$

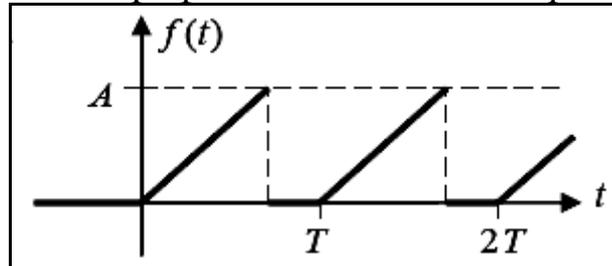
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 13**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) e^{t+7} ; б) $t^3 e^{-2t}$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение* выражения, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$6y'' - 7y' + 5y, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -2.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + 16y = \frac{1}{8 + \sin^2(4t)}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - y' = 3(2 - t^2), \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' = 2y' \\ y'' = 4x' \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 324 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-7t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial t} - I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = 5t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 361 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 5 \sin(\omega t).$$

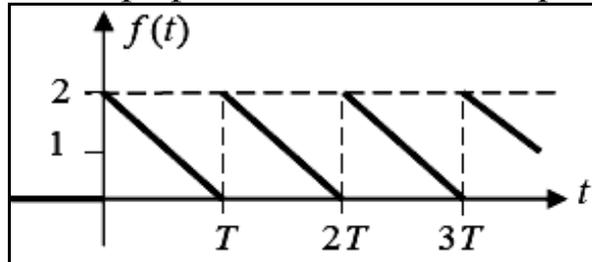
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 14**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $sh(6-t)$; б) $t^2 ch(3t)$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$4y^{(4)} + 3y''' + 2y'' + y' - 7y, \quad y'''(0) = 1, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля: $\frac{1}{p(p-8)^2}$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4y = \frac{1}{3 + \cos^2(2t)}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y''' - 16y' = t^2 + 1, \quad y'''(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - x' = y & \begin{cases} x(0) = 0, & x'(0) = 1 \\ y(0) = 0, & y'(0) = 1 \end{cases} \\ y'' + y' = x' \end{cases}$$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 625 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-2t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -0,5 \frac{\partial I}{\partial t} - 2I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -3 \frac{\partial U}{\partial t} + 10U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = 3t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 2 \sin(\omega t).$$

Задания для самостоятельного решения

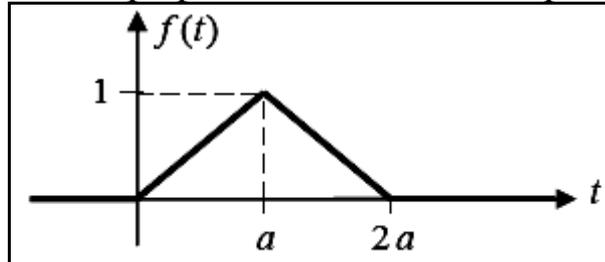
Операционное исчисление**Вариант 15**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $ch(9-5t)$;

б) $-t sh t$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$-3y''' + 9y' - 6y, \quad y''(0) = -3, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 0.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля: $\frac{1}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 - 2p + 7)}$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' = th t$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y''' - 3y' + 2y = 8te^{-t}, \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 900 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x; 0) = 0, \quad T(0; t) = e^{-2t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -2 \frac{\partial I}{\partial t} - 4I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -9 \frac{\partial U}{\partial t} - 3U \end{cases}, \quad U(x; 0) = 0, \quad U(0; t) = -7t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 64 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x; 0) = \frac{\partial f(x; 0)}{\partial t} = 0, \quad f(0; t) = 0, \quad \frac{\partial f(l; t)}{\partial x} = 5 \cos(\omega t).$$

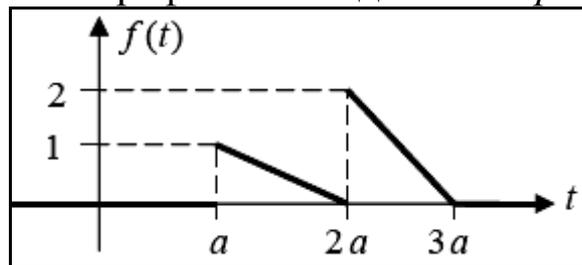
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 16**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $t e^{-2t}$; б) $\int_0^t \frac{e^{4u}}{u} du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$2y^{(5)} - 3y'' + 2y' - 3y, \quad y^{(4)}(0)=0, \quad y'''(0)=2, \quad y''(0)=1, \quad y'(0)=-1, \quad y(0)=-2.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{p(p^2 + 4p + 21)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0)=0, y(0)=0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3), \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 2.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 144 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0)=0, \quad T(0;t)=e^{-3t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -4 \frac{\partial I}{\partial t} - 3I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -7 \frac{\partial U}{\partial t} - 4U \end{cases}, \quad U(x;0)=0, \quad U(0;t)=5t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 9 \sin(\omega t).$$

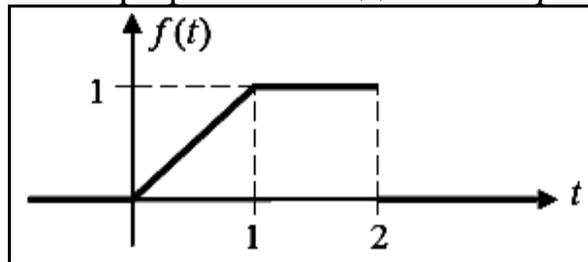
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 17**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $-t \sin(2t)$; б) $\int_0^t u^3 e^u du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$5y''' + 4y' - 2y, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 2.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{(p-1)^2(p+3)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{1}{1+e^t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y'' + 4y' + 3y = \sin t, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' - x + 2y = t \\ -2x + y' - y = t' \end{cases} \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 225 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-4t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -3 \frac{\partial I}{\partial t} - 2I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -7 \frac{\partial U}{\partial t} - 4U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = -7t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 7 \cos(\omega t).$$

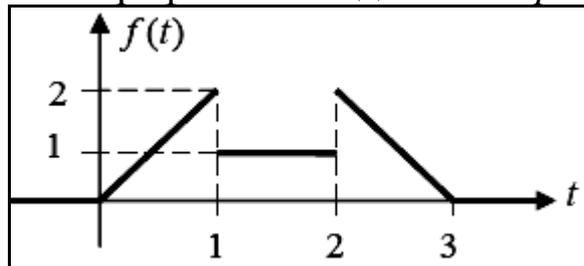
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 18**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $t \cos(8t)$; б) $\int_0^t e^u \sin^2 u \, du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$y'' + 4y' + 5y, \quad y'(0) = -4, \quad y(0) = -6.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + y = \frac{1}{2 + \cos t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0)=0, y(0)=0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \sin t, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' + x + y = 5 \\ y'' - 4x - 3y = -3 \end{cases} \begin{cases} x(0)=0, x'(0)=0 \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 196 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0)=0, \quad T(0;t)=e^{-9t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -3 \frac{\partial I}{\partial t} - 4I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -6 \frac{\partial U}{\partial t} - 5U \end{cases}, \quad U(x;0)=0, \quad U(0;t)=t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 121 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 6 \sin(\omega t).$$

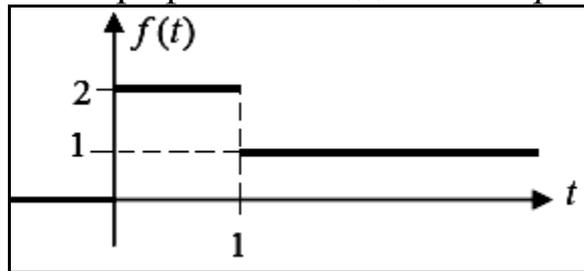
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 19**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\cos^2(\omega_0 t)$; б) $\int_0^t \frac{\cos u}{u} du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$4y''' + y'' - 5y', \quad y''(0) = -3, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 1.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p}{(p-1)(p^2+25)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{1+e^t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - y' = 3(2-t^2), \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' - 2x' = y \\ y'' - 2y' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 324 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-7t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial t} - I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = 5t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 361 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 5 \sin(\omega t).$$

Задания для самостоятельного решения

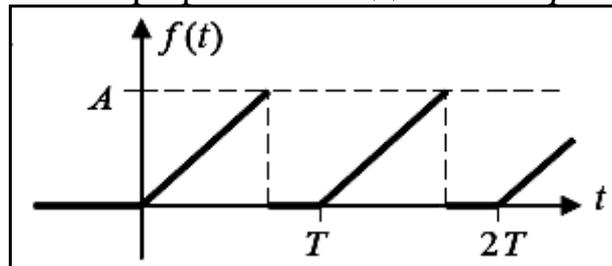
Операционное исчисление

Вариант 20

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\sin^2(3\omega_0 t)$; б) $\int_0^t e^{-2u} \sin(3u) du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$5y''' + 4y' - 2y, y''(0) = -1, y'(0) = -2, y(0) = 2.$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{p(p-8)^2}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + y = \frac{1}{2 + \cos t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0)=0, y(0)=0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \sin t, y'(0) = 1, y(0) = 1.$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений* $\begin{cases} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases}, \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 625 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2},$

$T(x;0)=0, T(0;t)=e^{-2t};$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -0,5 \frac{\partial I}{\partial t} - 2I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -3 \frac{\partial U}{\partial t} + 10U \end{cases}, U(x;0)=0, U(0;t)=3t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, f(0;t)=0, \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 2 \sin(\omega t).$

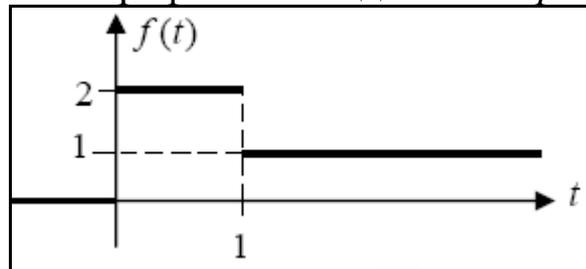
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 21**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\sin(4t - 2)$; б) $t \sin(2t)$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$6y'' - 7y' + 5y, \quad y'(0) = 4, \quad y(0) = -2.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + 4y = \frac{1}{3 + \cos^2(2t)}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3), \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = 2.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x; t)}{\partial t} = 441 \frac{\partial^2 T(x; t)}{\partial x^2}$,

$$T(x; 0) = 0, \quad T(0; t) = e^{-8t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -8 \frac{\partial I}{\partial t} - 3I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - 8U \end{cases}, \quad U(x; 0) = 0, \quad U(0; t) = -4t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2} = 49 \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2}, \quad f(x; 0) = \frac{\partial f(x; 0)}{\partial t} = 0, \quad f(0; t) = 0, \quad \frac{\partial f(l; t)}{\partial x} = 2 \cos(\omega t).$$

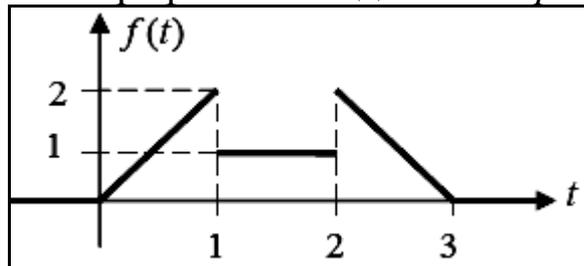
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 22**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $-t \sin(2t)$; б) $\int_0^t u^3 e^u du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$4y^{(4)} + 3y''' + 2y'' + y' - 7y, \quad y'''(0) = 1, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' + 16y = \cos^2(4t)$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - y' = 3(2 - t^2), \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' + x - y = e^t \\ -x + y' + y = e^t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 169 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x; 0) = 0, \quad T(0; t) = e^{-2t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -2 \frac{\partial I}{\partial t} - 5I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -2 \frac{\partial U}{\partial t} - 3U \end{cases}, \quad U(x; 0) = 0, \quad U(0; t) = 9t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 36 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x; 0) = \frac{\partial f(x; 0)}{\partial t} = 0, \quad f(0; t) = 0, \quad \frac{\partial f(l; t)}{\partial x} = \sin(\omega t).$$

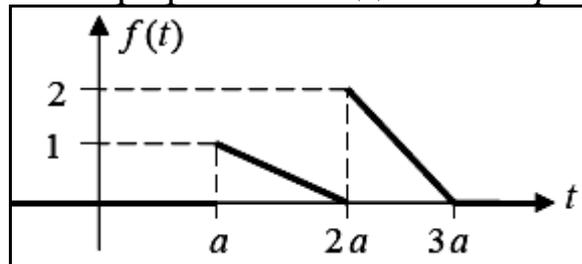
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 23**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) $\cos^2(\omega_0 t)$; б) $\int_0^t \frac{\cos u}{u} du$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение выражения*, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$5y''' + 4y' - 2y, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 2.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{1}{p(p-8)^2}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{1}{1+e^t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - 16y' = t^2 + 1, \quad y''(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений* $\begin{cases} x' + 2y = 3t \\ y' - 2x = 4 \end{cases}, \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 441 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-8t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -8 \frac{\partial I}{\partial t} - 3I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - 8U \end{cases}, \quad U(x;0) = 0, \quad U(0;t) = -4t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 49 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 2 \cos(\omega t).$$

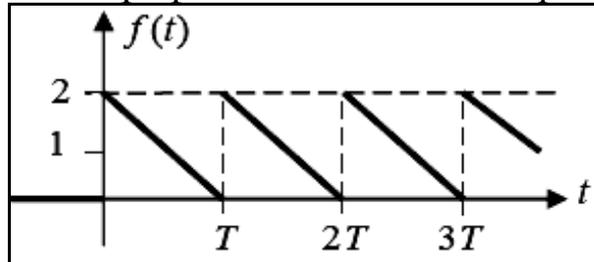
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 24**

1. Найти *изображение* аналитически заданных *оригиналов*:

а) e^{t+7} ; б) $t^3 e^{-2t}$.

2. Найти *изображение* графически заданного *оригинала*:



3. Найти *изображение* выражения, если $y(t) \equiv Y(p)$:

$$y^{(4)} - 2y'' + 3y', \quad y'''(0) = -1, \quad y''(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 3.$$

4. Найти *оригинал* с помощью *теоремы Бореля*: $\frac{p}{(p-1)(p^2+25)}$.

5. Решить *дифференциальное уравнение* $y'' - y' = \frac{e^{2t}}{1+e^t}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью *интегралов Дюамеля*.

6. Найти частные решения *дифференциального уравнения*

$$y''' - y' = 3(2-t^2), \quad y'''(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

7. Решить *систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x'' - 2x' = y \\ y'' - 2y' = x \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить *операционным методом*:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 144 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-3t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -4 \frac{\partial I}{\partial t} - 3I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -7 \frac{\partial U}{\partial t} - 4U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0;t) = 5t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 9 \sin(\omega t).$$

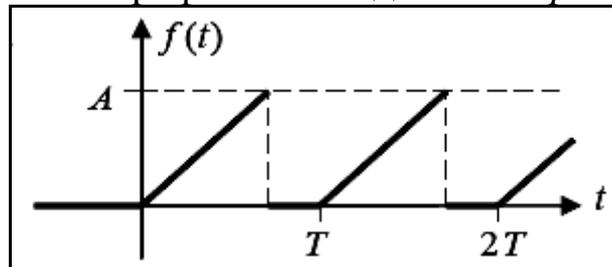
Задания для самостоятельного решения

Операционное исчисление**Вариант 25**

1. Найти изображение аналитически заданных оригиналов:

а) $\sin(4t - 2)$; б) $t \sin(2t)$.

2. Найти изображение графически заданного оригинала:



3. Найти изображение выражения, если $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$:

$$4y''' + y'' - 5y', \quad y''(0) = -3, \quad y'(0) = -2, \quad y(0) = 1.$$

4. Найти оригинал с помощью теоремы Бореля: $\frac{1}{p(p^2 + 4p + 21)}$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4y = \frac{1}{3 + \cos^2(2t)}$ при нулевых начальных условиях ($y'(0) = 0, y(0) = 0$) с помощью интегралов Дюамеля.

6. Найти частные решения дифференциального уравнения

$$y''' - 3y' + 2y = 8te^{-t}, \quad y''(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' + x + y = 5 \\ y'' - 4x - 3y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

8. Решить операционным методом:

а) уравнение теплопроводности $\frac{\partial T(x;t)}{\partial t} = 441 \frac{\partial^2 T(x;t)}{\partial x^2}$,

$$T(x;0) = 0, \quad T(0;t) = e^{-8t};$$

б) телеграфное уравнение $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -8 \frac{\partial I}{\partial t} - 3I \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - 8U \end{cases}, \quad U(x,0) = 0, \quad U(0;t) = -4t;$

в) уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial t^2} = 49 \frac{\partial^2 f(x;t)}{\partial x^2}, \quad f(x;0) = \frac{\partial f(x;0)}{\partial t} = 0, \quad f(0;t) = 0, \quad \frac{\partial f(l;t)}{\partial x} = 2 \cos(\omega t).$$

Список использованных источников

1. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 592 с.
 2. Геворкян П.С. Высшая математика. Основы математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 240 с.
 3. Чинаев П.И., Минин Н.А., Перевозников А.Ю., Черенков А.А. Высшая математика. Специальные главы. – Киев: Вища школа. – 1981. – 368 с.
 4. Валущэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. – Москва: Наука. – 1980. – 496 с.
 5. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. – Москва: Просвещение. – 1968. – 308 с.
 6. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. – Москва: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ». – 2001. – 656 с.
 7. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч.1. Основные операции анализа. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1963. – 500 с.
 8. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – Москва: Наука. – 1973. – 640 с.
 9. Босс В. Лекции по математике: анализ. – Москва: Едиториал УРСС. – 2004. – 216 с.
 10. Босс В. Лекции по математике. Т.9: ТФКП. – Москва: ЛКИ. – 2007. – 216 с.
 11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – Москва: Наука. – 1984. – 432 с.
 12. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной. – Ленинград-Москва: Гос. тех.-теор. изд-во. – 1934. – 372 с.
 13. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. – Москва: МФТИ. – 1999. – 256 с.
 14. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука. – 1989. – 480 с.
 15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука. – 1973. – 736 с.
 16. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 256 с.
-

17. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2009. – 520 с.
 18. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 336 с.
 19. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – Москва: Наука. – 1969. – 240 с.
 20. Боярчук А.К. Функции комплексного переменного: теория и практика / Справочное пособие по высшей математике. Т.4. – Москва: Едиториал УРСС. – 2001. – 352 с.
 21. Хапланов М.Г. Теория функции комплексного переменного. – Москва: Просвещение. – 1965. – 208 с.
 22. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань». – 2002. – 304 с.
 23. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – Москва: Наука. – 1964. – 388 с.
 24. Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу: В 2-х частях / Ч.1. Первое полугодие. – Москва: МИАН. – 2004. – 176 с.
 25. Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу: В 2-х частях / Ч.1. Первое полугодие. – Москва: МИАН. – 2004. – 136 с.
 26. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2002. – 228 с.
 27. Литкин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1961. – 524 с.
 28. Микусинский Я. Операторное исчисление. – Москва: Изд-во иностр. лит-ры. – 1956. – 367 с.
 29. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. – Москва-Ленинград: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры. – 1951. – 432 с.
 30. Штокало И.З. Операционное исчисление (обобщения и приложения). – Киев: Наукова думка. – 1972. – 304 с.
 31. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. – Москва: Высшая школа. – 1983. – 160 с.
 32. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа. – 2001. – 445 с.
 33. Гончар А.В. Практикум по теории функций комплексного переменного.
-

ного. – Нижний Новгород: Высшая школа. – 2005. – 51 с.

34. Улымжиев М.Д., Инхеева Л.И., Юмов И.Б., Юмова С.Ж. Теория функций комплексного переменного / Методическое пособие. – Улан-Удэ: ВСГТУ. – 2004. – 36 с.

35. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 312 с.

36. Бакулина М.П. Вычеты и их применения к вычислению интегралов. – Новосибирск: НГУ. – 2006. – 36 с.

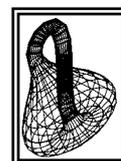
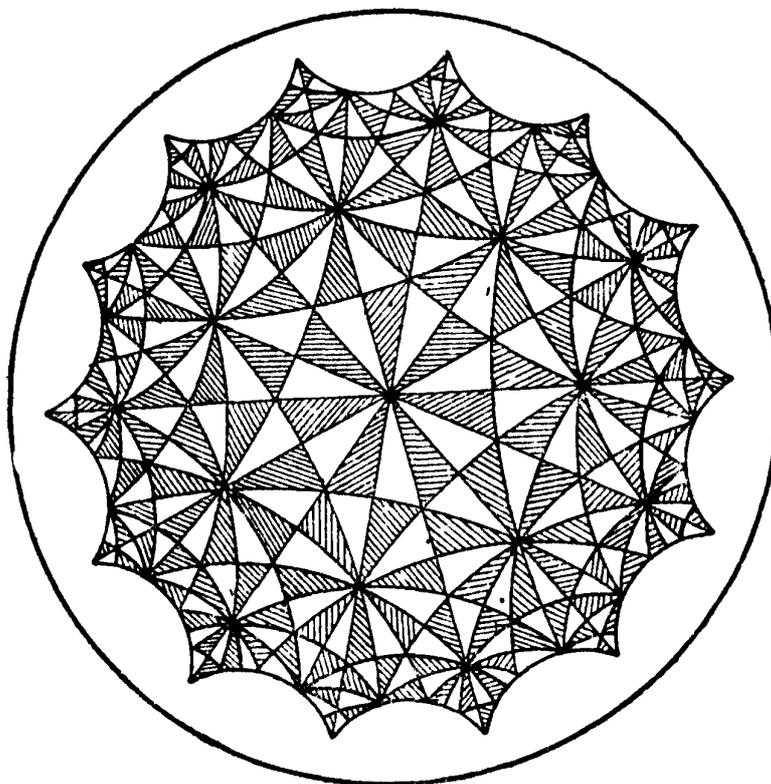
37. Василего И.П. Вычисление интегралов с помощью вычетов: Методические указания. – Оренбург: ГОУ ОГУ. – 2004. – 20 с.

38. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г., Титов Л.С. Поверхности функций комплексного переменного: Метод. указания. – Красноярск: КГУ. – 2004. – 39 с.

39. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – Москва: Высшая школа. – 1968. – 256 с.

40. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.1. Инструментарий (методика решения задач). – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 540 с.

41. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.





Терехов С.В.
Варюхин В.Н.



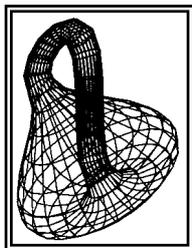
*Математическая библиотечка
студента-физика*

Том 3

(для студентов специальности
«Теоретическая физика»:
часть I)

Решение задач

по тензорной алгебре, уравнениям математической физики



ТФІ. Тензорная алгебра.
Уравнения математической физики.

Тема: Тензорная алгебра

74. “Преобразование векторов при изменении системы отсчёта. Понятие тензора”

74.1. Преобразование векторов при выборе новой системы координат

Решение практических и научных задач всегда проводится в некоторой системе координат. Выбор той или иной системы координат обусловлен условиями конкретной задачи, при этом обычно исходят из соображений простоты записи математической интерпретации исследуемого процесса в данной системе координат. В силу того, что основные физические величины (скорость, ускорение, импульс, сила, моменты импульса и силы) описываются векторами, то рассмотрим преобразование векторов при изменении системы координат.

Из курса *векторной алгебры* (см. **4-6**) известно, что любые три (два) некопланарных (неколлинеарных) вектора образуют **базис**, по которому можно разложить вектор $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ (или $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$), где a_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции вектора на соответствующие координатные оси (**4**).

Если в качестве базисных векторов выбрать *орты* (вектора с единичной длиной) \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 (в пространстве добавляется орт \mathbf{e}_3), то система координат называется **ортонормированной**.

Ортонормированную систему координат будем называть **декартовой**, если базисные векторы располагаются под прямым углом (рис. 1а).

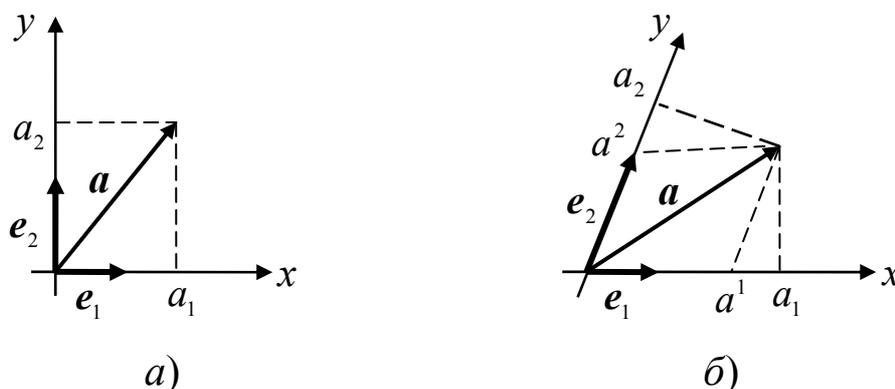


Рис. 1. Декартова (а) и косоугольная (б) системы координат.

○ Для декартовой системы координат скалярные произведения ортов определяются **символом Кронекера**

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad \bullet$$

Систему координат, отличающуюся от декартовой системы координат, называют ***косоугольной*** (рис. 1б).

Проекции вектора на координатные оси a_1 и a_2 , полученные путём опускания перпендикуляров из точек, определяющих начало и конец вектора, до пересечения с соответствующими координатными осями, называют ***ковариантными координатами вектора***.

Проекции вектора на координатные оси a^1 и a^2 , полученные путём проведения прямых параллельных координатным осям из точек, определяющих начало и конец вектора, до пересечения с соответствующими координатными осями, называются ***контравариантными координатами вектора***.

○ Из рис.1 а) видно, что в декартовой системе координат ковариантные и контравариантные координаты совпадают. В силу того, что в инженерных расчётах используется декартова система координат, то в дальнейшем будем рассматривать преобразования векторов в декартовых системах координат. ○

Выберем декартову систему координат с ортами осей \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 . Тогда разложение любого вектора пространства по этому базису запишется в виде

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i,$$

где $\boxed{a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i}$ – проекции вектора \mathbf{a} на соответствующие координатные оси.

○ В тензорном исчислении принято не писать знак суммы, если индексы повторяются. Если суммирования нет по повторяющимся индексам, то это специально оговаривается. Например, вышеприведенная формула $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ записывается так: $\boxed{\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i}$. ○

Индекс, по которому проводится суммирование, называется *нмым*.

Тройка чисел $(a_1; a_2; a_3)$ определяет проекции вектора \mathbf{a} в исходной системе координат. Очевидно, что при выборе новой системы отсчёта компоненты вектора \mathbf{a} изменятся. Для того чтобы определить проекции этого вектора в новой системе координат, необходимо знать,

какое преобразование выполнено над системой координат. Допустимыми преобразованиями системы координат являются такие, при которых физические законы не изменяют своего вида (инвариантность законов физики, обусловленные наличием симметрии пространства-времени, что приводит к сохранению определённых величин). В классической механике такими преобразованиями являются параллельный перенос и поворот системы координат.

Пусть в пространстве заданы две декартовы системы координат (K) и (K') , в которых рассмотрим вектор \mathbf{a} (рис. 2):

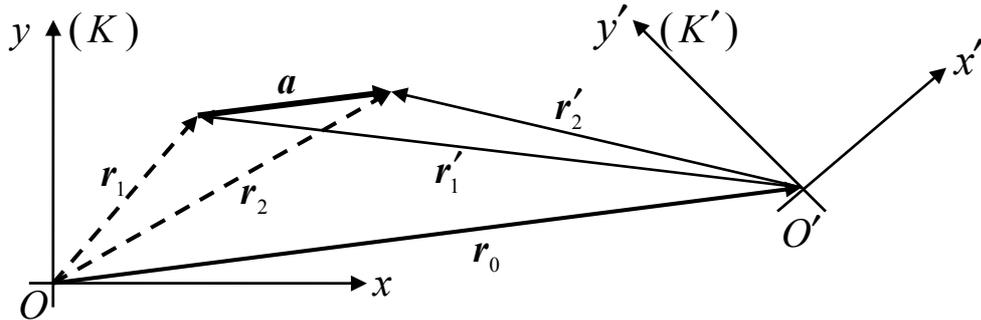


Рис. 2. Вектор \mathbf{a} в старой и новой системах координат.

Из рис. 2 видно, что вектор $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$. Так как вектор определяется разностью радиус-векторов, соединяющих начала координат с концами векторов \mathbf{a} , $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0$, то изменение положения начала координат при параллельном переносе системы координат не влияет на проекции вектора в новой системе координат. Следовательно, разложения этого вектора по базису в системах координат: $(K) - \mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ и $(K') - \mathbf{a} = a'_i \mathbf{e}'_i$, т.е. $a_i \mathbf{e}_i = a'_i \mathbf{e}'_i$. Умножим скалярно обе части последнего равенства на орт \mathbf{e}'_k , получим

$$a_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_k = a'_i \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_k.$$

С учётом декартовости новой системы отсчёта получим, что

$$a_i P_{ki} = a'_i \delta_{ik} \text{ или } \boxed{a'_k = P_{ki} a_i},$$

где $\boxed{P_{ki} = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i}$. Эта формула связывает новые координаты a'_i вектора \mathbf{a} с его старыми проекциями a_i .

Матрицу P с матричными элементами $\boxed{P_{ki} = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i}$ называют **матрицей перехода** при изменении системы координат.

● В силу произвольности вектора \mathbf{a} полученный закон преобразования проекций вектора справедлив для любого вектора пространства. ●

Из определения матрицы перехода P следует, что её матричные компоненты

$$P_{ki} = \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{e}'_k| |\mathbf{e}_i| \cos \varphi_{ki}$$

(φ_{ki} – угол между ортами соответствующих осей новой и старой систем координат). Используя ортонормированность старой (K) и новой (K') систем координат, получим окончательное выражение для элементов матрицы P :

$$P_{ki} = \cos \varphi_{ki}.$$

● При фиксированном индексе k величины P_{k1} , P_{k2} и P_{k3} представляют собой направляющие косинусы орта \mathbf{e}'_k в старой системе координат (K), следовательно, при фиксированном индексе k эти величины удовлетворяют равенству (см. п. 4.5, 4)

$$P_{k1}^2 + P_{k2}^2 + P_{k3}^2 = 1. \quad \bullet$$

● Так как параллельный перенос системы координат (см. п. 9.1, 9) не влияет на проекции вектора \mathbf{a} в новой системе отсчёта, то формула

$$a'_k = P_{ki} a_i$$

описывает преобразование проекций данного вектора при повороте одной системы координат относительно другой. ●

● Последовательное применение двух вышеуказанных переходов сводится к перемножению матриц перехода

$$a''_k = P_{ki} a'_i = P_{ki} P_{im} a_m = P_{km} a_m,$$

т.е. снова приводит к полученному закону перехода от проекций вектора \mathbf{a} в старой системе координат к проекциям в новой системе отсчёта. ●

В дальнейшем вектор \mathbf{a} будем записывать в виде матрицы-столбца $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (или матрицы-строки для транспонированного вектора $\mathbf{a}^T = (a_1 \ a_2 \ a_3)$).

Пример 1. Найти координаты вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ в новой системе координат,

повёрнутой относительно старой системы координат на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси аппликат против часовой стрелки (рис. 3).

Определим углы между ортами новой и старой систем координат:

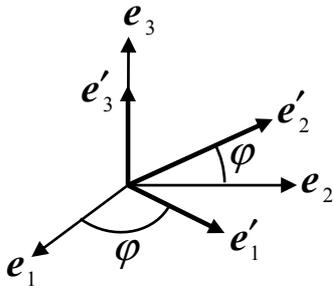


Рис. 3. Орты старой и новой систем координат ($\varphi = \frac{\pi}{4}$).

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \frac{\pi}{4}; & \varphi_{12} &= \frac{\pi}{4}; & \varphi_{13} &= \frac{\pi}{2}; \\ \varphi_{21} &= \frac{3\pi}{4}; & \varphi_{22} &= \frac{\pi}{4}; & \varphi_{23} &= \frac{\pi}{2}; \\ \varphi_{31} &= \frac{\pi}{2}; & \varphi_{32} &= \frac{\pi}{2}; & \varphi_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Найдём матричные элементы матрицы преобразования:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \cos \varphi_{11} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; & P_{12} &= \cos \varphi_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ P_{13} &= \cos \varphi_{13} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; & P_{21} &= \cos \varphi_{21} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ P_{22} &= \cos \varphi_{22} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; & P_{23} &= \cos \varphi_{23} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \\ P_{31} &= \cos \varphi_{31} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; & P_{32} &= \cos \varphi_{32} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \\ P_{33} &= \cos \varphi_{33} = \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица перехода имеет вид $P_{ki} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для

нахождения координат заданного вектора в новой системе координат подействуем найденной матрицей P_{ki} на исходный вектор \mathbf{a} , получим

$$\mathbf{a}' = P\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

○ При преобразованиях системы координат скаляры не изменяются. Например, длина вектора в старой (K) и новой (K') системах координат будет одной и той же величиной. ○

Пример 2. Найти длину вектора \mathbf{a} в старой (K) и новой (K') системах координат из **Примера 1** этого раздела.

Квадрат длины вектора \mathbf{a} в старой системе координат (K) равен

$$|\mathbf{a}|^2 = a_i a_i = 2^2 + 6^2 + 4^2 = 56,$$

а в новой системе координат (K') эта величина равна

$$|\mathbf{a}|^2 = a_i a_i = (4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 4^2 = 56.$$

74.2. Связь между матрицами прямого и обратного переходов. Понятие тензора

Орты новой системы координат \mathbf{e}'_k , также как и любой вектор пространства, можно разложить по базису старой системы координат (K)

$$\mathbf{e}'_k = (\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i = P_{ki} \mathbf{e}_i. \quad (1)$$

Аналогичное разложение ортов старой системы координат по базису новой системы координат (K') имеет вид:

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_m) \mathbf{e}'_m = U_{im} \mathbf{e}'_m. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к тому, что $\mathbf{e}'_k = P_{ki} U_{im} \mathbf{e}'_m$. Отсюда следует, что

$$P_{ki} U_{im} = \delta_{km}. \quad (3)$$

Таким образом, матрица U с матричными элементами U_{ik} является обратной матрицей по отношению к матрице перехода P с матричными элементами P_{ki} . Умножая скалярно уравнение (2) на орт \mathbf{e}'_k и учитывая декартовость новой системы координат, получим

$$\boxed{P_{ki} = U_{ik}}, \quad (4)$$

т.е. обратная матрица преобразования равна матрице перехода. Так как индексы i и k поменялись местами, то в матричной форме это равенство запишется в виде $P = P^T$. Следовательно, равенство (3) в матричной форме будет иметь вид $PP^T = E$, где E – единичная матрица. С другой стороны, из матричного исчисления (2) известно, что $PP^{-1} = P^{-1}P = E$, следовательно, $\boxed{P^T = P^{-1}}$.

Если транспонированная матрица перехода равна обратной матрице к исходной матрице перехода, то такая матрица называется **ортогональной** матрицей, а осуществляемое ею преобразование системы координат – **ортогональным преобразованием**.

Пример 3. Проверить *самостоятельно* ортогональность матрицы перехода из *Примера 1*.

Матрица преобразования называется *собственной*, если её определитель равен 1.

Пример 4. Является ли матрица преобразования из *Примера 1* собственной матрицей (*самостоятельно*)?

● Собственное преобразование выявляет фундаментальные свойства нашей Вселенной и проявляется в инвариантности физических законов относительно таких преобразований. ●

В курсе векторной алгебры были введены скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Для дальнейшего развития векторного анализа было введено *внешнее произведение векторов*.

Всевозможные произведения базисных векторов называют их **диадным (внешним)** произведением.

В результате *диадного произведения базисных векторов* получим новые базисные элементы пространства размером $(3 \otimes 3)$:

$$\begin{array}{ccc} e_1 e_1 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3 e_3 \end{array} \quad (5)$$

Базисные векторы e_1 , e_2 и e_3 образуют векторное пространство, элементы которого характеризуются упорядоченной тройкой чисел. Аналогично, базис (5) образует *диадное пространство* с элементами, которые имеют $3^2 = 9$ компонентов. Следовательно, введённое пространство (5) обобщает понятие векторного пространства. Так как векторы преобразуются, согласно закону (1), то, вводя понятие тензора 2 ранга, являющегося элементом диадного пространства, учтём в определении закон изменения тензора при преобразовании координат:

Тензором A ранга 2 называется величина, которая в любой системе отсчёта определяется 3^2 компонентами A_{ij} . При преобразовании системы координат компоненты тензора второго ранга изменяются по закону

$$A_{ij} = \underbrace{P_{if} P_{jg}}_2 A_{fg}$$

● Тензоры ранга 2 могут быть представлены в виде квадратных матриц размером 3×3 . Отсюда следует, что тензоры 2 ранга обладают всеми свойствами квадратных матриц. ●

В общем случае внешнего произведения n базисных элементов получаем пространство, элементами которого будут тензоры ранга n .

Тензором A ранга n называется величина, которая в любой системе отсчёта определяется 3^n элементами, которые при преобразовании системы координат изменяются, согласно закону

$$\boxed{A'_{ij\dots k} = \underbrace{P_{if} P_{jg} \dots P_{kp}}_n A_{fg\dots p}}.$$

○ Тензоры ранга $n > 2$ не могут быть представлены в наглядном виде в отличие от тензоров 2 ранга. ○

75. “Тензоры второго ранга и операции над тензорами”

75.1. Тензоры второго ранга

Согласно общему определению тензора второго ранга, он содержит $3^2 = 9$ компонент. В связи с тем, что тензор ранга 2 можно представить в виде квадратной матрицы размером 3×3 , то тензоры второго ранга обладают всеми свойствами квадратных матриц.

Тензоры второго ранга $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ называются **равными**, если все элементы матрицы A равны соответствующим элементам матрицы B .

Тензор второго ранга $E = (E_{ij})$ называется **единичным**, если он равен δ -матрице Кронекера, т.е.

$$\boxed{E_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Тензор второго ранга $T = (T_{ij})$ называется **симметричным** тензором, если недиагональные элементы T_{ji} равны элементам T_{ij} , т.е.

$$\boxed{T_{ij} = T_{ji}}.$$

Тензор второго ранга $S = (S_{ij})$ называется **антисимметричным** тензором, если недиагональные компоненты S_{ij} отличаются от компонентов S_{ji} только знаком, т.е. $\boxed{S_{ij} = -S_{ji}}$.

75.2. Операции над тензорами

На примере тензоров ранга 2 покажем основные операции, которые можно выполнять над тензорами любого ранга.

1. Суммой (разностью) тензоров второго ранга A и B называется тензор того же ранга T , компоненты которого равны сумме (разности)

соответствующих компонентов слагаемых (вычитаемых) тензоров (см. также действия над матрицами, п. 2.2, 2):

$$t_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}.$$

Пример 1. Найти сумму тензоров A и B , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ и

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению суммы, $T = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Найти разность тензоров A и B из **Примера 1** (самостоятельно).

2. Произведением числа k на тензор второго ранга T называется тензор того же ранга C , компоненты которого получаются путём умножения числа k на все компоненты тензора T , т.е. $c_{ij} = k t_{ij}$.

Пример 3. Вычислить произведение числа $k = -2$ на тензор T из **Примера 1**.

$$C = -2T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Симметрирование тензора второго ранга V сводится к перестановке индексов с последующим сложением компонент полученного тензора с соответствующими компонентами исходного тензора, т.е.

$$V_{ij}^s = V_{ij} + V_{ji}.$$

Из определений симметричного тензора и операции симметрирования следует, что **симметричный тензор 2 ранга можно определить**

формулой $S_{ij} = \frac{1}{2}(V_{ij} + V_{ji})$. ○

Пример 4. Выделить симметричную часть тензора A из **Примера 1**.

Запишем транспонированную матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ и воспользу-

емя формулой для симметричной части тензора: $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & -3 & \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

● Отметим тот факт, что компоненты тензора S_{ij} симметричны относительно главной диагонали в соответствии с определением симметричного тензора второго ранга. ●

4. Альтернирование тензора второго ранга T сводится к перестановке индексов с последующим вычитанием компонент полученного тензора из соответствующих компонент исходного тензора, т.е.

$$T_{ij}^{as} = T_{ij} - T_{ji}.$$

● Из определений антисимметричного тензора и операции альтернирования следует, что **антисимметричный тензор второго ранга можно определить формулой**

$$AS_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad \bullet$$

Пример 5. Выделить антисимметричную часть тензора $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Запишем транспонированную матрицу $W^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и воспользу-

емя формулой для антисимметричной части тензора:

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

● Отметим тот факт, что у антисимметричного тензора AS все элементы на главной диагонали равны нулю, а компоненты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, отличаются друг от друга знаком в соответствии с определением антисимметричного тензора второго ранга. ●

● Любой тензор второго ранга Q можно представить в виде суммы

симметричного $S = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$ и антисимметричного $AS = \frac{1}{2}(Q - Q^T)$

тензоров, т.е. $Q = S + AS = \frac{1}{2}(Q + Q^T) + \frac{1}{2}(Q - Q^T)$. ○

5. Внешним (тензорным) произведением тензора с компонентами B_{ij} на тензор с компонентами C_{kl} называется тензор, *ранг которого равен сумме рангов перемножаемых тензоров*, а компоненты равны всевозможным произведениям исходных компонентов данных тензоров, т.е.

$$B \otimes C = D \quad \text{или} \quad D_{ijkl} = B_{ij} C_{kl}.$$

Пример 6. Вычислить внешнее произведение векторов $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ и

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Исходя из определения операции внешнего произведения, умножим первую проекцию вектора a ($a_1 = -2$) на все компоненты вектора b , получим первую строку тензора D . Поступая аналогично со второй и третьей проекциями вектора a ($a_2 = 4$ и $a_3 = 1$), получим результат внешнего произведения в виде тензора второго ранга:

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -14 \\ 12 & -4 & 28 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Свёртка тензора осуществляется путём приравнивания пары индексов с последующим суммированием по этому немому индексу, т.е.

$$D_{il} = \sum_k D_{ikkl}.$$

○ Результатом *свёртки тензора второго ранга* является *сумма компонентов, расположенных на главной диагонали квадратной матрицы*. ○

Следом (шпуром) тензора второго ранга $\text{Sp}(D)$ называется сумма компонентов, расположенных на главной диагонали квадратной матрицы, отображающей тензор второго ранга.

Пример 7. Найти *свёртку* тензора D из **Примера 6**.

Суммируя компоненты, расположенные на главной диагонали матрицы D , найдём, что $\text{Sp}(D) = -6 - 4 + 7 = -3$.

○ В результате свёртки тензора ранга n его ранг уменьшается на 2 единицы, т.е. становится равным $n - 2$. Отсюда следует, что **тензоры ранга $2k$** ($k \geq 1, k \in N$) могут быть свёрнуты **до скаляра**, а **тензоры ранга $2k + 1$** сворачиваются **до вектора**. Кроме того, свёртывание тензора с нечётным рангом по разным парам индексов приводит к разным векторам. ○

7. Внутренним (скалярным) произведением тензора с компонентами B_{ij} на тензор с компонентами C_{kl} называется их *внешнее* произведение с последующей свёрткой результирующего тензора по паре индексов, относящихся к разным сомножителям: $D_{ijkl} = B_{ij}C_{kl}$, приравняв, например, $j = k$ и суммируя по нему индексу, получим скалярное произведение $D_{il} = \sum_k D_{ikkl}$.

Пример 8. Найти *внутреннее* произведение векторов из **Примера 6**. Внешнее произведение векторов a и b найдено в **Примере 6**. Скалярное произведение этих векторов сводится к свёртке полученного тензора, которая вычислена в **Примере 7**.

76. “Главные векторы и главные значения тензора второго ранга”

76.1. Главные векторы и главные значения

Пусть дан произвольный тензор второго ранга S . Скалярные произведения этого тензора на всевозможные векторы a дают векторы b , которые отличаются от вектора a как направлением, так и длиной. Среди этих векторов особый интерес вызывают векторы, которые коллинеарны вектору a , т.е. $b = \lambda a$ ($\lambda \in R$).

Векторы, удовлетворяющие уравнению $Sa = b = \lambda a$, называются **главными (собственными) векторами** тензора $S = (S_{ij})$. Числа λ называются его **главными (собственными) значениями**.

Уравнение $S_{ij}a_j = \lambda a_i$ определяет собственный вектор с точностью до умножения на действительное число μ , так как умножение главного вектора на это число вновь приводит к главному вектору. Запишем уравнение $S_{ij}a_j = \lambda a_i$ в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3 = \lambda a_1 \\ S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3 = \lambda a_2 \\ S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3 = \lambda a_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (S_{11} - \lambda)a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3 = 0 \\ S_{21}a_1 + (S_{22} - \lambda)a_2 + S_{23}a_3 = 0 \\ S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + (S_{33} - \lambda)a_3 = 0 \end{cases}$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений относительно величин a_1 , a_2 и a_3 имеет ненулевое (нетривиальное) решение (бесконечно много решений, см. п. 3.3, **3**), если её главный определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение 3 порядка по отношению к λ называется *характеристическим уравнением*.

Решение характеристического уравнения даёт три корня λ_1 , λ_2 и λ_3 (действительных или комплексных). Докажем, что все эти корни являются действительными.

Теорема 1. Главные значения *симметричного* тензора ранга 2 являются действительными числами.

Док-во: Пусть все компоненты S_{ij} симметричного тензора ранга 2 являются действительными числами, а компоненты главного вектора пусть принимают комплексные значения. Умножим обе части уравнения

$$Sa = \lambda a$$

слева на эрмитово-сопряжённый вектор $a^+ = (a_1^*; a_2^*; a_3^*)$ (a_i^* – комплексно-сопряжённые проекции вектора a), т.е.

$$a^+ Sa = \lambda a^+ a = \lambda |a|^2.$$

Используя симметричность тензора S , запишем равенство в компонентах

$$\begin{aligned} a_i^* S_{ij} a_j &= \frac{1}{2} (a_i^* S_{ij} a_j + a_i^* S_{ij} a_j) = \frac{1}{2} (a_i^* S_{ij} a_j + a_j^* S_{ji} a_i) = \\ &= \frac{1}{2} S_{ij} (a_i^* a_j + a_j^* a_i) = S_{ij} \operatorname{Re}(a_i^* a_j). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $S_{ij} \operatorname{Re}(a_i^* a_j) = \lambda |a|^2$, т.е.

$$\lambda = \frac{S_{ij} \operatorname{Re}(a_i^* a_j)}{|a|^2} - \text{действительное число.}$$

Пример 1. Найти главные значения симметричного тензора второго

ранга, если он имеет вид $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение для данного симметричного

тензора второго ранга $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Раскрыв определитель по эле-

ментам третьей строки (см. свойство 9° из п. 1.2, I), получим

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = 0.$$

Отсюда находим корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_3 = 3.$$

Все полученные числа действительные.

76.2. Нахождение главных векторов: случай $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

Теорема 2. Если главные значения *симметричного* тензора второго ранга различны, то его собственные векторы перпендикулярны друг другу.

Док-во: Пусть λ_1 и λ_2 два различных главных значения симметричного тензора второго ранга S , а векторы $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ соответствующие им собственные векторы. Тогда $S_{ij} a_j^{(1)} = \lambda_1 a_i^{(1)}$ и $S_{ij} a_j^{(2)} = \lambda_2 a_i^{(2)}$. Умножим первое равенство на $a_i^{(2)}$, а второе – на $a_i^{(1)}$. Вычтем из первого полученного равенства второе, в результате получим с одной стороны:

$$a_i^{(2)} S_{ij} a_j^{(1)} - a_i^{(1)} S_{ij} a_j^{(2)} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot a_i^{(1)} a_i^{(2)},$$

а с другой стороны:

$$\begin{aligned} a_i^{(2)} S_{ij} a_j^{(1)} - a_i^{(1)} S_{ij} a_j^{(2)} &= a_i^{(2)} S_{ij} a_j^{(1)} - a_j^{(1)} S_{ji} a_i^{(2)} = a_i^{(2)} S_{ij} a_j^{(1)} - a_j^{(1)} S_{ij} a_i^{(2)} = \\ &= S_{ij} (a_i^{(2)} a_j^{(1)} - a_j^{(1)} a_i^{(2)}) = 0. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то скалярное произведение $a_i^{(1)} a_i^{(2)} = 0$, следовательно, главные вектора $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ перпендикулярны. Аналогично теорема доказывается для любой пары векторов $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ и $\mathbf{a}^{(3)}$.

Пример 2. Найти главные векторы для тензора из *Примера 1* этого раздела.

При значении собственного числа $\lambda_1 = -1$ получаем систему линейных алгебраических уравнений для компонент первого главного век-

тора:
$$\begin{cases} 2a_1^{(1)} + 2a_2^{(1)} + 0a_3^{(1)} = 0 \\ 2a_1^{(1)} + 2a_2^{(1)} + 0a_3^{(1)} = 0. \text{ Эта система приводится к системе урав-} \\ 0a_1^{(1)} + 0a_2^{(1)} + 2a_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

нений $\begin{cases} a_2^{(1)} = -a_1^{(1)} \\ a_3^{(1)} = 0 \end{cases}$. В качестве $a_1^{(1)}$ может быть выбрано любое действительное число, однако из соображений простоты выбирают $a_1^{(1)} = 1$, тогда $a_2^{(1)} = -1$. Следовательно, первый главный вектор имеет вид

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При значении главного числа $\lambda_2 = 1$ получаем систему линейных алгебраических уравнений для компонент второго главного вектора:

$$\begin{cases} 0 a_1^{(2)} + 2 a_2^{(2)} + 0 a_3^{(2)} = 0 \\ 2 a_1^{(2)} + 0 a_2^{(2)} + 0 a_3^{(2)} = 0, \\ 0 a_1^{(2)} + 0 a_2^{(2)} + 0 a_3^{(2)} = 0 \end{cases}$$

которая приводится к системе $\begin{cases} a_1^{(2)} = 0 \\ a_2^{(2)} = 0 \\ a_3^{(2)} - \text{любое число} \end{cases}$. Полагая $a_3^{(2)} = 1$, най-

дём, что второй главный вектор имеет вид $\mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 3$ получаем систему линейных алгебраических уравнений для компонент третьего главного вектора:

$$\begin{cases} -2 a_1^{(3)} + 2 a_2^{(3)} + 0 a_3^{(3)} = 0 \\ 2 a_1^{(3)} - 2 a_2^{(3)} + 0 a_3^{(3)} = 0, \\ 0 a_1^{(3)} + 0 a_2^{(3)} - 2 a_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

которая приводится к системе $\begin{cases} a_2^{(3)} = a_1^{(3)} \\ a_3^{(3)} = 0 \end{cases}$. Полагая $a_1^{(3)} = 1$, найдём, что $a_2^{(3)} = 1$, следовательно, третий главный вектор имеет вид

$$\mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что эти векторы перпендикулярны друг другу.

76.3. Нахождение главных векторов: случай $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

Рассмотрим случай, когда два корня характеристического уравнения совпадают, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ и не равны третьему корню λ_3 .

Теорема 3. Если два главных значения *симметричного* тензора второго ранга совпадают, (например, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ – двукратно вырожденное собственное число), то линейная комбинация соответствующих им собственных векторов также является главным вектором симметричного тензора второго ранга с тем же собственным значением λ_0 .

Док-во: Так как $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ – главные векторы симметричного тензора второго ранга $S = (S_{ij})$ с одним и тем же собственным значением λ_0 , то выполняются равенства

$$S_{ij} a_j^{(1)} = \lambda_0 a_i^{(1)} \text{ и } S_{ij} a_j^{(2)} = \lambda_0 a_i^{(2)}.$$

Возьмём произвольные вещественные числа C_1 и C_2 ($C_1^2 + C_2^2 \neq 0$) и составим линейную комбинацию собственных векторов $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$:

$$\mathbf{b} = C_1 \mathbf{a}^{(1)} + C_2 \mathbf{a}^{(2)}.$$

Поддействуем тензором S на этот вектор:

$$\begin{aligned} S\mathbf{b} &= S(C_1 \mathbf{a}^{(1)} + C_2 \mathbf{a}^{(2)}) = SC_1 \mathbf{a}^{(1)} + SC_2 \mathbf{a}^{(2)} = C_1 S \mathbf{a}^{(1)} + C_2 S \mathbf{a}^{(2)} = \\ &= C_1 \lambda_0 \mathbf{a}^{(1)} + C_2 \lambda_0 \mathbf{a}^{(2)} = \lambda_0 (C_1 \mathbf{a}^{(1)} + C_2 \mathbf{a}^{(2)}) = \lambda_0 \mathbf{b}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из **Теоремы 3** следует, что любой вектор, лежащий в одной плоскости с векторами $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}^{(3)}$ (см. **Теорему 2**) и является главным вектором симметричного тензора второго ранга для двукратно-вырожденного собственного значения λ_0 . Поэтому в качестве векторов $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ можно выбрать любые два неколлинеарных вектора, лежащих в плоскости, которая перпендикулярна к вектору $\mathbf{a}^{(3)}$ (рис. 4).

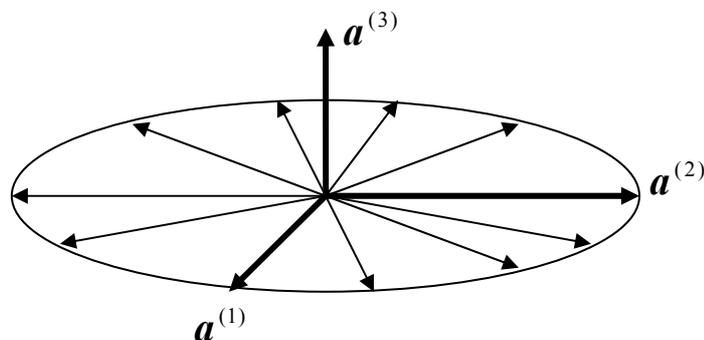


Рис. 4. Главные векторы в случае *двукратно-вырожденного* собственного значения.

По **Теореме 2** векторы $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ выбирают *перпендикулярными*.

Пример 3. Найти главные значения и собственные векторы симметричного тензора второго ранга $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для данного тензора характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или после раскрытия определителя

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0.$$

Корни полученного уравнения 3 степени равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 2$.

Найдём собственные векторы заданного тензора. При $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ получаем систему линейных алгебраических уравнений для компонент первого главного вектора:

$$\begin{cases} a_1^{(1)} - a_2^{(1)} - a_3^{(1)} = 0 \\ -a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} = 0, \text{ которая сво-} \\ -a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} = 0 \end{cases}$$

дится к уравнению $a_3^{(1)} = a_1^{(1)} - a_2^{(1)}$. Полагая $a_1^{(1)} = 1$ и $a_2^{(1)} = 1$, получим,

что $a_3^{(1)} = 0$, отсюда, первый главный вектор имеет вид $\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 2$ получаем систему линейных алгебраических уравнений для

компонентов третьего главного вектора:
$$\begin{cases} -2a_1^{(3)} - a_2^{(3)} - a_3^{(3)} = 0 \\ -a_1^{(3)} - 2a_2^{(3)} + a_3^{(3)} = 0. \\ -a_1^{(3)} + a_2^{(3)} - 2a_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

Третье уравнение системы получается путём вычитания из первого уравнения системы второго, поэтому исходная система сводится к системе

теме
$$\begin{cases} -2a_1^{(3)} - a_2^{(3)} = a_3^{(3)} \\ a_1^{(3)} + 2a_2^{(3)} = a_3^{(3)} \end{cases}$$
. Складывая уравнения системы, находим, что

$a_2^{(3)} = -a_1^{(3)}$, следовательно $a_3^{(3)} = -a_1^{(3)}$. Полагая $a_1^{(3)} = 1$, найдём, что $a_2^{(3)} = -1$ и $a_3^{(3)} = -1$, следовательно, третий главный вектор имеет вид

$\mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что векторы $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(3)}$ перпендикулярны. Для

нахождения вектора $\mathbf{a}^{(2)}$ вычислим *векторное произведение* (см. **б**) вектора $\mathbf{a}^{(1)}$ на вектор $\mathbf{a}^{(3)}$:

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(3)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Следовательно, второй главный вектор равен $\mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

76.4. Нахождение главных векторов: случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$

Если все главные значения симметричного тензора второго ранга равны между собой, то легко показать, что произвольный вектор пространства является главным вектором симметричного тензора второго ранга. В связи с этим любые три взаимно перпендикулярных вектора пространства $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ и $\mathbf{a}^{(3)}$ могут быть выбраны в качестве главных векторов такого тензора (например, орты осей \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k}).

Пример 4. Найти главные значения и собственные вектора симметричного тензора второго ранга $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или после вычисления определителя $(2-\lambda)^3 = 0$. Корни полученного уравнения 3 степени равны $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0 = 2$. Следовательно, любые три взаимно перпендикулярных вектора пространства $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ и $\mathbf{a}^{(3)}$ могут быть выбраны в качестве главных векторов тензора. Выберем в качестве главных векторов орты декартовой системы координат:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}^{(3)} = \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

76.5. Главный декартов базис

Направления главных векторов называются **главными направлениями** симметричного тензора второго ранга.

Выберем координатные оси декартовой системы отсчёта так, чтобы они совпали по направлению с **главными направлениями** симметричного тензора второго ранга, тогда в качестве ортов координатных осей могут быть выбраны векторы ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{e}^{(\alpha)} = \frac{\mathbf{a}^{(\alpha)}}{|\mathbf{a}^{(\alpha)}|}.$$

Векторы $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) образуют **главный декартов базис симметричного тензора второго ранга**.

Теорема 4. В главном декартовом базисе **симметричный** тензор второго ранга имеет диагональный вид, причём его диагональные элементы равны его главным значениям:

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Док-во: Построим матрицу перехода от старой системы отсчёта к **главному декартовому базису**: $P_{ij} = \mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{\mathbf{a}^{(i)}}{|\mathbf{a}^{(i)}|} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{a_j^{(i)}}{|\mathbf{a}^{(i)}|}$, где $a_j^{(i)}$ – j -ая компонента i -го главного вектора $\mathbf{a}^{(i)}$. Вычислим компоненты тензора $S = (S_{ij})$ в декартовом базисе:

$$S'_{ij} = P_{ik} P_{jl} S_{kl} = \frac{a_k^{(i)}}{|\mathbf{a}^{(i)}|} \frac{a_l^{(j)}}{|\mathbf{a}^{(j)}|} S_{kl}.$$

Так как $\mathbf{a}^{(k)}$ главный вектор симметричного тензора второго ранга S , то

$$S_{kl} a_l^{(j)} = \lambda_j a_k^{(j)},$$

следовательно,

$$S'_{ij} = P_{ik} P_{jl} S_{kl} = \frac{a_k^{(i)}}{|\mathbf{a}^{(i)}|} \frac{a_k^{(j)}}{|\mathbf{a}^{(j)}|} \lambda_j = \lambda_j e_k^{(i)} e_k^{(j)} = \lambda_j \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Построить матрицу преобразования к главному базису для симметричного тензора второго ранга из **Примера 3**. Установить его вид в главном декартовом базисе.

Главными значениями этого тензора являются $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ и $\lambda_3 = 2$, а собственными векторами

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, главный декартов базис имеет вид

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а исходный базис –

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица перехода равна

$$P_{ij} = \mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Тензор S в главном декартовом базисе имеет вид:

$$S'_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

77. “Геометрический смысл симметричного тензора второго ранга. Его инварианты”

77.1. Геометрический смысл симметричного тензора второго ранга

Пусть главные значения симметричного тензора второго ранга не равны между собой, т.е. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, тогда в главном декартовом ба-

зисе тензор имеет вид $S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Умножим тензор S на лю-

бой вектор, направленный вдоль одной из главных осей, например, первой:

$$S\mathbf{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{b}^{(1)}.$$

Следовательно, любой вектор вдоль главного направления является собственным вектором симметричного тензора второго ранга. Таким образом, тензор S не имеет других главных направлений, кроме тех, которые определяются корнями характеристического уравнения λ_1 , λ_2 и λ_3 . Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$, то любой вектор пространства является главным вектором симметричного тензора второго ранга, в этом случае тензор представляется в виде $S_{ij} = \lambda_0 \delta_{ij}$.

Тензор второго ранга, имеющий в главном декартовом базисе вид $S_{ij} = \lambda_0 \delta_{ij}$, называется **шаровым**.

● В механике деформируемого твёрдого тела шаровой тензор называют **гидростатической составляющей**. ●

Рассмотрим геометрическую интерпретацию симметричного тензора второго ранга. Любому симметричному тензору второго ранга можно сопоставить произвольную поверхность второго порядка, которая описывается уравнением $S_{ij} x_i x_j = 1$.

Поверхность второго порядка, которая определяется уравнением $S_{ij} x_i x_j = 1$, называется **тензорной поверхностью**.

Компоненты симметричного тензора второго ранга S_{ij} однозначно определяют вид тензорной поверхности. В главном декартовом базисе $S_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, поэтому в этом базисе уравнение тензорной поверхности приобретает вид $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1$. В зависимости от знаков главных значений λ_i это уравнение определяет:

- 1) $(-, -, -)$ – **мнимый эллипсоид**;
- 2) $(+, -, -)$ – **двуполостный гиперboloид**;
- 3) $(+, +, -)$ – **однopolостный гиперboloид**;
- 4) $(+, +, +)$ – **реальный эллипсоид**.

Для практически важных случаев все собственные значения симметричного тензора второго ранга положительны ($\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 > 0$ – эллипсоид), при этом *полуоси эллипсоида* равны $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ и $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ и не равны третьему корню λ_3 , то тензорная поверхность представляет собой эллипсоид вращения. Если выполняются равенства $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$, то тензорная поверхность вы-

рождается в шар, поэтому в данном случае симметричный тензор второго ранга называется *шаровым*.

77.2. Инварианты тензора второго ранга

Величины, составленные из компонент тензора второго ранга и не меняющиеся при преобразовании координат, называют *инвариантами* этого тензора.

Тензор второго ранга T имеет три основных инварианта. Запишем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0.$$

Так как корни этого уравнения λ_1 , λ_2 и λ_3 представляют собой действительные числа, которые не изменяются при переходе к другой системе координат, то и коэффициенты характеристического уравнения I_1 , I_2 и I_3 также будут неизменны при переходе в другую систему координат.

Инварианты I_1 , I_2 и I_3 называются *линейным*, *квадратичным* и *кубическим* инвариантами, соответственно.

Для того чтобы получить выражения для инвариантов I_1 , I_2 и I_3 , запишем характеристическое уравнение в развёрнутом виде для произвольного тензора второго ранга T

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} - \lambda \left(\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} - \lambda (T_{11} + T_{22} + T_{33}) \right) - \lambda^3 = 0.$$

Умножим это уравнение на (-1) и сравним с начальным уравнением, содержащим инварианты I_1 , I_2 и I_3 . Из сравнения вытекают следующие выражения для инвариантов:

1. $I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{Sp}(T)$ – след (“шпур”) тензора T , *линейный* инвариант;

2. $I_2 = \left(\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \right)$ – *квадратичный* инвариант;

3. $I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$ – *кубический* инвариант.

Для симметричного тензора второго ранга T полученные выражения для квадратического и кубического инвариантов можно записать в виде

$$I_2 = T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{12}^2 - T_{13}^2 - T_{23}^2;$$

$$I_3 = T_{11}T_{22}T_{33} + 2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{13}^2 - T_{33}T_{12}^2.$$

Пример 1. Найти инварианты симметричного тензора

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и записать тензор в *главном декартовом базисе*.

Составим *характеристическое уравнение* $(1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 4) = 0$ или в развёрнутом виде $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$. Сравнивая это уравнение с общим характеристическим уравнением $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, находим, что $I_1 = 3$; $I_2 = -1$ и $I_3 = -4$. Решив характеристическое уравнение, найдём собственные значения данного тензора: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 3$. Следовательно, в *главном декартовом базисе* заданный тензор имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

● В *главном декартовом базисе* инварианты тензора определяются формулами (см. **теорему Виета** для кубического уравнения, Табл. 5 в п. 0.4, **Q**):

$$\boxed{I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \text{ — линейный инвариант;}$$

$$\boxed{I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1} \text{ — квадратичный инвариант;}$$

$$\boxed{I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3} \text{ — кубический инвариант. } \bullet$$

Тензор, у которого *линейный инвариант равен нулю*, называют **девиатором**.

● **Любой тензор второго ранга** A может быть представлен в виде суммы **девиатора** D и **шарового тензора** Q : $\boxed{A = D + Q}$, где тензоры

имеют компоненты $\boxed{D_{ij} = A_{ij} - \frac{I_1}{3}\delta_{ij}}$ и $\boxed{Q_{ij} = \frac{I_1}{3}\delta_{ij}}$, соответственно. ●

Пример 2. Разложить тензор S из **Примера 1** на **девиатор** и **шаровой тензор**. Найти инварианты полученных тензоров.

Найдём линейный инвариант $I_1 = 1 + 1 + 1 = 3$, следовательно, шаровой

тензор имеет вид $Q_{ij} = \frac{I_1}{3} \delta_{ij} = \frac{3}{3} \delta_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для нахождения де-

виатора вычтем из исходного тензора шаровой тензор $D = A - Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Инварианты шарового тензора: $I_1 = I_2 = 3$, $I_3 = 1$, а инварианты девиатора: $I_1 = 0$, $I_2 = -4$, $I_3 = 0$.

78. “Тензор напряжений и его свойства”

Твёрдые тела обладают более разнообразными механическими свойствами, чем жидкости и газы. Однако математическое описание сложного состояния твёрдого тела, находящегося под действием внешних сил, затруднительно. Это связано с тем, что система дифференциальных уравнений должна правдоподобно описывать упругое изменение формы тела, поведение твёрдого тела после снятия напряжений, гистерезис (динамика возвращения твёрдого тела в исходное состояние и наличие „памяти” о воздействии внешних сил), ползучесть и пластическое течение. „Поэтому инженер должен выбирать более простую систему уравнение, описывающую только те механические свойства, которые являются существенными для рассматриваемой задачи. Каждая такая система определяет некоторый идеальный материал, и задача инженера должна заключаться в том, чтобы выбрать тот идеальный материал, который лучше всего подходит для решения задачи.” (В. Прагер). В теории упругости таким материалом является *идеально-упругое тело*, для которого связь между напряжением и деформацией определяется законом Гука. Отметим, что этот закон имеет место только в случае достаточно малых напряжений и деформаций. За пределами действия закона Гука используют модели *идеально-пластического* и *упруго-пластического тел*. Различие между этими моделями состоит в следующем:

- а) идеально-упругое тело** характеризуется обратимой связью между приложенными напряжениями и возникающими деформациями;
- б) в случае идеально-пластического тела** одному и тому же напряжению могут соответствовать различные деформации или наоборот – различным прикладываемым напряжениям может соответствовать одна и та же деформация; отличительными чертами такого тела являются

ся наличие предела текучести и отсутствие вязкости;

в) упруго-пластическая модель твёрдого тела характеризуется возможностью появления петли гистерезиса, т.е. эта модель описывает простые среды с эффектом „памяти”.

В качестве приложения изложенных элементов тензорного анализа рассмотрим вначале *идеально-упругое твёрдое тело*, а затем *идеально-пластический материал*.

78.1. Вектор и тензор напряжений

Рассмотрим *упругое тело*, которое не находится под воздействием внешних сил. Атомы в таком теле занимают равновесные положения. При наложении внешнего воздействия атомы сместятся из первоначального положения, при этом их взаимное расположение изменится. Если внешнее воздействие невелико, то после его снятия атомы вернуться в исходное положение, аналогично тому, как тело на предварительно растянутой пружине возвращается в положение равновесия.

Внешняя сила F , отнесенная к единице площади поверхности S твёрдого тела, называют **напряжением** и обозначают $\overline{\varphi} = \frac{F}{S}$.

● Напряжение является размерной величиной, её размерность в системе СИ равна $\frac{Н}{м^2}$. ●

В недеформированном теле взаимодействие атомов уравновешено, вследствие чего они и занимают определённые положения. В деформированном состоянии внутри твёрдого тела возникают внутренние силы, которые стремятся вернуть атомы в первоначальное состояние.

Деформации, при которых атомы твёрдого тела возвращаются в исходное положение после снятия внешнего напряжения, называют обратимыми (упругими).

В теории *идеально-упругого тела* игнорируют атомную структуру твёрдого тела и рассматривают его, как непрерывную, анизотропную (имеющую по различным направлениям разные свойства) и упругую среду, для которой деформации являются обратимыми. В выбранной декартовой системе координат выделим внутри упругого тела точку, которая характеризуется радиус-вектором r , и малую площадку ΔS , содержащую эту точку. Площадку охарактеризуем нормальным

вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ с единичной длиной $|\mathbf{n}| = 1$.

○ Проекции нормального единичного вектора $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ определяются

косинусами углов, которые образует этот вектор с координатными осями, т.е. $n_1 = \cos(\mathbf{n} \wedge \mathbf{i})$; $n_2 = \cos(\mathbf{n} \wedge \mathbf{j})$; $n_3 = \cos(\mathbf{n} \wedge \mathbf{k})$. ○

Обозначим через $\Delta \mathbf{f}^{(\bar{n})}$ силу, действующую на площадку. Тогда в пределе $\Delta S \rightarrow 0$, отношение приращения силы к приращению площади даст вектор $\bar{\varphi}^{(\bar{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}^{(\bar{n})}}{\Delta S}$, который определяет напряжение в выбранной точке *идеально-упругого тела*.

Вектор $\bar{\varphi}^{(\bar{n})}$ называется *вектором напряжений* (рис. 5).

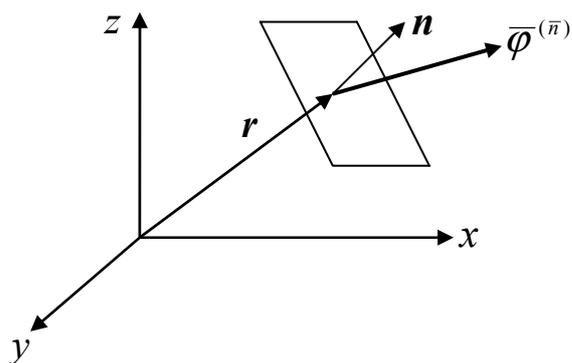


Рис. 5. Вектор напряжений $\bar{\varphi}^{(\bar{n})}$ на выделенной площадке с нормальным ортом $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$.

Из определения вектора напряжения видно, что он зависит как от выбранной точки \mathbf{r} , так и от ориентации элементарной площадки с нормальным вектором \mathbf{n} .

Если вектор напряжения $\bar{\varphi}^{(\bar{n})}$ не зависит от выбранной внутри тела точки \mathbf{r} , то напряжения называются *однородными*.

Для *однородных напряжений* вектор напряжений $\bar{\varphi}^{(\bar{n})}$ зависит только от нормального вектора \mathbf{n} . Проецируя вектор напряжения на координатные оси выбранной декартовой системы координат, получим 9 величин, которые обозначим:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \varphi_x^{(n_1)}; & T_{12} &= \varphi_x^{(n_2)}; & T_{13} &= \varphi_x^{(n_3)}; \\ T_{21} &= \varphi_y^{(n_1)}; & T_{22} &= \varphi_y^{(n_2)}; & T_{23} &= \varphi_y^{(n_3)}; \\ T_{31} &= \varphi_z^{(n_1)}; & T_{32} &= \varphi_z^{(n_2)}; & T_{33} &= \varphi_z^{(n_3)}. \end{aligned}$$

Покажем, что величины T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) образуют тензор ранга 2.

Рассмотрим тетраэдр, тремя гранями которого являются треугольники, лежащие в координатных плоскостях (рис. 6):

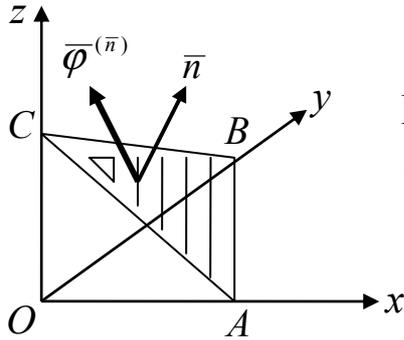


Рис. 6. Тетраэдр, находящийся в равновесии под действием поверхностных сил.

Если обозначить через dS площадь треугольника ABC , то площади треугольников OAC , OBC и OAB будут, соответственно, равны:

$$dS \cos(\mathbf{n} \wedge \mathbf{i}) = dS n_1,$$

$$dS \cos(\mathbf{n} \wedge \mathbf{j}) = dS n_2,$$

$$dS \cos(\mathbf{n} \wedge \mathbf{k}) = dS n_3,$$

а силы, действующие на эти треугольники равны:

$$d\mathbf{f}^{(\bar{n}_1)} = -\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)} n_1 dS;$$

$$d\mathbf{f}^{(\bar{n}_2)} = -\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)} n_2 dS; \tag{1}$$

$$d\mathbf{f}^{(\bar{n}_3)} = -\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)} n_3 dS.$$

Знак “-” поставлен в этих формулах, потому что силы действуют в отрицательном направлении координатных осей. Сила $d\mathbf{f}^{(\bar{n})} = \bar{\varphi}^{(\bar{n})} dS$, действующая на площадку ABC , уравнивается силами (1). Поэтому условие равновесия имеет вид:

$$\bar{\varphi}^{(\bar{n})} = \bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)} n_1 + \bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)} n_2 + \bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)} n_3. \tag{2}$$

Пользуясь полученным равенством (2), можно определить вектор напряжений в любой точке среды для любой площадки, если известны компоненты вектора напряжений на площадках, которые перпендикулярны координатным осям. Проецируя равенство (2) на координатные оси, получим:

$$\varphi_1^{(\bar{n})} = T_{11} n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3;$$

$$\varphi_2^{(\bar{n})} = T_{21} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3; \tag{3}$$

$$\varphi_3^{(\bar{n})} = T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + T_{33} n_3;$$

или в сокращённой форме записи

$$\boxed{\varphi_i^{(\bar{n})} = T_{ij} n_j.}$$

Отсюда следует, что величина $T = (T_{ij})$ определяет тензор 2 ранга.

05. Тензор $T = (T_{ij})$ называется *тензором напряжений*.

○ Полученное соотношение между вектором напряжений и тензором напряжений определяет линейную теорию упругости и показывает, что вектор напряжений в случае однородных напряжений является нечётной функцией нормального орта выбранной элементарной площадки. Кроме того, данное равенство указывает на то, что, согласно тензорной алгебре, элемент $T = (T_{ij})$ с 9 компонентами определяет тензор второго ранга. Выясним *физический смысл* компонентов тензора напряжений. ○

78.2. Нормальные и касательные составляющие тензора и вектора напряжений

Согласно принятым в теории упругости обозначениям, будем именовать диагональные компоненты буквой σ , а все остальные – буквой τ , т.е. тензор напряжений имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Для выяснения физического смысла матричных элементов выберем элементарный куб, стороны которого перпендикулярны координатным осям (рис. 7):

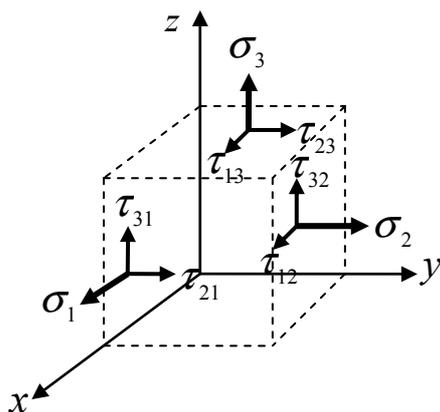


Рис. 7. Компоненты сил, действующих на грани элементарного куба в случае однородных напряжений.

Силы, которые действуют на противоположные грани куба, отличаются от изображённых на рис. 7 сил только направлением.

Из рис. 7 видно, что компоненты тензора напряжений σ_i , стоящие на главной диагонали, определяют силы, которые действуют в направлении координатных осей, т.е. являются нормальными составляющими тензора напряжений. Если $\sigma_i > 0$, то силы стремятся растянуть куб,

в противоположном случае – сжать. Остальные компоненты тензора напряжений задают силы, которые действуют в плоскости соответствующей грани куба, т.е. они определяют тангенциальные составляющие тензора напряжений. Эти силы, действуя на противоположные грани куба, пытаются повернуть куб вокруг соответствующей координатной оси и определяют скалывающие напряжения. Из разложения (3) легко заметить, что

$$\boxed{\bar{\varphi}^{(n_1)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \end{pmatrix}}, \quad \boxed{\bar{\varphi}^{(n_2)} = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \sigma_2 \\ \tau_{32} \end{pmatrix}} \quad \text{и} \quad \boxed{\bar{\varphi}^{(n_3)} = \begin{pmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \sigma_3 \end{pmatrix}}.$$

Таким образом, i -ый столбец тензора напряжений определяет силу, действующую на i -ую площадку перпендикулярную к i -ой координатной оси. Эти векторы можно представить в виде суммы двух векторов,

например: $\bar{\varphi}^{(n_1)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \end{pmatrix} = \bar{\varphi}_\sigma^{(n_1)} + \bar{\varphi}_\tau^{(n_1)}$, первый из которых опре-

деляет нормальную, а второй – тангенциальную составляющие рассматриваемого вектора.

Пример 1. Пусть в некоторой точке упругодеформированного тела

тензор напряжений имеет вид $T = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $|\bar{\varphi}^{(n_3)}|$ и модули

его нормальной и касательной составляющих.

Третий столбец тензора напряжений определяет искомый вектор на-

пряжений, т.е. $\bar{\varphi}^{(n_3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Его длина равна $|\bar{\varphi}^{(n_3)}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$.

Нормальная составляющая имеет компоненты $\bar{\varphi}_\sigma^{(n_3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, а касатель-

ная $\bar{\varphi}_\tau^{(n_3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что их модули равны

$$|\bar{\varphi}_\sigma^{(n_3)}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5 \quad \text{и} \quad |\bar{\varphi}_\tau^{(n_3)}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

соответственно.

78.3. Частные случаи тензора напряжений

Если привести тензор напряжений, который является симметричным тензором 2 ранга (покажем ниже), к *главным осям*, то он примет

вид $T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$. Приведение к *главным осям* в неоднородно на-

пряжённой среде не может быть выполнено сразу для всех точек тела, а лишь для каждой точки в отдельности. Для однородных напряжений приведение тензора напряжений к *главным осям* может быть выполнено для **всех точек** среды в следующих **простейших случаях**:

а) Гидростатическое сжатое состояние.

Если тело находится в состоянии всестороннего сжатия, то тензор на-

пряжений имеет вид: $T = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$, причём $\sigma > 0$. Такое состоя-

ние характерно для обычных жидкостей, если величина σ равна давлению внутри жидкости.

б) Плоское напряженное состояние.

В этом случае упругие силы действуют только в плоскости, например xOy , сдвигая в этой плоскости элементы объёма. Упругие силы осуществляют чистый сдвиг, если $\sigma_1 = -\sigma_2$, и определяют скалывающие напряжения. Для рассмотренного случая тензор напряжений имеет

вид $T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать выражения для тензора напряжений в случае скалывания в плоскостях xOz и yOz (*самостоятельно*).

в) Одноосное напряженное состояние.

Если длинный стержень расположить, например, вдоль оси Oz и равномерно растянуть (сжать), то тангенциальные составляющие тензора напряжений будут равны нулю, при этом тензор напряжений имеет

вид: $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$. Если $\sigma > 0$, то внешние силы растягивают стержень, а при $\sigma < 0$ – сжимают.

Пример 3. Записать выражения для тензора напряжений в случае растяжения стержня в направлении осей Ox и Oz (самостоятельно).

78.4. Симметрия тензора напряжений

Покажем, что тензор напряжений является симметричным тензором второго ранга. Пара сил, действующих на противоположные плоскости элементарного куба (рис. 7) создаёт вращательный момент относительно центра куба, который равен сумме моментов, вычисленных для всех граней куба, т.е.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(x)} + \mathbf{M}^{(y)} + \mathbf{M}^{(z)} = \mathbf{e}_1 \times \bar{\varphi}^{(n_1)} dV + \mathbf{e}_2 \times \bar{\varphi}^{(n_2)} dV + \mathbf{e}_3 \times \bar{\varphi}^{(n_3)} dV.$$

Так как элементарный куб находится в равновесии, то сумма найденных моментов должна быть равна нулю, т.е.

$$(\mathbf{e}_1 \times \bar{\varphi}^{(n_1)} + \mathbf{e}_2 \times \bar{\varphi}^{(n_2)} + \mathbf{e}_3 \times \bar{\varphi}^{(n_3)}) dV = 0.$$

Используя выражения для векторов напряжения через компоненты тензора напряжений и вычисляя векторные произведения, получим

$$(\tau_{23} - \tau_{32}) \mathbf{e}_1 + (\tau_{31} - \tau_{13}) \mathbf{e}_2 + (\tau_{12} - \tau_{21}) \mathbf{e}_3 = 0.$$

В силу *линейной независимости ортов осей*, находим, что выражения в круглых скобках обращаются в нуль, т.е.

$$\tau_{21} = \tau_{12}, \quad \tau_{23} = \tau_{32} \quad \text{и} \quad \tau_{31} = \tau_{13}.$$

Отсюда следует, что тензор напряжений является симметричным тензором второго ранга.

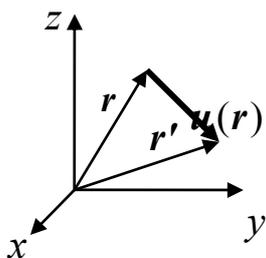
79. “Тензор деформаций. Соотношения между тензорами напряжений и деформаций”

79.1. Поле смещений

Напряжения, которые возникают в твёрдом теле, вызывают изменение первоначального расположения атомов. Если рассматривать твёрдое тело, как упругую непрерывную среду, то необходимо сравнить положение точки *до приложения напряжений*, которое характеризуется радиус-вектором \mathbf{r} , и положение точки *после приложения внешних сил*, которое характеризуется радиус-вектором \mathbf{r}' .

Вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ называется **вектором смещения** (или **вектором деформации**) точки A , а функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ задаёт в теле *поле смещений* (рис. 8).

● В теории упругости ограничиваются случаем малых деформаций, когда изменение расстояния между выделенными точками значительно меньше самого расстояния между этими точками. Для того чтобы

Рис. 8. Вектор деформации $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

деформация была малой величиной, необходимо и достаточно, чтобы частные производные от проекций вектора деформаций $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ были малыми величинами. Это означает, что *вектор смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ должен плавно меняться от точки к точке.* ●

● Не всякое смещение точек тела определяет собственно деформацию тела. Если функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ постоянна, то каждая точка тела смещается на постоянную величину, тело сдвигается как целое (жёсткое смещение), т.е. тело осуществляет поступательное движение и вращение. ●

В противном случае функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ задаёт деформации в окрестности исследуемой точки. Положение точек после деформации будет определено, если задан вектор $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Выясним, как меняется вектор деформации и его проекции при бесконечно малом изменении координат выбранной точки от \mathbf{r} до $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$: $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r})$. При достаточно малых значениях $d\mathbf{r}$ приращение вектора смещения приближённо равно его дифференциалу, т.е.

$$\Delta u_i \approx du_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial y} dy + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = e_{ij} dx_j.$$

Величины e_{ij} связывают между собой изменение проекций вектора деформаций $du_i(\mathbf{r})$ и проекций вектора $d\mathbf{r}$.

● Можно показать, что величины e_{ij} образуют тензор второго ранга (*тензор дисторсии*), который описывает не только деформации тела (*симметричная часть* этого тензора), но и жёсткое вращение (*антисимметричная часть* этого тензора), когда расстояние между точками не изменяется. ●

Пример 1. Найти тензор дисторсии e_{ij} , если поле смещений задано формулой

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-6}((3x - 2y - 6z)\mathbf{e}_1 + (4x - y + z)\mathbf{e}_2 + (2x + y - 6z)\mathbf{e}_3).$$

Согласно определению,

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = 10^{-6} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

79.2. Тензор деформаций. Физический смысл его компонентов

Девять величин e_{ij} образуют тензор второго ранга. Выделим симметричную часть этого тензора $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji})$.

Тензор $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ называется **тензором деформаций**.

Пример 2. Выделить симметричную часть тензора из *Примера 1* и привести к главным осям (самостоятельно).

Выделив симметричную часть тензора e_{ij} , найдём тензор деформаций

с компонентами ε_{ij} : $E = 10^{-6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Какие деформации определяет тензор E из *Примера 2*?

В данном примере тензор деформаций не зависит от координат выбранной точки, следовательно, *деформации однородные*.

При перестановке индексов i и j местами тензор деформации не изменяется, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Следовательно, согласно определению, *тензор деформаций является симметричным тензором второго ранга*, который при выборе главных осей деформации принимает вид:

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты ε_1 , ε_2 и ε_3 тензора деформаций, приведенного к главным осям, называют **главными деформациями**.

Выясним физический смысл компонентов *тензора деформаций*, для чего рассмотрим изменение плоского прямого угла при смещении $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ (рис. 9):

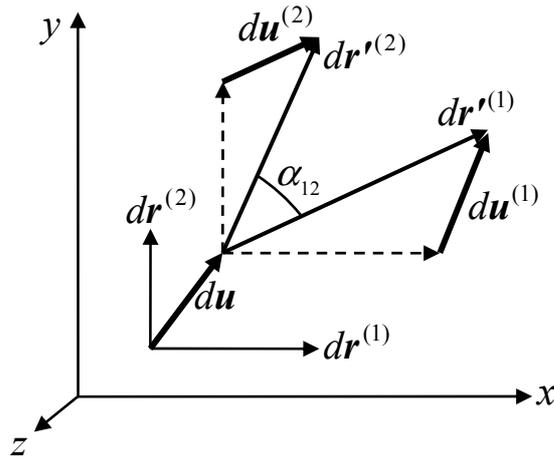


Рис. 9. Изменение плоского прямого угла при деформации.

Рассмотрим в недеформированном теле два бесконечно малых вектора $dr^{(1)}$ и $dr^{(2)}$, расположенных параллельно координатным осям Ox и Oy , соответственно, причём направления векторов и координатных осей совпадают. После деформации эти векторы перейдут в векторы (рис. 9)

$$dr'^{(1)} = dr^{(1)} + du^{(1)} \quad \text{и} \quad dr'^{(2)} = dr^{(2)} + du^{(2)}. \quad (1)$$

Прямой угол между векторами $dr^{(1)}$ и $dr^{(2)}$ (до деформации) переходит в угол α_{12} между векторами (1) $dr'^{(1)}$ и $dr'^{(2)}$ (после деформации). Угол между векторами определяется формулой

$$\cos \alpha_{12} = \frac{dr'^{(1)} \cdot dr'^{(2)}}{\|dr'^{(1)}\| \|dr'^{(2)}\|}.$$

Векторы $dr'^{(1)}$ и $dr'^{(2)}$ имеют проекции

$$dr'^{(1)} = (dx_1^{(1)} + du_1^{(1)}; \quad du_2^{(1)}; \quad du_3^{(1)}) \quad \text{и} \quad dr'^{(2)} = (du_1^{(2)}; \quad dx_2^{(2)} + du_2^{(2)}; \quad du_3^{(2)}).$$

С точностью до линейных членов относительно смещений, получим

$$\cos \alpha_{12} = \frac{du_1^{(2)}}{dx_2^{(2)}} + \frac{du_2^{(1)}}{dx_1^{(1)}}.$$

Используя формулу для дифференциалов смещения (1), получим

$$\cos \alpha_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = e_{12} + e_{21} = 2\varepsilon_{12}. \quad (2)$$

Изменение угла при деформации равно малому углу $\frac{\pi}{2} - \alpha_{12} = \gamma_{12}$, следовательно, $\cos \alpha_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12}$. Таким образом, из (2) на-

ходим: $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$.

Искажение первоначально прямого угла называется *угловой деформацией* в плоскости xOy и равно $\boxed{\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}}$.

Аналогично можно показать, что изменения прямых углов в плоскостях xOz и yOz определяются формулами $\boxed{\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}}$ и $\boxed{\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}}$, соответственно. Таким образом, можно сделать **вывод**:

– *угловая деформация в любой плоскости, перпендикулярной к координатной оси, определяется тангенциальными составляющими тензора деформаций.*

Найдём относительное удлинение сторон прямого угла после деформации, т.е. величину $\frac{dr' - dr}{dr}$. После деформации вектор

$$dr' = dr + du,$$

его модуль равен $dr' = \sqrt{(dx_1 + du_1)^2 + (dx_2 + du_2)^2 + (dx_3 + du_3)^2}$. Пусть вектор dr параллелен оси Ox , тогда $dr = dx_1$, $dx_2 = dx_3 = 0$. Пренебрегая малыми значениями смещений вдоль осей Oy и Oz по сравнению с изменением вектора вдоль оси Ox , получим:

$$\frac{dr' - dr}{dr} \approx \frac{dx_1 + du_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}.$$

Аналогичные формулы можно получить при расположении вектора dr параллельно другим координатным осям. Следовательно, диагональные компоненты тензора деформаций определяют *относительное удлинение сторон прямого угла*.

Относительное удлинение луча $\frac{dr' - dr}{dr} = \varepsilon_{11}$ (или ε_{22} , или ε_{33}) плоского угла называется *линейной деформацией*.

Отсюда следует **вывод**:

– *линейная деформация по любому направлению i определяется диагональным компонентом тензора деформаций ε_{ii} .*

● Если $\boxed{\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0}$, то плоский угол испытывает только *угловые деформации*. Если $\boxed{\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0}$, то изменяются только *линейные размеры* плоского угла при постоянстве самого угла. ●

Вычислим объёмную деформацию упруго деформированного тела. До приложения внешних сил объём малого параллелепипеда равен $dV = dx dy dz$. Ограничиваясь бесконечно малыми величинами второго порядка, можно связать изменение объёма малого параллелепипеда

только с изменением рёбер параллелепипеда, т.е. с линейными деформациями. Длины рёбер параллелепипеда после деформации равны:

$$dx' = (1 + \varepsilon_{11}) dx, \quad dy' = (1 + \varepsilon_{22}) dy \quad \text{и} \quad dz' = (1 + \varepsilon_{33}) dz.$$

Следовательно, после деформации объём малого параллелепипеда с точностью до бесконечно малых величин второго порядка равен:

$$\begin{aligned} dV' = dx' dy' dz' &= (1 + \varepsilon_{11}) dx (1 + \varepsilon_{22}) dy (1 + \varepsilon_{33}) dz = \\ &= dV + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) dV. \end{aligned}$$

Отсюда находим объёмную деформацию

$$\boxed{\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = I_1}.$$

Таким образом, *след тензора деформаций* $\text{Sp}(E) = I_1$ (сумма диагональных элементов матрицы деформаций или линейный инвариант) определяет **относительное изменение элемента объёма**.

Относительное изменение объёма упруго деформированного тела называется *объёмной деформацией*.

Пример 3. Найти объёмную деформацию в условиях *Примера 2*.

По определению с точностью до бесконечно малых величин второго порядка объёмная деформация равна

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 10^{-6} (3 - 1 - 6) = -4 \cdot 10^{-6}.$$

○ Если объёмная деформация отрицательна, то первоначальный объём выделенного элемента уменьшается, в противном случае – увеличивается. Если тензор деформации является девiatorом, то при деформации элементарный объём не изменяется. ○

79.3. Уравнения движения. Энергия деформированного тела

Выделим в упругодеформированном твёрдом теле бесконечно малый параллелепипед, стороны которого параллельны координатным осям в выбранной декартовой системе координат. Определим сумму всех сил внутренних напряжений, действующих на этот элементарный объём вдоль оси Ox . В общем случае неоднородно напряжённого состояния на противоположных гранях параллелепипеда компоненты тензора напряжений будут иметь различные значения. Компоненты тензора напряжений T_{i1} определяют силы, действующие на грани, перпендикулярные к оси Ox . При изменении координаты x_1 на величину

dx_1 они изменятся и будут равны $T_{i1} + \frac{\partial T_{i1}}{\partial x_1} dx_1$. Аналогичные изменения наблюдаются и на гранях, которые перпендикулярны к двум другим координатным осям: $T_{i2} + \frac{\partial T_{i2}}{\partial x_2} dx_2$ и $T_{i3} + \frac{\partial T_{i3}}{\partial x_3} dx_3$. Складывая составляющие сил внутренних напряжений, действующих на элемент объёма вдоль координатной оси i , получим $F_i dV = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV$. Следовательно, сила F внутренних напряжений, отнесённая к единице объёма имеет проекции $F_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$. Если на тело действует объёмная сила, F_V отнесённая к единице объёма, то уравнение движения принимает вид

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_{Vi},$$

где ρ – плотность тела. В частном случае, когда объёмная сила является силой тяжести $F_{Vi} = \rho g_i$ (g_i – проекции ускорения свободного падения), уравнение движения принимает вид

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i.$$

В случае *статического равновесия при отсутствии объёмных сил* уравнение движения приводится к виду

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

При бесконечно малых деформациях полная работа, совершаемая силами напряжений, действующих на бесконечно малый объём dV , определяется формулой $\delta A = T_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$. Пусть деформирование тела является термодинамически обратимым процессом, тогда изменение внутренней энергии тела определится формулой

$$dE = T_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + t dS,$$

где t – температура по шкале Кельвина, dS – изменение энтропии при обратимой деформации. Если процесс деформирования не сопровождается выделением тепла ($dS = 0$), то внутренняя энергия, которая является функцией состояния деформированного тела будет равна работе, совершаемой силами напряжения, т.е. $dE = T_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$. Отсюда следу-

ет, что $T_{ij} = \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{S=const}$. При известной зависимости внутренней энергии от компонент тензора деформаций это равенство позволяет установить ряд соотношений между тензорами напряжений и деформаций.

79.4. Соотношения между тензорами напряжений и деформаций

В равновесном состоянии деформированного тела внешние силы уравниваются внутренними силами напряжений. При уменьшении внешних сил уменьшаются внутренние напряжения. Это поведение упругодеформированного тела указывает на существование связи между напряжениями и деформациями. Характер связи зависит от типа деформируемого тела и должен быть определён из опыта. Экспериментальные исследования показали, что для большинства твёрдых тел при малых деформациях выполняется обобщённый закон Гука: тензоры напряжений и деформаций связаны линейной зависимостью между возникающими напряжениями и деформациями, т.е.

$$T_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Тензор ранга 4 c_{ijkl} называется *тензором модулей упругости*.

Тензор модулей упругости имеет **81** компоненту. Если учесть симметрию тензоров напряжений и деформаций, то это приведёт к соотношениям $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$, т.е. рассматриваемый тензор симметричен по первой и второй парам индексов. В связи с этим можно обозначить пары индексов: $xx=1$, $yy=2$, $zz=3$, $xy=yx=4$, $yz=zy=5$ и $zx=xz=6$. Тогда тензоры напряжений и деформаций можно записать в виде матриц-столбцов вида (6×1) , а тензор модулей упругости – в виде матрицы вида (6×6) . В таких обозначениях обобщённый закон Гука запишется в виде: $T_{\alpha} = c_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta}$. Из приведенной формы записи обобщённого закона Гука видно, что из **81** компоненты *тензора модулей упругости* независимыми являются только **36**. В выбранных обозначениях выражение для внутренней энергии запишется в виде: $dE = c_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta} \delta \varepsilon_{\alpha}$. Так как внутренняя энергия не должна изменяться при обмене индексов α и β местами, то тензор модулей упругости должен быть симметричен по указанным индексам, что снижает количество независимых компонентов до **21**.

Свойства симметрии кристаллов приводят к тому, что некоторые компоненты тензора модулей упругости будут равны нулю, а другие

компоненты будут связаны между собой определёнными соотношениями, что уменьшает число независимых компонентов. Например, для кристаллов гексагональной системы число таких величин равно 5, а для кристаллов кубической системы – 3. Кристаллы гексагональной и кубической систем присущи большинству металлов.

Для изотропной среды кубической системы число независимых компонентов уменьшается до двух. Для таких сред внутренняя энергия системы определяется формулой $E = E_0 + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} \right)^2 + \mu \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}^2$, где

$\lambda = c_{12}$ и $\mu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$ – коэффициенты Ламэ. Вычисляя частные производные от выражения для внутренней энергии по компонентам тензора деформаций, найдём соотношения:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{11}; & T_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12}; & T_{13} &= 2\mu \varepsilon_{13}; \\ T_{21} &= T_{12}; & T_{22} &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{22}; & T_{23} &= 2\mu \varepsilon_{23}; \\ T_{31} &= T_{13}; & T_{32} &= T_{23}; & T_{33} &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{33}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $I_1 = Sp(E) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – след тензора деформаций (линейный инвариант). Рассмотрим частные случаи:

1) Гидростатическое сжатое состояние.

В этом случае тензор напряжений имеет вид $T = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$, причём

$\sigma = p$, где p – давление. Из соотношений (3) находим, что

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu} \text{ и } \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Введём обозначение $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, тогда объёмная деформация

$$\boxed{\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = -\frac{p}{K}}.$$

Величина K называется *модулем всестороннего сжатия*.

2) Одноосное напряжённое состояние.

Рассмотрим цилиндрический стержень, который расположен вдоль оси Oz , к концам которого приложено равномерно растягивающее на-

пряжение $T_{33} = \sigma > 0$, т.е. тензор напряжений имеет вид $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$.

Боковая поверхность стержня не подвергается действию напряжений, следовательно, из соотношений (3) получаем:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{\lambda \sigma}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma}{\mu(3\lambda + 2\mu)}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0.$$

Введём в рассмотрение величины

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

тогда первые два соотношения можно переписать в виде:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\eta \varepsilon_{33} \quad \text{и} \quad \sigma = E \varepsilon_{33}. \quad (4)$$

Вначале рассмотрим второе равенство. Выше было показано, что компонента тензора деформаций ε_{33} определяет относительное удлинение стержня вдоль оси Oz , т.е.

$\varepsilon_{33} = \frac{\Delta l}{l_0}$, где Δl – удлинение стержня,

l_0 – первоначальная длина стержня. В силу того, что $\sigma = \frac{F}{S}$, оконча-

тельно получим соотношение

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0},$$

которое называется **законом Гука**.

Величина E называется **модулем Юнга**.

Первое равенство определяет отношение относительного поперечного сжатия стержня ε_{11} к относительному поперечному растяжению стержня ε_{33} вдоль оси Oz , т.е.

$$\eta = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}.$$

Величина η называется **коэффициентом Пуассона**.

Угловые деформации, согласно п. 74.4, **74**, связаны с недиагональными компонентами тензора напряжений соотношениями (в обозначениях теории упругости):

$$\tau_{12} = \mu \gamma_{12}; \quad \tau_{13} = \mu \gamma_{13}; \quad \tau_{23} = \mu \gamma_{23}.$$

Следовательно, модуль упругости μ является коэффициентом пропорциональности между напряжениями τ_{ij} и углами сдвигов γ_{ij} .

Величина μ называется **модулем сдвига**.

● Если металл имеет поликристаллическое строение, а возникающие деформации значительно превышают наибольший размер отдельного кристалла, то металл считают изотропной средой, которая характеризуется двумя независимыми модулями упругости, т.е. **коэффициентами Ламэ**. ●

80. “Пластические деформации и упрочнение металлов”

После снятия внешней нагрузки упругие деформации исчезают, причём размеры и форма тела не изменяются. Из опыта известно, что при превышении некоторого предельного значения нагрузки твёрдое тело испытывает необратимые изменения. Эти изменения условно делят на два вида: *пластическое течение* и *хрупкий разрыв тела*.

Пластическое течение характеризуется неравномерными изменениями по параллельным плоскостям скольжения: в некоторых таких плоскостях сдвиг совершается на расстояния, превышающие межатомные расстояния, а в соседних параллельных плоскостях сдвиг атомов может быть незначительным или вообще отсутствовать. Пересечение таких плоскостей с поверхностью образца проявляется в виде *полос скольжения (плоскостей скольжения)*.

Области пластического образца между полосами скольжения называют *пачками скольжения*.

Пачки скольжения бывают толщиной порядка $10^{-6} \dots 10^{-5}$ м. Отметим, что скольжение начинается тогда, когда скалывающие напряжения превышают некоторое критическое значение. Величина скалывающего напряжения не является константой для данного металла, зависит от степени деформации и от чистоты деформируемого образца. Для различных металлов величина критического скалывающего напряжения лежит в пределах от 0,05 до $3 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

80.1. Дислокационная модель пластической деформации

Рассмотрим в сплошном твёрдом теле произвольную дислокацию в виде замкнутой линии L , которая, в общем случае, не лежит в какой-либо плоскости. Пусть на эту линию опирается некоторая поверхность S (рис. 10). Разрежем тело по поверхности S (с нормальным вектором n) и, прикладывая скалывающие силы, произведём смещение частей тела, лежащих по обе стороны от исследуемой поверхности, друг относительно друга на постоянный по величине и направлению вектор b .

Вектор b называют *вектором Бюргера*.

○ Из определения вектора Бюргера следует, что этот вектор постоянен по величине и направлению вдоль дислокации. ○

При смещении на вектор Бюргера в одних областях тела возник-

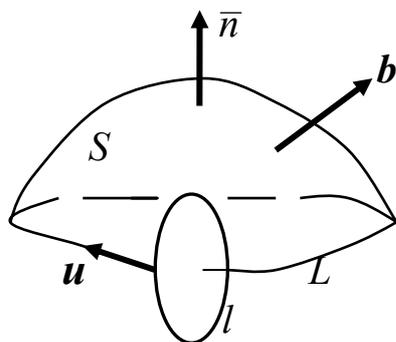


Рис. 10. Дислокация общего вида в сплошной среде.

нут полости, а в других областях – перекрытие участков тела. Заполним полости веществом тела, которое уберём из области перекрытия и уберём деформирующие силы. В результате описанных действий около контура L возникает поле упругих деформаций и напряжений.

Линия L , вблизи которой наблюдается поле упругих деформаций и напряжений, называется **линией дислокации** или просто **дислокацией**.

Из приведенного способа образования дислокации видно, что при восстановлении контакта между разрезанными участками среды вдоль линии дислокации возникает линейная особенность поля смещений \mathbf{u} . Эта особенность состоит в том, что при обходе по любому малому замкнутому контуру l , который пересекает дислокация L , вектор смещения \mathbf{u} получает постоянное приращение равное **вектору Бюргерса** \mathbf{b} . Математически эта особенность отображается равенством

$$\oint_l d\mathbf{u} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

Это равенство позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. Дислокация не может заканчиваться в произвольной внутренней точке твёрдого тела.

Док-во: Пусть дислокация L обрывается в произвольной внутренней точке A твёрдого тела (рис. 11). Тогда можно построить поверхность S_l , опирающуюся на контур l , проведенного вокруг дислокации. Из рис. 11 видно, что эта поверхность нигде не пересекает дислокацию L . Это означает, что во всех точках поверхности S_l вектор смещения \mathbf{u} является однозначной функцией координат, т.е. данный вектор не имеет особенностей. Тогда формулу (1) с учётом **теоремы Стокса** (см. теорию функций нескольких переменных, п.3, **Лекция № 64**) можно переписать в виде

$$\oint_l T_{ij} dx_j = \int_{S_l} \sum_{k,n,m=1}^3 \epsilon_{knm} \frac{\partial B_{mj}}{\partial x_n} dS_k,$$

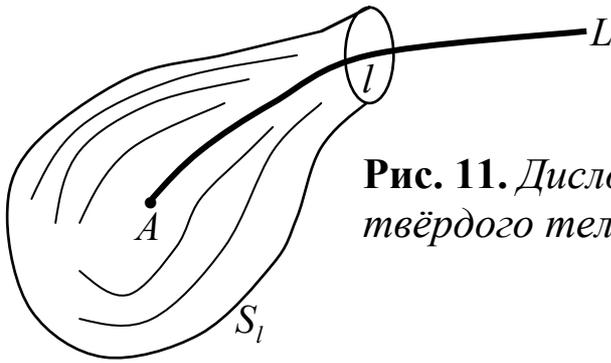


Рис. 11. Дислокация, заканчивающаяся внутри твёрдого тела.

где ϵ_{knm} – компоненты единичного совершенно антисимметричного тензора третьего ранга, т.е.

$$\epsilon_{knm} = \begin{cases} -1, & \text{если перестановка индексов } k, n \text{ и } m \text{ нечётная;} \\ 1, & \text{если перестановка индексов } k, n \text{ и } m \text{ чётная.} \end{cases} \quad (2)$$

Следовательно, величины ϵ_{knm} изменяют свой знак при перестановке индексов местами. Полагая тензор $B_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, тогда получим

$$\oint \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i = \int \sum_{k,n,m=1}^3 \epsilon_{knm} \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} dS_k. \quad (3)$$

Сумма, стоящая справа в равенстве (3) в силу определения единичного совершенно антисимметричного тензора (2) равна нулю. Отсюда находим, что контурный интеграл, стоящий слева в (3) равен нулю, что противоречит определению дислокации (1). Следовательно, дислокация не может заканчиваться в произвольной внутренней точке твёрдого тела.

● Согласно приведенной теореме, дислокация всегда представляется в виде замкнутой линии, которую можно называть *дислокационной петлёй*. ●

● Если дислокация L и опирающаяся на неё поверхность S лежат в плоскости скольжения, то вещество, лежащее над плоскостью скольжения, сдвигается на вектор Бюргерса по отношению к веществу, расположенному под плоскостью скольжения. ●

Рассмотрим случай *прямолинейных дислокаций*. В этом случае вектор Бюргерса расположен по отношению к дислокации *под постоянным углом*.

Если угол между вектором Бюргерса и прямолинейной дислокацией L равен $\frac{\pi}{2}$, то дислокация называется *краевой* (рис. 12).

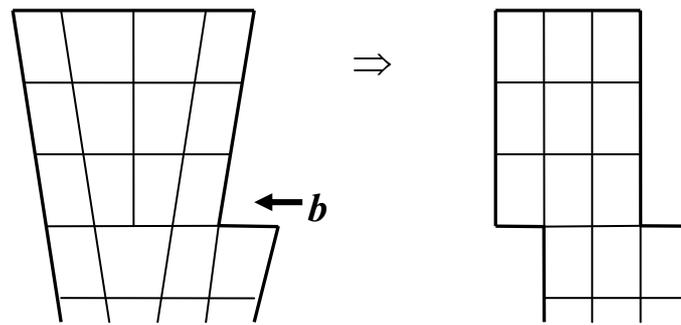


Рис. 12. Сдвиг, осуществляемый движением *краевой дислокации*.

Если угол между вектором Бюргерса и прямолинейной дислокацией L равен 0 , то дислокация называется *винтовой* (рис. 13).

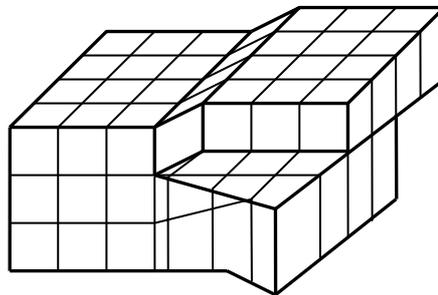


Рис. 13. Сдвиг, осуществляемый движением *винтовой дислокации*.

Наличие в твёрдом теле подвижных краевых и винтовых дислокаций приводит к тому, что значения *критических скалывающих напряжений* имеют указанный выше порядок. Другими словами, можно сказать, что сдвиг атомных плоскостей по отношению друг к другу можно объяснить перемещением *дислокаций*. Такой подход к описанию пластических сдвигов получил название *дислокационной теории пластичности*.

80.2. Напряжения в окрестности дислокации

В непосредственной близости к дислокации возникают геометрические искажения кристаллической решётки, т.е. возникает поле упругих напряжений.

Область в окрестности дислокации, где сконцентрированы значительные искажения кристаллической решётки, называют *ядром дислокации*.

Вне ядра дислокации в наружной области, где искажения решётки невелики, применима линейная теория упругости и закон Гука. Расчёт поля напряжений в этой области проведём обычными методами теории упругости для *краевой и винтовой дислокаций*.

а) Краевая дислокация. Пусть в неограниченной, изотропной и упругой среде имеется прямолинейная *краевая дислокация*, расположенная вдоль оси Oz , а **вектор Бюргерса** параллелен оси Ox . Компоненты вектора смещений удовлетворяют условиям плоской задачи

$$u_1 = u_1(x_1; x_2); \quad u_2 = u_2(x_1; x_2); \quad u_3 = 0. \quad (4)$$

Для плоской задачи компоненты тензора напряжений выражаются через вторые частные производные от некоторой функции $\chi = \chi(x_1; x_2)$

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}; \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}; \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad T_{13} = T_{33} = 0. \quad (5)$$

Функция $\chi = \chi(x_1; x_2)$, через частные производные от которой выражаются компоненты тензора напряжений, называется *функцией напряжений*.

Функция напряжений удовлетворяет бигармоническому **уравнению Лапласа**:

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x_2^4} = 0. \quad (6)$$

Уравнению (6) удовлетворяет функция $\chi = -Ax_2 \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, где A – произвольная постоянная. Подставив полученное выражение для функции напряжений в (5), получим следующие выражения для компонентов тензора напряжений:

$$\begin{aligned} T_{11} &= -A \frac{x_2 (3x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}; & T_{22} &= A \frac{x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}; \\ T_{12} &= A \frac{x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}; & T_{33} &= \eta (T_{11} + T_{22}). \end{aligned} \quad (7)$$

В цилиндрической системе координат компоненты тензора напряжений равны: $T_{rr} = T_{\varphi\varphi} = -\frac{A}{r} \sin \varphi$; $T_{r\varphi} = T_{\varphi r} = \frac{A}{r} \cos \varphi$.

● Из этих формул видно, что компоненты тензора напряжений при $r \rightarrow 0$ стремятся к бесконечности, т.е. полученные формулы неприменимы к ядру дислокации. ●

Постоянную A определим из условия (1). Пользуясь **законом Гука** и находя соответствующие составляющие вектора смещения, получим постоянную A в виде

$$A = \frac{\mu |\mathbf{b}|}{2\pi(1-\eta)}. \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что постоянная A положительна, так как **коэффициент Пуассона** $\eta < 1$. Из формулы (7) следует, что компонента

$T_{11} > 0$ при $x_2 < 0$, т.е. наблюдается растяжение в направлении сдвига. Компонента $T_{11} < 0$ при $x_2 > 0$, что говорит о сжатии лишней атомной полуплоскости (см. рис. 12). Аналогичный анализ относительно компоненты T_{22} показывает, что происходит сжатие лишней атомной плоскости в направлении обеих координатных осей под плоскостью скольжения, а над этой плоскостью наблюдается растяжение тела.

б) Винтовая дислокация. Пусть в изотропной упругой и безграничной среде имеется винтовая дислокация с вектором Бюргерса, расположенным вдоль оси аппликат. В этом случае компоненты вектора смещений в плоскости, перпендикулярной к линии дислокации, равны нулю $u_1 = u_2 = 0$, а компонента u_3 не зависит от координаты x_3 . Уравнение равновесия принимает для тензора деформаций вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Решение этого уравнения должно быть таким, чтобы при приращении угла φ (в цилиндрической системе координат) на 2π сопровождалось бы приращением смещения компоненты u_3 на величину, равную длине вектора Бюргерса. Очевидным решением является

$$u_3 = b \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{b}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{r};$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{b}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Следовательно, возникающие напряжения будут описываться формулами

$$\tau_{13} = \tau_{31} = -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r};$$

$$\tau_{23} = \tau_{32} = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r}.$$

В цилиндрической системе координат отличными от нуля будут компоненты тензора напряжений $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \frac{\mu b}{2\pi r}$. Полученные соотношения

показывают, что в твёрдых телах, содержащих *винтовую дислокацию*, нет скальвающих напряжений, т.е. происходит чистый сдвиг. При этом деформация не сопровождается изменением объёмов отдельных

участков тела, так как отсутствуют нормальные составляющие тензора деформаций.

80.3. Упрочнение металлов

Существование *дислокаций* в металлах установлено надёжными экспериментальными исследованиями. Установлено, что пластическая деформация связана с движениями дефектов кристаллической решётки и, в первую очередь, *дислокаций*. Вопрос о подвижности *дислокаций* в тех или иных металлах напрямую связан с тем, какие напряжения могут выдержать эти материалы без протекания в них пластических деформаций, что приводит к потере прочности металлических конструкций в результате механической усталости металла. Если приложенное напряжение вызывает движение дислокации, то необходимо выявить причины, которые обуславливают торможение перемещения *дислокаций*, что, в свою очередь, затрудняет распространение скалывающих напряжений.

Если рассмотреть движение *дислокации* с термодинамической точки зрения, то в процессе движения *дислокация* испытывает эффективное сопротивление со стороны атомов, образующих нижний ряд, что приводит к рассеиванию энергии *дислокации* на этой атомарной подкладке. Это означает, что в областях кристалла, где наблюдается всестороннее сжатие, температура элементарного объёма повышается, а в случае растяжения – понижается. Вследствие чего возникают тепловые потоки, стремящиеся выровнять температуру тела и увеличить энтропию системы.

Кроме того, существование различных *дислокаций* может приводить к их взаимному уничтожению (аннигиляции). Торможению *дислокации* способствует взаимодействие собственных колебаний кристаллической решётки (*фононов*) с *дислокацией*, которые либо рассеиваются на *дислокации*, либо заставляют её колебаться. Наличие в кристаллической решётке иных дефектов (например, вакансий или границ зёрен), чем *дислокации*, и указанные выше процессы торможения могут привести к созданию определённой конфигурации распределения *дислокаций* (*дислокационная решётка*) и *дислокационных структур* в металле. Это приводит к накоплению *дислокаций* в плоскости скольжения. Силы, действующие между такими *дислокациями* носят чисто отталкивательный характер, что приводит к препятствованию проникновения новых *дислокаций* в плоскость скольжения.

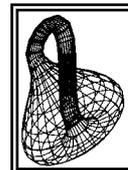
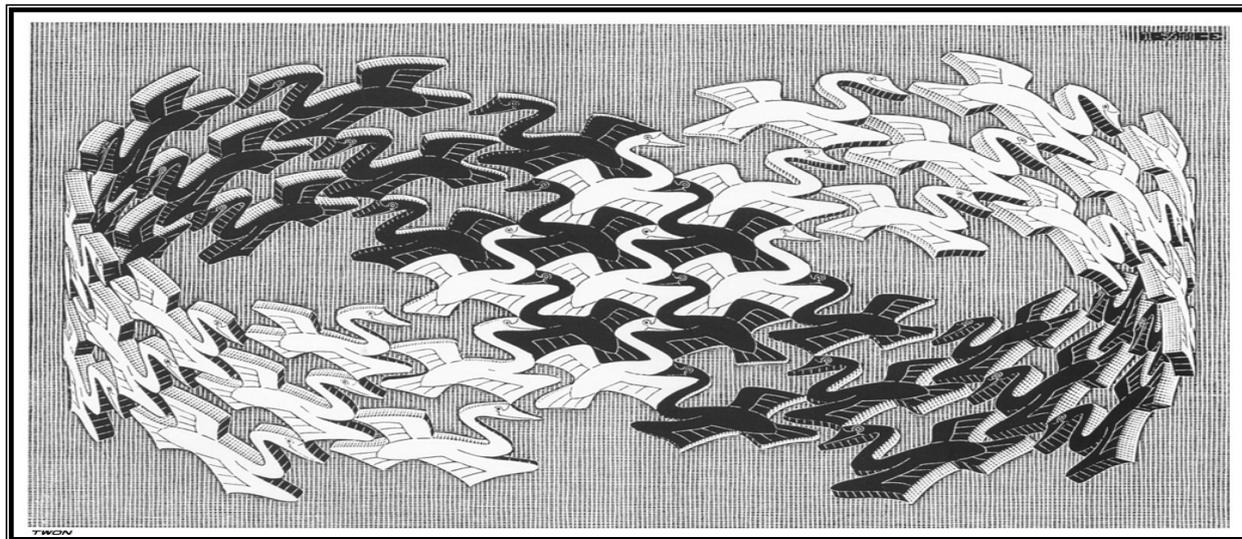
Повышение температуры металла приводит к рассасыванию *дислокационных скоплений* (термический отжиг металлов, приводящий к

снижению напряжений в металле), что приводит к явлениям деформационного упрочнения металлов. Обработка металла давлением также создаёт в металле дополнительные дефекты, сильно нарушающие правильное строение кристаллической решётки, что также приводит к торможению движения *дислокаций*.

Одним из способов упрочнения металлов является создание идеальных кристаллов без дефектов, *дислокаций* и зёрен. Зарождение *дислокаций* в таком идеальном кристалле затруднено отсутствием источников *дислокаций*. *Идеальные бездислокационные кристаллы* характеризуются высокой прочностью, так как область упругих деформаций значительно возрастает.

Таким образом, можно выделить два взаимно дополняющих способа упрочнения металла: либо создавать идеальные *бездислокационные кристаллы*, либо создавать в реальных металлах огромное число *дислокаций* с плотностью порядка $10^{11} \dots 10^{12} \frac{\text{шт}}{\text{см}^2}$. Отметим, что обычные чистые, хорошо оттожённые металлические кристаллы содержат *дислокации* с плотностью порядка $10^7 \frac{\text{шт}}{\text{см}^2}$ и поэтому обладают малой прочностью.

В заключение отметим, что *дислокационная теория пластичности* металлов широко используется при изучении влияния температуры на прочность металлов (в частности, жаропрочность металлов), поведения *дислокаций* в металлах и многих других областях, в которых *дислокации* определяют пластические свойства металлов.



ТФІ

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 1**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путём поворота на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси ординат.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную и антисимметричную* части тензора $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения и главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный, квадратичный и кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора и шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную и касательную составляющие*.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-3} ((x - y + 2z)\mathbf{i} + (3x - 2z)\mathbf{j} + (2x - y)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения
Тензорная алгебра
Вариант 2

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путём поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси ординат.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную* и *антисимметричную* части тензора $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения* и *главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный*, *квадратичный* и *кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора* и *шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную* и *касательную* составляющие.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-2} ((2x - 3y)\mathbf{i} + (x - y - 2z)\mathbf{j} + (-2y + z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 3**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси аппликат.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в *новой системе координат* п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную* и *антисимметричную* части тензора $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения* и *главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный, квадратичный* и *кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора* и *шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную* и *касательную* составляющие.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-4} ((x - y + z)\mathbf{i} + (x + 4z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 4**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси абсцисс.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную и антисимметричную части тензора* $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения и главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный, квадратичный и кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора и шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную и касательную составляющие*.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-3} ((3x - 4y)\mathbf{i} + (2y + 5z)\mathbf{j} + (-y + 2z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 5**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси ординат.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную* и *антисимметричную* части тензора $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения* и *главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный*, *квадратичный* и *кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора* и *шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную* и *касательную* составляющие.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-4}((-x-y+z)\mathbf{i} + (2x-3y+z)\mathbf{j} + (x-8y+z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 6**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси аппликат.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную и антисимметричную* части тензора $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения и главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный, квадратичный и кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора и шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную и касательную составляющие*.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-2} ((5x - 2z)\mathbf{i} + (7x - y)\mathbf{j} + (2x + 3y - z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 7**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси абсцисс.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную и антисимметричную части тензора* $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения и главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный, квадратичный и кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора и шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную и касательную составляющие*.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-3} ((-x+2y-3z)\mathbf{i} + (x-5y+2z)\mathbf{j} + (x-y+3z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 8**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{5\pi}{6}$ вокруг оси ординат.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную* и *антисимметричную* части тензора $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения* и *главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный*, *квадратичный* и *кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора* и *шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную* и *касательную* составляющие.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-4} ((4x - y + 6z)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j} + (-y + z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 9**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси аппликат.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную* и *антисимметричную* части тензора $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения* и *главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный*, *квадратичный* и *кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора* и *шарового тензора*.

9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную* и *касательную* составляющие.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-2} ((7x - 3y + z)\mathbf{i} + (x + 4y)\mathbf{j} + (x - 2y + 3z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Задания для самостоятельного решения

Тензорная алгебра**Вариант 10**

1. Найти *матрицу преобразования*, если новая система координат получена из старой путем поворота на угол $\frac{3\pi}{4}$ вокруг оси абсцисс.

2. Найти *координаты вектора* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ в новой системе координат п.1. Вычислить длину данного вектора в старой и новой системах координат.

3. Выделить *симметричную и антисимметричную части тензора* $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и найти его *свёртку*.

4. Найти *внешнее произведение* вектора $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ и вектора $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Найти *главные значения и главные векторы* симметричного тензора ранга 2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти *главный декартов базис* для тензора п. 5 и записать тензор в этом базисе.

7. Вычислить *линейный, квадратичный и кубический инварианты* симметричного тензора второго ранга $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

8. Представить тензор п.7 в виде суммы *девиатора и шарового тензора*.

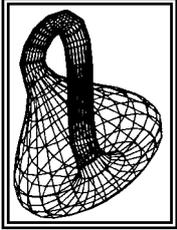
9. Состояние среды задаётся *тензором напряжений*: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Какие действия произведены над средой? Найти векторы $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_1)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_2)}$, $\bar{\varphi}^{(\bar{n}_3)}$.

10. Найти *вектор напряжений* для случая, описанного в п.7, на площадке с нормальным вектором $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также его *нормальную и касательную составляющие*.

11. Найти *тензор деформаций*, если поле смещений определяется выражением $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 10^{-4} ((-5y + 2z)\mathbf{i} + (2x + 6y - z)\mathbf{j} + (2y - z)\mathbf{k})$, определить *тип деформаций* и вычислить *объёмную деформацию*.

Список использованных источников

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Вища школа. – 1986. – 216 с.
2. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – Москва: Наука. – 1978. – 296 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – Москва: Наука. – 1979. – 760 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, Т. VII. Теория упругости. – Москва: Наука. – 1987. – 248 с.
5. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. – Москва: МГУ. – 1974. – 206 с.
6. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1958. – 134 с.
7. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – Москва: Наука. – 1979. – 744 с.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. II. – Москва: Наука. – 1976. – 576 с.
9. Смирнов А.А. Молекулярно-кинетическая теория металлов. – Москва: Наука. – 1966. – 488 с.
10. Сокольников И.С. Тензорный анализ (с приложениями к геометрии и механике сплошных сред) – Москва: Наука. – 1971. – 376 с.
11. Фомин В.Л. Механика континуума для инженеров. – Ленинград: ЛГУ. – 1975. – 116 с.
12. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1956. – 407 с.
13. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.1. Инструментарий (методика решения задач). – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 540 с.
14. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.



ТФ. Тензорная алгебра.
Уравнения математической физики.

Тема: Уравнения математической физики

81. “Экстремумы функционалов”

81.1. Функционал

Функциональные методы широко используются в теории поля, модели случайных блужданий, статистической радиофизике, термодинамике, при имитации процессов эволюционной перестройки систем, а также при решении других физических и прикладных задач. В предыдущих задачах *функционал* использовался без определения, выяснения условий существования и свойств. Например, *функционалом* является длина линии

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Функционалом называется закон, по которому каждой функции из определённого множества M , ставится в соответствие число.

● Число, которому ставится в соответствие некоторая функция, может быть вещественным, комплексным, кватернионным и т.д. ●

Функции, принадлежащие множеству M , называются **функциями (линиями) сравнения**.

Предметом теории вариационного исчисления является определение свойств функционалов и условий, при которых функционал достигает экстремума. Одна из первых вариационных задач о *брахистохроне (линии наискорейшего спуска)* была решена Бернулли в 1696 г. Пусть в вертикальной плоскости даны точки O и A , требуется определить такую траекторию, по которой тело T скатится из O в A за минимальное время, причём начальная скорость и сопротивление движению считаются равными нулю (рис. 1):

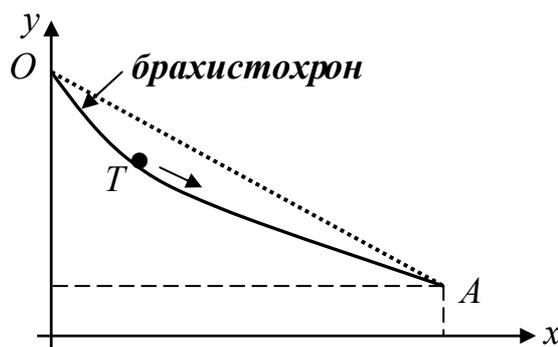


Рис. 1. *Линия наискорейшего спуска.*

Первая мысль при решении этой задачи: такой линией является прямая OA и думать нечего. Однако ответ на поставленный вопрос не столь очевиден. При движении тела T выполняется закон сохранения энергии, т.е. его потенциальная энергия $\Pi = mg(y_0 - y)$ (m – масса тела, $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ – ускорение свободного падения) переходит в кинетическую энергию, определяемую формулой $K = \frac{mv^2}{2}$ (v – скорость движения). Это означает, что при движении точки $\frac{mv^2}{2} = mg(y_0 - y)$. Отсюда находим $v = \sqrt{2mg(y_0 - y)}$. Горизонтальная составляющая скорости равна

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} v = \frac{1}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}} v.$$

Выразим из этого равенства изменение времени:

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dx.$$

Полное время скатывания равно

$$T = \min_t \left(\int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} dx \right).$$

Следовательно, из всех функций $y(x)$ надо выбрать такую, чтобы время T было *наименьшим*. Данная задача является типичной представительницей тех задач, решением которых занимается *вариационное исчисление*.

В таких задачах отыскивается экстремум некоторого функционала. Аналогичные задачи решались для функций одной и многих переменных в предыдущих разделах: для функции одной переменной экстремум достигался при определённом числе, а для функции нескольких переменных – при наборе чисел. В рассмотренной задаче экстремум достигается при использовании определённой функции, через значения которой и достигается искомый экстремум. Поэтому для задач вариационного исчисления характерна следующая методическая *схема*:

– устанавливается зависимость некоторого скалярного параметра $I(y)$ от неизвестной функции $y(x)$, которая удовлетворяет тем или иным условиям;

– отыскивается экстремум функционала на заданном множестве функций.

○ Если функционал $I(y)$ достигает минимума (максимума) при $\bar{y}(x)$, то его приращение $\Delta I = I(y) - I(\bar{y})$ положительно (отрицательно). ○

Окрестностью нулевого порядка (сильной) функции $\bar{y}(x)$ называется множество непрерывных кусочно-гладких функций сравнения $y(x)$ таких, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε выполняется неравенство $|y(x) - \bar{y}(x)| < \varepsilon$ при $x \in [x_1; x_2]$.

Окрестностью первого порядка (слабой) функции $\bar{y}(x)$ называется множество непрерывных кусочно-гладких функций сравнения $y(x)$ таких, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε выполняется неравенство $|y(x) - \bar{y}(x)| + |y'(x) - \bar{y}'(x)| < \varepsilon$ при $x \in [x_1; x_2]$.

Экстремум функционала $I(y)$, который достигается на функции $\bar{y}(x)$ в её *сильной (слабой)* окрестности называется **сильным (слабым) экстремумом**.

Экстремум функционала $I(y)$, который определяется по всему множеству M , называется **абсолютным экстремумом**.

○ При постановке вариационной задачи необходимо указывать, *какого типа экстремум разыскивается и на каком множестве функций*. При этом подразумевается существование и непрерывность подинтегральной функции и её производных. ○

81.2. Первая и вторая вариации функционала

Одной из простейших задач вариационного исчисления является задача об отыскании минимума функционала $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x; y; y') dx$ на множестве кусочно-гладких функций, которые описывают линии с концевыми точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Предположим, что функция $y(x)$ зависит от параметра α , с помощью которого можно описать окрестность первого порядка функции $y(x)$. В этом случае функционал $I(y)$ рассматривается как функция параметра α , т.е.

$$I(y; \alpha) = \Phi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(x; y(x; \alpha); y'(x; \alpha)) dx.$$

Дифференциал функции $I(y; \alpha) = \Phi(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$ называется **первой вариацией функционала** $I(y; \alpha)$ и обозначается $\delta I(y; \alpha)$, т.е.

$$\delta I(y; \alpha) = \left. \frac{d\Phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha,$$

где учтено, что $d\alpha = \Delta\alpha = \alpha - 0 = \alpha$.

Второй дифференциал функции $I(y; \alpha) = \Phi(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$ называется **второй вариацией функционала** $I(y; \alpha)$ и обозначается $\delta^2 I(y; \alpha)$,

т.е.
$$\delta^2 I(y; \alpha) = \left. \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} \alpha^2.$$

Частный дифференциал функции $y(x; \alpha)$ по параметру α при $\alpha = 0$ называется **вариацией функции** и обозначается через

$$\delta y(x; \alpha) = \left. \frac{\partial y(x; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha.$$

Аналогично определяется вариация производной от подинтегральной функции.

Необходимые условия существования любого из определённых выше экстремумов определяются уравнениями:
$$\begin{cases} \delta I = 0 \\ \delta^2 I \geq 0 \end{cases} - \text{минимум};$$

$$\begin{cases} \delta I = 0 \\ \delta^2 I \leq 0 \end{cases} - \text{максимум}.$$
 Для данного функционала первая и вторая вариации равны

$$\delta I(y; \alpha) = \int_{x_1}^{x_2} [F'_{y'}(x; y; y') \delta y + F'_{y''}(x; y; y') \delta y'] dx;$$

$$\delta^2 I(y; \alpha) = \int_{x_1}^{x_2} [F''_{yy} (\delta y)^2 + 2 F''_{yy'} \delta y \delta y' + F''_{y'y'} (\delta y')^2] dx,$$

при жёсткой фиксации точек, которые определяют пределы интегрирования, вариация искомой функции равна нулю, т.е.

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0.$$

Применим ко второму слагаемому в первой вариации функционала метод интегрирования по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} F'_{y'} \delta y' dx = \left. \begin{array}{l} U = \frac{\partial F}{\partial y'} \quad dV = \delta y' dx \\ dU = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx \quad V = \delta y \end{array} \right| = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx =$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx.$$

Следовательно, первую вариацию функционала можно переписать в

виде, который впервые получил Эйлер:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \, dx.$$

81.3. Уравнение Эйлера-Лагранжа

Обращение первой вариации функционала в нуль является *необходимым*, но не достаточным условием существования экстремума функционала и происходит при выполнении равенства

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Это уравнение впервые было установлено Эйлером в 1744 г. и независимо получено Лагранжем в 1759 г.

Уравнение $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Пример 1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой

m , если подинтегральная функция $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - U(x)$.

В этом примере функционал $S = \int_{t_1}^{t_2} L(t; x; \dot{x}) \, dx = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right] dt$.

Функция $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - U(x)$ называется лагранжианом, функционал $S = \int_{t_1}^{t_2} L(t; x; \dot{x}) \, dx = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \right] dt$ – действием, а поиск экстремума функционала – принципом наименьшего действия Гамильтона.

Для получения уравнения движения материальной точки воспользуемся уравнением Эйлера-Лагранжа, для чего вычислим первые частные производные от лагранжиана:

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$; $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F$. Про-

изведение массы тела на его скорость движения $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p$ называется

импульсом; частная производная от потенциальной энергии по пространственной переменной, взятая со знаком “–”

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F,$$

называется силой. Согласно уравнению Эйлера-Лагранжа: $m\ddot{x} = F$.

Уравнение движения $m\ddot{x} = F$ называется **вторым законом Ньютона**.

Линия, на которой функционал достигает экстремума, называется **экстремалью**.

○ Функция, определяющая уравнение экстремали, является решением **уравнения Эйлера-Лагранжа**. Отметим также, что экстремаль остаётся экстремалью при любом выборе системы координат, т.е. является инвариантной кривой относительно выбора системы координат. ○

Для функции двух переменных $z = f(x; y)$ вариационная задача ставится об отыскании экстремального значения у функционала

$$I = \iint_D F(x; y; z; z'_x; z'_y) dx dy,$$

где D – область интегрирования с границей Γ_D , при условии на границе $\Gamma_D: z|_{\Gamma_D} = \phi(x; y)$. В этом случае **уравнение Эйлера-Лагранжа** имеет

вид:
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial z'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z'_y} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$
 Это уравнение приводит к дифферен-

циальным уравнениям с частными производными, которые изучаются *математической физикой*.

82. “Уравнения математической физики”

82.1. Уравнения в частных производных

В общем случае **уравнение Эйлера-Лагранжа** для функции двух переменных имеет вид:

$$A_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + A_4 \frac{\partial f}{\partial x} + A_5 \frac{\partial f}{\partial y} + A_6 f + A_7 = 0,$$

где $A_i = A_i(x; y)$ – известные функции двух переменных. Это уравнение можно переписать в виде

$$A_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F \left(x; y; f; \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

В зависимости от знака величины $D = A_2^2 - A_1 A_3$ уравнения математической физики разделяются на три типа: 1) $D < 0$ – эллиптический; 2) $D = 0$ – параболический; 3) $D > 0$ – гиперболический. Рассмотрим уравнения, в которых коэффициент $A_7 = 0$, а остальные коэффициенты A_i ($i = 1..6$) – *постоянны*. Выполним линейное преобразование операторов

$$\frac{\partial}{\partial x} = a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial}{\partial X} + a_3 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} = b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial}{\partial X} + b_3,$$

причём коэффициенты a_i и b_i ($i=1\dots3$) выберем так, чтобы уравнение приняло вид:

$$B_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + B_3 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + B_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

где коэффициенты уравнения

$$B_1 = a_1^2 A_1 + 2a_1 b_1 A_2 + b_1^2 A_3; \quad B_2 = 2(a_1 a_2 A_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) A_2 + b_1 b_2 A_3) = 0;$$

$$B_3 = a_2^2 A_1 + 2a_2 b_2 A_2 + b_2^2 A_3; \quad B_4 = 2(a_1 a_3 A_1 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) A_2 + b_1 b_3 A_3) + a_1 A_4 + b_1 A_5;$$

$$B_5 = 2(a_2 a_3 A_1 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) A_2 + b_2 b_3 A_3) + a_2 A_4 + b_2 A_5 = 0;$$

$$B_6 = a_3^2 A_1 + 2a_3 b_3 A_2 + b_3^2 A_3 + A_6 = 0.$$

Если $B_1 > 0$ ($B_1 < 0$), $B_3 = c^2 B_1$ и $B_4 = 0$, уравнение приводится к уравнению *эллиптического* вида:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0.$$

При $c^2 = 1$ это уравнение переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0.$$

Если при этом коэффициент $A_7 \neq 0$, то получаем уравнение Пуассона

$$\Delta f = -A_7(t; X).$$

Если $B_1 > 0$ ($B_1 < 0$), $B_3 = -c^2 B_1$ и $B_4 = 0$, уравнение приводится к уравнению *гиперболического* вида (**волновое уравнение**):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0.$$

Если $B_1 = 0$, $B_4 \neq 0$ и $B_3 = \pm \lambda B_4$, уравнение преобразуется к уравнению *параболического* вида (**уравнение диффузии** (теплопроводности) **с постоянным кинетическим коэффициентом**):

$$\frac{\partial f}{\partial t} \pm \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0.$$

Совокупность начальных и граничных ограничений, накладываемых на искомую функцию, называется **краевыми условиями**.

В качестве **начальных условий** задают, например, первоначальный профиль функции $f(0; X) = \varphi(X)$ и скорости $\frac{\partial f(0; X)}{\partial t} = \psi(X)$. Среди

граничных условий выделяют три типа:

а) *первый тип*: задаётся закон изменения функции на границах, напри-

$$\text{мер, } \begin{cases} f(t; 0) = \mu_1(t) \\ f(t; l) = \nu_1(t) \end{cases};$$

б) *второй тип*: задаётся закон изменения внешнего воздействия (или

$$\text{скорости изменения состояния) на границах, например, } \begin{cases} \frac{\partial f(t; 0)}{\partial X} = \mu_2(t) \\ \frac{\partial f(t; l)}{\partial X} = \nu_2(t) \end{cases};$$

в) *третий тип*: задаётся закон компенсации внешнего воздействия дополнительными силами (или скорости изменения состояния) на границах, например,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t; 0)}{\partial X} + h f(t; 0) = \mu_3(t) \\ \frac{\partial f(t; l)}{\partial X} + h f(t; l) = \nu_3(t) \end{cases}.$$

○ В случае функции нескольких переменных краевые условия для точки $M(\bar{X})$ ($\bar{X} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ – n -мерный вектор положения точки), лежащей на границе Γ , записываются в виде:

а) $f(t; M)|_{M \in \Gamma} = \varphi(t; M);$

б) $\frac{\partial f(t; M)}{\partial X} \Big|_{M \in \Gamma} = \psi(t; M);$

в) $\left(\frac{\partial f(t; M)}{\partial X} + h f(t; M) \right) \Big|_{M \in \Gamma} = \xi(t; M). \quad \bullet$

○ Все указанные типы краевых условий можно записать одним соотношением:

$$\boxed{\left(\gamma_1(M) \frac{\partial f(t; M)}{\partial X} + \gamma_2(M) f(t; M) \right) \Big|_{M \in \Gamma} = \beta(t; M)};$$

– при $\gamma_1(M) \equiv 0$ получаем краевые условия *первого типа*;

– при $\gamma_2(M) \equiv 0$ – краевые условия *второго типа*;

– при $\gamma_1(M) \neq 0$ и $\gamma_2(M) \neq 0$ – краевые условия *третьего типа*. ○

Таким образом, *постановка физико-математической задачи* сводится к установлению *уравнения*, описывающего физический процесс, и *краевых условий*, которым подчиняется искомая функция.

Физико-математические задачи с первым, вторым и третьим типами краевых условий называются *первой*, *второй* и *третьей краевой задачами*, соответственно.

В задачах, описывающих реальные физические процессы или яв-

ления, в качестве *краевых условий* зачастую принимают результаты эксперимента. Известно, что экспериментальные данные всегда получают с определённой погрешностью, которая сказывается на решении используемого уравнения. Малые изменения *краевых условий* приводят к малым изменениям искомой функции, т.е. решение физико-математической задачи непрерывно зависит от исходных данных. Следовательно, требуется дополнительное исследование устойчивости решения по отношению к малым изменениям *граничных и начальных условий*. Этот вопрос будет рассмотрен при изучении методов решения тех или иных задач.

81.2. Колебания струны

Упругая нить, которая может изгибаться, но не растягиваться, называется *струной*.

С математической точки зрения изгибу струны длиной l соответствует возникновение в упругой нити напряжений, которые всегда направлены по касательной к профилю струны (рис. 2).

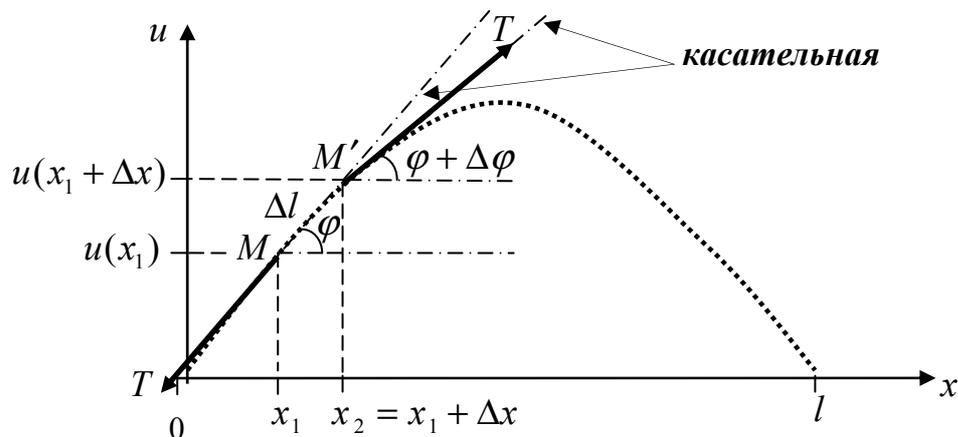


Рис. 2. Изгиб струны.

Пусть движение произвольной точки M упругой струны происходит в плоскости xOy в направлении, перпендикулярном к оси Ox . Её смещение из положения равновесия будем описывать функцией отклонения $u(t; x)$. Будем рассматривать достаточно малые отклонения

$$u(x_1 + \Delta x) - u(x_1) \ll u(x_1),$$

при этом выполняется приближённое равенство $\Delta l \cong \Delta x$, и натяжение струны (сила T) во всех точках струны одинаково. Это означает, что к элементу струны MM' по касательным к струне приложены равные силы T . Пусть касательная к струне в точке M образует с положитель-

ным направлением оси Ox угол φ , а в точке M' – угол $\varphi + \Delta\varphi$. Проекция на ось Ou сил, которые действуют на малый элемент струны MM' , равна $T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi$. Так как смещения точек струны малы, то и угол φ также мал. Следовательно, используя эквивалентность бесконечно малых функций (см. **14**), можно записать, что $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial u(t; x)}{\partial t}$.

Тогда проекция на ось Ou сил, приложенных к элементу MM' , примет вид:

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi \approx T \left[\frac{\partial u(t; x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t; x)}{\partial x} \right] = T \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx.$$

Обозначим, через $f(t; x)$ внешнюю силу, которая действует на струну в положительном направлении оси Ou , вызывает её изгиб и рассчитана на единицу длины. Её проекция на эту ось равна $\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t; x) dx$. При ма-

лых колебаниях струны в воздухе сила сопротивления среды прямо пропорциональна скорости движения, тогда её проекция на ось Ou запишется в виде

$- 2k \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] dx$, где параметр k – коэффициент сопротивления воздуха. Согласно **второму закону Ньютона**, равнодействующая всех сил, приложенных к элементу MM' , равна

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \rho(x) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx,$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность. Таким образом, можно записать

$$\int_x^{x + \Delta x} \left[T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t; x) - 2k \frac{\partial u}{\partial t} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx = 0.$$

В силу произвольности точки x_1 подинтегральная функция равна нулю в произвольно выбранной точке струны. При постоянной линейной плотности упругой нити уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t; x),$$

где коэффициенты $h = \frac{k}{\rho}$, $a^2 = \frac{T}{\rho}$ ($a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – скорость распространения

волны) и $q(t; x) = \frac{f(t; x)}{\rho}$. При отсутствии внешних сил ($q(t; x) = 0$) и

сопротивления среды ($h = 0$) уравнение принимает вид уравнения, которое описывает *свободные колебания струны*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Так как концы струны жёстко закреплены, то в качестве *граничных условий* выбираем $\begin{cases} u(t;0) = 0 \\ u(t;l) = 0 \end{cases}$ (*краевая задача первого типа*), а в качестве *начальных условий* – первоначальный профиль $u(0;x) = \psi(x)$ и скорость $\frac{\partial u(0;x)}{\partial t} = \sigma(x)$.

82.3. Уравнение диффузии (теплопроводности)

Процесс *диффузионного перемещения частиц* впервые был описан **Фиком** в предположении, что *частицы находятся в совершенно беспорядочном тепловом движении и не взаимодействуют между собой*. Рассмотрим процесс диффузии в цилиндре (рис. 3) с постоянной площадью поперечного сечения S , ось которого расположена на оси абсцисс Ox , причём концентрация $c(t;x)$ вещества вдоль цилиндра неодинакова (неравномерное распределение, т.е. $c(t;0) > c(t;L)$) и отсутствуют источники и стоки для диффундирующего вещества (нет внешнего введения вещества в диффузионную зону, и отсутствуют внутренние химические реакции).

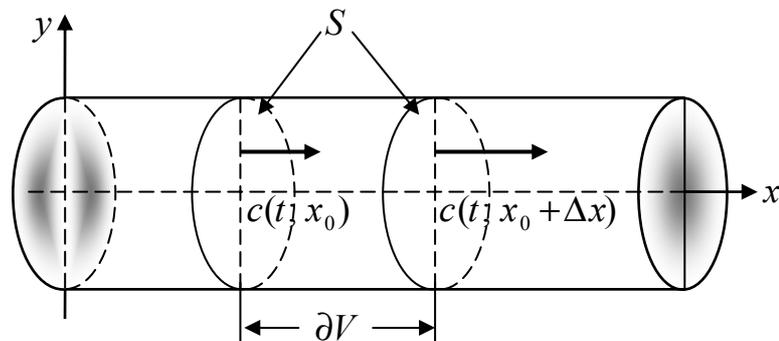


Рис. 3. Диффузия частиц в цилиндре.

Количество вещества, приходящееся на единицу объёма исследуемой системы, называется *объёмной концентрацией*, т.е. $c = \frac{dN}{dV}$, где dN – число частиц в элементе объёма dV .

Нетрудно показать (см. рассуждения предыдущего пункта), что поток вещества при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$ пропорционален площади поперечного сечения S и скорости изменения концентра-

ции $\frac{\partial c(t; x)}{\partial x}$ вдоль оси Ox , т.е. $J = -DS \frac{\partial c(t; x)}{\partial x}$, где D – коэффициент пропорциональности.

Равенство $J = -DS \frac{\partial c(t; x)}{\partial x}$ называется **первым законом Фика**, а D – **коэффициентом диффузии**.

Будем считать коэффициент диффузии D постоянной величиной. Следовательно, скорость изменения массы вещества в объёме dV за промежуток времени Δt , с одной стороны, равна разности изменений массы на выходе и входе области $dV = Sdx : \Delta m_{x_0+\Delta x} - \Delta m_{x_0}$, а с другой стороны, – разности потоков вещества, т.е. его изменению $\frac{\partial J}{\partial x} Sdx \Delta t$. Приравнявая эти величины и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим с учётом определения концентрации уравнение диффузии

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2},$$

здесь $j = \frac{J}{S}$ *поверхностная плотность потока*.

Уравнение $\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}$ называется **вторым законом Фика** или **уравнением диффузии**.

В трёхмерном пространстве уравнение диффузии при отсутствии источников и стоков имеет вид $\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$, а при их наличии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = \sigma,$$

где функция σ описывает производство или уничтожение вещества в **диффузионной зоне**.

Аналогичные рассуждения привели **Фурье** к **уравнению теплопроводности** $\frac{\partial T(t; x)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T(t; x)}{\partial x^2}$, где χ – коэффициент теплопроводности среды.

82.4. Локальное уравнение баланса

Уравнения *диффузии* и *теплопроводности* являются частными случаями локального уравнения баланса той или иной физической величины A . Пусть исследуемый объём V покоится в выбранной лабо-

раторной системе отсчёта. Обозначим через $a = \frac{dA}{dV}$ удельное значение величины A . Если измеряемая характеристика A распределена в материале с плотностью ρ , то $A = \iiint_V \rho a dV$. Её изменение с течением времени обусловлено двумя причинами:

- 1) разностью потоков величины A из и вовнутрь объёма V через поверхность S ;
- 2) наличием внутри объёма V источников и стоков с плотностью σ .

Первый процесс математически описывается с помощью поверхностного интеграла

$$\boxed{-\iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV},$$

а второе физическое явление определяется объёмным интегралом

$$\boxed{\iiint_V \sigma dV}.$$

Таким образом, локальное уравнение баланса принимает вид:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial(\rho a)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} - \sigma \right] dV = 0$$

или

$$\boxed{\frac{\partial(\rho a)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = \sigma}.$$

Если плотность материала постоянна и отсутствуют источники и стоки вещества, то уравнение локального баланса принимает вид локального закона сохранения величины A :

$$\boxed{\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I} = 0}.$$

Например, закон сохранения заряда e имеет вид:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I} = 0},$$

где \mathbf{I} – локальная плотность тока, вызванного движением электрических зарядов со скоростью \mathbf{v} . Эта величина связана с плотностью тока проводимости \mathbf{i} равенством $\mathbf{i} = \mathbf{I} - \rho e \mathbf{v}$. Уравнения баланса той или иной физической величины описывают законы её изменения или движения. Например, локальный баланс импульса для невязкой (идеальной) среды с постоянной плотностью жидкости ρ приводит к гидродинамическому уравнению движения Эйлера

$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \rho \mathbf{f}$, где p – давление, \mathbf{f} – объёмная плотность внешних сил.

83. “Методы решения уравнений математической физики”**83.1. Метод бегущих волн**

Рассмотрим основные методы решения уравнений в частных производных различных видов.

Пример 1. Сформулировать физико-математическую задачу о свободных колебаниях бесконечной струны.

В этом случае граничные условия несущественны и задача принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = \psi(x) \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = \sigma(x) \end{cases}.$$

Такая постановка задачи называется **задачей Коши-Даламбера**. Для нахождения общего решения задачи вводят новые переменные $x = \frac{\eta + \xi}{2}$ и $t = \frac{\eta - \xi}{2a}$ (или $\xi = x - at$ и $\eta = x + at$).

Способ решения уравнений математической физики с помощью перехода к новым переменным $\xi = \xi(t, x)$ и $\eta = \eta(t, x)$ называется **методом характеристик**.

В новых переменных уравнение свободных колебаний струны принимает вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Перепишем это уравнение следующим образом

$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$. Отсюда находим, что $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(\eta)$, здесь $g(\eta)$ – произвольная функция одного аргумента η . Интегрируя полученное уравнение, найдём $u = \int g(\eta) d\eta + s(\xi) = w(\eta) + s(\xi)$, где $s(\xi)$ – произвольная функция одного аргумента ξ . Таким образом, искомая функция

$$u = w(x + at) + s(x - at).$$

Использование начальных условий позволяет найти

$$u(0; x) = w(x) + s(x) = \psi(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = a w'(x) - a s'(x) = \sigma(x).$$

Из последнего равенства находим, что

$$w(x) - s(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \sigma(\alpha) d\alpha + C.$$

Отсюда получаем **формулу Даламбера**:

$$u(t; x) = \frac{w(x+at) + s(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sigma(\alpha) d\alpha.$$

Полученное решение уравнения свободных колебаний бесконечной струны представлено в виде суммы двух функций $w(x+at)$ и $s(x-at)$. Пусть $w(x+at) = 0$ и аргументы изменяются так, что $x-at = C$, т.е. смещение описывается функцией $u = s(C)$. Следовательно, $dx - a dt = 0$ или $\frac{dx}{dt} = a$. Это означает, что при движении точки x со скоростью a в положительном направлении оси Ox смещение струны описывается постоянной функцией $s(C)$. Такое движение называется **прямой бегущей волной**, в отличие от движения в обратном направлении оси Ox , которое называется **обратной бегущей волной** и описывается смещением $w(C)$ (**метод бегущих волн**).

83.2. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Пример 2. Найти решение уравнения свободных колебаний струны конечной длины **методом разделения переменных (методом Фурье)**.

Задача сводится к решению уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с граничными условиями

$\begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}$. Представим решение в виде произведения двух

функций, одна из которых $X(x)$ зависит только от аргумента x , а вторая $T(t)$ – только от аргумента t , т.е. $u(t; x) = T(t)X(x)$. Тогда уравнение свободных колебаний принимает вид $T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$. Разделив обе части равенства на величину $a^2 u(t; x) = a^2 T(t)X(x)$, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

где λ – число, так как левая часть первого равенства зависит только от t , а правая – от x . Таким образом, исходное уравнение сводится к системе обычных однородных дифференциальных уравнений второго

порядка $\begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0 \\ X'' + \lambda X = 0 \end{cases}$, при дополнительных условиях $X(0) = X(l) = 0$,

иначе при $T(t) \equiv 0$ смещение $u(t; x) \equiv 0$.

Задача, сводящаяся к отысканию значений параметра λ , при которых существуют ненулевые решения задачи

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

называется **задачей Штурма-Лиувилля**, нетривиальные решения – **собственными функциями**, а значения параметра λ – **собственными значениями**.

Несложно показать, что в случаях, когда параметр λ отрицателен, или равен нулю, нетривиальных решений у **задачи Штурма-Лиувилля** нет. При положительных значениях параметра λ общее решение задачи имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

При использовании граничных условий находим:
$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \\ X(l) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases}$$

Так как решение **задачи Штурма-Лиувилля** не может быть тривиальным, то $C_2 \neq 0$, тогда $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. Таким образом, $\sqrt{\lambda}l = \pi n$ ($n \in Z$) или

дискретные собственные значения равны $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$. Этим собственным значениям параметра λ отвечают собственные функции

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

(произвольная константа C_2 принята равной 1). Решение уравнения

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

проводится так же, как и уравнение для функции $X(x)$, следовательно, оно имеет аналогичный вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a t}{l}\right).$$

Решение задачи является суммой частных решений $u_n(t; x) = T_n(t) X_n(x)$, т.е.

$$u(t; x) = T(t) X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_n \cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a t}{l}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right\}.$$

При ненулевых начальных условиях $\begin{cases} u(0; x) = \psi(x) \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = \sigma(x) \end{cases}$ функции $\psi(x)$ и

$\sigma(x)$ разлагаются в **ряды Фурье**, что позволяет найти константы A_n и B_n .

83.3. Метод автомодельной переменной

Метод автомодельной переменной возникает в том случае, когда одним аргументом удаётся заменить две независимых переменных, например, подстановка Больцмана $\zeta = \frac{x}{\sqrt{t}}$.

Пример 3. Найти решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}$$

при начальных условиях $\begin{cases} c(0; x > 0) = c_1 \\ c(0; x < 0) = c_2 \end{cases}$.

В данном примере распределение концентрации имеет вид, показанный на рис. 4 (там же отображено изменение концентрационного профиля с течением времени).

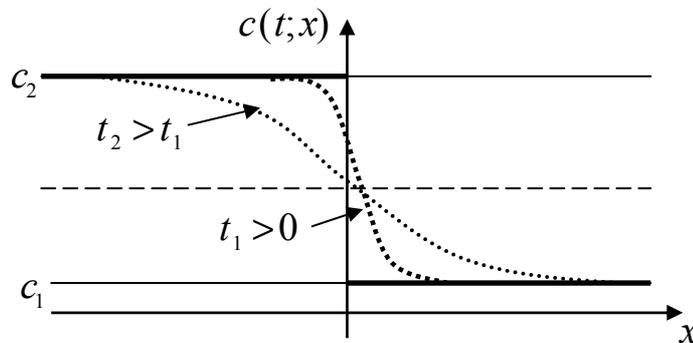


Рис. 4. Изменение диффузионного профиля с течением времени.

Такая картина наблюдается при исследовании диффузии в твёрдых образцах, которые приводятся в соприкосновение с идеально ровными поверхностями. Подставим автомодельную переменную в уравнение диффузии с учётом того, что

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = \frac{dc}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial c(t; x)}{\partial x} = \frac{dc}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2} = \frac{d^2 c}{d\zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{dc}{d\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Уравнение диффузии принимает вид:

$$\frac{dc}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = D \frac{d^2 c}{d\zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \frac{dc}{d\zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Применение автомодельного аргумента Больцмана приводит к тому, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\zeta}{t}; \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{t}; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$$

и уравнение диффузии превращается в уравнение:

$$\frac{dc}{d\zeta} \zeta = -2D \frac{d^2c}{d\zeta^2}$$

Представим первую производную в виде $\frac{dc}{d\zeta} = Ae^{-a\zeta^n}$, тогда вторая про-

изводная равна $\frac{d^2c}{d\zeta^2} = -Ana\zeta^{n-1} e^{-a\zeta^n}$. Уравнение диффузии имеет реше-

ние при $n=2$ и $a = \frac{D}{4}$. Это решение имеет вид: $c = A \int_0^\zeta e^{-\frac{v^2}{4D}} dv + B$. Ис-

пользование начальных условий приводит к окончательному виду

$$c = \frac{c_2 + c_1}{2} - \frac{c_2 - c_1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right),$$

где $\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi$ — интеграл ошибок.

83.4. Метод функции Грина

Функцией Грина $G(t; x - \xi)$ задачи Коши параболического типа называется решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, которое находится при начальном условии $u(0; x) = \delta(x - \xi)$, является непрерывным $\forall x \in R$ и $t \geq 0$, за исключением точки $(0; \xi)$.

Пример 4. Найти решение уравнения диффузии $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u(0; x) = \eta(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1; & x \geq 0 \end{cases}$.

Решение будем искать в классе автомодельных функций $u(t; x) = f\left(\frac{x}{t^\alpha}\right)$,

где α — показатель автомодельности. Полагая $z = \frac{x}{t^\alpha}$, перепишем урав-

нение параболического типа в виде: $-\frac{\alpha z}{t} \frac{df}{dz} = \frac{a^2}{t^{2\alpha}} \frac{d^2f}{dz^2}$. В силу того,

что записанное уравнение не должно зависеть от переменной t , необходимо положить $2\alpha = 1$ для сокращения переменной t , приходим к

подстановке Больцмана $\zeta = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{z}{2a^2} \frac{df}{dz} = 0.$$

Использование начальных условий даёт следующие ограничения на автомодельную функцию: $f(-\infty)=0$, $f(+\infty)=1$. Введём замену $\frac{df}{dz} = W$, тогда уравнение принимает вид дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными (п. 35.2, **35**): $\frac{dW}{dz} = -\frac{z}{2a^2} W$.

Интегрируя это уравнение, находим, что $W = C e^{-\frac{z^2}{4a^2}}$. Повторное интегрирование с учётом обозначения $\frac{df}{dz} = W$ приводит к выражению

$f(z) = 2aC \int_{-\infty}^{\frac{z}{2a}} e^{-\xi^2} d\xi$. Функция автоматически удовлетворяет первому начальному условию $f(-\infty)=0$ (проверить *самостоятельно*), из второго равенства ($f(+\infty)=1$) находим

$$1 = 2aC \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2aC\sqrt{\pi} \quad \text{или} \quad C = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}.$$

Решение исходной задачи принимает вид:

$$u(t; x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

или

$$u(t; x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2} d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

Эта функция удовлетворяет данному уравнению и имеет непрерывные производные, удовлетворяющие уравнению $a^2 u'''_{xxx} = u''_{xt}$, т.е. производная u'_x является решением исходного уравнения. Так как

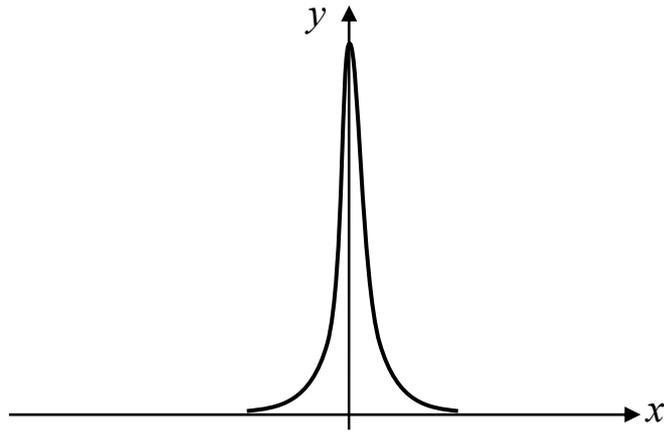
$$u'_x(0; x) = \eta'(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ -**функция Дирака** (её вид показан на рис. 5), то функция u'_x является

функцией Грина, т.е. $G(t; x-\xi) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$. Если начальные

условия задаются в виде $u(0; x) = \varphi(x)$, то решение уравнения параболического типа имеет вид:

$$u(t; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t; x-\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Рис. 5. δ (“дельта”)-функция Дирака.

Пример 5. Используя метод функции Грина, решить **Пример 3** (самостоятельно).

При наличии источников и стоков с плотностью $f(t; x)$ уравнение параболического типа имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t; x)$, а его решение записывается в виде $u(t; x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau; x - \xi) f(\tau; \xi) d\xi$.

84. “Специальные функции”

84.1. Обобщённые функции и поиск решений уравнений

А. δ -функция Дирака: δ -функция Дирака (см. рис. 5) является одной из специальных функций, которые возникают при решении уравнений математической физики. Эту функцию можно представить в виде интеграла Фурье:

$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} du$, при этом обратное преобразование

даёт $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) e^{-ixu} du = 1$. Другое определение функции Дирака задаётся словесным образом: функция равна бесконечности при $x=0$; равна нулю для всех остальных значений и выполняется равенство: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) du = 1$.

Приведём основные **свойства** δ -функции:

$$\delta(-x) = \delta(x); \quad \delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{\alpha}; \quad \delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(u - u_0) du = f(u_0);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta'(u - u_0) du = f'(u_0).$$

Б. Гамма-функция: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$, где аргумент x может быть и комплексным. *Гамма-функция* обладает **свойствами**:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \quad \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)(x+n)};$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}; \quad \Gamma(x=n+1, n \in \mathbb{N}) = n!; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

В. Функции Бесселя. Эти функции возникают при решении задачи о колебании круглой упругой пластины с закреплёнными краями, лежащими на окружности L , т.е. в момент времени $t=0$ пластина занимает плоскую область D с границей L . Колебания пластины описываются волновым уравнением с двумя пространственными переменными:

$$\frac{\partial^2 u(t; x; y)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t; x; y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t; x; y)}{\partial y^2},$$

при начальных условиях $\begin{cases} u(0; x; y) = \psi(x; y) \\ \frac{\partial u(0; x; y)}{\partial t} = \sigma(x; y) \end{cases} ((x; y) \in D)$ и граничном условии $u(t; x; y)|_{(x; y) \in L; t \geq 0} = 0$.

Уравнение $\frac{\partial^2 u(t; x; y)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t; x; y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t; x; y)}{\partial y^2}$ называется **метагармоническим**, а его решения – **метагармоническими функциями**.

Представим решение *метагармонического уравнения* в виде произведения двух функций $u(t; x; y) = v(x; y)w(t)$ и воспользуемся методом разделения переменных, тогда приходим к уравнениям:

$$\begin{cases} \Delta v(x; y) + \mu^2 v(x; y) = 0 \\ w''(t) + \mu^2 w(t) = 0 \end{cases},$$

где постоянная величина $\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{\Delta v(x; y)}{v(x; y)} = -\mu^2$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – **оператор**

Лапласа. Решением второго уравнения системы является периодическая функция $w(t) = A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)$ с периодом $T = \frac{2\pi}{\mu}$. Для решения

первого уравнения системы перепишем его в полярной системе координат с учётом того, что в этой системе координат **оператор Лапласа**

са имеет вид: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Применяя вновь метод разделения переменных для функции

$$v(\rho; \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi),$$

приходим к системе уравнений
$$\begin{cases} \rho^2 R'' + \rho R' + (\mu^2 \rho^2 - n^2)R = 0 \\ \Phi'' + n^2 \Phi = 0 \end{cases}$$
. Решение

второго уравнения системы рассмотрено выше, поэтому перейдём к решению первого уравнения полученной системы, произведя замены $\mu\rho = r$, $R(\rho) = R\left(\frac{r}{\mu}\right) = J(r)$ и переписав его в виде

$$r^2 J''(r) + rJ'(r) + (r^2 - n^2)J(r) = 0.$$

Заменяя функцию $J(r)$ степенным рядом и определяя его коэффициенты, находим решение уравнения

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}.$$

Уравнение вида $r^2 J''(r) + rJ'(r) + (r^2 - n^2)J(r) = 0$ называется уравнением Бесселя, а его решения $J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}$ – функциями

Бесселя первого рода с неотрицательными целочисленными индексами n , которые имеют бесконечное, но *счётное множество* действительных нулей. Функции Бесселя связаны рекуррентным соотношением:

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x).$$

Наиболее часто в физических приложениях встречаются функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ (рис. 6), значения которых представлены в виде таблиц.

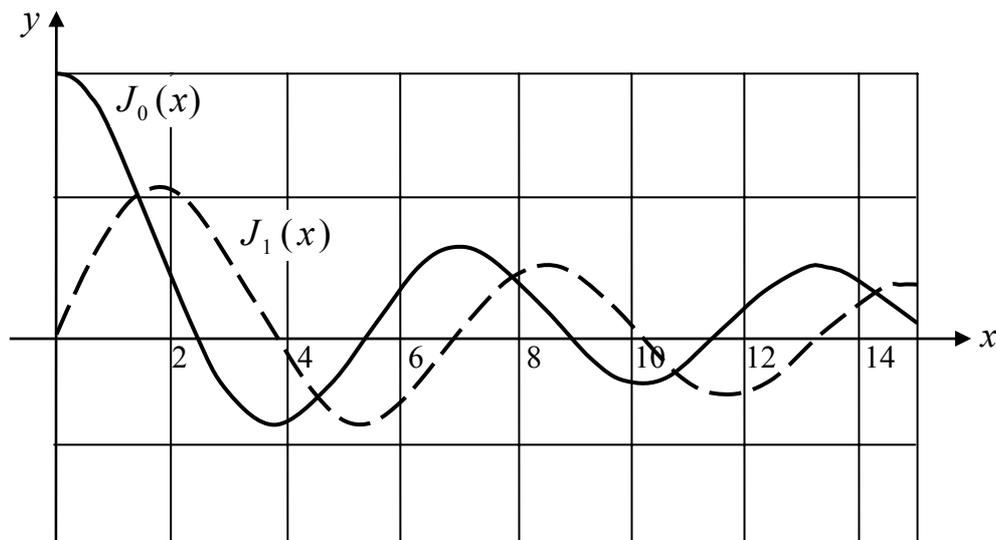


Рис. 6. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

При вычислении производных от функций Бесселя первого рода различных порядков применяются рекуррентные формулы:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{J_n(x)}{x^n} \right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}} \quad \text{и} \quad \boxed{\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)}.$$

Г. Полиномы Лежандра. Эти полиномы тесно связаны с фундаментальным решением $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$ **уравнения Лапласа**.

Функция $\Psi(\rho; x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}}$ ($0 < \rho < 1$, $-1 \leq x \leq 1$) называется

производящей функцией полиномов Лежандра.

Полиномы Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{\partial^n \psi(0; x)}{\partial \rho^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\Psi(\zeta; x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$, где L –

контур на комплексной плоскости, внутри которого расположена точка $\zeta = 0$. Вычислив контурный интеграл, получим формулу для **поли-**

номов Лежандра: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$. **Полиномы Лежандра** яв-

ляются решениями уравнения $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n^2 y = 0$ при $-1 \leq x \leq 1$.

Они обладают свойством $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ и удовлетворяют рекуррентному соотношению $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$, а их первые производные: $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) - (n-1)P_n(x) = 0$. **Полиномы Лежандра** входят в класс ортогональных функций на отрезке $[-1; 1]$.

Совокупность функций $f_n(x)$ называется **ортогональной** на отрезке $[a; b]$, если выполняется равенство $\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = 0$, и **ортонормированной** на отрезке $[a; b]$, если выполняется равенство

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

Присоединённые полиномы Лежандра определяются через производные от **полиномов Лежандра** $P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$ и удовлет-

воряют уравнению $(1-x^2)v'' - 2(m+1)v' + [n(n+1) - m(m+1)]v = 0$.

Решение **уравнения Лапласа** для шаровой области

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

методом разделения переменных приводит к сферическим функциям

$$Y_n(\theta; \varphi) = \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta) = \sum_{m=-n}^n C_{nm} Y_n^{(m)}(\theta; \varphi),$$

где $C_{nm} = \begin{cases} A_{nm}, & m \leq 0 \\ B_{nm}, & m > 0 \end{cases}$, $Y_n^{(m)} = P_n^{(m)}(\cos \theta) \cdot \begin{cases} \cos(m\varphi), & m \leq 0 \\ \sin(m\varphi), & m > 0 \end{cases}$.

Функции $Y_n^{(0)} = P_n(\cos \theta)$, которые не зависят от аргумента φ , называются **зональными функциями**.

Функция $P_n(\cos \theta)$ имеет ровно n нулей внутри промежутка $[-1; 1]$, что приводит к разделению сферы на $(n+1)$ широтных зон, внутри каждой из которых зональная функция сохраняет знак, отсюда и следует такое название для функций $Y_n^{(0)}$.

Д. Функции Чебышёва. Уравнение Чебышёва имеет вид

$$(1 - x^2)v'' - xv' + n^2v = 0,$$

его решениями являются **функции Чебышёва**:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n \right],$$

$$u_n(x) = \frac{1}{2i} \left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n - (x - i\sqrt{1-x^2})^n \right].$$

а) **функции Чебышёва-Эрмита.** Эти функции являются решениями

уравнения $\frac{d}{dx} \left[e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x^2} y = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) и определяются через производящую функцию формулой

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n [e^{-x^2}]}{dx^n}$. **Полиномы Чебышёва-Эрмита** связаны между собой соотношениями:

$$H_n(x) = 2nH_{n-1}(x); \quad H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

б) **функции Чебышёва-Лагерра.** Функции Чебышёва-Лагерра возникают при решении уравнения

$\frac{d}{dx} \left[xe^{-x} \frac{dy}{dx} \right] + \lambda e^{-x} y = 0$ ($x \in (0; \infty)$). Они определяются через производящую функцию с помощью формулы

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n [x^n e^{-x}]}{dx^n}.$$

Рекуррентные соотношения для **функций Чебышёва-Лагерра** имеют вид: $(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$; $L_{n+1}'(x) - L_n'(x) + L_n(x) = 0$. Обобщённые **полиномы Чебышёва-Лагерра** определяются формулой

$$L_n^s(x) = \frac{e^x}{n! x^s} \frac{d^n [x^{n+s} e^{-x}]}{dx^n}$$

и являются решениями уравнения вида

$$\frac{d}{dx} \left[x^{s+1} e^{-x} \frac{dy}{dx} \right] + x^s \left(\lambda - \frac{s+1}{2} \right) e^{-x} y = 0 \quad (x \in (0; \infty)).$$

84.2. Специальные функции в квантовой механике

Специальные функции часто возникают при решении различных физических задач, например, в квантовой механике.

Уравнение вида

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t; x; y; z)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t; x; y; z) + U(t; x; y; z) \psi(t; x; y; z)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – комплексная единица; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек – **постоянная Планка**; $\psi(t; x; y; z)$ – волновая функция; m – масса частицы; $U(t; x; y; z)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, с нормировкой волновой функции $\iiint_V |\psi|^2 dx dy dz = 1$ называется **уравнением Шрёдингера**.

Если силы не зависят от времени t , то состояние частицы может быть **стационарным** (волновая функция $\psi(t; x; y; z)$ не зависит явным образом от параметра времени t), но при определённой общей энергии E , т.е. существуют решения вида $\psi(t; x; y; z) = \psi_0(x; y; z) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$. Для этого случая **уравнение Шрёдингера** переходит в уравнение

$$\Delta \psi_0 + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi_0 = 0.$$

При отсутствии силового поля ($U(t; x; y; z) = 0$) уравнение принимает классический вид уравнения математической физики:

$$\Delta \psi_0 + k^2 \psi_0 = 0,$$

где $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны). Рассмотрим применение **уравнения Шрёдингера** для решения ряда практических задач.

Пример 1 (ротатор). Частица, которая вращается на одном и том же расстоянии r вокруг неподвижного центра, называется **ротатором**. В силу того, что потенциальная энергия ротатора сохраняет одно и то же значение в любой точке орбиты движения **ротатора**, то её можно положить равной нулю. Тогда **уравнение Шрёдингера** принимает вид $\Delta \psi_0 + k^2 \psi_0 = 0$. Для решения задачи воспользуемся сферическими координатами, т.е. перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \varphi^2} + k^2 \psi_0 = 0.$$

При записи этого уравнения был использован тот факт, что $\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0$. Условие нормировки для волновой функции ротатора в сферических координатах имеет вид: $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |\psi_0|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 1$. Решениями поставленной задачи являются нормированные сферические функции

$$\psi_{nl}(\theta; \varphi) = \sqrt{\frac{(n-l)!(2n+1)}{(n+l)! 2 \chi_l \pi}} P_n^{(l)}(\cos \theta) \cdot \begin{cases} \cos(l\varphi), & l \leq 0 \\ \sin(l\varphi), & l > 0 \end{cases}$$

где величина $\chi_l = \begin{cases} 2, & l=0 \\ 1, & l \neq 0 \end{cases}$, с собственными значениями $k^2 = n(n+1)$. Следовательно, энергетические уровни ротатора определяются формулой:

$$E_{nl} = \frac{\hbar}{2lr^2} n(n+1) \quad (n \in N).$$

Пример 2 (гармонический осциллятор). Для одномерного гармонического осциллятора потенциальная энергия $U = \frac{m \omega_0^2}{2} x^2$ (ω_0 – циклическая частота собственных колебаний осциллятора). Вводя обозначения $\varepsilon = \frac{2E}{\hbar \omega_0}$; $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_0}}$ и $\xi = \frac{x}{x_0}$, перепишем уравнение Шрёдингера в виде:

$$\frac{d^2 \psi_0}{d\xi^2} + (\varepsilon - \xi^2) \psi_0 = 0$$

при нормировочном условии $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0|^2 d\xi = \frac{1}{x_0}$. Используя *метод разделения переменных*, получим решение

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \quad \text{и} \quad E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n \in N).$$

Из последней формулы видно, что энергия осциллятора принимает дискретный ряд значений при целых величинах номера уровней n и не может быть ниже положительной энергии основного уровня

$$E_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2}.$$

Пример 3 (электрон в кулоновском поле). Задача о движении электрона в кулоновском поле представляет интерес в связи с выяснением вопроса о спектре водородоподобных атомов. Эти атомы имеют один валентный электрон, который движется в силовом поле ядра, при этом

потенциальная энергия электрона равна $U = -\frac{e^2}{r}$, где e – заряд электрона. Уравнение Шрёдингера имеет вид:

$$\Delta\psi_0 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi_0 = 0.$$

Метод разделения переменных приводит к решению

$$\psi_{nml}(\rho; \theta; \varphi) = \psi_{ml}(\theta; \varphi) \phi_{nl}(\rho),$$

где функция $\psi_{ml}(\theta; \varphi)$ – волновая функция ротатора, а радиальная функция определяется равенством:

$$\phi_{nl}(\rho) = \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)! 2n}} \left(\frac{2\rho}{n} \right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2\rho}{n} \right).$$

В этом случае каждый уровень энергии имеет вырождение кратности n^2 .

85. “Интегральные уравнения”

85.1. Уравнения Фредгольма

Уравнения вида

$$\int_a^b K(x; s) \varphi(s) ds = f(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x; s) \varphi(s) ds = f(x),$$

где $\varphi(x)$ – функция, подлежащая отысканию, $K(x; s)$ и $f(x)$ – известные функции, λ – числовой параметр, называются уравнениями Фредгольма первого и второго родов, соответственно, функция $K(x; s)$ – ядром интегрального уравнения, $f(x)$ – правой частью интегрального уравнения.

Уравнение Фредгольма второго рода называется однородным интегральным уравнением, если $f(x) = 0$, а при $f(x) \neq 0$ – неоднородным интегральным уравнением.

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x; s) \varphi(s) ds = 0,$$

которое при произвольных значениях параметра λ имеет очевидное нулевое (тривиальное) решение $\varphi(x) = 0$.

Значения параметра λ , при которых однородное уравнение Фредгольма второго рода имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а соответствующие функции – собственными

ми функциями.

Ядро интегрального уравнения $K(x; s)$ называется **вырожденным**, если оно представляется в виде $K(x; s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(s)$, где $a_i(x)$ – линейно-независимые функции.

Решение неоднородного **уравнения Фредгольма второго рода** с вырожденным ядром $K(x; s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(s)$ сводится к решению системы

линейных алгебраических уравнений. После подстановки вырожденного ядра в уравнение оно приводится к виду:
$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i a_i(x) + f(x)$$

(C_i – неизвестные коэффициенты), т.е. решение **уравнения Фредгольма второго рода** с вырожденным ядром ищется в указанном виде. В этом случае **уравнение Фредгольма второго рода** сводится к уравнению

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda \alpha_{ij}) C_j = \beta_i$$
, здесь $\alpha_{ij} = \int_a^b a_i(s) b_j(s) ds$ и $\beta_i = \int_a^b f(s) b_i(s) ds$.

После нахождения числовых коэффициентов C_i , решение **уравнения Фредгольма второго рода** с вырожденным ядром записывается в виде:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n C_i a_i(x) + f(x).$$

85.2. Методы решения уравнения Фредгольма второго рода

В случае невырожденного ядра применяют разные приближённые методы поиска решения **уравнения Фредгольма второго рода**:

а) **метод последовательных приближений**. При достаточно малых значениях параметра λ ($|\lambda| \ll 1$) можно отыскивать решение **уравнения Фредгольма второго рода** по методу последовательных приближений. Пусть $\varphi_0(x)$ – функция, которая является решением однородного

уравнения Фредгольма второго рода
$$\varphi_0(x) - \lambda \int_a^b K(x; s) \varphi_0(s) ds = 0,$$
 тогда первое приближение к истинному решению удовлетворяет уравнению

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b K(x; s) \varphi_0(s) ds = f(x).$$
 Таким образом, может быть построена последовательность функций $\varphi_n(x)$, удовлетворяющая уравнениям

$$\varphi_2(x) - \lambda \int_a^b K(x; s) \varphi_1(s) ds = f(x);$$

$$\varphi_3(x) - \lambda \int_a^b K(x; s) \varphi_2(s) ds = f(x);$$

$$\dots\dots\dots; \\ \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x; s) \varphi_{n-1}(s) ds = f(x),$$

каждая из которых является следующим приближением к истинному решению уравнения. Если подставить функцию первого приближения в уравнение для функции второго приближения, то получим

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x; s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x; t) \varphi_0(t) dt,$$

где $K_1(x, s) = K(x, s)$ и $K_2(x, t) = \int_a^b K_1(x, s) K_1(s, t) ds$. Применяя последовательную подстановку предыдущего приближения в последующее, получим

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x; s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(x; s) f(s) ds + \dots + \\ + \lambda^{n-1} \int_a^b K_{n-1}(x; s) f(s) ds + \lambda^n \int_a^b K_n(x; t) \varphi_0(t) dt.$$

Функции $K_n(x; s)$ называются **итерированными (повторными) ядрами**.

Для бесконечного числа итераций получаем решение исходного уравнения, т.е. $\varphi(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \int_a^b K_j(x; s) f(s) ds$. В этой формуле функциональный ряд сходится равномерно, поэтому легко показать, что полученная функция является решением **уравнения Фредгольма второго рода**.

б) **метод сеток**. В этом методе отрезки изменения $[a; b]$ переменных x и s разбивают на n одинаковых частей точками x_i и s_j . Тогда интеграл в **уравнении Фредгольма** заменяется на интегральную сумму и само уравнение принимает вид системы линейных алгебраических уравнений

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=1}^n K(x_i; s_j) \varphi(s_j) (s_{j+1} - s_j)$$

или в других обозначениях

$$\varphi_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} \varphi_j (s_{j+1} - s_j).$$

Последние уравнения перепишем в виде $\sum_{j=1}^n [\delta_{ij} - \lambda K_{ij} (s_{j+1} - s_j)] \varphi_j = f_i$.

Эта система линейных алгебраических уравнений относительно величин φ_i будет иметь единственное решение, если главный детерминант системы отличен от нуля.

85.3. Теория потенциала и уравнение Вольтерра второго рода

Пример 1. Найти выражение для объёмного потенциала зарядов в области V .

Пусть в области V распределены заряды с плотностью ρ , тогда в малом объёме dV заключен заряд ρdV .

Потенциал, создаваемый зарядом ρdV и равный $u(r) = \iiint_V \frac{\rho dV}{r}$, где r – расстояние от элементарного объёма dV до выделенной точки, называется **объёмным потенциалом**.

На плоскости объёмный потенциал в области D задаётся формулой $u(r) = \iint_D \rho_s \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds$.

В точке $r=0$ (*самодействие*) объёмный интеграл неопределён, поэтому он задаётся несобственным интегралом второго рода. Вне области определения потенциал $u(r)$ обладает следующими **свойствами**:

- 1) является обычным определённым интегралом;
- 2) задаёт непрерывную функцию с непрерывными частными производными;
- 3) является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет **уравнению Лапласа** $\Delta u = 0$.

Внутри области V объёмный потенциал удовлетворяет **уравнению Пуассона** $\Delta u = -4\pi\rho$ (на плоскости внутри области D **уравнение Пуассона** имеет вид $\Delta u = -2\pi\rho_s$). При увеличении расстояния между точками до бесконечности ($r \rightarrow \infty$) объёмный потенциал стремится к нулю.

Указанные свойства объёмного потенциала применяются при решении краевых задач. Например, рассмотрим краевую задачу *первого типа*:

$$\begin{cases} \Delta u = f(M) \\ u(M)|_{M \in \Gamma} = \varphi(M) \end{cases}$$

Частным решением задачи является объёмный потенциал

$$u_1(r) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{f(r) dV}{r},$$

поэтому решение ищется в виде $u(r) = u_1(r) + u_2(r)$, где функция $u_2(r)$

удовлетворяет уравнениям $\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2(M)|_{M \in \Gamma} = \varphi(M) - u_1(r)|_{M \in \Gamma} = F(r) \end{cases}$

Пример 1. Решить первую краевую задачу для круга радиуса R , ограниченного окружностью L , причём $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_2(M)|_{M \in L} = F(s) \end{cases}$, где s – длина дуги окружности. На окружности L (рис. 7), выполняется равенство

$$\frac{\cos \varphi}{r} = \frac{1}{2R}.$$

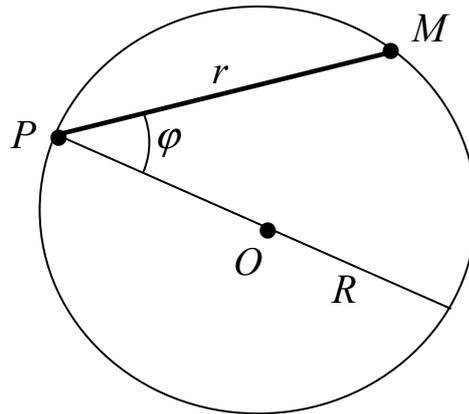


Рис. 7. Потенциал плоской области.

Решение поставленной задачи имеет вид

$$u(s) = \oint_L v(\xi) \frac{\cos \varphi}{r} d\xi,$$

при этом краевое условие приводит к интегральному уравнению

$$\pi v(s) + \frac{1}{2R} \oint_L v(\xi) d\xi = F(s).$$

Решение этого уравнения ищется в виде $v(s) = \frac{F(s)}{\pi} + A$, где A – неизвестная постоянная интегрирования. Подставляя эту функцию в интегральное уравнение, получим равенство

$$2\pi A + \frac{1}{2\pi R} \oint_L F(\xi) d\xi = 0,$$

из которого находим постоянную интегрирования

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 R} \oint_L F(\xi) d\xi.$$

Тогда решение краевой задачи имеет вид

$$v(s) = \frac{1}{\pi} F(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \oint_L F(\xi) d\xi.$$

Следовательно,

$$u(s) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{2rR \cos \varphi - r^2}{2r^2 R} F(\xi) d\xi.$$

В полярной системе координат это решение принимает вид интеграла Пуассона:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \psi)} F(R\theta) d\theta.$$

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y'_0 \end{cases}.$$

Вводя обозначение $y''(x) = \varphi(x)$, получим

$$y'(x) = y'_0 + \int_0^x \varphi(s) ds \quad \text{и} \quad y(x) = y_0 + \int_0^x y'(\xi) d\xi.$$

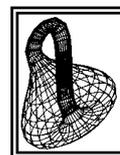
Отсюда находим, что $y(x) = y_0 + x y'_0 + \int_0^x \int_0^\xi \varphi(s) ds d\xi$. Изменив порядок интегрирования, получим $y(x) = y_0 + x y'_0 + \int_0^x (x-s) \varphi(s) ds$. Подставляя найденные выражения для искомой функции и её производные в условие задачи, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\varphi(x) - \int_0^x K(x; s) \varphi(s) ds = f_1(x),$$

где ядро уравнения $K(x; s) = -[a(x) + (x-s)b(x)]$, а функция

$$f_1(x) = f(x) - \{[a(x) + xb(x)]y'_0 + b(x)y_0\}.$$

Аналогично поступают в случае задачи Коши для дифференциального уравнения более высокого порядка.



Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 1**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 11 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,2 \\ c(0; x < 0) = 0,8 \end{cases}$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = x - 2 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = 4x + 3 \end{cases}$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (4 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{4}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \frac{2}{3} \int_a^b (x - s) \varphi(s) ds = 4x.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 2**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - m\omega^2 x^2$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}.$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 24 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,3 \\ c(0; x < 0) = 0,7 \end{cases}.$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 121 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = x + 8 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = 2x - 5 \end{cases}.$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 9y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (7 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{8}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - 2 \int_a^b (x-s) \varphi(s) ds = x - 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 3**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \alpha \sin x$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}.$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 48 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,4 \\ c(0; x < 0) = 0,6 \end{cases}.$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 169 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = 3x - 2 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = 4x + 7 \end{cases}.$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 16y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (5 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{4}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_a^b (x-s) \varphi(s) ds = 2x + 1.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 4**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha x^3}{3}$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 53 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,1 \\ c(0; x < 0) = 0,9 \end{cases}$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = 5x - 1 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = x + 3 \end{cases}$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 25y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (6 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{3}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - 7 \int_a^b (x - s) \varphi(s) ds = x - 3.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 5**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \beta \cos x$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}.$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 86 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,2 \\ c(0; x < 0) = 0,8 \end{cases}.$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 225 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = x + 2 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = 6x - 1 \end{cases}.$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 36y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (8 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{9}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \frac{1}{4} \int_a^b (x-s) \varphi(s) ds = 1 - x.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 6**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4}$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 75 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,1 \\ c(0; x < 0) = 0,9 \end{cases}$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = 3x - 2 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = x - 4 \end{cases}$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 49y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (3 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{5}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - 3 \int_a^b (x - s) \varphi(s) ds = 3 - x.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 7**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \gamma t g x$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}.$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 62 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,4 \\ c(0; x < 0) = 0,6 \end{cases}.$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 49 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = 7x - 3 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = x + 1 \end{cases}.$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 64y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (9 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{7}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \frac{4}{9} \int_a^b (x - s) \varphi(s) ds = 2x - 5.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 8**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma x^5}{5} + \frac{\eta x^3}{3}$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 16 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,3 \\ c(0; x < 0) = 0,7 \end{cases}$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 144 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = 5x \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = x - 4 \end{cases}$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 81y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (6 - x^2) \psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{6}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - 5 \int_a^b (x - s) \varphi(s) ds = x + 5.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 9**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} - \varepsilon \operatorname{ctg} x$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 100 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \begin{cases} u(t, 0) = 0 \\ u(t, l) = 0 \end{cases}.$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 95 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \begin{cases} c(0; x > 0) = 0,4 \\ c(0; x < 0) = 0,6 \end{cases}.$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 324 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \begin{cases} u(0; x) = x + 2 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = 3x - 4 \end{cases}.$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 100y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (7 - x^2) \psi = 0 \text{ при условии } \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{5}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \frac{1}{8} \int_a^b (x-s) \varphi(s) ds = 2 - 3x.$$

Задания для самостоятельного решения

Уравнения математической физики**Вариант 10**

1. Вывести уравнение движения материальной точки с массой m , если лагранжиан $L(t; x; \dot{x} = v) = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2}$.

2. Найти решение уравнения колебаний струны длиной l : а) методом бегущих волн; б) методом разделения переменных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 121 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(t; 0) = 0 \\ u(t; l) = 0 \end{cases}.$$

3. Найти решение уравнения диффузии: а) методом автомодельной переменной; б) методом функции Грина

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = 37 \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} c(0; x > 0) = 0 \\ c(0; x < 0) = 1 \end{cases}.$$

4. Найти решение уравнения колебаний бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 289 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} u(0; x) = 3x - 8 \\ \frac{\partial u(0; x)}{\partial t} = x + 6 \end{cases}.$$

5. Найти в виде степенного ряда решение уравнения

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + 121y = 0.$$

6. Найти методом разделения переменных решение уравнения Лапласа для шаровой области единичного радиуса:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

7. Найти решение стационарного уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (1-x^2)\psi = 0 \quad \text{при условии} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{2}.$$

8. Найти решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - 4 \int_a^b (x-s)\varphi(s) ds = x.$$

Список использованных источников

1. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – Москва: Лаборатория Базовых Знаний. – 2001. – 344 с.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физики. – Москва: Наука. – 1970. – 512 с.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1969. – 288 с.
4. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – Москва: Наука. – 1984. – 384 с.
5. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1964. – 368 с.
6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1982. – 336 с.
7. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1966. – 444 с.
8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высшая школа. – 1970. – 712 с.
9. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. – Москва: Наука. – 1973. – 351 с.
10. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1979. – 392 с.
11. Очан Ю.С. Методы математической физики. – Москва: Высшая школа. – 1965. – 384 с.
12. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 432 с.
13. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 256 с.
14. Панов Ю.Д., Егоров Р.Ф. Математическая физика. Методы решения задач. – Екатеринбург: УрГУ им. А.М. Горького. – 2005. – 150 с.
15. Кузнецов А.В. Методы математической физики. – Ярославль: ЯрГУ. – 2003. – 87 с.
16. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. Задачи по математическим методам физики. – Москва: Эдиториал УРСС. – 2000. – 288 с.



Терехов С.В.
Варюхин В.Н.



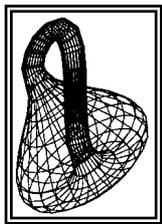
*Математическая библиотечка
студента-физика*

Том 3

(для студентов специальности
«Теоретическая физика»:
часть II)

Решение задач

ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ, ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ



ТФП. *Вычислительная математика.* *Теория фракталов.*

Тема: Вычислительная математика

86. *“Приближённые вычисления”*

Количественная характеристика той или иной физической величины используется при решении физических, научно-технических и других задач. Однако надо понимать, что при её отыскании неизбежно возникают ошибки, связанные с погрешностями исходных данных и математической модели (*неустранимые погрешности*), используемого метода и вычислительной техники (*устранимые погрешности*).

В теории погрешностей решают следующие задачи: по известному аргументу с заданной погрешностью определения вычисляют точность, с которой можно вычислить значение функции (*прямая задача*); по заданной точности значений функции находят точность значений аргумента (*обратная задача*). Приближённые вычисления возникают в связи с тем, что:

- экспериментальные данные получают с помощью приборов определённого класса точности и при влиянии случайных факторов на измерение (*систематические и случайные погрешности*);
- теоретические формулы получают при физических допущениях, которые снижают уровень отсутствия достоверной информации о строении исследуемого объекта и протекающих в нём процессов; они могут быть достаточно сложными для численных расчётов и заменяются приближёнными выражениями;
- для практических приложений зачастую достаточно иметь аналоговые модели, основанные на приближённых, численных результатах.

86.1. Погрешность вычислений

При проведении расчётов выделяют абсолютную и относительную погрешности. Пусть проводится экспериментальное измерение величины X , истинное и измеренное значения которой равны x и \tilde{x} , соответственно.

Отклонение $\Delta x = x - \tilde{x}$ истинного значения величины x от приближённого значения \tilde{x} называется *погрешностью*.

Контролирование погрешностей осуществляется для того, чтобы не проводить вычисления с избыточной точностью, которая определяется из условий решаемой задачи. Для большинства технических и научных задач приемлемой точностью является 5-10 %.

Абсолютной погрешностью приближения \tilde{x} называют разность между истинным и приближённым значениями величины X :

$$|x - \tilde{x}| \leq \Delta \tilde{x},$$

т.е. точное значение величины X заключено в границах

$$\boxed{\tilde{x} - \Delta \tilde{x} \leq x \leq \tilde{x} + \Delta \tilde{x}}.$$

Отношение абсолютной погрешности приближения \tilde{x} к её абсолютному значению называется **относительной погрешностью**:

$$\delta \tilde{x} = \frac{\Delta \tilde{x}}{|\tilde{x}|},$$

при условии, что $|\tilde{x}| \neq 0$.

Пример 1. Вычислить абсолютную и относительную погрешности вычисления числа π , если $x = 3,141592$, а $\tilde{x} = 3,14$.

Вычислим абсолютную и относительную погрешности, согласно определению, $\Delta \tilde{x} \geq |x - \tilde{x}| \geq 0,001592$; $\delta \tilde{x} = \frac{0,001592}{3,14} = 0,000507$.

Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой цифры.

Например, у числа $x = 0,010087$ значащие цифры подчёркнуты $0,010087$.

Любое число можно представить в виде

$$\boxed{x = a_1 \beta^n + a_2 \beta^{n-1} + \dots + a_m \beta^{n-m+1}},$$

где β – основание выбранной системы исчисления, n – некоторое целое число (старший десятичный разряд числа x), a_i ($i = 1 \dots m$) – значащие цифры приближённого числа \tilde{x} .

Значащая цифра a_i считается **верной**, если имеет место неравенство: $\Delta \tilde{x} \leq \omega \beta^{n-i+1}$, где $0,5 \leq \omega \leq 1$, в противном случае a_i – **сомнительная цифра**.

Округлением числа называется замена его другим числом с меньшим количеством значащих цифр.

При округлении чисел соблюдают следующие **правила**:

- а) Если первая из отбрасываемых цифр меньше пяти, то сохраняемые цифры оставляют без изменения (округление с недостатком);
- б) Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна пяти, то последняя из сохраняемых цифр увеличивается на 1 (округление с избытком);

Пример 2. Выполнить последовательное округление числа $x = 4,174905$ до целого.

Последовательность округлённых чисел имеет вид

$$x = 4,174905; x = 4,17491; x = 4,1749; x = 4,175; x = 4,18; x = 4,2; x = 4.$$

Рассмотрим вычисление погрешностей арифметических действий:

а) *сложение (вычитание)*. Пусть измеряемая величина X принимает точные значения x_1, x_2, \dots, x_n , а эксперимент даёт последовательность приближённых чисел $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$. Вычислим средние значения этих чисел

$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ и $\tilde{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i$. Абсолютная разность этих величин равна

$$\left| X - \tilde{X} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta \tilde{x}_i, \quad (*)$$

т.е. погрешность среднего значения не более, чем средняя погрешность последовательности приближённых чисел.

Пример 3. Измерения величины X на двух экспериментальных установках привели к значениям $x_1 = 24,86 \pm 0,03$ и $x_2 = 23,92 \pm 0,05$. Найти среднее значение величины X .

По формуле (*) имеем $X = 24,39 \pm 0,04$.

б) *умножение*. Если величина $X = \prod_{i=1}^n x_i$, а $\tilde{X} = \prod_{i=1}^n \tilde{x}_i$, то относительная погрешность вычисления произведения данных равна

$$\left| \frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}} \right| \leq \sum_{i=1}^n \delta \tilde{x}_i.$$

Теория погрешностей применяется и для *установления погрешности заданной функции по известным погрешностям её аргументов*. Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и пусть $\Delta \tilde{x}_i$ – абсолютная погрешность аргумента x_i .

Абсолютной погрешностью функции y называется величина

$$\Delta \tilde{y} = |y - \tilde{y}| \leq \sum_{i=1}^n \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{x_i = \tilde{x}_i} \right| \Delta \tilde{x}_i \quad (\text{формула Лагранжа}).$$

● Для функции одного аргумента абсолютная погрешность определяется формулой $\Delta \tilde{y} \leq |f'(\tilde{x})| \Delta \tilde{x}$. ●

Пример 4. Определить абсолютную погрешность определения напряжения U по закону Ома $U = I \cdot R$, если экспериментальные ошибки измерения тока $\tilde{I} = 2$ А и сопротивления $\tilde{R} = 10$ Ом равны $\Delta \tilde{I} = 0,02$ А и $\Delta \tilde{R} = 0,05$ Ом, соответственно.

По определению абсолютной погрешности функции имеем

$$\Delta \tilde{U} \leq \tilde{R} \Delta \tilde{I} + \tilde{I} \Delta \tilde{R} = 10 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,05 = 0,3 \text{ В.}$$

Предельной абсолютной погрешностью функции называется наибольшая по абсолютной величине разность между функцией и её приближённым значением, т.е. $\Delta \tilde{y} = \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D} |f(x_1; x_2; \dots; x_n) - \tilde{y}|$.

Относительная погрешность функции определяется по формулам: $\delta \tilde{y} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \ln f(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \dots; \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$ или $\delta \tilde{y} = \sum_{i=1}^n \left| \tilde{x}_i \frac{\partial \ln f(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \dots; \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \delta \tilde{x}_i$.

Предельной относительной погрешностью называют величину $\frac{\Delta \tilde{y}}{|\tilde{y}|}$.

Пример 5. Найти предельные абсолютную и относительную погрешности площади поверхности шара $S = \pi d^2$, если диаметр шара равен $d = 3,7 \pm 0,05$ см, а число $\pi \approx 3,14 \pm 0,016$.

В качестве аргументов у данной функции выступают величины d и π . Вычислим частные производные при заданных значениях d и π :

$$\frac{\partial S}{\partial d} = 2\pi d = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,7 = 23,236 \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial \pi} = d^2 = (3,7)^2 = 13,69.$$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность равна

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial d} \right| \cdot |\Delta d| + \left| \frac{\partial S}{\partial \pi} \right| \cdot |\Delta \pi| = 23,236 \cdot 0,05 + 13,69 \cdot 0,0016 = 1,183704 \approx 1,18,$$

т.е. $\Delta S \approx 1,18 \text{ см}^2$. Вычислим площадь поверхности шара

$$S = \pi d^2 = 3,14 \cdot 13,69 = 42,9866 \approx 42,99 \text{ см}^2.$$

Таким образом, искомая величина $S \approx (42,99 \pm 1,18) \text{ см}^2$. Относительная погрешность при вычислении площади поверхности шара равна

$$\delta S = \frac{1,18}{42,99} \approx 0,03. \quad \text{Для записи относительной погрешности в процентном выражении надо умножить относительную погрешность на } 100\%,$$

т.е. $\delta S \cdot 100\% = 0,03 \cdot 100\% = 3\%$.

Пример 6. Найти (самостоятельно):

а) число верных знаков приближённого числа $x = 1,1587623$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) округлённое значение чисел $x = -0,57076038$ и $x = 2,86373797$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) абсолютную погрешность определения числа $x = 22,045$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) относительную погрешность определения числа $x = -14,3976$, если

известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) абсолютную погрешность функции $y = e^x$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) абсолютную погрешность функции $z = xe^{-y}$ в точке $A(1; 0)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

86.2. Аппроксимация, интер- и экстраполяция

Аппроксимация – это замена одной функции другой функцией, график которой близок к графику исходной функции.

Пусть дана некоторая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, который разбит на $n+1$ частей, причём известны значения функции в точках $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Требуется найти функцию $y = F(x)$ такую, что $F(x_i) = f(x_i), i = 0 \dots n$.

Процесс построения функции $y = F(x)$ называется **интерполированием**, а точки $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ – **узлами интерполирования**.

С геометрической точки зрения данная задача сводится к построению кривой, проходящей через **узлы интерполирования**. Из теории рядов (см. **Тему: Ряды**) известно, что дифференцируемые функции можно представить в виде степенных рядов, которые являются полиномами бесконечного порядка. Для интерполирования достаточно ограничиться полиномами с конечным порядком n такими, что $P_n(x_i) = f(x_i), i = 0 \dots n$. Установленная интерполяционная формула применяется для вычисления значений функции $y = f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполирования. При приближении функций полиномами используют интерполяционные **многочлены Лагранжа, Ньютона и Гаусса**.

а) **многочлены Лагранжа**. Интерполяционный полином выберем в виде

где $P_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Phi_i(x)$, где $\Phi_i(x)$ – многочлены степени n , удовлетворяющие условиям $\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ для выполнения равенств $P_n(x_i) = f(x_i),$

$i = 0 \dots n$.

Перепишем $\Phi_i(x)$ в виде:

$$\Phi_i(x) = a_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

где a_i – константа, которую находят из условия $\Phi_i(x_i) = 1$, тогда

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Вводя обозначение $\gamma_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, дифференцируя его по аргументу x и полагая $x = x_i$, перепишем функцию $\Phi_i(x)$ в виде

$$\Phi_i(x) = \frac{\gamma_n(x)}{(x-x_i)\gamma'_i(x_i)},$$

где $\gamma'_n(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)$.

Полином $L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\gamma_n(x)}{(x-x_i)\gamma'_i(x_i)}$ называется **интерполяционным многочленом Лагранжа**.

Если точки $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ делят отрезок $[a; b]$ на равные части, т.е. $x_i - x_{i-1} = h$, то после введения новой переменной

$t = \frac{x-x_0}{h}$ **многочлен Лагранжа** для равноотстоящих узлов примет вид

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{i=1}^n f(x_0 + ih) \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)i!(n-i)!},$$

так как $\Phi_i(x) = \Phi_i(x_0 + th) = \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)i!(n-i)!}$.

● Если **полином Лагранжа** недостаточно точно определяет значение функции в выбранной точке, то необходимо добавлять один или несколько узлов интерполирования. Это влечёт за собой пересчёт всех слагаемых в **многочлене Лагранжа**, что является существенным недостатком этого полинома. ●

Если требуется выяснить не аналитическое выражение функции $f(x)$, а лишь её значение в выбранной точке, то используют **интерполяционную схему Эйткена**. По этой схеме значение интерполяционного **полинома Лагранжа** находится путём последовательного подключения новых узлов до тех пор, пока желаемая точность не будет достигнута.

● Аппроксимирующий **многочлен Лагранжа** совпадает с заданной функцией в узлах интерполирования, но он будет отличен от неё в остальных точках. Полное совпадение **полинома Лагранжа** с функцией $f(x)$ наблюдается тогда, когда сама функция $f(x)$ является многочленом степени не выше n . Абсолютная погрешность интерполяцион-

ного многочлена Лагранжа определяется по формуле

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)\gamma_n(x)|}{(n+1)!},$$

где ξ – некоторая точка отрезка $[a; b]$. ●

Пример 7. Найти с использованием данной таблицы значений функции $f(x)$ и формулы Лагранжа приближённое значение функции в точке $x=0,58$ (самостоятельно):

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

б) интерполяционная формула Ньютона. Представим интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$ в иной форме

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \dots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)],$$

где разность $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ ($k = 1 \dots n$) – многочлен степени k , значение которого в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ равно нулю. Следовательно, его можно записать в виде $L_k(x) - L_{k-1}(x) = B(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$, где постоянная B определяется из равенства

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = B(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}):$$

$$B = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)} = f(x_0, x_1, \dots, x_k)$$

где $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ – разностное отношение k -го порядка. Следовательно, искомая функция аппроксимируется полиномом

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Полином $P_n(x)$ называется интерполяционным многочленом Ньютона для неравных промежутков.

При добавлении нового узла интерполирования все проделанные вычисления сохраняются, а в формуле появляется дополнительное слагаемое вида $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$. Это позволяет не задавать заранее число узлов интерполирования, а постепенно увеличивать точность результата, добавляя последовательно по одному новому узлу.

Если точка интерполирования $x \in [a; b]$, то формула, приближающая функцию $f(x)$ в точке x , называется интерполяционной, а если $x \notin [a; b]$ – экстраполяционной.

При вычислении значения функции $f(x)$ в заданной точке x следует выбирать ближайшие к этой точке узлы интерполирования, по-

степенно привлекая симметричные относительно точки x другие узлы. Для равноотстоящих узлов интерполирования **формула Ньютона** имеет вид

$$P_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

где $t = \frac{x - x_0}{h}$ – новая переменная, $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ – конечная разность порядка k ; $i = 1, 2, \dots$; $\Delta^0 y_i = y_i$;

$$f(x_0) = y_0; f(x_0, x_0 + h) = \frac{\Delta y_0}{1!h}; f(x_0, x_0 + h, x_0 + 2h) = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}, \dots$$

Абсолютная погрешность интерполяционного **многочлена Ньютона** определяется по формуле

$$|f(x) - L_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)\dots(t-n)|}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

в) **полиномы Гаусса**. Пусть точки $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ делят отрезок $[a; b]$ на равные части длиной $h = \frac{b-a}{n}$, и точка интерполирования x находится в середине отрезка $[a; b]$ “вблизи” узла x_k , причём $x > x_k$. Для построения интерполяционной формулы необходимо привлечь узлы интерполирования в следующем порядке:

$$x_k, x_k + h, x_k - h, x_k + 2h, x_k - 2h, \dots, x_k + jh, x_k - jh.$$

Введя обозначения

$$t = \frac{x - x_k}{h}, f(x_k) = y_k, f(x_k, x_k + h) = \frac{\Delta y_k}{1!h}, f(x_k - h, x_k, x_k + h) = \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{2!h^2}$$

и т.д.,

получим для интерполирования **полином Гаусса**

$$\begin{aligned} P(x_k + th) = & y_k + \frac{t}{1!} \Delta y_k + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{k-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} \Delta^3 y_{k-2} + \dots + \\ & + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-(i-1)^2)}{(2i-1)!} \Delta^{2i-1} y_{k-i+1} + \\ & + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-(i-1)^2)(t-i)}{(2i)!} \Delta^{2i} y_{k-i} \end{aligned}$$

Если точка интерполирования $x < x_k$, то узлы для построения следует привлечь в ином порядке:

$$x_k, x_k - h, x_k + h, x_k - 2h, x_k + 2h, \dots, x_k - jh, x_k + jh.$$

86.3. Методы аппроксимации

86.3.1. Метод наименьших квадратов

Проведение эксперимента приводит к совокупности данных, по которым надо установить вид зависимости между аргументами и функцией. Численный метод позволяет решить эту задачу путём подбора неизвестных коэффициентов в некотором классе аппроксимирующих функций. Пусть при измерении величины X полученные данные удовлетворяют зависимости $y_k = f(x_k) \pm e_k$, где e_k – ошибка при измерении k . Для определения разности между экспериментальным и теоретическим значениями используют оценки ошибок вида:

$$E_1(f) = \max_{1 \leq k \leq N} |f(x_k) - y_k| - \text{максимальная ошибка};$$

$$E_2(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(x_k) - y_k| - \text{средняя ошибка};$$

$$E_3(f) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(x_k) - y_k|^2 \right)^{1/2} - \text{среднеквадратичная ошибка}.$$

Пример 8. Вычислить для линейного приближения функции

$$y = 8,6 - 1,6x$$

максимальную, среднюю и среднеквадратичную ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	9	7	5	4	3	0	-1

Вычислим перечисленные ошибки:

$$E_1(f) = \max_{1 \leq k \leq N} |f(x_k) - y_k| = \max\{0,2; 0,4; 0,0; 0,4; 0,2; 0,8; 0,6; 0,0\} = 0,8;$$

$$E_2(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(x_k) - y_k| = \frac{1}{8} 2,6 = 0,325;$$

$$E_3(f) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(x_k) - y_k|^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1,4}{8} \right)^{1/2} = 0,418.$$

Методом наименьших квадратов (методом минимальных невязок) называется способ нахождения интерполирующей функции с ми-

нимальной среднеквадратичной ошибкой.

Метод наименьших квадратов позволяет решать следующие **задачи**:

а) пусть требуется найти величины x_1, x_2, \dots, x_N , которые экспериментально не могут быть определены, но связаны между собой линейной зависимостью. В этом случае вводят минимизируемую функцию

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n - b_i)^2, \text{ причём коэффициенты}$$

a_{ij} и b_i этой зависимости определяются по экспериментальным данным. Вычисляя производные от минимизируемой функции по аргументам x_1, x_2, \dots, x_N и приравнивая их нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения N неизвестных величин;

б) требуется установить аналитический вид зависимости по экспериментальной таблице данных. Из вида расположения экспериментальных точек выбирают наиболее подходящую функцию $f(x; a_{ij})$ для минимизации

$$F(y_i; f(x_i; a_{ij})) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; a_{ij}))^2 \text{ путём определения ко-$$

эффициентов a_{ij} из системы уравнений максимального правдоподобия

$$\boxed{\frac{\partial F(y_i; f(x_i; a_{ij}))}{\partial a_{ij}} = 0}.$$

На практике наиболее часто используют *линейную аппроксимирующую функцию* $y = Ax + B$. Для приведения функций другого вида к линейной зависимости выполняют то или иное преобразование над функцией. Например, пусть экспериментальные данные укладываются на кривую $y = Ce^{Lx}$. Возьмём натуральный логарифм от обеих частей равенства $Y = \ln y = \ln(K e^{Lx}) = Lx + \ln K = Ax + B$, где коэффициенты $A = L$ и $B = \ln K$. В качестве примера найдём коэффициенты линейной зависимости (задача б)). В этом случае *аппроксимирующая* функция

$$f(x_i; a_{ij}) = Ax_i + B.$$

Система уравнений максимального правдоподобия имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) A + nB = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) A + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) B = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \end{cases}.$$

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B проведём методом Крамера (см. **3**). Главный и два вспомогательных определителя системы равны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i & n \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n y_i & n \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i & \sum_{i=1}^n x_i \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{vmatrix}.$$

Согласно формулам Крамера, коэффициенты $A = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $B = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Пример 9. Найти аппроксимирующий полином для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	2	2	3,5

Отобразим точки заданной функции на плоскости xOy (рис. 1).

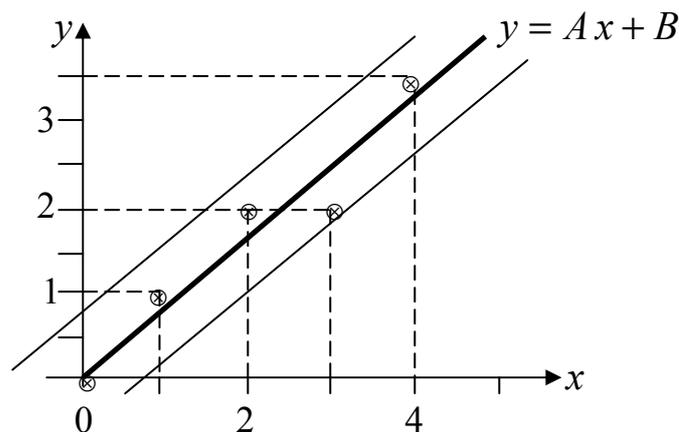


Рис. 1. Расположение экспериментальных точек на плоскости xOy .

Из рис. 1 видно, что экспериментальные точки располагаются вблизи прямой $y = Ax + B$ (лежат внутри полосы, ограниченной прямыми линиями), параметры A и B которой найдём по методу наименьших квадратов (количество точек $n = 5$). Вычислим все необходимые суммы:

$\left(\sum_{i=1}^5 x_i\right) = 10$, $\left(\sum_{i=1}^5 x_i^2\right) = 30$, $\left(\sum_{i=1}^5 y_i\right) = 8,5$ и $\left(\sum_{i=1}^5 x_i y_i\right) = 25$. Вычислим определи-

тели Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 30 & 10 \end{vmatrix} = -50, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8,5 & 5 \\ 25 & 10 \end{vmatrix} = -40 \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 8,5 \\ 30 & 25 \end{vmatrix} = -5.$$

По **формулам Крамера** коэффициенты $A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,8$ и $B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0,1$.

Использование программы *MathCad Professional* позволяет построить аппроксимирующую прямую $y = 0,8x + 0,1$, показанную с экспериментальными точками на рис. 2:

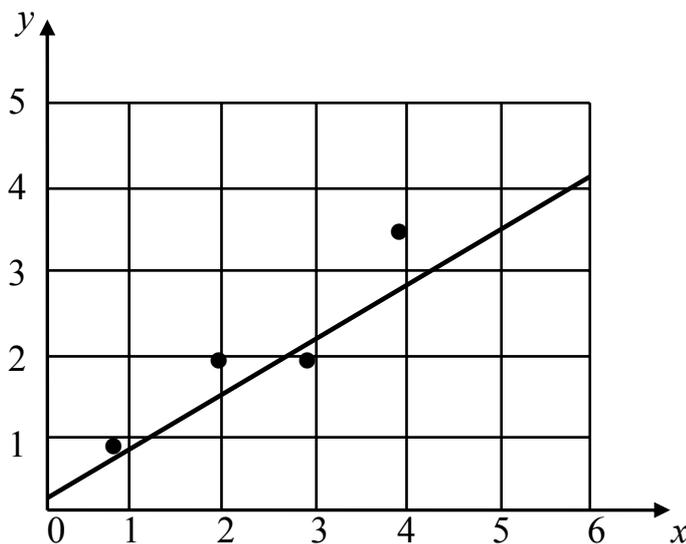


Рис. 2. Аппроксимация экспериментальных точек линейной функцией.

● Полиномы выше пятой степени используются крайне редко ввиду осциллирующего (колебательного) характера результата построения аппроксимирующего многочлена. ●

86.3.2. Слайн-аппроксимация

Встречаются случаи, когда *интерполирование* экспериментальных данных по всей совокупности точек плохо описывается полиномами. В этих случаях вся совокупность точек разбивается на фрагменты, объединяющие близлежащие точки, через которые проходят графики полиномов более низкой степени (первой, второй или *максимально* третьей степени). Многочлены первой степени отображают прямые отрезки, которые соединяют фрагменты в виде кусочно-линейной кривой. Для её представления в аналитической форме используют **поли-**

номы Лагранжа $L_k(x) = y_k \frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})} + y_{k+1} \frac{(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)}$ или *формулу для пря-*

мой при использовании угла наклона отрезка прямой в выбранной точке x :

$$T_i(x) = y_i + \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i).$$

Аналогично строятся кусочно-квадратичные полиномы.

Кусочно-непрерывные (максимально третьей степени) полиномы, аппроксимирующие фрагменты экспериментально-полученных данных, называют сплайнами.

● Недостатком метода сплайн-аппроксимации является резкое изменение кривизны кривой в общих точках фрагментов совокупности экспериментальных данных. ●

Пример 10. Провести линейное и параболическое интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей:

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	1,5	0	0	2	2	1	2

Для линейной *аппроксимации* данной функции составим уравнения прямых, проходящих через две заданные точки (см. **Тему: Аналитическая геометрия на плоскости**), которые являются соседними узлами интерполирования:

$$P_1(x) = \begin{cases} -3x + 1,5; & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0; & \text{при } 0,5 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2; & \text{при } 1 \leq x \leq 2 \\ 2; & \text{при } 2 \leq x \leq 3 \\ -x + 5; & \text{при } 3 \leq x \leq 4 \\ x - 3; & \text{при } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}.$$

Линейное интерполирование показано на рис. 3:

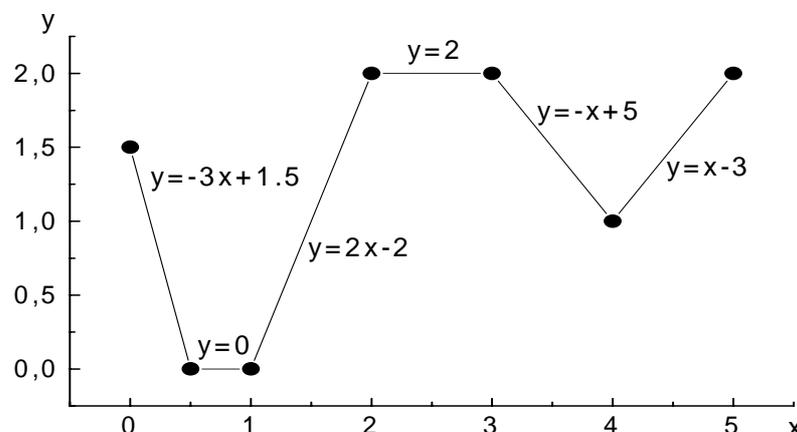


Рис. 3. Кусочно-линейная аппроксимация заданной функции.

Для осуществления параболического интерполирования разобьём всю совокупность данных на фрагменты (отрезки $[0; 1]$, $[1; 3]$ и $[3; 5]$). На каждом отрезке построим параболу (см. **8**) по известным координатам точек:

$$P_2(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4,5x + 1,5; & \text{при } 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 5x - 4, & \text{при } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 17, & \text{при } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}.$$

Кусочно-квадратичное интерполирование заданной функции показано на рис. 4.

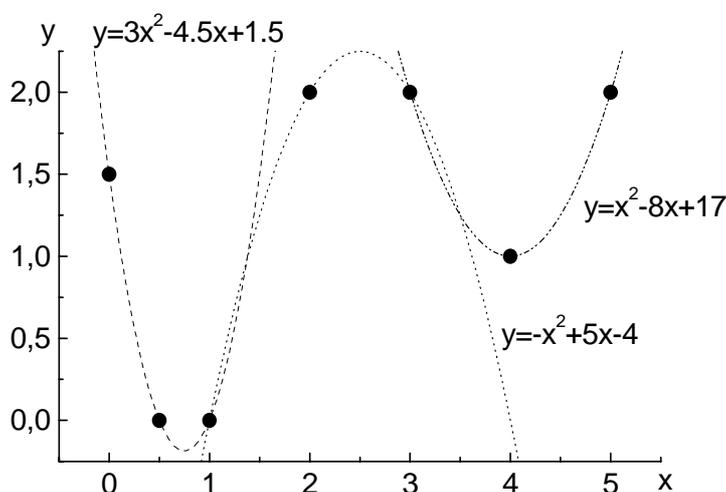


Рис. 4. Фрагментарная аппроксимация данной функции парабололами.

При применении кубических сплайнов наиболее часто на практике используют полином вида

$$P_3(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

где коэффициенты $a_i = f(x_i)$, b_i , c_i и d_i определяются по методу наименьших квадратов.

Пример 11. Используя метод наименьших квадратов, найти параметры линейной $y = Ax + B$, степенной $y = Ax^B$ и показательной $y = Ae^{Bx}$ интерполирующих функций для таблично заданной функции (самостоятельно):

x_i	61,10	60,80	60,18	59,20	58,10	55,20	49,10
y_i	49,10	48,60	50,10	52,20	53,60	58,10	69,10

**87. “Методы решения алгебраических уравнений.
Численное интегрирование”**

87.1. Графический и аналитический способы отыскания корней

Зачастую при решении практических задач приходится отыскивать решение уравнения $f(x)=0$, где $f(x)$ – рациональная (полином данного порядка), дробно-рациональной (отношение полиномов), иррациональной (в аналитическом выражении функции присутствуют радикалы (корни)) или трансцендентной (функция содержит показательную, логарифмическую, тригонометрическую, обратную тригонометрическую, специальную или другую функцию).

Уравнения, содержащие рациональную, дробно-рациональную или иррациональную функции, называются *алгебраическими*, а остальные – *трансцендентными уравнениями*.

Значения аргумента x_i , при которых алгебраическое или трансцендентное уравнение $f(x)=0$ обращается в тождество, называют *корнями уравнения*.

В дальнейшем будем находить только *действительные* корни. Задача о численном отыскании решений уравнения $f(x)=0$ сводится к следующему:

- определению количества корней;
- выделению промежутков, внутри которых располагается один из корней;
- нахождению их приближённых значений;
- отбору необходимых корней и их вычислению с заданной точностью.

Для нахождения количества корней данного уравнения применяют *графический* или *аналитический* способы, при этом проводится проверка единственности корня на выделенном промежутке. Применение графического способа отыскания корней сводится к построению подробного графика функции $f(x)$ с применением компьютерной техники. Иногда при использовании графического способа удобно представлять функцию $f(x)$ в виде разности двух функций

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

с последующим отысканием абсциссы точки пересечения графиков функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Пример 1. Используя *графический* способ, решить уравнение $x \ln x = 1$.

Перепишем уравнение в виде: $\ln x = \frac{1}{x}$, т.е. $\varphi(x) = \ln x$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$. Корни уравнения $x \ln x = 1$ найдём, если вычислим абсциссы точек пересечения кривых $\varphi(x) = \ln x$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$. Построим графики этих функций с помощью программы *MathCad Professional* и определим интервалы, внутри которых расположены корни уравнения (рис. 5). Из рис. 5 видно, что уравнение $x \ln x = 1$ имеет единственный корень, который расположен внутри отрезка $[1,5; 2]$.

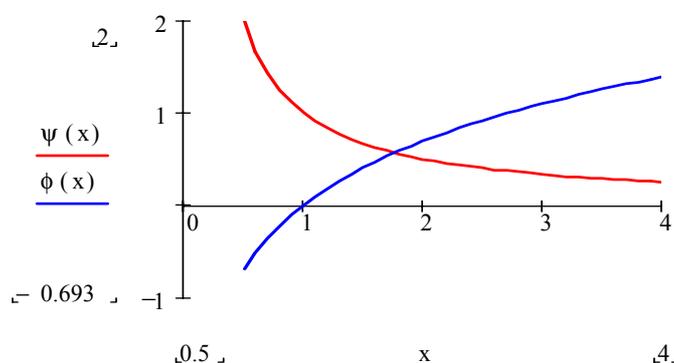


Рис. 5. Изолирование корней уравнения $x \ln x = 1$.

В качестве приближённого значения корня можно принять число $x_1 = 1,75$. Более мелкий шаг вычислений приводит к уточнению числового значения корня.

При *аналитическом* (табличном или пошаговом) подходе надо учитывать свойства непрерывных функций на отрезке $[a; b]$:

– если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на его концах принимает значения разных знаков ($f(a)f(b) < 0$), то найдётся *хотя бы одна* точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что $f(x_0) = 0$.

– если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна (её первая производная сохраняет постоянный знак $\forall x \in (a; b)$) на отрезке $[a; b]$, то при выполнении неравенства $f(a)f(b) < 0$ существует *единственная* точка $x_0 \in [a; b]$ такая, что $f(x_0) = 0$.

Следовательно, первым шагом при применении аналитического способа является проверка функции на непрерывность и вычисление значений функции на концах отрезка $[a; b]$. Затем отрезок делится на

несколько частей и вычисляются значения функции в этих точках; проводится проверка отрезков, на концах которых функция имеет одинаковый знак; отбираются те отрезки, которые содержат корни уравнения и проводятся те же самые операции с более мелким шагом для отобранных отрезков, что позволяет получить приближённые значения корней уравнения $f(x)=0$.

Пример 2. Используя аналитический способ, найти на отрезке $[0; 4]$ корень уравнения $x^2 - 2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,1$.

Областью определения функции $y(x)=x^2-2$ является множество действительных чисел R (отсутствуют запрещённые действия, см. *Исследование функций с помощью производных, Темы: Дифференциальное исчисление*), следовательно, она непрерывна на отрезке $[0; 4]$. Первая производная $y'(x)=2x$ на отрезке $[0; 4]$ положительна и сохраняет свой знак $\forall x \in (0; 4)$, следовательно, функция монотонно возрастает на отрезке $[0; 4]$. Это означает, что на заданном отрезке функция $y(x)=x^2-2$ имеет единственный корень. Вычислим значения функции $y(x)=x^2-2$ на отрезке $[0; 4]$ с шагом $\Delta x = 1$:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-2	-1	2	7	14

Из таблицы видно, что корень находится на отрезке $[1; 2]$, для которого проведём вычисления значений функции $y(x)=x^2-2$ с шагом $\Delta x = 0,1 = \varepsilon$:

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
y_i	-0,79	-0,56	-0,31	-0,06	0,25	0,56	0,89	1,24	1,61

Таким образом, корень уравнения $x_0 \approx 1,4 \pm 0,1$.

87.2. Численные методы решения уравнений

Из *Примера 2* видно, что отделение корней проводится по *схеме*:
 – находят область определения функции и убеждаются в принадлежности заданного интервала к этой области;
 – устанавливают отрезки монотонности функции и среди них отбирают те, на концах которых данная функция принимает значения разных знаков;
 – применяют тот или иной способ вычисления приближённого значения корня:

А. Дихотомия (метод половинного деления).

Пусть на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет единственный корень. Разделим $[a; b]$ пополам точкой $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то x_1 является корнем уравнения. Если $f(x_1) \neq 0$, то из отрезков $[a; x_1]$ и $[x_1; b]$ выбирают тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Выбранный отрезок вновь делят пополам и повторяют изложенный процесс вычислений. Эти действия выполняются до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность приближённого значения установленного корня.

● Увеличение точности нахождения корня увеличивает объём вычислений, поэтому дихотомия применяется для грубого отыскания корня. ●

Пример 3. Решить **Пример 2** методом дихотомии (самостоятельно).

Б. Метод хорд (метод пропорционального деления).

Пусть дана непрерывная и монотонная функция $f(x)$, которая на отрезке $[a; b]$ имеет единственный корень x_0 (рис. 6).

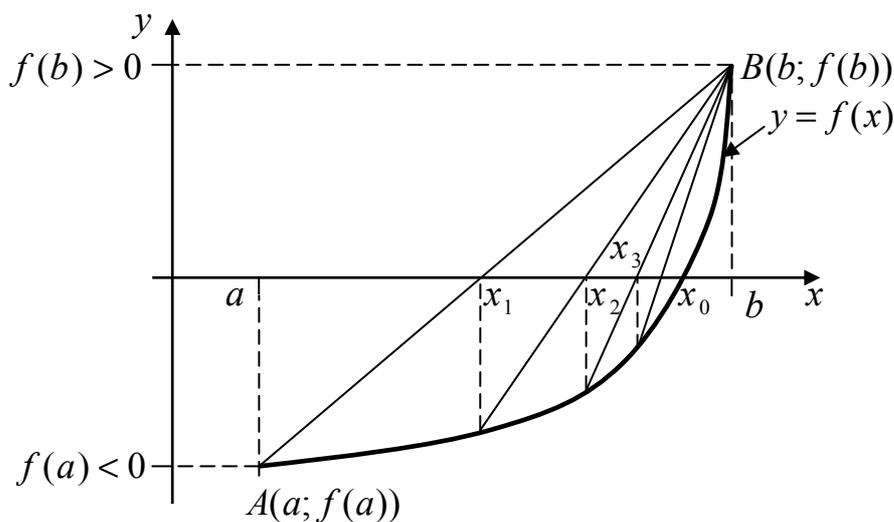


Рис. 6. Поиск корня методом пропорционального деления.

Составим уравнение хорды, проходящей через две известные точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ (см. **Тему: Аналитическая геометрия на плоскости**):

$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$. Полагая переменную $y = 0$, найдём

$$x_1 = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Из отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1; b]$ выбираем отрезок $[x_1; b]$, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Повторяем описанный процесс до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность ε на шаге k :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}; \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)}; \quad \dots; \quad x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(b-x_{k-1})}{f(b)-f(x_{k-1})}.$$

Следовательно, $x_0 \approx x_k \pm \varepsilon$.

Пример 4. Найти корень уравнения $x^3 + 2x - 11 = 0$ по методу хорд. Построив график функции $f(x) = x^3 + 2x - 11$ и применив метод пропорционального деления, находим, что корень уравнения принадлежит интервалу $[1,9; 2]$, так как $f(1,9) = -0,341 < 0$ и $f(2) = 1 > 0$. Дальнейшие вычисления будем проводить по методу хорд:

$$x_1 = 1,9 - \frac{f(1,9)(2-1,9)}{f(2)-f(1,9)} \approx 1,925, \quad \text{при этом } f(1,925) = -0,017 < 0.$$

Вычислим значение функции в точке $x = 1,93$: $f(1,93) = 0,049 > 0$. Следовательно, корень расположен внутри интервала $[1,925; 1,93]$. Найдём второе приближение

$$x_2 = 1,925 - \frac{f(1,925)(1,93-1,925)}{f(1,93)-f(1,925)} \approx 1,92627.$$

Вычислим значения функции в точках $x_2 = 1,92627$ и $x = 1,92628$:

$$f(1,92627) = -0,0000042 < 0 \quad \text{и} \quad f(1,92628) = 0,000127 > 0.$$

По полученным числам видно, что корень располагается значительно ближе к числу $x_2 = 1,92627$, чем к числу $x = 1,92628$. Поэтому в качестве корня уравнения $x^3 + 2x - 11 = 0$ можно принять число

$$x_0 \approx 1,92627 \pm 0,00001.$$

В. Метод касательных (метод Ньютона).

Пусть дана непрерывная и монотонная функция $f(x)$, которая на отрезке $[a; b]$ имеет непрерывные и не обращающиеся в нуль производные $f'(x)$ и $f''(x)$. В силу монотонности график функции пересекает ось абсцисс в единственной точке x_0 , которая является корнем уравнения $f(x) = 0$ (рис. 7):

Проведём касательную к графику функции $y = f(x)$ из того конца отрезка $[a; b]$, для которого выполняется неравенство $f(a)f''(a) > 0$ или $f(b)f''(b) > 0$. Для графика, изображённого на рис. 7, таким концом является точка b , так как график функции вогнутый ($f''(x) > 0, \forall x \in (a; b)$) и

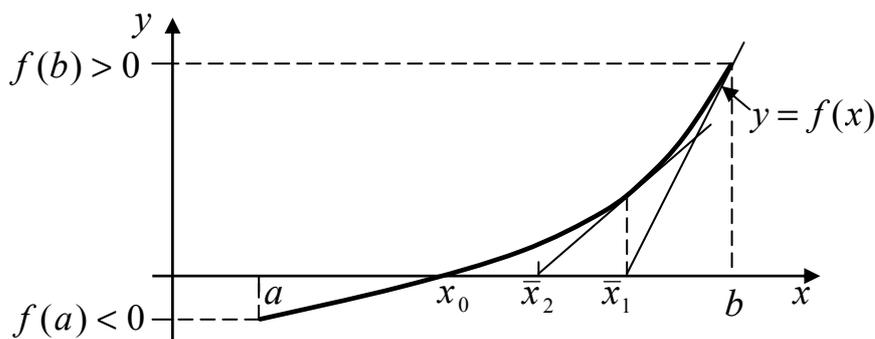


Рис. 7. Приближение к корню по методу Ньютона.

$f(b) > 0$. При выборе другого конца интервала точка пересечения касательной с осью абсцисс может выйти за пределы интервала $[a; b]$. Воспользуемся уравнением касательной (см. **Тему: Дифференциальное исчисление**), которую проведём к графику данной функции $y = f(x)$ в точке b : $y = f(b) + f'(b)(x - b)$. Касательная пересекает ось абсцисс в точке $\bar{x}_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, в которой проведём новую касательную. Новая ка-

сательная пересекает ось Ox в точке $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)}$. Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность ε на шаге k : $\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} - \frac{f(\bar{x}_{k-1})}{f'(\bar{x}_{k-1})}$. Следовательно, $x_0 \approx \bar{x}_k \pm \varepsilon$.

Пример 5. Найти корень уравнения $x^3 + 2x - 11 = 0$ по методу Ньютона. Согласно **Примеру 4**, корень уравнения принадлежит интервалу $[1,9; 2]$, при этом $f(1,9) = -0,341 < 0$ и $f(2) = 1 > 0$. Первая производная функции $f(x) = x^3 + 2x - 11$ равна $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in (1,9; 2)$, а вторая производная равна $f''(x) = 6x > 0, \forall x \in (1,9; 2)$, следовательно, касательную к графику функции проводим в точке $b = 2$. Первое приближение к корню уравнения x_0 будет равно $\bar{x}_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} \approx 1,929$, второе приближение

$\bar{x}_2 = 1,929 - \frac{f(1,929)}{f'(1,929)} \approx 1,92628$, что достаточно близко к решению, полученному в **Примере 4**.

Г. Комбинированный метод.

Сочетание методов хорд и касательных позволяет значительно ускорить процесс отыскания корня заданного уравнения, так как метод

хорд определяет корень с недостатком, т.е. $x_k < x_0$, а метод касательных – с избытком, т.е. $\bar{x}_j > x_0$. Одновременное применение обоих методов позволяет ограничивать положение корня отрезками $[x_1; \bar{x}_1]$, $[x_2; \bar{x}_2]$, ..., $[x_k; \bar{x}_k]$, пока не будет достигнута требуемая точность приближения. Тогда в качестве корня можно принять арифметическое среднее концов полученного интервала, т.е. $x_0 = \frac{x_k + \bar{x}_k}{2}$.

87.3. Численное интегрирование

Вычисление определённых интегралов основано на использовании различных квадратурных формул вида

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j),$$

где A_j – квадратурные коэффициенты, $f(x_j)$ – значения подынтегральной функции в узлах интерполирования x_j . Рассмотрим основные методы численного интегрирования.

а) *метод прямоугольников.*

Разобьём интервал интегрирования на n равных частей с длиной $h = \frac{b-a}{n}$. На каждом интервале $[a+ih; a+(i+1)h]$ (рис. 8) построим прямоугольник с высотой $f\left(a + \frac{(2i+1)h}{2}\right)$ ($i = 0 \dots (n-1)$):

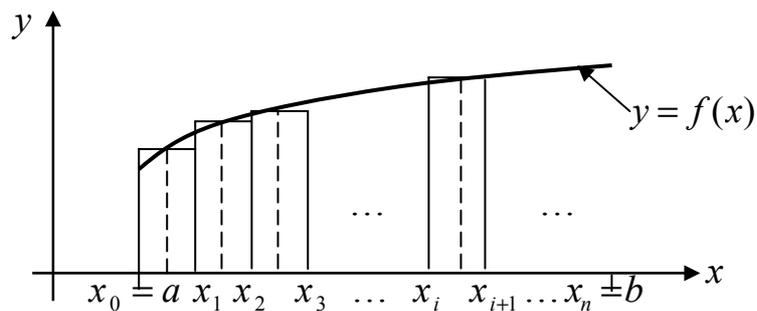


Рис. 8. Площадь криволинейной трапеции, вычисленная по методу прямоугольников.

Суммируя площади всех прямоугольников $S_i = f\left(a + \frac{(2i+1)h}{2}\right)h$, получим приближённое значение определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + \dots + f\left(a + \frac{(2n-1)h}{2}\right) \right] + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi),$$

где $\xi \in (a; b)$.

б) *метод трапеций*.

Разобьём интервал интегрирования на n равных частей с длиной $h = \frac{b-a}{n}$. На каждом интервале $[a+ih; a+(i+1)h]$ (рис. 9) построим трапецию с площадью $S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h$ ($i = 0 \dots (n-1)$). Суммируя площади всех трапеций и вводя обозначения $y_i = f(a+ih)$, получим приближённое значение определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right] + \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi).$$

Пример 6. Вычислить методом трапеций интеграл $\int_0^5 x^2 dx$.

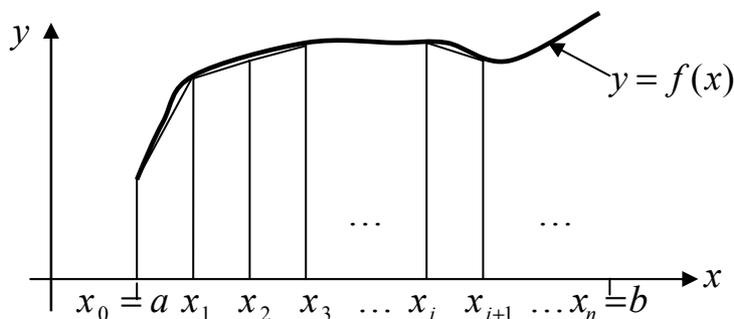


Рис. 9. Вычисление определённого интеграла по методу трапеций.

Разобьём интервал интегрирования ($a = 0$, $b = 5$) на десять равных частей ($n = 10$) с длиной элементарного интервала $h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{10} = 0,5$ и вычислим значения функции в точках разбиения (см. табл.):

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y_i	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25

применим формулу метода трапеций:

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{5-0}{10} \left[\frac{0+25}{2} + 0,25 + 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25 \right] \approx 41,875.$$

По **формуле Ньютона-Лейбница** данный интеграл равен

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{125}{3} \approx 41,667.$$

Относительная погрешность расчёта по методу трапеций равна

$$\left| \frac{41,667 - 41,875}{41,667} \right| \cdot 100\% \approx 0,5\% .$$

Это очень высокая точность вычислений, которая редко достигается при решении научных и технических задач.

в) *метод парабол (метод Симпсона)*.

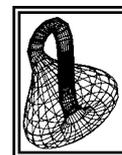
Выполняя те же действия, что и в методе трапеций, но на каждом интервале $[a + ih; a + (i + 1)h]$ строя квадратичную параболу, получим **формулу Симпсона**:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{3n} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})] - \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(IV)}(\xi)$$

Рассмотренные методы численного интегрирования применяются при разработке компьютерных программ, которые используются в научных и инженерных расчётах. Следует отметить, что точность вычислений возрастает при увеличении числа точек, разделяющих интервал интегрирования на элементарные интервалы.

Пример 7. Составить программу для компьютерного вычисления определённых интегралов по указанным квадратурным формулам. Вычислить с её помощью указанные интегралы, положив $n = 100$. Если интеграл можно вычислить непосредственным интегрированием, то вычислить относительную погрешность его вычисления по всем трём методам расчёта, сравнить их и сделать вывод (*самостоятельно*).

№ п/п	прямоугольников	трапеций	Симпсона
1.	$\int_0^1 \sqrt{e^x + 1} dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$	$\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \sin x dx$
2.	$\int_0^1 \frac{2+x}{2-x} dx$	$\int_0^1 \cos(x^2) dx$	$\int_0^{\pi/2} \ln(2 + \cos x) dx$
3.	$\int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$	$\int_0^1 \frac{x dx}{1+x}$	$\int_0^2 \frac{2x dx}{1+x^2}$
4.	$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{1 + \cos x}$	$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$



ТФП

Задания для самостоятельного решения

*Вычислительная математика**Вариант 1*

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 3,2946349$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,9203284$ и $x = 4,1784356$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 17,637$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -2,9348$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = x^2$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = xy^3$ в точке $A(1;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 0,58$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 9,2 - 1,1x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10,1	9,5	8,2	6,8	6,1	4,6	3,9	2,4

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-0,5	1,2	2,6	3,4	4,8

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	2,4	1,8	0,7	2,6	4,9	11,1	28,7

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	23,1	21,8	20,3	18,9	16,4	15,7	13,2
y_i	3,4	4,9	6,6	4,3	2,1	1,2	0,5

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 4x - 1 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 x^3 dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 2**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 1,9048578$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,6594229$ и $x = 8,7592434$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 42,875$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -0,7694$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = x^4$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = ye^{-x}$ в точке $A(0;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,32$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 8,5 - 0,9x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10,1	9,5	8	6,8	6,1	4,6	3,9	2,4

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-1,5	1,3	2,8	3,1	4,2

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	4,2	2,1	0	2,3	4,5	14,9	24,4

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	33,2	29,6	14,1	11,3	10,1	8,5	6,4
y_i	3,1	4,4	6,1	7,9	9,7	11,3	20,2

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 6x - 3 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 x dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 3**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 1,3469837$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,3968387$ и $x = 7,9846370$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 63,156$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -9,1647$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = 4x^2 - 1$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = x2^y$ в точке $A(1;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,95$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 6,2 + 3,1x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	3,1	6,5	9,2	11,9	16,4	19,9	23,3	25,8

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-2,5	0,2	3,1	8,7	15,4

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	8,1	4,1	0,5	3,6	9,2	17,4	31,1

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	61,2	59,4	50,8	48,5	39,6	25,9	19,1
y_i	63,5	51,7	46,2	32,4	25,2	18,8	10,3

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 5x - 4 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (x+1) dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 4**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 7,9347634$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,2754906$ и $x = 3,1478576$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 83,274$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -0,2564$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = 4x^2 - 2x$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = y \ln x$ в точке $A(1;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,01$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 2,9 + 4,1x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	-2,1	3,2	7,5	10,4	13,8	21,7	25,3	29,6

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-2,5	-1,8	-0,3	0,9	2,1

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	4,4	2,6	0,3	1,8	1,6	1,2	0,5

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	42,3	40,1	38,5	35,7	32,2	30,1	27,7
y_i	21,1	24,8	25,9	27,2	29,5	31,6	33,4

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 8x - 9 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (2x^2 - 1) dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 5**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 0,8638485$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,0427682$ и $x = 7,8542683$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 52,175$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -6,4679$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = 4x^2 - 5$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = (5x-1)\ln y$ в точке $A(1;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,63$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 10,4 - 0,3x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	11,2	10,1	9,5	9,1	8,9	8,5	8,1	7,8

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-4,5	-3,8	-2,7	-1,2	-0,3

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	9,1	4,3	1,1	4,7	9,2	16,7	29,3

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	9,7	8,5	7,4	6,1	5,2	4,9	3,6
y_i	14,1	13,7	12,2	10,9	9,3	8,1	6,8

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + x - 2 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (3x^2 + 4) dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант б**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 9,7489692$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,46789402$ и $x = 1,8426406$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 51,248$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -8,3581$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = 7x^2 + 2$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = e^{x-y}$ в точке $A(1;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,99$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 3,9 + 5,6x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	2,4	1,5	0,2	1,7	3,8	9,2	15,4	29,3

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-1,2	-0,5	1,1	2,3	5,7

5. Провести

- а) *линейное*;
 б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	5,9	2,4	1,2	0,1	1,4	3,2	8,1

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

- а) *линейной* $y = Ax + B$,
 б) *степенной* $y = Ax^B$,
 в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	5,6	3,2	2,9	1,3	0,4	-1,5	-2,7
y_i	24,7	32,1	35,2	44,8	58,5	72,1	90,9

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 9x - 10 = 0$:

- а) *по методу хорд*;
 б) *по методу касательных*;
 в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (2x - 7) dx$:

- а) *методом прямоугольников*;
 б) *методом трапеций*;
 в) *методом Симпсона*;
 г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 7**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 6,8472627$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,05632814$ и $x = 0,76428007$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 24,794$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -7,4682$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = x^2 + 4x$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = 5^x (y - 1)$ в точке $A(1; 1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 2,25$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 7,6 + 2,3x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	4,6	8,1	9,2	12,5	14,3	18,1	19,6	23,2

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	2,4	2,9	3,8	4,6	5,7

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	16,1	4,5	0,2	4,9	16,3	26,4	37,2

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	2,1	1,8	1,4	1,1	0,8	0,4	0,2
y_i	2,4	1,6	1,2	0,9	0,7	0,5	0,2

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 7x - 3 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (6x^2 - 5) dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 8**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 4,7683624$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,7248964$ и $x = 2,6943887$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 35,247$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -7,1324$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = 8x^2 + 5$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = 7^x \ln(2y-1)$ в точке $A(1;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,37$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 6,8 - 0,4x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	7,9	6,6	6,2	5,9	5,3	5,1	4,9	4,1

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	5,1	5,9	6,5	5,6	4,2

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	9,1	8,2	7,6	8,6	9,4	10,3	12,8

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	7,5	6,2	5,1	4,3	3,5	2,8	1,9
y_i	1,4	2,7	3,9	5,3	6,8	8,5	10,2

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 7x - 12 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (4x^3 - 6x) dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 9**

1. Найти:

а) *число верных знаков* приближённого числа $x = 0,9135896$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) *округлённое значение* чисел $x = -0,7325682$ и $x = 9,7427828$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) *абсолютную погрешность* определения числа $x = 16,846$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) *относительную погрешность* определения числа $x = -0,2463$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) *абсолютную погрешность функции* $y = 2x^2 + 3$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) *абсолютную погрешность функции* $z = (5y - 4)e^x$ в точке $A(1; 1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,12$ с использованием таблицы значений функции и *формулы Лагранжа*:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 10,7 - 2,4x$

а) *максимальную*;

б) *среднюю*;

в) *среднеквадратичную*

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	13,9	11,1	8,1	5,2	3,7	1,4	-1,6	-4,4

4. Найти *аппроксимирующий полином* для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	7,7	6,2	5,3	3,9	1,4

5. Провести

а) *линейное*;

б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	3,1	5,3	8,4	5,5	2,8	1,1	0,2

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

а) *линейной* $y = Ax + B$,

б) *степенной* $y = Ax^B$,

в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	7,2	7,8	8,5	9,3	10,4	11,1	13,7
y_i	7,1	8,5	9,1	10,4	11,9	13,7	16,2

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 3x - 10 = 0$:

а) *по методу хорд*;

б) *по методу касательных*;

в) *комбинированным методом*.

8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (4x + 5) dx$:

а) *методом прямоугольников*;

б) *методом трапеций*;

в) *методом Симпсона*;

г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Задания для самостоятельного решения

Вычислительная математика**Вариант 10**

1. Найти:

а) число верных знаков приближённого числа $x = 0,7648036$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 0,1 \cdot 10^{-2}$;

б) округлённое значение чисел $x = -0,8427682$ и $x = 5,9735612$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 10^{-4}$;

в) абсолютную погрешность определения числа $x = 39,178$, если известна относительная погрешность $\delta \tilde{x} = 2\%$;

г) относительную погрешность определения числа $x = -0,2763$, если известна абсолютная погрешность $\Delta \tilde{x} = 1,275$;

д) абсолютную погрешность функции $y = 3x^2 + 7$ в точке $x = 1$ при абсолютной погрешности $\Delta x = 0,005$;

е) абсолютную погрешность функции $z = e^{3x-2y}$ в точке $A(1;1)$, если известны абсолютные погрешности аргументов:

$$\Delta \tilde{x} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ и } \Delta \tilde{y} = 0,132.$$

2. Найти приближённое значение функции $f(x)$ в точке $x = 1,79$ с использованием таблицы значений функции и формулы Лагранжа:

x_k	0,35	0,48	0,97	1,08	1,18	1,40	1,71	1,84	2,09	2,46
$f(x_k)$	1,419	1,616	2,637	2,944	3,254	4,055	5,528	5,697	8,084	11,704

3. Вычислить для линейного приближения функции $y = 2,8 + 4,2x$

а) максимальную;

б) среднюю;

в) среднеквадратичную

ошибки по заданной таблице точек:

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
y_i	-1,7	3,1	6,8	11,1	14,9	20,1	25,2	27,7

4. Найти аппроксимирующий полином для таблично заданной функции:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	15,7	3,9	1,2	3,8	14,1

5. Провести

- а) *линейное*;
 б) *параболическое*

интерполирование функции $y = f(x)$, заданной таблицей

x_i	0	0,5	1	2	3	4	5
y_i	5,1	7,4	10,2	12,9	9,9	8,2	6,7

6. Используя *метод наименьших квадратов*, найти параметры

- а) *линейной* $y = Ax + B$,
 б) *степенной* $y = Ax^B$,
 в) *показательной* $y = Ae^{Bx}$

интерполирующих функций для таблично заданной функции:

x_i	12,4	11,2	10,5	9,9	8,7	7,1	6,2
y_i	15,1	15,9	16,6	17,3	18,1	19,8	21,4

7. Составить *компьютерную программу* поиска корня уравнения и с её помощью найти решение уравнения $x^3 + 8x - 10 = 0$:

- а) *по методу хорд*;
 б) *по методу касательных*;
 в) *комбинированным методом*.

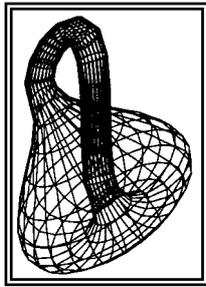
8. Составить *компьютерную программу* вычисления определённого интеграла и с её помощью вычислить $\int_0^5 (8x - 25) dx$:

- а) *методом прямоугольников*;
 б) *методом трапеций*;
 в) *методом Симпсона*;
 г) *непосредственным интегрированием*

(для всех методов количество итераций $n = 100$).

Список использованных источников

1. Хемминг Р.В. Численные методы (для научных работников и инженеров). – Москва: Наука. – 1972. – 400 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – Москва: Наука. – 1989. – 432 с.
3. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). – Москва: Высшая школа. – 2001. – 382 с.
4. Зализняк В.Е. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков / Учебное пособие для студентов естественно-научных и технических специальностей высших учебных заведений. – Москва: Едиториал УРСС. – 2002. – 296 с.
5. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 400 с.
6. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. II. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2004. – 118 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – Москва: Наука. – 1977. – 456 с.
8. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – Москва: Высшая школа. – 1990. – 208 с.
9. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам. – Москва: Эдиториал УРСС. – 2000. – 208 с.
10. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа. – 2008. – 480 с.
11. Волков Е.А. Численные методы. – Москва: Наука. – 1987. – 248 с.
12. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.1. Инструментарий (методика решения задач). – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 540 с.
13. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.



ТФП. Вычислительная математика.
Теория фракталов.

Тема: Теория фракталов

88. “Детерминированные фракталы”

88.1. Размерность Хаусдорфа-Безиковича

Фракталом (от латинского слова “fractus” – *изломанный*; в английском варианте слово “fractional” означает *дробный*) называется *структура, состоящая из частей, которые подобны исходному объекту в целом и имеют размерность Хаусдорфа-Безиковича D , которая строго больше её топологической размерности D_T : $D > D_T$.*

Фракталы могут отображаться линиями, плоскостями, пространственными телами.

Прямая линия обладает трансляционной и скейлинговой инвариантностью, т.е. самоподобна при параллельном переносе и изменении масштаба. При равномерном движении вдоль прямой из точки r_0 со скоростью v радиус-вектор r с течением времени t изменяется согласно формуле $r = r_0 + vt$. Выполним растяжение ($k > 1$) или сжатие ($k < 1$) Вселенной, тогда соотношение примет вид:

$$r' = kr = k(r_0 + vt) = kr_0 + kvt = r_0 + vt' + (k-1)r_0,$$

где введено обозначение $t' = kt$. Из формулы видно, что параллельный перенос прямой на величину $(k-1)r_0$ приводит к совпадению с исходной прямой, что и подтверждает *масштабную инвариантность (скейлинг)* прямой Евклида в новой Вселенной.

Скейлинговая инвариантность прямой связана с её бесконечной длиной и нарушается для отрезков прямой, так как они *имеют конечную длину*. Инвариантность нарушается при изменении масштаба конечного отрезка при сохранении подобия. В этой связи возникает вопрос об измерении длин отрезков. Подобрать соответствующим образом коэффициент k можно добиться того, что полученный после масштабного преобразования отрезок покроет N раз первоначальный отрезок прямой. В этом случае говорят о соразмерности конечных множеств и *выборе подходящего масштаба измерения*. Если считать длину первоначального отрезка равной L , то длина масштаба будет равна

$$l = \frac{L}{N}.$$

Изменяя число N можно добиться любой длины масштабного

отрезка. Очевидно, что устремление N к бесконечности не изменит длины первоначального отрезка $L(l) = l N$. Поэтому *отрезки прямой, квадраты и кубы* используются для измерения длин кривых, площадей поверхностей и объёмов тел. Так площадь $S = l^2 N = L(l) l^1$, а объём $V = l^3 N = L(l) l^2$. Таким образом, процесс измерения сводится к выбору *меры $L(l)$ и масштаба l* .

Уменьшение длины первоначального отрезка в k раз задаёт масштаб $l = \frac{L(l)}{k}$. Следовательно, $L(l) = \frac{L(l)}{k} N$; $S = \frac{L^2(l)}{k^2} N$; $V = \frac{L^3(l)}{k^3} N$. Из этих формул видно, что выражения $\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k^3}, \dots, \frac{1}{k^d}$ являются множителями подобия, а из указанных равенств следует, что надо положить $\frac{N}{k^d}$ равным 1, тогда число $d = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}$ будет определять *размерность* геометрических фигур с выбранной мерой $L(l)$.

Для измерения кривых фигур коэффициент подобия надо устремить к нулю для совмещения выбранного масштаба с бесконечно малым участком фигуры. Такой подход был предложен независимо друг от друга **Ф. Хаусдорфом** и **А.С. Безиковичем** в 1919 году. Таким образом, *размерность Хаусдорфа-Безиковича* определяется соотношением

$$D = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{k}\right)} \right) = - \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N}{\ln k} \right).$$

В отличие от топологической размерности, которая может принимать только целочисленные значения, *размерность Хаусдорфа-Безиковича* может быть и *дробной*.

Размерность Хаусдорфа-Безиковича называется *фрактальной размерностью*.

● *Размерность Хаусдорфа-Безиковича* определяет *нижнюю границу допустимых масштабов*, применяемых для измерения геометрических фигур. ●

88.2. Размерность Реньи

Подобие в динамических задачах сводится к использованию *однородных функций*, описывающих поведение исследуемой системы. Однородные функции описывают не только детерминированные процессы, но и хаотические явления.

Галилео Галилей первым открыл самоподобие законов физики. Бросая маленькие и большие камешки с Пизанской башни, Галилей заметил: они падают с почти одинаковой скоростью. Он установил, что время падения прямо пропорционально квадратному корню из высоты башни. Самоподобие закона Галилея имеет ограничение в связи с уменьшением притяжения Земли при увеличении высоты башни до астрономических размеров. Закон всемирного тяготения только приблизительно описывается формулой Ньютона. Исследуя законы движения планет И. Ньютон показал, что при выполнении масштабного соотношения между частотой обращения ω и радиусом круговой орбиты r вида $\omega \sim r^{2n}$, гравитационный потенциал должен быть пропорциональным r^{2-2n} . При $n = \frac{3}{2}$ Ньютон получил закон всемирного тяготения; при $n=2$ тело приближается (удаляется) по спирали к центру притяжения; при $n = \frac{5}{2}$ одной из траекторий движения является кардиоида (“сердечко”).

Степенные законы с целочисленными показателями степени описывают спектры мощности разных шумов (“белый” не зависит от частоты сигнала; “фликер-шум” – обратно пропорционален частоте; “коричневый” (броуновский, от английского слова “brown” = “коричневый”) – обратно пропорционален квадрату частоты; “чёрный” – показатель степени в обратной пропорциональности частоте превышает 2). Однако в акустических исследованиях используют ещё “розовый” шум с дробным показателем степени, для которого мощность постоянна в пределах октавы, а не герца. Самоподобие наблюдается не только при целочисленных, но и при дробных показателях степени. Дробные индексы степени встречаются в разных разделах физики и указывают на существование универсальности физических законов при описании, например, сосуществующих фаз и спиновых систем; ферромагнетизма и сверхпроводимости. Так в термодинамике введён закон соответственных состояний, который утверждает подобие поведения веществ вблизи критической точки фазового перехода. Если записать все параметры состояния системы в безразмерном виде, то все вещества демонстрируют универсальность поведения вблизи критической точки.

Универсальность поведения вещества в окрестности критической точки фазового перехода привела к созданию теории перенормировок (метод ренорм-группы Вильсона). Например, изучение поведения теплоёмкости $c(T)$ в зависимости от температуры T в окрестности кри-

тической температуры T_c показало наличие простого степенного закона: $c(T) - c(T_c) \sim |T - T_c|^{-\alpha}$ (разности вида $c(T) - c(T_c)$ называют *параметрами порядка*). Универсальность природы проявляется в том, что критический индекс α имеет одно и то же значение для различных веществ. Он зависит от размерности пространства, в котором протекает процесс, и от *числа степеней свободы* (числа накладываемых ограничений) параметра порядка. Если потенциальная энергия тела описывается однородной зависимостью от пространственных координат порядка n , т. е. $U(\lambda r) = \lambda^n U(r)$, то при масштабировании времени в ω раз скорость движения изменится в $\frac{\lambda}{\omega}$ раз, а кинетическая энергия – в $\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2$ раз. Если коэффициенты подобия совпадают $\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2 = \lambda^n$, то лагранжиан будет

однородной функцией порядка n , а уравнения движения останутся неизменными для преобразования сжатия-растяжения пространственно-временного континуума (наблюдается *универсальность* поведения динамических систем вне зависимости от их масштабов).

Скейлинг степенных функций связан с отсутствием у них естественных масштабов длины. Кроме того, геометрические, физические, химические и иные ограничения приводят к разрушению масштабной инвариантности: упругая пружина не может линейно растягиваться до бесконечности, всегда существует критическая длина, при достижении которой пружина претерпевает разрыв. Следовательно, ограничения не геометрической природы определяют существование характерных или критических масштабов, до достижения которых наблюдается подобие.

Нарушение *скейлинга* (например, из-за его ограниченности) приводит к изменению поведения динамических и термодинамических объектов. Нарушение *скейлинга* указывает на пирамидальную организацию природы: *на смену одной однородной функции состояния приходит другая зависимость между параметрами системы с новыми скейлинговыми свойствами*. Для описания смены масштабной инвариантности воспользуемся обобщённым определением **энтропии Реньи**. Оно содержит моменты порядка ν вероятностей p_i :

$$S_\nu = \frac{1}{\nu-1} \ln \left(\sum_{i=1}^N p_i^\nu \right),$$

где ν – произвольное действительное число. Отметим, что при $\nu \rightarrow 1$ **энтропия Реньи** переходит в стандартное выражение для энтропии

$$S_1 = \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i.$$

Определим *обобщённую размерность* формулой $D_\nu = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{S_\nu}{\ln k}$.

○ Из формулы видно, что при больших отрицательных значениях параметра ν размерность формируется малыми вероятностями, а при больших положительных значениях этого параметра вклад в величину размерности дают те вероятности, которые близки к 1. При $\nu = 0$ **размерность Реньи** совпадает с **размерностью Хаусдорфа-Безиковича** для фракталов. ○

Для фрактальных фигур со свойством *самоподобия* вероятности $p_i = \frac{1}{N}$, а энтропия не зависит от порядка ν :

$$S_\nu = \frac{1}{\nu - 1} \ln \left(N \frac{1}{N^\nu} \right) = \frac{1}{\nu - 1} \ln N^{-(\nu-1)} = -\ln N,$$

что и определяет особый статус *самоподобных фракталов*. Из определения **размерности Реньи** следует, что *самоподобный фрактал* покрывается одинаковыми “ячейками”, число которых вычисляется по формуле $n(\nu) = (1 - \nu) D_\nu$. При значении $\nu = 1$ величина D_1 задаёт *информационную*, а при $\nu = 2$ *корреляционную* $D_2 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{S_2}{\ln k}$ размерности. Энтропия S_2 определяется вероятностями обнаружения подобного элемента фрактального множества на расстоянии k от наугад выбранного другого элемента множества. Эти размерности показывают иерархию масштабов, зависящих от того, какие моменты вероятностей участвуют в их формировании.

89. “Конструктивные фракталы”

Конструктивными фрактальными объектами называют *геометрические фигуры, которые строят по заданной процедуре с использованием комбинаций линейных преобразований одного и того же базисного фрагмента* (параллельные переносы, повороты и растяжения-сжатия).

Так фракталом является фигура, которая получается путём удвоения отрезка прямой с последующим уменьшением их длины в k раз, их поворотом на определённый угол и присоединением к одному концу отрезка (рис. 1).

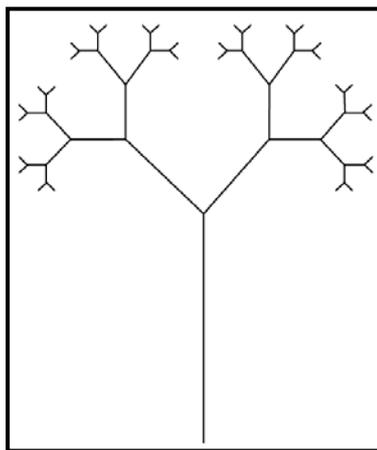


Рис. 1. Конструктивный Y-фрактал.

Фракталы обладают следующими *свойствами*:

- всегда содержат один и тот же фрагмент с разными размерами и одним и тем же коэффициентом подобия;
- в основном они не могут быть описаны стандартным геометрическим языком;
- обязательно содержат *явное, приближённое или асимптотическое подобие элементов*;
- *размерность* фрактальной фигуры всегда больше её *топологической размерности*;
- в большинстве случаев фрактальное множество задаётся комбинацией определённых преобразований;
- существуют фрактальные множества (*мультифракталы*) со спектром размерностей (объединение фрактальных подмножеств).

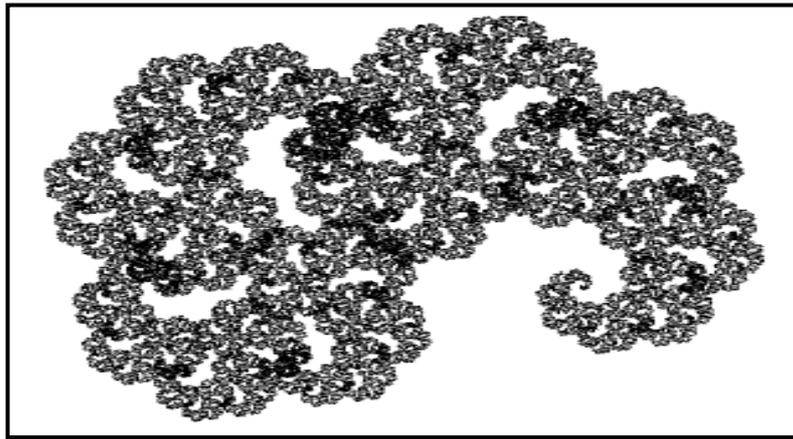
Конструктивные фракталы строятся по изначально заданной фигуре (*основе*), которая в дальнейшем повторяется с уменьшением в соответствии с указанной процедурой или помещением её в вершины данного фрагмента, последующее положение которого задаётся тем или иным преобразованием. Для построения конструктивного фрактала используют линейное преобразование вида

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0 \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0 \end{cases},$$

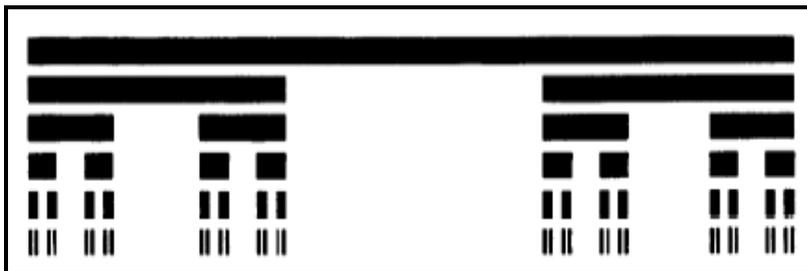
которое определяет *параллельный перенос* и *поворот* (**Лекция № 9**). Более общее аффинное преобразование задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = cx + dy + y_0 \end{cases},$$

которая задаёт не только трансляции и повороты, но и *сжатия-растяжения основы*. Фрактал, полученный с помощью этого преобразования, показан на рис. 2.

Рис. 2. *Аффинный фрактал.*89.1. *“Пыль” Кантора (1883)*

Если отрезок прямой разделить на 3 равные части и удалить средний отрезок, то полученная фигура представляет первый шаг при построении канторовской “пыли”. Аналогичные действия выполняются с каждым из полученных отрезков до бесконечности (рис. 3).

Рис. 3. *“Пыль” Кантора.*

Так как при n -ом построении коэффициент подобия равен 3^{-n} , а число возникающих отрезков равно 2^n , то размерность Хаусдорфа-Безиковича равна $D_T = 0 < D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309 < 1 = d$. Таким образом, канторовская “пыль” занимает промежуточное положение между прямой и точкой. На первом шаге из отрезка единичной длины изымается отрезок длиной $\frac{1}{3}$, на втором шаге — $\frac{2}{9}$, на третьем шаге — $\frac{4}{27}$, на четвёртом шаге — $\frac{8}{81}, \dots$ В результате бесконечной последовательности итераций будет изъята вся длина исходного отрезка, так как

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом, канторовская “пыль” представляет собой несчётное множество бесконечного числа точек, которое обладает мощностью континуума.

89.2. Кривая и “снежинка” Коха (1904)

Возьмём отрезок прямой и в его средней части построим равно-сторонний треугольник; аналогичные построения проведём на каждом прямолинейном участке (результаты построений до 5 шага показаны на рис. 4).

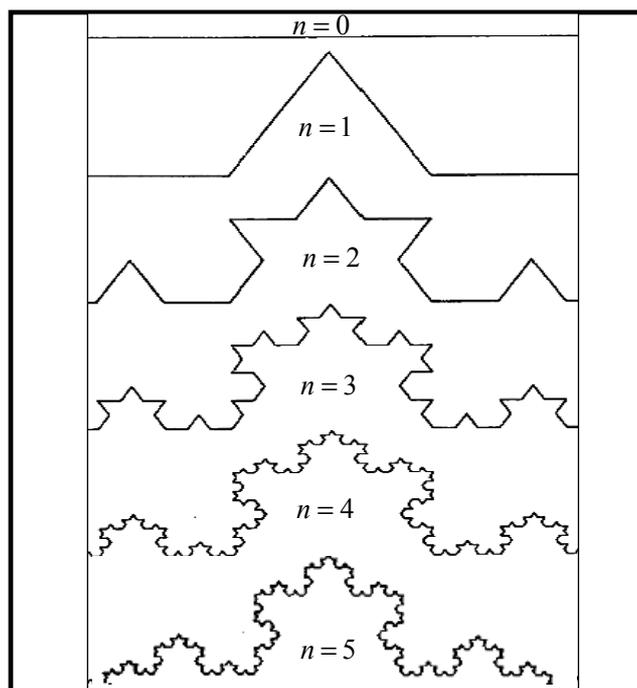


Рис. 4. Кривая Коха.

Шаг итерации при n -ом построении (коэффициент подобия) равен 3^{-n} , а число возникающих отрезков – 4^n . Следовательно, размерность Хаусдорфа-Безиковича кривой Коха равна $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,262 > D_T = 1$. Так

как эта размерность лежит между 1 и 2, то кривая Коха занимает промежуточное положение между одно- и двумерными топологическими фигурами. Если исходный отрезок прямой имеет единичную длину, то на первом шаге построения длина кривой Коха увеличивается на отрезок длиной $\frac{1}{3}$ и становится равной $\frac{4}{3}$. После второго итерационного

шага её длина станет равной $\left(\frac{4}{3}\right)^2$, после третьего шага – $\left(\frac{4}{3}\right)^3$, ..., после N -го шага – $\left(\frac{4}{3}\right)^N$. Отсюда легко видеть, что в результате бесконеч-

ного числа итераций длина кривой Коха станет бесконечной.

Кривую Коха также строят на сторонах правильных многоугольников (равносторонний треугольник, квадрат и т.д.). На рис. 5 показаны первые четыре шага построения “снежинки” Коха из равностороннего треугольника.

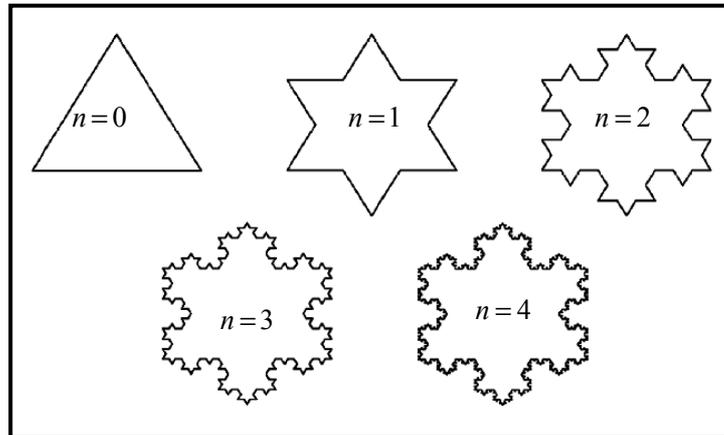


Рис. 5. “Снежинка” Коха.

В результате бесконечной итерации возникает замкнутая, без самопересечений, симметричная, самоподобная, бесконечно изломанная фигура, похожая на снежинку (“остров” Коха по Мандельброту). Граница “снежинки” Коха имеет бесконечную длину, несмотря на то, что она ограничивает конечную площадь.

89.3. Кривые Пеано (1890)

Свойством сверхплотного заполнения доступной области обладают “кривые” Пеано, фрактальная размерность которых совпадает с размерностью плоскости $D = D_T = 2$. Пеано построил непрерывную функцию, для которой областью определения является отрезок, а областью значений – квадрат на плоскости. Линия Пеано строится следующим образом: исходный квадрат разбивается на 9 равных квадратов ($N=9$, $k=3^{-1}$, $D = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2 = D_T$), проводится непрерывная кривая, проходящая по диагоналям итерационных квадратов, в той последовательности, которая показана пунктирной линией на рис. 6а. На рис. 6б показан второй шаг построения кривой Пеано для квадрата 4 (такие же построения проводятся для каждого из 9 квадратов), далее процедура повторяется бесконечное число раз. Построение Пеано не устанавливает взаимно-однозначного соответствия между точками отрезка и точками квадрата: некоторым точкам квадрата соответствует две точки

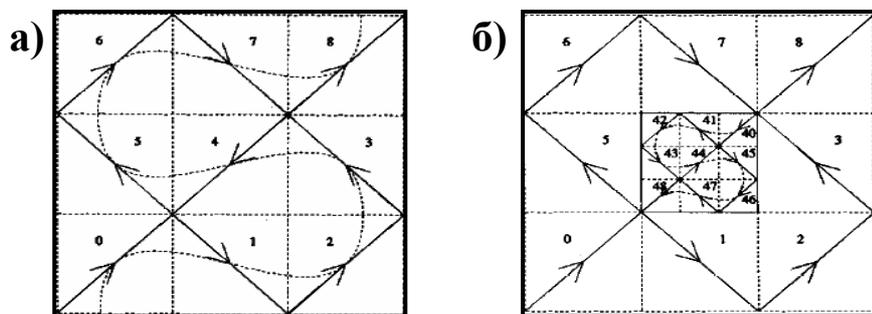


Рис. 6. Первые два итерационных шага построения “кривой” Пеано.

ребра соседних квадратов, а другим – четыре точки стыка квадратов. На рис. 7 показаны другие кривые, которые заполняют плоскость.

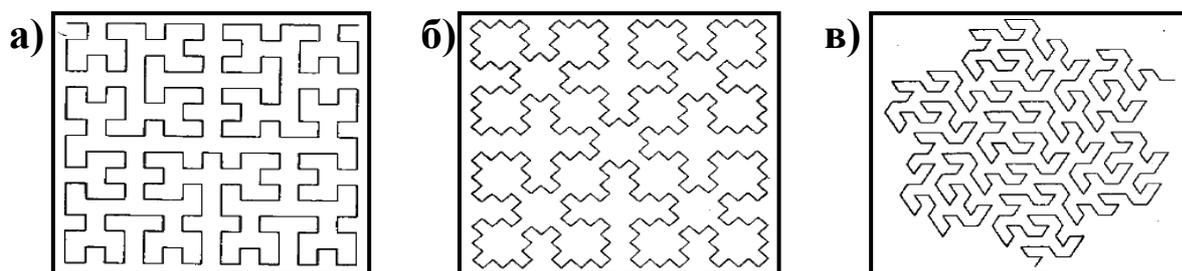


Рис. 7. “Кривые”, заполняющие плоскость:
а) – Гильберта; б) – Серпинского; в) – Госпера.

89.4. “Салфетка” и “ковёр” Серпинского (1915)

“Салфетка” Серпинского представляет собой плоский аналог “пыли” Кантора (рис. 8).

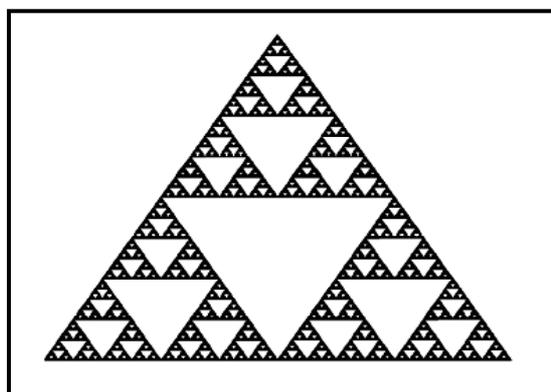


Рис. 8. “Салфетка” Серпинского.

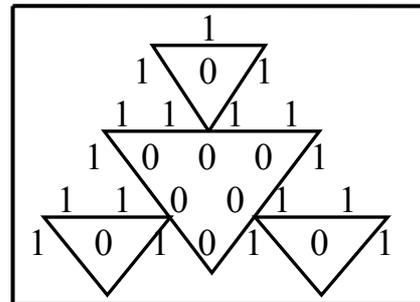
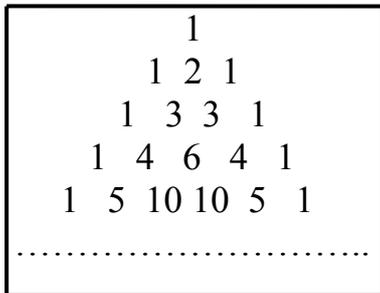
“Салфетка” Серпинского может быть определена различными способами: удалением центрального равностороннего треугольника из исходного треугольника, разделённого на четыре равносторонних треугольника; множеством выигрышных точек в игре сэра Пинского;

использованием треугольника Паскаля в системе двоичного исчисления (надо учитывать правила сложения, принятые в двоичном исчислении: $0+0=1$, $0+1=1$, $1+0=1$ и $1+1=0$). Воспользуемся последним способом, для чего напомним, как строится треугольник Паскаля.

Возведение в степень n суммы двух чисел приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} n=2: & \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \\ n=3: & \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ n=4: & \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \\ & \dots \end{aligned}$$

Паскаль заметил, что числовые коэффициенты на шаге n можно вычислять по известным коэффициентам шага $n - 1$ в виде суммы ближайших чисел (рядом построен аналогичный треугольник в двоичной системе исчисления):



Треугольник Паскаля, построенный в двоичном коде, полностью отвечает верхней части фрактала Серпинского, если вместо нулей изобразить равносторонние треугольники. Фрактальная размерность “салфетки” Серпинского обратно пропорциональна размерности Хаусдорфа-Безиковича для канторовской “пыли”, т.е. равна

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849 .$$

Площадь “салфетки” Серпинского, как и длина канторовской “пыли”, равна нулю, так как в результате построения изымается вся площадь исходного равностороннего треугольника.

● В 1986 году *Гордон* и др. провели исследование зависимости критической температуры от напряжённости магнитного поля при фазовом переходе сверхпроводящей жидкости в нормальную на образце алюминиевой фольги, которая имела вид “салфетки” Серпинского после 10 итераций. Эта зависимость имела вид самоподобной фрактальной кривой, которая достаточно хорошо согласовывалась с теоретической линией. ●

Аналогичные действия тем, которые были проделаны с равносторонним треугольником, выполненные по отношению к квадрату, по-

рождают “ковёр” Серпинского (рис. 9).

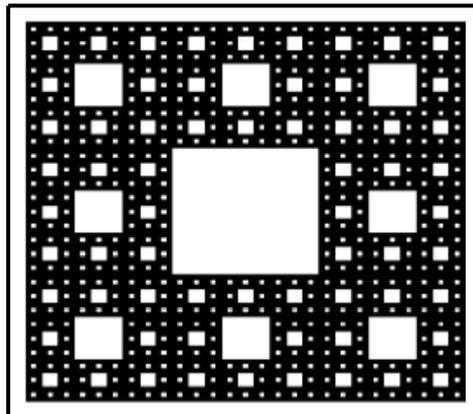


Рис. 9. “Ковёр” Серпинского.

Первоначальный единичный квадрат разбивается на 9 квадратов, а затем вырезается центральный квадрат. В дальнейшем процедура продельвается с каждым из 8 оставшихся квадратов и продолжается до бесконечности. Для “ковра” Серпинского $N = 8$, $k = 3^{-1}$, следовательно, размерность Хаусдорфа-Безиковича равна

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,8928 > D_T = 0.$$

● Так как фрактальная размерность у “ковра” Серпинского больше, чем у “салфетки”, то “ковёр” является менее “дырявой” фрактальной фигурой, чем “салфетка”. ●

● Фрактальные множества Серпинского обладают поворотной симметрией (треугольник надо повернуть на угол 120° , а квадрат – на 90°). Точки фракталов Серпинского с иррациональными координатами при тех или иных преобразованиях порождают хаотические циклы, несмотря на то, что координаты точек-образов однозначно определяются координатами исходной точки. В физике это явление называется детерминированный хаос. ●

89.5. “Драконы” Хартера-Хайтвея

Если складывать лист бумаги так, как указано на рис. 10а (показаны первые четыре итерации), то после n -ого шага построения получается фрактальная фигура, названная Хартером “драконом”. Из рис. 10а видно, что на каждом следующем шаге прямолинейный отрезок заменяется на два новых отрезка, которые являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника. Направления прогибов вновь получаемых частей чередуется. Отметим тот факт, что последователь-

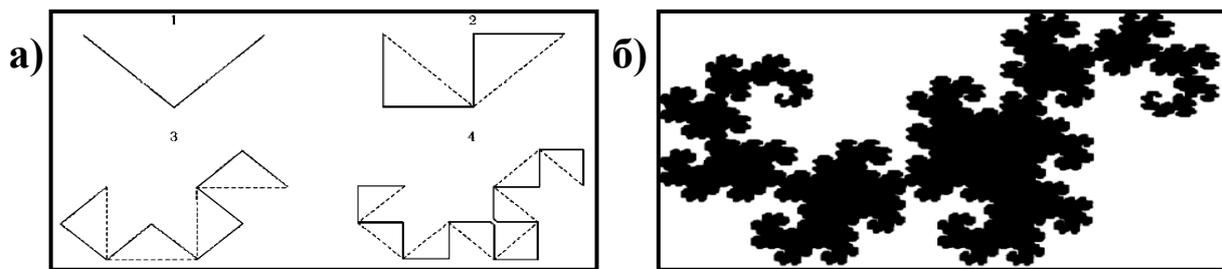


Рис. 10. Построение (а) и вид (б) “дракона” Хартера-Хайтвея.

ность центральных складок укладывается на логарифмическую спираль. Продолжение итераций до бесконечности приводит к фрактальному множеству, показанному на рис. 10б. Хаусдорфова размерность фрактала “дракон” равна единице.

89.6. “Губка” Менгера

“Губка” Менгера (рис. 11) является пространственным аналогом “ковра” Серпинского (рис. 9).

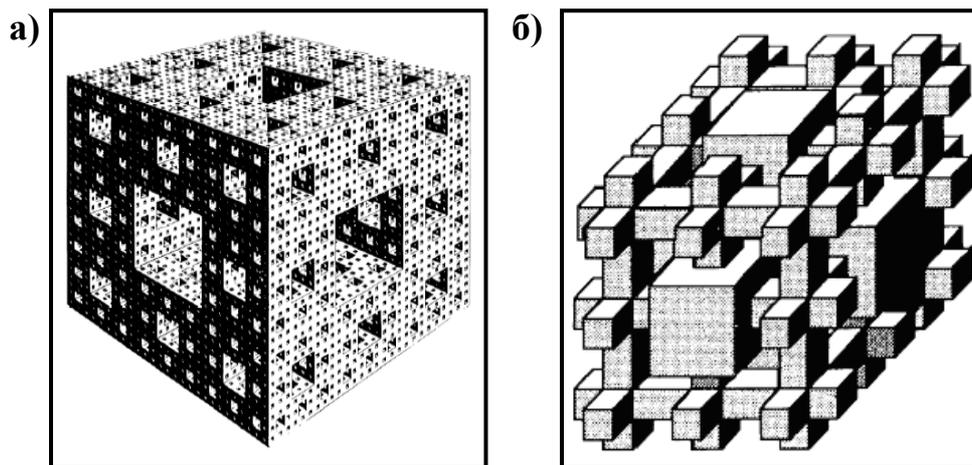


Рис. 11. “Губка” Менгера (а) и её внутренняя фрактальная часть (б).

Начальный куб разбивается на 27 кубиков, затем извлекается 7 кубиков: из центра куба и 6 кубиков из центров граней, оставшиеся кубики вновь разбиваются на 27 частей и производится извлечение указанных выше кубиков второго шага построения, процедура повторяется до бесконечности. Процесс вырезания оставляет на каждом шаге 20 кубиков с коэффициентом подобия 3, следовательно, размерность Хаусдорфа-Безиковича для “губки” Менгера равна

$$2 < D = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2,7268 < 3.$$

Полученная размерность показывает, что “губка” Менгера имеет нулевой объём и бесконечную площадь своих границ.

90. “Фракталы и природные объекты”**90.1. “Листья папоротника” Барнсли (1988)**

Преобразования поворотов, сжатий, растяжений и инверсий являются частным случаем аффинных преобразований плоскости

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$$

с масштабным коэффициентом $\sqrt{ad - cb}$. Использование четырёх систем такого вида (*системы итерируемых функций – СИФ*) позволили **М. Барнсли** построить фрактальные фигуры, которые очень похожи на природные структуры. На рис. 12 показано фрактальное множество, похожее на лист папоротника, которое было построено с помощью СИФ.

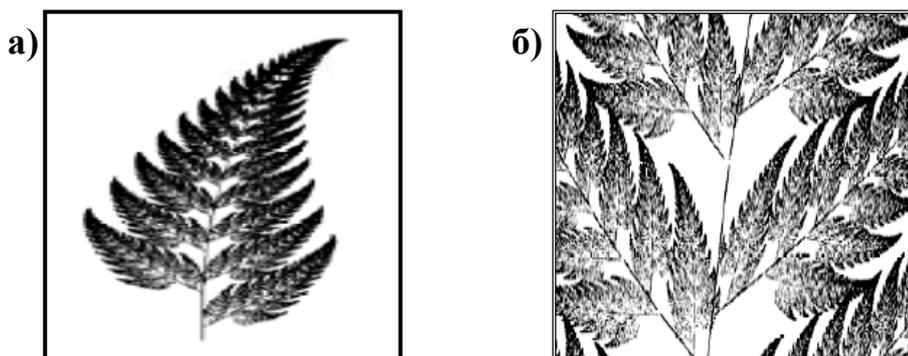


Рис. 12. Аффинный лист папоротника (а), построенный после 200 000 итераций и его увеличенный фрагмент (б).

Это изображение можно представить в виде табл. 1. Изменяя коэффициенты a, b, c, d, e и f можно получать как новые “листья папоротника”, так и новые фрактальные фигуры, например, “деревья”.

Таблица 1.

Коэффициенты СИФ листа папоротника (по Р.М. Кроноверу).

СИФ Папоротник	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
1	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
2	0,1000	–0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
3	0,1000	0,4330	–0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070

В качестве иной СИФ, применение которой приводит к построению новых “листьев папоротника”, возьмём параметры из табл. 2 по **С.В. Божокину** и **Д.А. Паршину** со случайным выбором итерирующей функции (в последнем столбце табл. 2 приведены значения веро-

ятностей, с которыми выбирается та или иная система аффинных преобразований).

Таблица 2.

Коэффициенты СИФ листа папоротника.

<i>СИФ Папоротник</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>p</i>
1	0,00	0,00	0,00	0,16	0,00	0,00	0,01
2	0,85	0,04	-0,04	0,85	0,00	1,60	0,85
3	0,20	-0,26	0,23	0,22	0,00	1,60	0,07
4	-0,15	0,28	0,26	0,24	0,00	0,44	0,07

Результат применения этой таблицы показан на рис. 13.

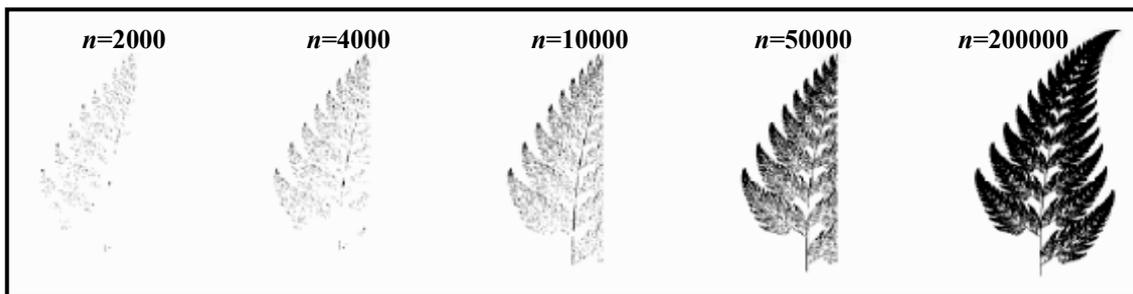


Рис. 13. *Изображение листа папоротника на разных этапах итерационного процесса построения.*

Разберём “строительство” “листа папоротника”:

– первая и вторая итерационные функции формируют “стебель” остальных листьев, кроме того, вторая итерационная функция отвечает и за слабый изгиб “стебля” (коэффициенты *b* и *c* отличны от нуля). Если выполнить итерационную процедуру без функций 1 и 2, то получим “лист папоротника” без “стебля” (рис. 14а).

– отказ от функций 3 и 4 ведёт к построению “стебля” без “листьев” (рис. 14б);

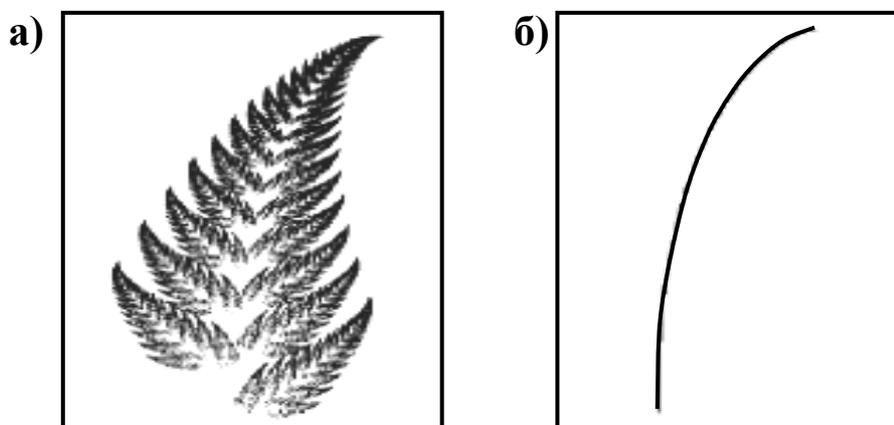


Рис. 14. “Лист папоротника” без “стебля” (а) и “стебель” без “листьев” (б).

– исключение поворота в итерационной функции 2 (коэффициенты b и c равны нулю) приводит к тому, что “стебель папоротника” становится прямым (рис. 15);



Рис. 15. “Лист папоротника” с прямым “стеблем”.

– расположение листьев слева и справа от “стебля” задают трансляции (коэффициенты e и f) в итерационных функциях 3 и 4. Если эти коэффициенты совпадают, то “листья” располагаются симметрично относительно “стебля” (рис. 15), в противном случае – асимметрично (рис. 14). Другими словами: итерационные функции 2 и 3 формируют “листья” с одной стороны, а функции 2 и 4 – с другой стороны “стебля”.

– отражение в итерационной функции 4 определяет направление изгиба “листьев” вверх или вниз (рис. 16).

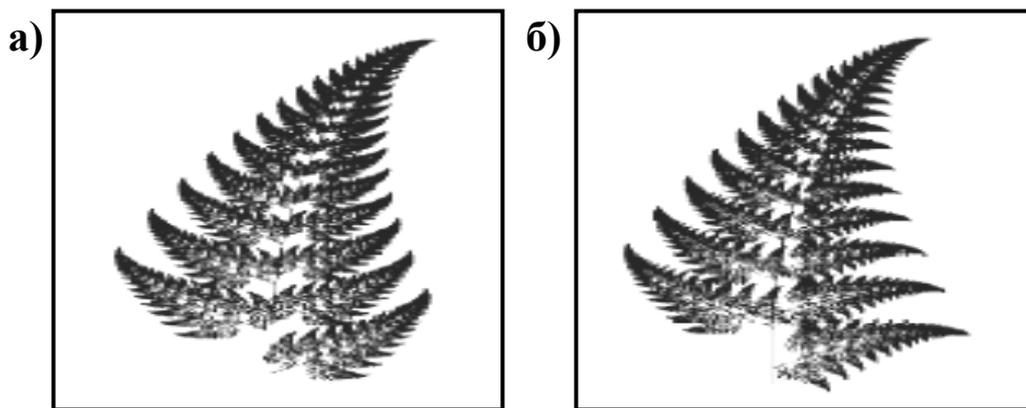


Рис. 16. Правильный (а) и неправильный изгиб (б) “листьев папоротника”.

Следовательно, изменяя коэффициенты итерационных функций в аффинных преобразованиях СИФ, можно построить целое семейство разнообразных “листьев папоротника” (рис. 17) и им аналогичных объектов, например, “деревьев” или “кристаллов”.

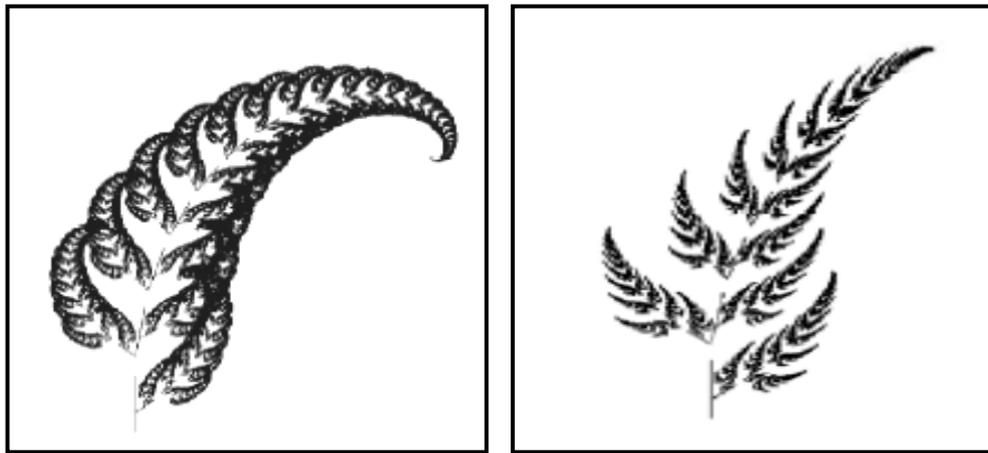


Рис. 17. “Листья” семейства “папоротниковых”.

90.2. “Деревья” Босмана

Примером фракталов, которые получили название “деревья”, может служить фигура, изображённая на рис. 18. Она представляет собой стилизованное отображение “дерева” Пифагора (рис. 18а), которое впервые было построено А.Е. Босманом с помощью чертёжной линейки во время второй мировой войны (было использовано одно из доказательств теоремы Пифагора с использованием квадратов). Применение логарифмической спирали при построении “дерева” Пифагора приводит к картине обдуваемого ветром “дерева” (рис. 18б).

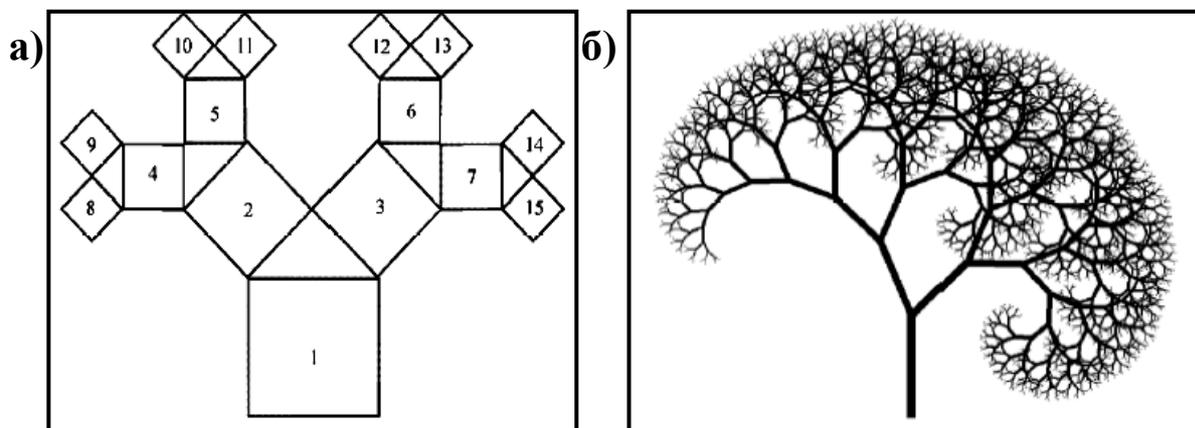


Рис. 18. Способ построения (а) и обдувание ветром (б) “дерева” Пифагора.

“Дерево” иного вида было построено основателем фрактальной геометрии Б. Мандельбротом, оно показано на рис. 19. Построение “деревьев”, “кустов” (рис. 20), “цветов”, “снежинок”, “кристаллов” и им подобных фигур осуществляется при использовании СИФ. Для некоторых фрактальных множеств коэффициенты итерационных функций приведены в табл. 3.

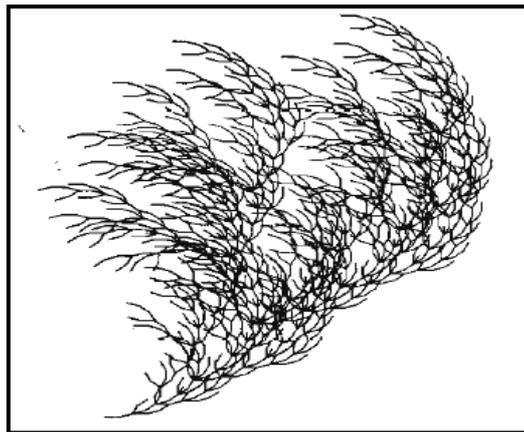
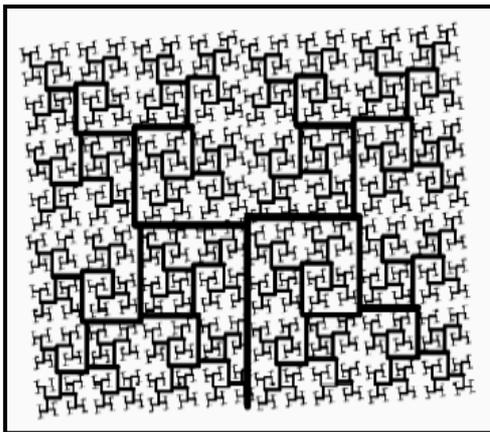


Рис. 19. “Дерево” Б. Мандельброта. Рис. 20. “Куст” Р.М. Кроновера.

Таблица 3.

Коэффициенты СИФ (по Р.М. Кроноверу).

Фрактал	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

91. “Мультифракталы”

91.1. Аналитический способ построения фракталов

А. Салфетка Серпинского. Рассмотрим аналитическую схему построения салфетки Серпинского с использованием системы аффинных преобразований на комплексной плоскости. Первый шаг состоит в том, чтобы отделить 3 равносторонних треугольника, длина сторон которых составляет половину от длины стороны исходного равностороннего треугольника. По М. Барнсли эта операция может быть реализована с помощью трёх линейных аффинных преобразований:

1) $T_1 \Rightarrow z' = \frac{1}{2}z$ – преобразовывает вершины исходного треугольника в

вершины первого строящегося треугольника; прорисовываются стороны, длина которых равна половине длины стороны исходного треугольника (рис. 21а);

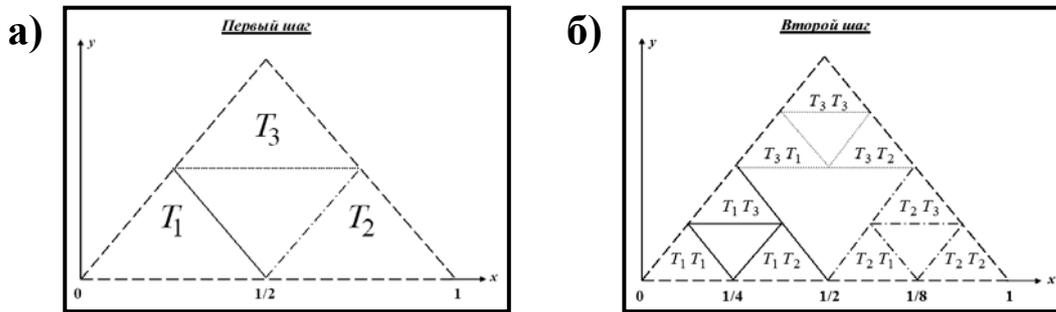


Рис. 21. Первый (а) и второй этапы (б) аналитического построения “салфетки” Серпинского.

2) $T_2 \Rightarrow z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ – строит вершины второго треугольника у основания исходного треугольника;

3) $T_3 \Rightarrow z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ – строит вершины третьего треугольника у последней вершины равностороннего треугольника.

На втором шаге описанные действия применяются к вершинам малых треугольников (рис. 21б) и т.д. Задание порядка выполнения указанных преобразований определяет *генеалогический код “салфетки” Серпинского*.

● Преобразования, используемые для построения “салфетки” Серпинского, содержат сжатие (скейлинговый коэффициент $\frac{1}{2}$ перед z),

трансляцию на постоянный вектор $\frac{1}{2}$, повернутый на угол 60° (выражение $(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ в третьем преобразовании). ●

Б. Кривая Коха. В качестве второго примера рассмотрим применение СИФ для построения кривой Коха. Преобразования имеют вид:

1) $T_1 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}z$ – переводит начальную точку в точку, которая расположена на $\frac{1}{3}$ части исходного отрезка; затем прорисовывается сам отрезок (рис. 22а);

2) $T_2 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}z e^{i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}$ – исходный отрезок сжимается в 3 раза, полученный отрезок поворачивается на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки, а за-

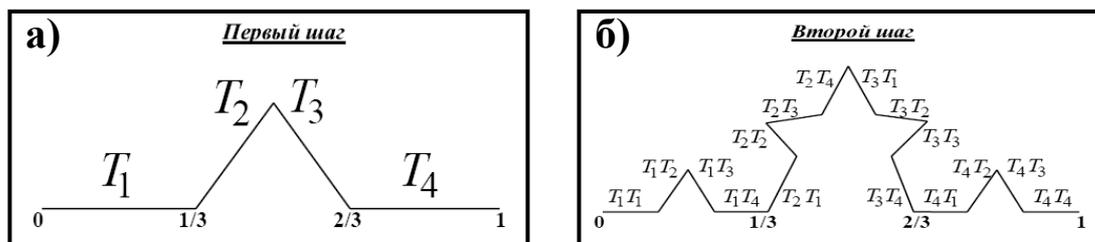


Рис. 22. Первый (а) и второй этапы (б) аналитического построения кривой Коха.

тем сдвигается вдоль вещественной оси на постоянный вектор $\frac{1}{3}$;

3) $T_3 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}ze^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ – описывает уменьшение исходного отрезка в 3 раза, поворот построенного отрезка на угол $\frac{\pi}{3}$ по часовой стрелке, перемещение (трансляция) его вдоль постоянного вектора $\frac{1}{3}$, который был повернут на угол $\frac{\pi}{3}$ против часовой стрелки;

4) $T_4 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$ – масштабирует начальный отрезок и сдвигает результирующий отрезок вдоль вещественной оси на постоянный вектор с длиной $\frac{2}{3}$.

Повторное применение процедур 1)-4) порождает второй шаг построения кривой Коха (рис. 22б), далее схема повторяется до установленного шага или бесконечности.

По такой же схеме строится “двойной дракон” Хартера-Хайтвея (рис. 10б). Его изображение возникает при использовании системы аффинных преобразований вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 \Rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{2}}ze^{-i\frac{\pi}{4}} - 1 \\ T_2 \Rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{2}}ze^{-i\frac{3\pi}{4}} + i \end{array} \right. . \text{ Фрактальная раз-}$$

мерность “двойного дракона” $D = 1,5236$.

91.2. Мультифракталы

Реальные объекты, явления и процессы всегда состоят из детерминированных и стохастических подсистем. Описание случайных элементов, согласно их природе, требует конечного (иногда и бесконеч-

ного) множества геометрических фигур с разными масштабными коэффициентами, т.е. они состоят из совокупности неоднородных монофракталов. Смесь неоднородных монофракталов порождает сложные множества, которые отображают либо моментальное состояние динамической системы, либо геометрию неупорядоченной среды. Для их изучения применяют мультифракталы, которые имеют спектр скейлинговых размерностей.

Мультифракталами называют самоподобные фигуры, составленные из различающихся по своим свойствам частей, каждая из которых характеризуется своей размерностью Хаусдорфа-Безиковича.

Мультифракталы характеризуются такими *свойствами*:

- в отличие от регулярных фракталов они неоднородны, т.е. составлены из несоразмерных структур;
- неоднородность мультифракталов приводит к введению спектра размерностей Хаусдорфа-Безиковича;
- помимо геометрических параметров они обладают статистическими характеристиками.

Продемонстрируем различие между фракталами и мультифракталами на примере покрытия плоскости самоподобными плоскими фигурами (рис. 23).

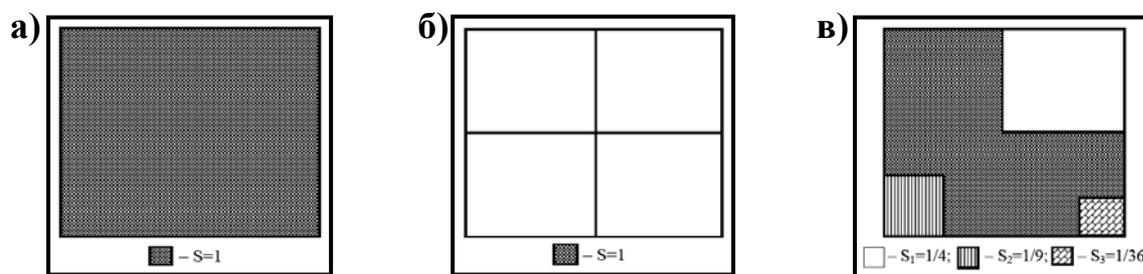


Рис. 23. Покрытие единичного квадрата (а) фрактальной (б) и мультифрактальной (в) плитками.

Вначале покроем квадрат с единичной площадью фрактальными плитками с площадью $S_1 = \frac{1}{4}$. Число способов, которыми можно покрыть данную площадь, равно единице. Если покрывать начальный квадрат плитками с различными коэффициентами подобия, а, следовательно, и с разными площадями плиток ($S_1 = \frac{1}{4}$, $S_2 = \frac{1}{9}$ и $S_3 = \frac{1}{36}$), то число способов покрытия равно 8 (квадрат покрывается целым числом плиток того или иного вида):

$$1) S=4S_1; \quad 2) S=9S_2; \quad 3) S=36S_3; \quad 4) S=3S_1+9S_3;$$

$$5) S=2S_1+18S_3; \quad 6) S= S_1+27S_3; \quad 7) S=3S_2+24S_3; \quad 8) S=S_2+32S_3.$$

Этот пример показывает не только неоднородность покрытия, но и появление статистических свойств мультифрактала. Продолжение рассмотренного процесса для каждого вида плитки до бесконечности приводит к неоднородному расположению точек фрактальных подмножеств по площади заданного квадрата. “Население” наугад выбранной геометрически сходной плитки будет с каждой итерационной процедурой изменяться, поэтому количество точек внутри любой области можно только предсказать, но не предвидеть. Если обозначить через p_i вероятность попадания точки в квадрат с площадью S_i , то на первом итерационном шаге из N исходных точек в квадрат с площадью S_1 попадёт p_1N точек. На втором шаге эти точки перераспределяются между тремя аналогичными квадратами, “заселённость” которых составит p_1^2N , p_1p_2N и p_1p_3N . На третьем шаге эти величины будут равны p_1^3N , $2p_1^2p_2N$, $2p_1^2p_3N$, $p_1p_2^2N$, $2p_1p_2p_3N$ и $p_1p_3^2N$. Отсюда видно, что “заселённость” квадрата i изменяется с каждым итерационным шагом. Рассмотрим общую картину этого явления.

91.3. Обобщённая статистическая сумма мультифрактала

Пусть отображение реального объекта (например, острова на географической карте) занимает область S (рис. 24а), имеет фрактальную размерность D и на фиксированном этапе построения состоит из N точек.

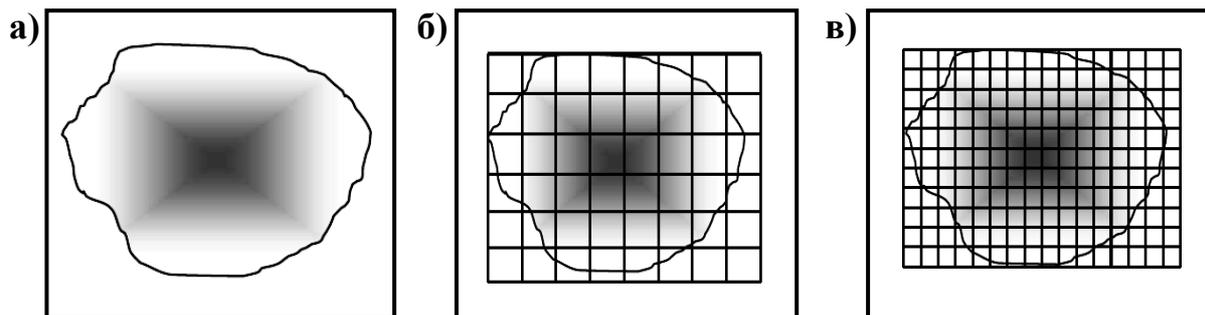


Рис. 24. Определение видов растений на острове (а) методом ячеек (б, в) со случайно выбранным размером.

Покроем изучаемую область сеткой квадратов со случайно выбранной стороной ε (рис. 24б, в), которая значительно меньше максимального линейного размера острова. Из рис. 24 (б и в) видно, что общее число ячеек $n(\varepsilon)$ зависит от размера ячейки покрытия. Обозначим через $n_i(\varepsilon)$ количество ячеек, в которой находится i точек (в дальней-

шем считаем, что все ячейки заняты хотя бы одной точкой). Вероятность того, что в наугад выбранной ячейке будет находиться i точек, равна $p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$, и она определяет относительную “заселённость” выбранной ячейки.

Вероятности $p_i(\varepsilon)$ должны удовлетворять стандартному условию нормировки, принятому в теории вероятностей: $\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1$. Однако наличие пустых ячеек приводит к невыполнимости условия нормировки. Поэтому расчёт статистической суммы для выбранной системы выполняется следующими способами:

– учитывается присутствие пустых (вакансионных) ячеек; взаимодействие занятых точками ячеек между собой (перемещение определённого числа точек из одной ячейки в другую при скейлинговом преобразовании); комбинаторные свойства системы при обмене местами тождественных ячеек и т.д.;

– вводится мультифрактальное обобщённое выражение для статистической суммы с “деформацией” значений $p_i(\varepsilon)$ (математическое моделирование; см. монографию Б.Б. Мандельброта “Фрактальная геометрия природы”).

Рассмотрим обобщённое выражение для статистической суммы $Z(\varepsilon, q)$, которая зависит не только от геометрического размера, но и от показателя степени q значения вероятности $p_i(\varepsilon)$ (“деформации” вероятности):

$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon)$. Введём в рассмотрение скейлинговую экспоненту $\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(\varepsilon, q)}{\ln \varepsilon}$, тогда обобщённая фрактальная размер-

ность Реньи определится формулой $D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1}$.

Если эта размерность не зависит от параметра q , т.е. $D(q) = D$, то геометрическая фигура является неоднородным монофракталом, в противном случае она – мультифрактал. Показательный закон зависимости обобщённой статистической суммы от скейлинговой экспоненты

имеет вид $Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}$.

В случае регулярного (однородного) фрактала количество точек в каждой ячейке одинаково и равно $n_i(\varepsilon) = \frac{N}{n(\varepsilon)}$. Следовательно, вероятность того, что наугад выбрана ячейка с числом точек i , одинакова

для всех ячеек и равна $p_i(\varepsilon) = \frac{1}{n(\varepsilon)}$. Обобщённая статистическая сумма

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{1}{n^q(\varepsilon)} = n(\varepsilon) \frac{1}{n^q(\varepsilon)} = n^{1-q}(\varepsilon).$$

При достаточно малом значении линейного размера ячейки ε общее число ячеек по Хаусдорфу-Безиковичу равно $n(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}$, следовательно, обобщённая статистическая сумма определится равенством $Z(\varepsilon, q) \approx \varepsilon^{D(q-1)}$. Для однородного монофрактала скейлинговая экспонента зависит от показателя “деформации” вероятностей по линейному закону. Нелинейная зависимость приводит к спектру размерностей и, как следствие, к возникновению многомасштабного фрактального объекта.

Так как параметр q принадлежит множеству действительных чисел, то при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в статистическую сумму дают разреженные ячейки, заполнение которых оценивается малыми вероятностями. Если $q \rightarrow +\infty$, то основной вклад в статистическую сумму дают ячейки с большой “заселённостью” и высокими значениями вероятностей обнаружения таких ячеек. Следовательно, размерность Реньи характеризует плотность заполнения ячеек, т.е. *неоднородность распределения точек по мультифракталу*.

92. “Размерность фрактальных объектов и спектр сингулярностей мультифракталов”

92.1. Фрактальная, информационная и корреляционная размерности

При $q=0$ размерность Реньи постоянна и равна $D(0) = D_0$, при этом обобщённая статистическая сумма $Z(\varepsilon, 0) = n(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-D_0}$. Из формулы следует, что размерность Хаусдорфа-Безиковича D_0 является грубым параметром для мультифрактала. При $q = 1$, учёте всех ячеек (занятых i точками и пустых) и условия нормировки получим, что $Z(\varepsilon, 1) = 1$, а скейлинговая экспонента $\tau(1) = 0$. Обобщённую статистическую сумму перепишем в виде

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i p_i^{q-1} = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i e^{\ln p_i^{q-1}} = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i e^{(q-1) \ln p_i}.$$

Так как $q \rightarrow 1$, то показатель экспоненты является малой величиной, поэтому её можно разложить в ряд Тейлора ($e^x \approx 1 + x$):

$$e^{(q-1) \ln p_i} \approx 1 + (q-1) \ln p_i,$$

при этом обобщённая статистическая сумма приводится к выражению $Z(\varepsilon, q) \approx 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) \ln p_i(\varepsilon)$. Величина $S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) \ln p_i(\varepsilon)$ называется в математической теории *энтропией фрактальной фигуры*, а в физике – *безразмерной конфигурационной энтропией*. Скейлинговая экспонента с учётом соотношения $\ln(1-x) \approx -x$ приводится к виду

$$\tau(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(\varepsilon, 1)}{\ln \varepsilon} = - (q-1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

а размерность $D(1) = \frac{\tau(1)}{q-1} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon}$.

В силу того, что энтропия является мерой хаоса или недостатка информации $I(\varepsilon) = -S(\varepsilon)$ о местонахождении ячеек с i точками, то размерность $D(1)$ определяет информацию, которая нужна для фиксирования местоположения точки в наугад выбранной ячейке. В качестве примера вычислим, сколько надо задать вопросов, чтобы определить положение *одной* частицы в **16** ячейках. Первый вопрос: частица находится в ячейке с номером большим 8? Ответ – нет (**F**; ответы на вопросы: **False** – ложь, **True** – правда). Второй вопрос: частица размещается в ячейке, с номером который превышает 4? Ответ – да (**T**). Третий вопрос: частица расположена в ячейке с номером, который не более 6? Ответ – да (**T**). Четвёртый вопрос: частицу можно найти в ячейке под номером 6? Ответ – нет (**F**). Следовательно, она располагается в ячейке под номером **5**. Теперь вычислим количество требуемых вопросов *аналитически*.

Вероятность того, что в **16** ячейках будет обнаружена *одна* частица, равна $p_i = \frac{1}{16}$. Согласно определению информации по Шенону, получим $I(\varepsilon) = - \frac{S(\varepsilon)}{\ln 2} = - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i \frac{\ln p_i}{\ln 2} = - \sum_{i=1}^{16} p_i \log_2 p_i = - \sum_{i=1}^{16} \left(\frac{1}{16}\right) \log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = 16 \cdot \frac{1}{4} = 4$.

На рис. 25 показан информационный процесс определения местоположения *одной* частицы в **16** ячейках. Поэтому размерность

$$D(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

называется *информационной*. Вычислим размерность $D(2)$, которая

задаётся равенством $D(2) = \tau(2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^2 \right)}{\ln \varepsilon}$ и тесно связана с корреляционной функцией

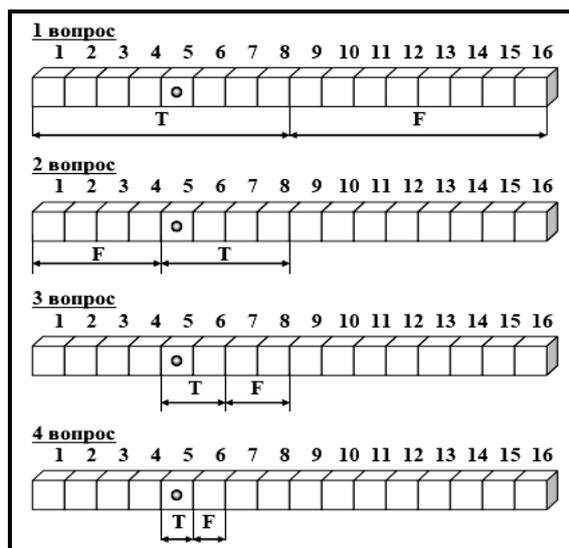


Рис. 25. Нахождение частицы с помощью вопросов, на которые можно отвечать только да (Т) или нет (F).

$$K(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k,l}^N \theta(\varepsilon - |\bar{r}_k - \bar{r}_l|)}{N^2}$$

где суммирование проводится по всем парам точек мультифрактала с радиус-векторами r_k и r_l , $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – **функция Хевисайда**. Исходя

из определения **функции Хевисайда**, находим, что суммирование в формуле для корреляционной функции ведётся по всем парам точек, расстояние между которыми не менее линейного размера ячейки ε . Эта сумма, поделённая на N^2 , определяет вероятность обнаружения таких точек в мультифрактале.

Эту же вероятность можно найти следующим образом: величина p_i^2 определяет вероятность попадания в ячейку i двух точек, а сумма таких вероятностей – задаёт вероятность того, что две произвольно выбранные точки фрактального множества лежат в одной ячейке. Следовательно, можно записать, что корреляционный интеграл приближённо равен $K(\varepsilon) \approx Z(\varepsilon, 2) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^2(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D(2)}$. Отсюда найдём, что размер-

ность $D(2) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln K(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$, которая называется **корреляционной**.

Общим свойством **размерности Реньи** является её монотонное убывание с ростом значения параметра q , следовательно, **максимального** значения функция $D(q)$ достигает при $q \rightarrow -\infty$, а **минимального** – при $q \rightarrow +\infty$.

В качестве ещё одного примера рассмотрим неоднородную “пыль” Кантора, распределение вероятностей показано на рис. 26.

p=1				
P₁		P₂		
P₁²	P₁P₂	⋮	P₂P₁	P₂²
⋮				

Рис. 26. Построение неоднородного фрактального множества Кантора.

На n -ом итерационном шаге её построения обобщённая статистическая сумма будет определяться обычным биномом Ньютона

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} C_{n(\varepsilon)}^k [p_1^q(\varepsilon)]^k [p_2^q(\varepsilon)]^{n(\varepsilon)-k} = (p_1^q + p_2^q)^{n(\varepsilon)},$$

здесь $C_{n(\varepsilon)}^k = \frac{n(\varepsilon)!}{k!(n(\varepsilon)-k)!}$ – число сочетаний из общего числа ячеек $n(\varepsilon)$

по k ячеек. На изучаемом процедурном шаге размер ячейки равен $\varepsilon = 3^{-n}$, следовательно, $(p_1^q + p_2^q)^{n(\varepsilon)} \approx 3^{-n(\varepsilon)\tau(q)}$, т.е. скейлинговая экспонента

определяется формулой $\tau(q) = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 3}$, что позволяет для обобщённой размерности получить выражение $D(q) = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 3}$. Для од-

нородной “пыли” Кантора вероятности $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ и все её размерности (Хаусдорфа-Безиковича, информационная, корреляционная, ...) совпадают, поэтому хаусдорфову размерность можно вычислить, положив параметр $q=2$: $D = D(2) = -\frac{\ln(p_1^2 + p_2^2)}{(2-1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$. Для неоднород-

ной “пыли” Кантора ($p_1 = \frac{1}{4}$ и $p_2 = \frac{3}{4}$) спектр обобщённых размерностей показан на рис. 27.

ной “пыли” Кантора ($p_1 = \frac{1}{4}$ и $p_2 = \frac{3}{4}$) спектр обобщённых размерностей показан на рис. 27.

ной “пыли” Кантора ($p_1 = \frac{1}{4}$ и $p_2 = \frac{3}{4}$) спектр обобщённых размерностей показан на рис. 27.

92.2. Спектр сингулярностей мультифрактала

Помимо обобщённых размерностей используют функцию мультифрактального спектра или спектр сингулярностей мультифрактала. Для однородных фракталов $p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{D_0}$. В общем случае количество ячеек определённого сорта зависит от их размера по степенному закону, что приводит к аналогичной зависимости для вероятностей обнаруже-

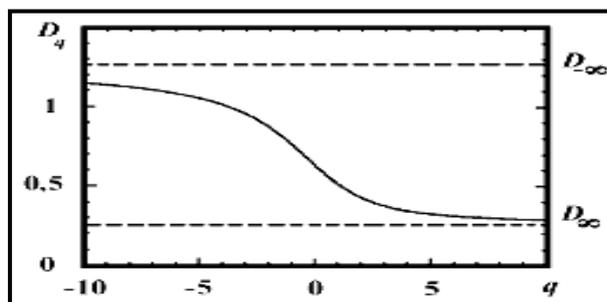


Рис. 27. Изменение размерности неоднородной “пыли” Кантора.

ния ячеек в мультифрактале $p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha_i}$.

Показатель степени α_i называют *экспонентой сингулярности* или *показателем Липшица-Гёльдера*.

Эта формула показывает, что, чем меньше экспонента сингулярности, тем бóльшую по величине особенность имеет функция $p_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для мультифракталов типичной ситуацией является изменение параметра сингулярности в конечном интервале от α_{\min} до α_{\max} . Эти *показатели Липшица-Гёльдера* можно определить формулами

$$\alpha_{\min} = \left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = D(+\infty) \quad \text{и} \quad \alpha_{\max} = \left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = D(-\infty).$$

Им соответствуют малые $p_{i \min}$ и большие $p_{i \max}$ вероятности заполнения наудачу выбранной ячейки.

Изменение параметра α_i ставит вопрос о законе распределения вероятностей попадания его значения в тот или иной наперёд заданный интервал. Число ячеек, имеющих один и тот же показатель сингулярности α_i в интервале от α до $\alpha + d\alpha$, обозначим через $n(\alpha)d\alpha$. Плотность вероятности $n(\alpha)$ определим в виде $n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}$, где функция $f(\alpha)$ задаёт размерность некоторого фрактального подмножества данного мультифрактала. Размерность этого подмножества всегда меньше или равна размерности самого множества. Таким образом, функция $f(\alpha)$ описывает спектр размерностей однородных подмножеств, на которые можно разбить исходное множество, представляющее мультифрактал.

Каждому однородному фракталу принадлежит только часть из общего числа ячеек $n(\varepsilon)$, поэтому при суммировании по подмножеству условие нормировки вероятностей не выполняется (очевидно, что их сумма меньше единицы). Следовательно, для всех значений α выполняется неравенство $f(\alpha) \leq \alpha$, знак равенства имеет место для однородных фракталов. Вычисление обобщённой статистической суммы с за-

меной суммирования по i на интегрирование по α приводит к формуле $Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \int n(\alpha) \varepsilon^{q\alpha} d\alpha \approx \int \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha$. В силу малости величины

ε обобщённую статистическую сумму можно оценить функцией вида $Z(\varepsilon, q) \approx \varepsilon^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))} = \varepsilon^{\tau(q)}$, при выполнении равенства $q = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}$. Тогда

обобщённая фрактальная размерность определяется соотношением $D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}{q-1}$. Знание зависимости $D(q)$ позволяет найти

параметрическую функцию $\alpha(q)$ по формуле

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [D(q)(q-1)] = \frac{d\tau(q)}{dq}.$$

Следовательно, экспонента сингулярности задаётся выражением

$$f(\alpha) = q \frac{d\tau(q)}{dq} - \tau(q),$$

которое является преобразованием Лежандра. Обратный переход осуществляется по формуле $\tau(q) = \alpha \frac{df(\alpha)}{d\alpha} - f(\alpha)$.

Аналогичными равенствами связаны между собой характеристические функции в термодинамике, в частности, свободная энергия F и внутренняя энергия U для замкнутой системы с энтропией S при температуре T : $U = F + ST = F - T \frac{\partial F}{\partial T}$. Другим примером является замкнутая

механическая система, которая имеет функцию Лагранжа L и движется со скоростью \dot{q} . Её полная энергия E сохраняется и определяется формулой $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$. Аддитивность лагранжиана приводит

к тому, что энергия совокупности замкнутых подсистем равна сумме их энергий. Данное свойство сохраняется и тогда, когда замкнутые подсистемы находятся в постоянном (не зависящем от времени) внешнем поле.

Системы, для которых энергия сохраняется, называются **консервативными**.

В классической механике преобразование Лежандра применяется тогда, когда одни характеристики состояния системы являются независимыми аргументами функции Гамильтона, например, обобщённая координата q , а другие – независимыми переменными Лагранжа, например, параметр ξ . Переход от переменных вида $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$ к переменным $q, \xi, p = m\dot{q}, \xi$ сопровождается введением функции Рауса

$$R(q, \xi, p, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L,$$

дифференциал которой равен

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q} dq + \frac{\partial R}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial R}{\partial p} dp + \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} = -\dot{p}dq - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}.$$

Параметры ξ и скорости их изменения $\dot{\xi}$, относительно которых не происходит преобразования Лежандра, удовлетворяют уравнению

Лагранжа $\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \right]$ с заменой функции Лагранжа на функцию

Рауса. Следовательно, функция Рауса является гамильтоновой по отношению к переменной q и лагранжевой по отношению к координате ξ . Энергия системы определяется равенством:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \dot{\xi} - L = R - \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \dot{\xi}.$$

● Функция Рауса оказывается наиболее полезной в том случае, когда координата q явным образом не входит в функцию Лагранжа, такая координата называется циклической. Циклическая координата находится прямым интегрированием равенства $\dot{q} = \frac{\partial R(\xi, p, \dot{\xi})}{\partial p}$. ●

С физической точки зрения мультифрактал можно считать закрытой системой с замкнутыми однородными фракталами, которая характеризуется спектром сингулярностей $f(\alpha)$. В точке, соответствующей однородному фракталу параметр $\alpha(0)$ равен хаусдорфовой размерности $\alpha(0) = D_0 = f(\alpha_0)$. Так как остальные размерности меньше этой величины, то функция сингулярностей имеет максимум в точке $\alpha(0) =$

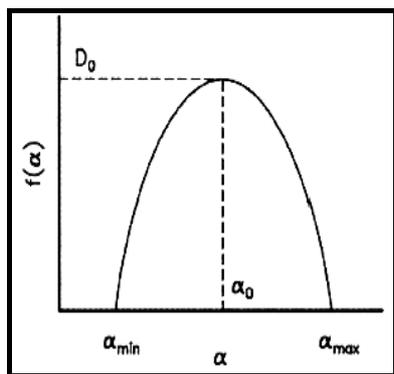


Рис. 28. Один из возможных видов функции спектра сингулярностей.

$= D_0$. Информационная размерность лежит на кривой $f(\alpha(q))$ в точке, для которой выполняются равенства

$$f(\alpha) = \alpha \quad (\text{неподвижная точка})$$

или

$$f'(\alpha) = 1 \quad (\text{слипер}).$$

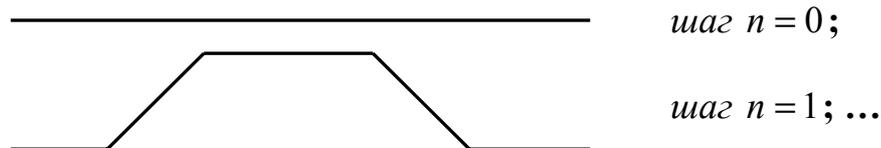
Для корреляционной размерности функция сингулярностей равна $f(\alpha(2)) = 2\alpha(2) - D_2$. Один из видов графика функции $f(\alpha)$ приведен на рис. 28.

Отметим тот факт, что другие функции $f(\alpha)$ могут в нуль и не обращаться на концах интервала $[\alpha_{\min}; \alpha_{\max}]$.

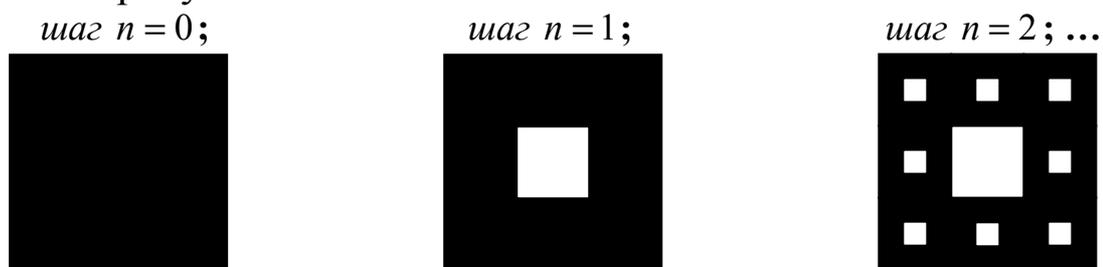
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 1**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *папоротник* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = x^2 + x - 2$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $X(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,2$; $b=0,4$ и $c=8$,

построить график функции $Z(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=1,2$ и $b=2,5$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=2$; $b=5$ и $c=2$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a=0,3$, $b=0,5$ и

$c=4$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

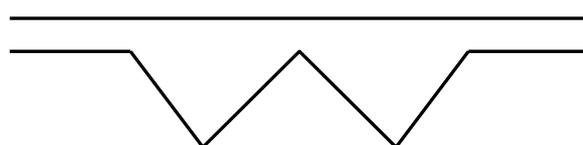
решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

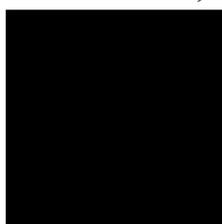
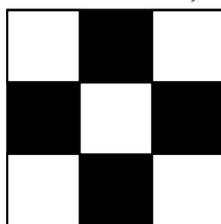
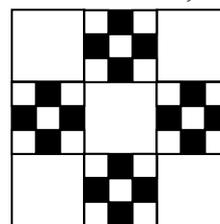
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 2**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):

шаг $n = 0$;шаг $n = 1$; ...

2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:

шаг $n = 0$;шаг $n = 1$;шаг $n = 2$; ...

3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *кристалл* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = x^2 + 5x + 6$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $Y(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,2$; $b=0,4$ и $c=8$,

построить график функции $X(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}, \text{ если } a=2,8 \text{ и } b=0,3.$$

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$$f(z) = az^2 + bz + c, \text{ если } a=1; b=3 \text{ и } c=2.$$

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

$$\text{проекцию фигуры Жюлиа } \begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}, \text{ если } a=1,2, b=2,7 \text{ и}$$

$$c=4.$$

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

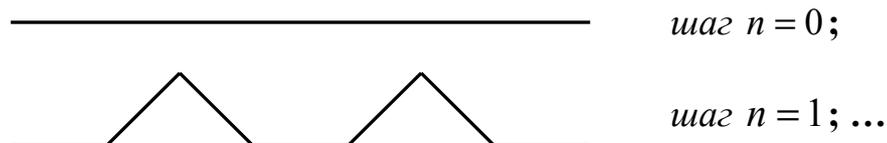
$$\text{решение системы уравнений } \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}. \text{ Выяснить влияние на вид}$$

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

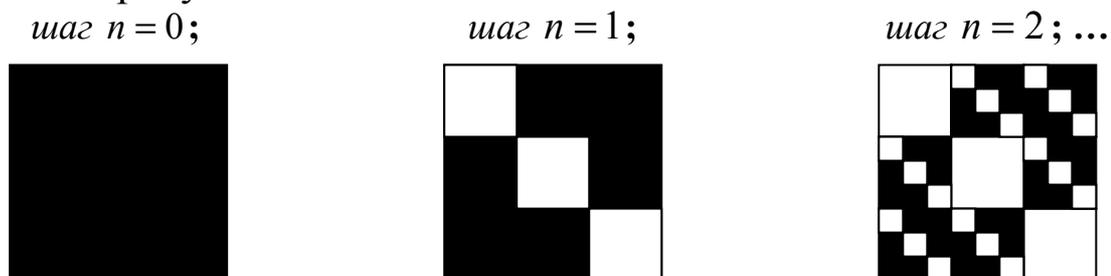
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 3**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *лист* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = 2x^2 + 7x + 5$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $Z(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,2$; $b=0,4$ и $c=8$,

построить график функции $Y(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=-0,7$ и $b=1,9$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=1$; $b=1$ и $c=-2$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a=3,2$, $b=1,7$ и

$c=8$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

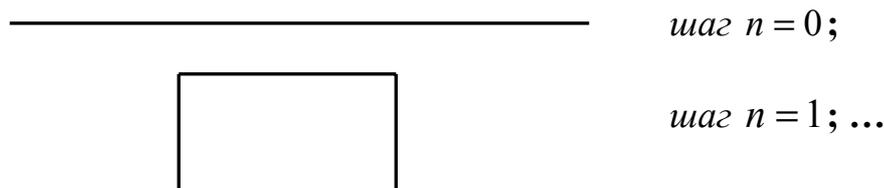
решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

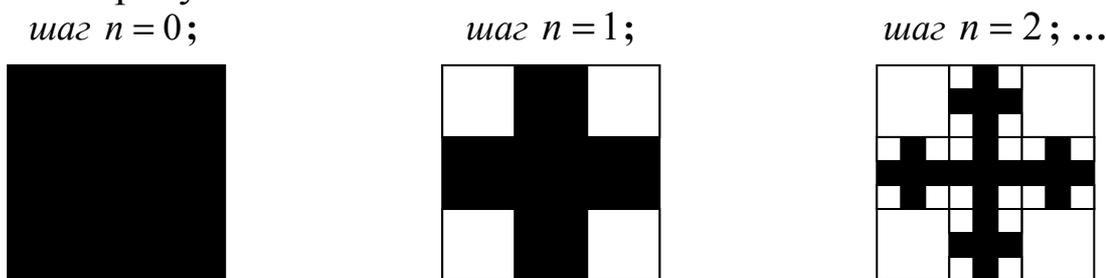
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 4**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *дерево* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = 2x^2 + 9x + 5$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a = 10$, $b = 24,74$ и $c = \frac{8}{3}$,

построить график функции $X(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a = 1,6$; $b = 1,4$ и $c = 4$,

построить график функции $Z(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a = -2,1$ и $b = 0,2$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a = 2$; $b = 7$ и $c = 5$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a = 0,7$, $b = 0,1$ и

$c = 2$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

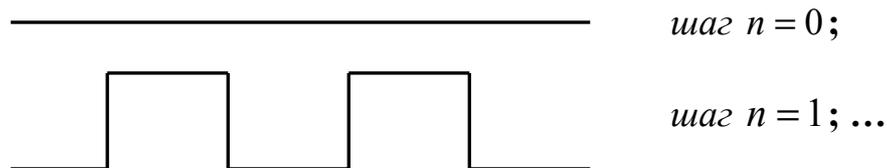
решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

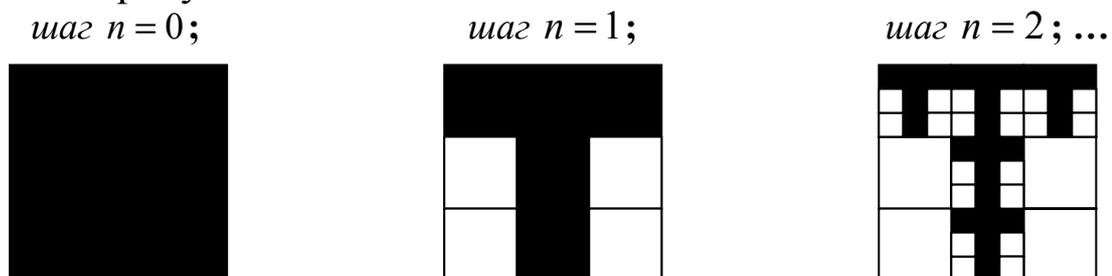
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 5**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *папоротник* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = x^2 + x - 12$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $Y(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=1,6$; $b=1,4$ и $c=4$,

построить график функции $X(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=-1,3$ и $b=-0,4$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=3$; $b=-1$ и $c=-2$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a = 0,1$, $b = 0,5$ и

$c=4$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = x^2 - x - 6$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $Z(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,2$; $b=0,2$ и $c=6$,

построить график функции $Y(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=0,9$ и $b=0,9$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=3$; $b=-4$ и $c=1$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a=0,2$, $b=0,3$ и

$c=8$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

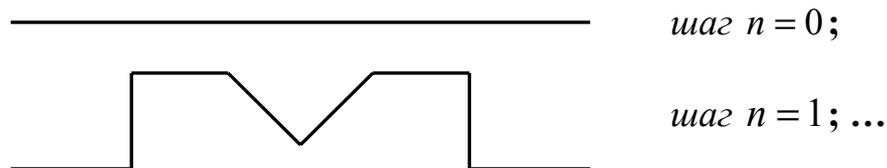
решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

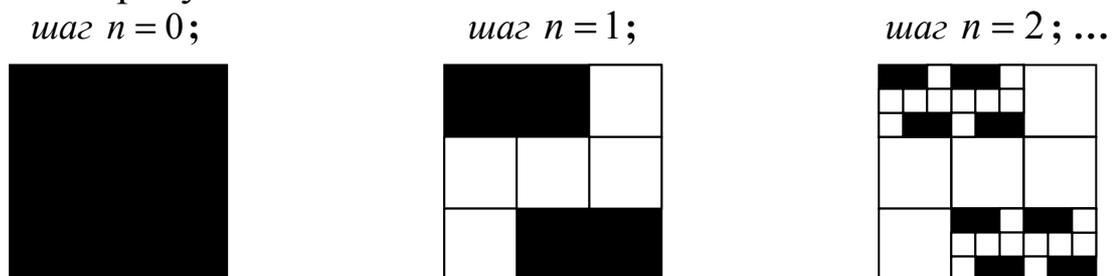
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 7**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *лист* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $X(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,3$; $b=0,4$ и $c=8$,

построить график функции $Z(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=1,7$ и $b=-1,1$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=1$; $b=3$ и $c=-4$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a=0,1$, $b=0,5$ и

$c=6$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

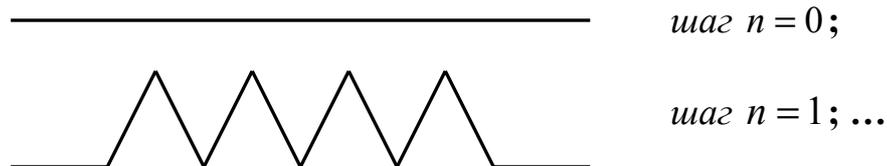
решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

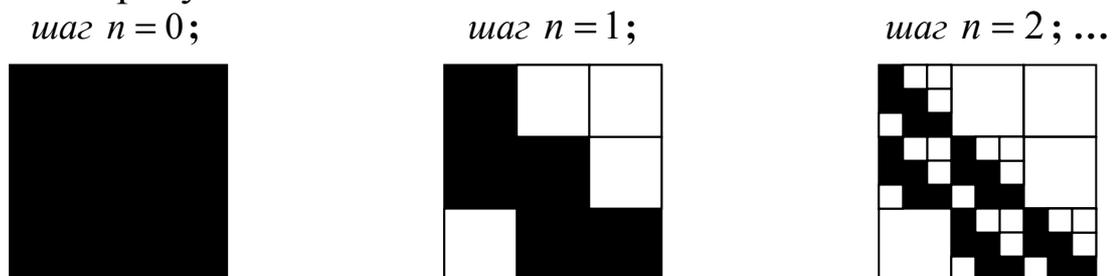
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 8**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *дерево* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = 8x^2 + 2x - 1$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $Y(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,3$; $b=0,4$ и $c=8$,

построить график функции $X(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=0,2$ и $b=-0,7$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=4$; $b=1$ и $c=-5$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a=0,2$, $b=0,1$ и

$c=3$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

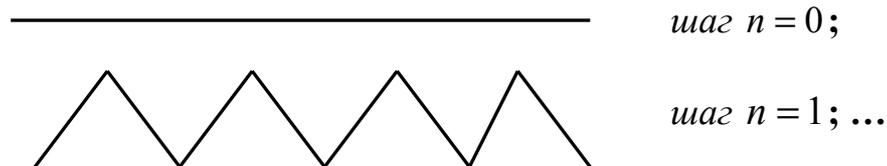
решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

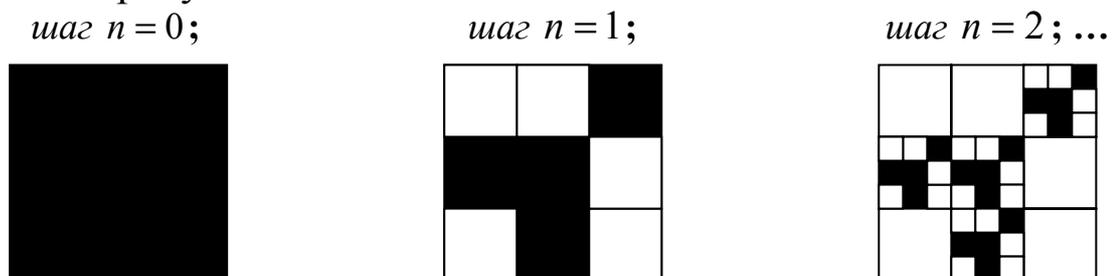
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 2**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *папоротник* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = 9x^2 - 4$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $Z(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,3$; $b=0,4$ и $c=8$,

построить график функции $Y(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=-2,1$ и $b=-0,1$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=-6$; $b=5$ и $c=1$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a=0,4$, $b=0,7$ и

$c=3$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

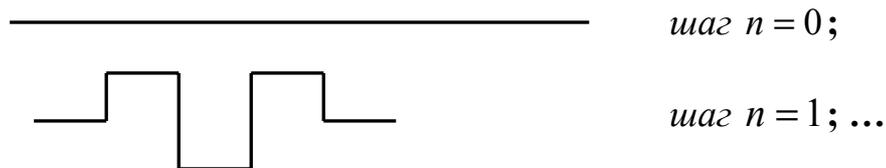
решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

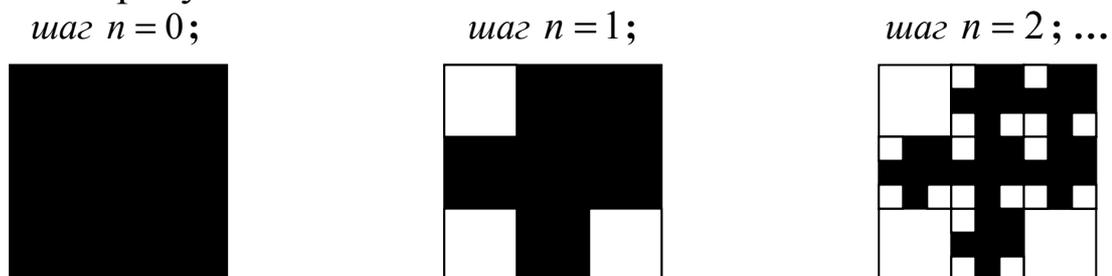
Задания для самостоятельного решения

Фрактальная геометрия**Вариант 10**

1. Определить *размерность Хаусдорфа-Безиковича* для конструктивного фрактала, построение которого из отрезка единичной длины показано на рисунке (в отчёте изобразить рисунки пунктов 1 и 2 до шага $n = 4$):



2. Вычислить *фрактальную размерность* фигуры, построение которой показано на рисунке:



3. Используя приведенную таблицу и четыре системы аффинных преобразований вида (СИФ) $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases}$, построить *кристалл* (число итераций 200000).

Фрактал	a	b	c	d	e	f
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

4. Придумать и построить на компьютере *свой фрактал* с помощью *собственной* детерминированной или рандомизированной СИФ.

5. Создать компьютерную программу итерационного процесса поиска корней уравнения $x_{n+1} = f(x_n)$, если $f(x) = x^2 - 9$, с фиксацией точек $(x_n; f(x_n))$ на экране дисплея.

6. Решить уравнение Лоренца
$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}$$
 при $a=10$, $b=24,74$ и $c=\frac{8}{3}$,

построить график функции $X(t)$.

7. Решить уравнение Рёсслера
$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases}$$
 при $a=0,4$; $b=0,2$ и $c=4$,

построить график функции $Y(t)$.

8. Построить множество Мандельброта, согласно системе итерационных уравнений
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}$$
, если $a=0,4$ и $b=0,2$.

9. Создать компьютерную программу для реализации итерационного процесса метода Ньютона $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ для комплексной функции

$f(z) = az^2 + bz + c$, если $a=5$; $b=-7$ и $c=2$.

10. Исследовать с помощью компьютерной программы трёхмерную

проекцию фигуры Жюлиа
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \\ z_{n+1} = 2x_n z_n + c \end{cases}$$
, если $a=0,2$, $b=0,7$ и

$c=5$.

11. Создать компьютерную программу и исследовать с её помощью

решение системы уравнений
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = ay + b \sin y \\ \frac{dy}{d\tau} = -ax \end{cases}$$
. Выяснить влияние на вид

решения значений параметров a и b . Найти их критические величины. Изобразить решение на плоскости xOy .

Список использованных источников

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований. – 2002. – 656 с.
2. Берже М. Геометрия. – Москва: Мир. – 1984: Т.1. – 560 с.; Т.2. – 368 с.
3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. – Москва: Мир. – 1991. – 368 с.
4. Федер Е. Фракталы. – Москва: Мир. – 1991. – 248 с.
5. Кроневер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – Москва: Постмаркет. – 2000. – 352 с.
6. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 128 с.
7. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. – 2001. – 528 с.
8. Шустер Г. Детерминированный хаос / Г. Шустер – Москва: Мир, 1988. – 240 с.
9. Олемской А.И., Флат А.Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163, № 12. – С. 1-50.
10. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – Москва: Наука, 1991. – 133 с.
11. Barnsley M.F. Superfractals. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2006. – 464 pp.
12. Терехов С.В. Введение в синергетику. – Донецк: “Цифровая типография”. – 2009. – 187 с.
13. Иванова В.С., Баланкин А.С. Синергетика и фракталы в материаловедении. – Москва: Наука. – 1994. – 214 с.
14. Козлов Г.В., Новиков В.У. Синергетика и фрактальный анализ сетчатых полимеров. – Москва: Классика. – 1998. – 112 с.
15. Терехов С.В. Фракталы и физика подобия. – Донецк: “Цифровая типография”. – 2011. – 255 с.
16. Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Фракталы в волновых процессах // Успехи физических наук. – 1995. – Т.165, № 4. – С. 361-401.
17. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов / Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета. – 1999. – 140 с.



Терехов С.В.
Варюхин В.Н.



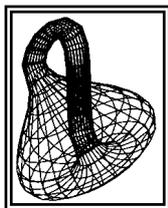
*Математическая библиотечка
студента-физика*

Том 3

(для студентов специальности
«Теоретическая физика»:
часть III)

Решение задач

по теории вейвлетов, дифференциалам



ТФШ. Теория вейвлетов. Дифференциалы

Тема: Теория вейвлетов

93. “Маленькие волны”

93.1. Построение базиса вейвлетов

Распознавание образов, одиночных и множественных сигналов, кодирование и свёртывание больших объёмов информации, исследование турбулентности, дешифровка рентгенограмм осуществляется с помощью вейвлет-анализа (“*wavelet*” в переводе с английского языка означает “*маленькая волна*” или “*всплеск*”). Солитоноподобное преобразование базируется на применении совокупности функций, обладающих свойством пространственной (временной) и частотной локализованности. Локализация всплеска позволяет проанализировать поведение системы в обычном пространственно-временном континууме и в частотном подпространстве. Вейвлеты образуют иерархический базис и позволяют получить крупномасштабную и высокочастотную информацию о системе. В отличие от Фурье-анализа, всплески являются “математическим микроскопом”, с помощью которого исследуют внутреннюю природу неоднородных объектов и их *скейлинговые* (“*scale*” – *масштаб*) свойства. Проведём сравнение вейвлет-преобразования с представлением 2π -периодической функции $f(t)$ в виде ряда

Фурье $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, где коэффициенты ряда вычисляются по формуле $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. В этом случае функция раскладывается на гар-

моники, т.е. задаётся в виде суперпозиции бесконечного числа синусоидальных волн с разными амплитудами и частотами. Для *непериодических* и *определённых на всей числовой оси функций* необходимо построить новые ряды.

Ряды, позволяющие вычислить значение *непериодических* и *определённых на всей числовой оси функций* при любом значении аргумента и отобразить графики функции на любом интервале произвольной длины, называются *вейвлетными*.

Для решения поставленной задачи будем использовать “*маленькие волны*”, которые быстро сходят на *нет* при стремлении аргумента функции к любой из бесконечностей.

Вейвлет $\psi(t)$, способный покрыть всю числовую ось (это можно осуществить с помощью сдвигов, т.е. определив функцию $\psi(\omega t - n)$, где

частота вейвлета $\omega = 2^k$), называется **базисным (материнским)**.

Для простоты рассуждений будем считать, что числа n и k являются целыми. Если базисный вейвлет $\psi(t)$ имеет единичную норму, то все остальные функции множества $\psi_{kn} = 2^k \psi(2^k t - n)$ также будут нор-

мированы на единицу, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{kn}(t) \psi_{lm}(t) dt = \delta_{kl} \delta_{nm}$ ($\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$ — **сим-вол Кронекера**).

Представление непериодической функции, заданной на всей числовой оси, в виде ряда $f(t) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} b_{kn} \psi_{kn}(t)$ называется **дискретным вейвлет-преобразованием**.

Простейшим ортогональным вейвлетом называется **функция**

Хаара, которая задаётся формулой: $\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$ (рис. 1).

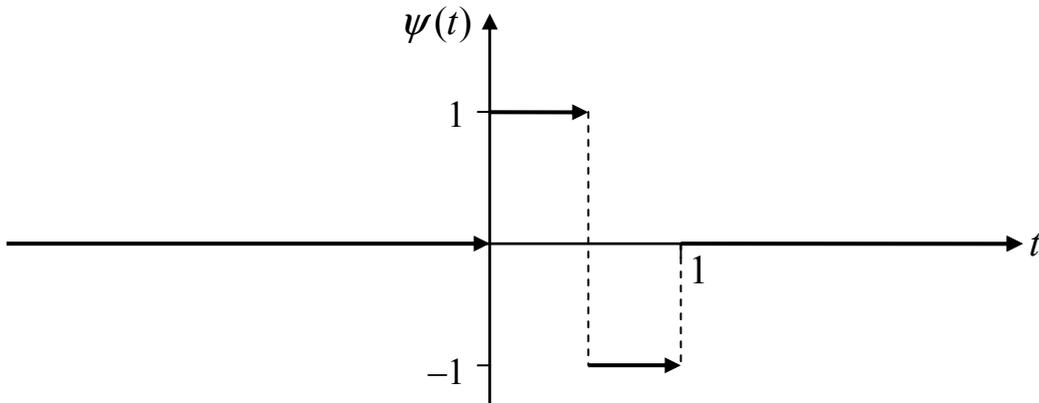


Рис. 1. **Функция Хаара**, определяющая простейший вейвлет.

В общем случае вейвлет-базис может быть сконструирован с применением масштабных преобразований (скейлинговый коэффициент a) и переносов (параметр b) материнского вейвлета $\psi(t)$:

$$\psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

(параметры a и b могут быть и комплексными числами).

Интегральное преобразование произвольной функции $f(t)$ вида

$$W_{\psi} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}^*(t) dt$$

называется **интегральным вейвлет-преобразованием**.

Восстановление оригинальной функции $f(t)$ по его вейвлетному изображению называется **обратным вейвлет-преобразованием** и задаётся формулой

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(t) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

где нормирующий коэффициент $C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_{ab}(\omega)| \frac{d\omega}{\omega}$.

93.2. Распознавание сигналов с помощью вейвлетов

Из теории анализа сигналов известно, что частота сигнала обратно пропорциональна его длительности. Следовательно, для получения высокочастотной информации надо извлекать её из узких временных интервалов, а низкочастотную – из относительно длительных промежутков времени. Такими *свойствами* всплеск обладает в соответствии со своим определением: а) локальность; б) обладает нулевым средним порядка m по времени $\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0$ ($m = 0, 1, \dots$); в) ограниченность

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \psi^*(t) dt < \infty$; г) автомодельность базиса сводится к тому, что все члены множества базисного вейвлета имеют такое же число осцилляций, что и основной вейвлет.

На практике наиболее часто используют вейвлеты и их **Фурье-образы**, изображённые на рис 2. На рис. 2а и б показаны вейвлеты, полученные с помощью **распределения Гаусса**

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right) \quad (\text{Фурье-образ } \tilde{\psi}_m(k) = m(i k)^m \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right))$$

при $m = 1$ и $m = 2$, соответственно. На рис. 2в и г отображены **вейвлеты Морле** при различных значениях параметра k_0 :

$$\psi(t) = \exp(i k_0 t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (\tilde{\psi}(k) = \theta(k) \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{2}\right)),$$

здесь $\theta(k) = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$ – **специальная функция Хевисайда**. **Вейвлеты**

Паули, которые используются в квантовой механике, показаны на рис.

2.1д и е:
$$\psi_m(t) = \Gamma(m+1) \frac{i^m}{(1-it)^{m+1}} \quad (\tilde{\psi}_m(k) = \theta(k) k^m \exp(-k)).$$

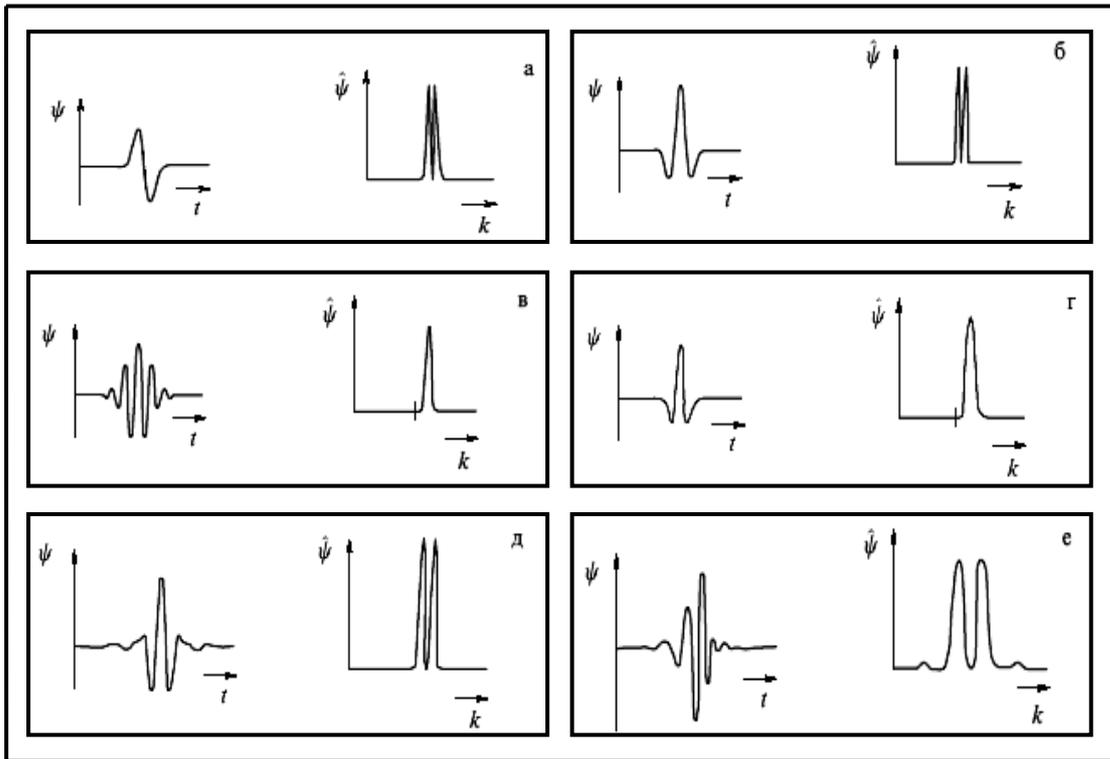


Рис. 2. Вейвлеты и их Фурье-трансформанты: а – WAVE; б – MHAT; в – Morlet; г – Paul; д – LMB; е – Daubechies.

Вейвлеты Гаусса применяются при анализе сложных сигналов и изотропных полей. Комплексные вейвлеты Морле сохраняют направление времени, поэтому используются для исследования причинно-следственных сигналов, они не создают интерференции между прошлым и будущим. В результате применения вейвлет-анализа получают двухпараметрическое множество $W_\psi(a;b)$, которое обычно отображается изолиниями на плоскости параметров a и b (рис. 3). На рис. 3б тёмные области отображают положительные значения коэффициентов $W_\psi(a;b)$, а светлые – их отрицательные значения.

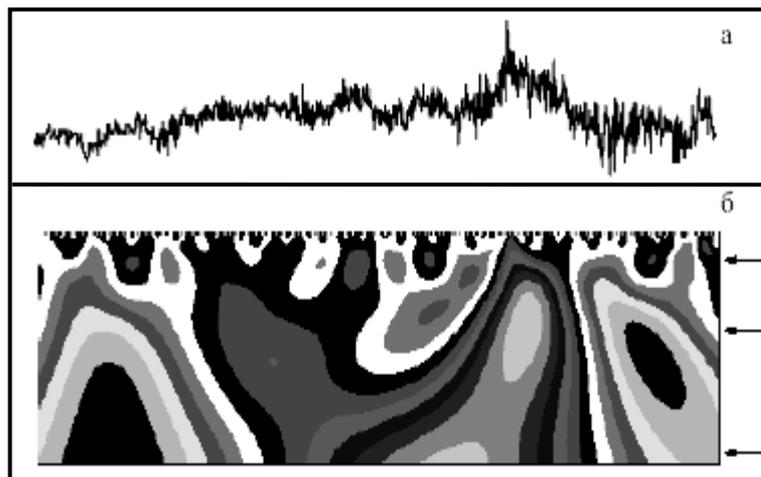


Рис. 3. Анализируемый сигнал (а) и изообласти параметров $W_\psi(a;b)$ (б).

94. “Компьютерное распознавание образов”**94.1. Анализ сигналов с помощью компьютерных программ**

Рассмотрим нахождение вейвлет-образов $W_\psi(a; b)$ синусоидальной функции $\psi(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right) + \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right)$ при разных значениях параметров.

$T_1 = 25, \alpha = 0$: вейвлет-преобразование синусоиды с частотой $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

отображено на рис. 4. Верхняя часть рис. 4б демонстрирует периодический характер исследуемого сигнала. Одинаковая длина линий и периодичность их появления указывает на единственность и постоянство частоты синусоиды.

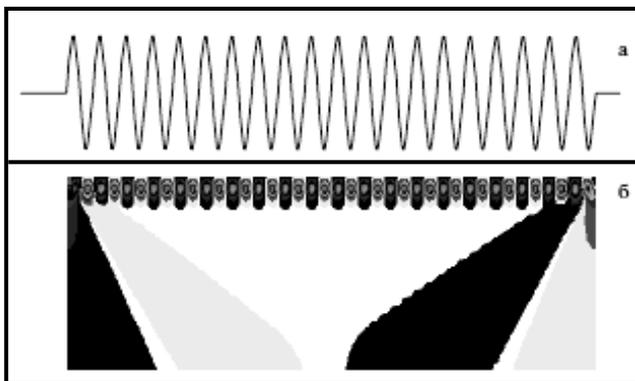


Рис. 4. Вейвлет-преобразование (б) синусоиды (а).

Пример 1. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования данной функции $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$ (рис. 5).

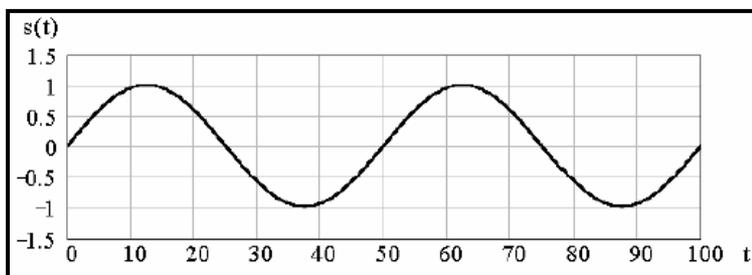


Рис. 5. Анализируемый синусоидальный сигнал.

Зададим в *Mathcad* вейвлет-образующую функцию

$$MHAT(t) := \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right),$$

интервалы изменений коэффициентов масштаба и сдвига

$$a := 1..30, b := 0..50,$$

вид вейвлетов

$$\psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \text{MHAT}\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

формулу для вычисления коэффициентов преобразования и вывода их значений:

$$N := 256, W(a, b) := \int_{-N}^N \psi(a, b, t) s(t) dt, N_{ab} := W(a, b).$$

График двухпараметрического вейвлет-спектра N_{ab} отображается с помощью 3D-изображения и показан на рис. 6. Такой же анализ может быть проведён с помощью пакета *Wavelet Toolbox* в системе *MathLab*.

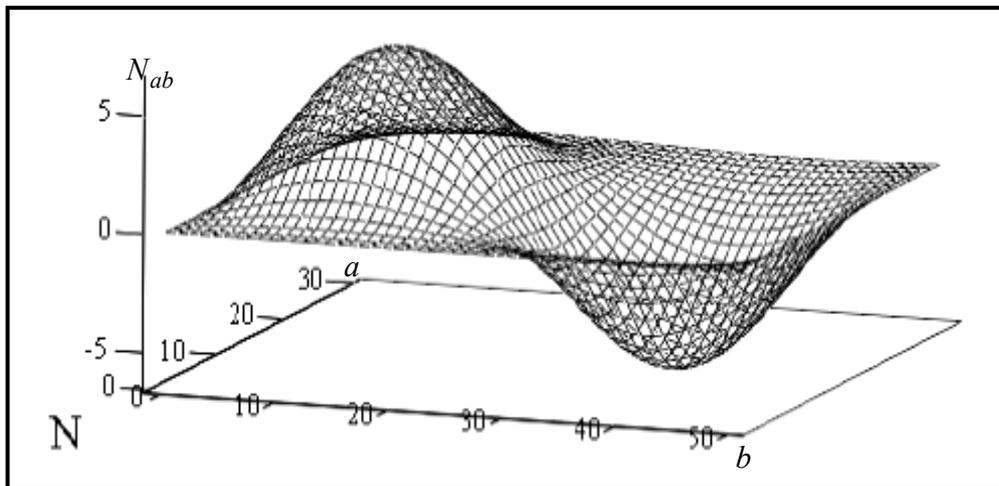


Рис. 6. Пространственное изображение вейвлетных коэффициентов.

Пример 2. Провести вейвлет-анализ функции $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{0,0001}t + 45\right)$.

Зададим в *MathLab* программу действий

function garm

`t=0:0.00001:0.0004; F1=10000; a1=45;`

`s=sin(2*pi*F1*t+a1);`

`figure (1); plot (t, s); axis ([0 0.0004 -3 3]); grid on;`

`subplot (211), plot (t, s); title ('Сигнал S(t)');`

`subplot (212), c=cwt (s, 1:2:32, 'mexh', 'abslvl', [0 10]);`

`title ('Вейвлет-спектр W(a, b)'); xlabel ('Временной сдвиг, b');`

`ylabel ('Временной масштаб, a');`

`end`

График сигнала и результат непрерывного вейвлет-преобразования показаны на рис. 7.

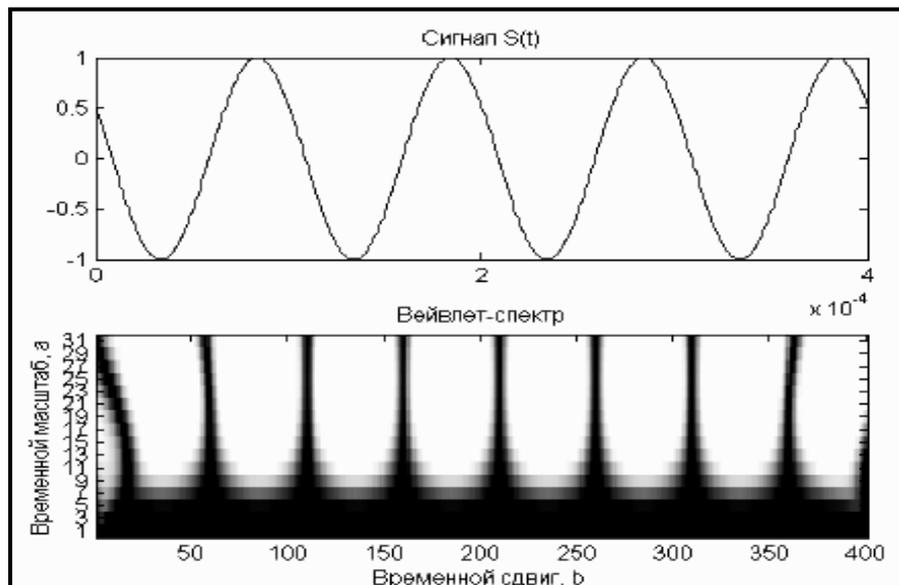


Рис. 7. Вейвлет-преобразование синусоидального сигнала со сдвигом фазы.

$T_1 = 200$, $T_2 = 40$, $\alpha = 0,4$: коэффициенты преобразования показаны на рис. 8. Преобразуемая функция представляет сумму двух синусоид с сильно различающимися частотами $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ и $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$. В результате резонанса высокочастотной компоненты синусоидальной функции с мелкомасштабными вейвлетами в верхней части рис. 8б наблюдаются периодически расположенные мелкие детали. Наличие корреляции между низкочастотной составляющей исследуемого сигнала и крупномасштабными вейвлетами отображено на рис. 8б в виде 3 тёмных и 2 светлых областей параметров отображения $W_\psi(a; b)$.

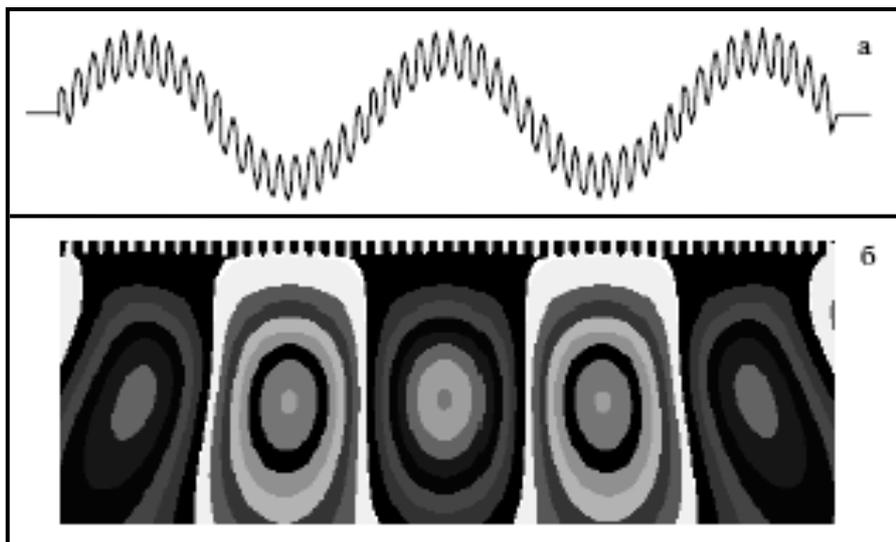


Рис. 8. Вейвлет-трансформанты $W_\psi(a; b)$ (б) синусоидальной функции (а).

Пример 3. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $\psi(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right) + \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$ (рис. 9).

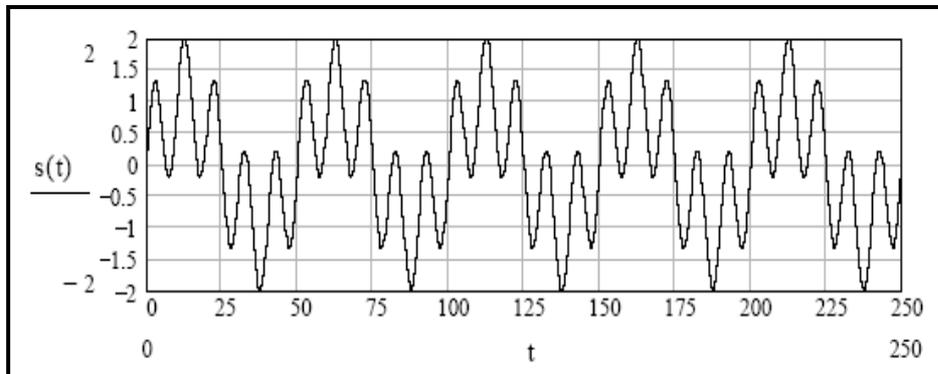


Рис. 9. Анализируемый сигнал в виде суммы двух синусоид.

По сравнению с *Примером 1* изменилась лишь анализируемая функция $s(t)$. Остальные формулы в *Mathcad* остаются неизменными (значительное преимущество *интегрированных математических оболочек*). Результат вейвлетного анализа показан на рис. 10.

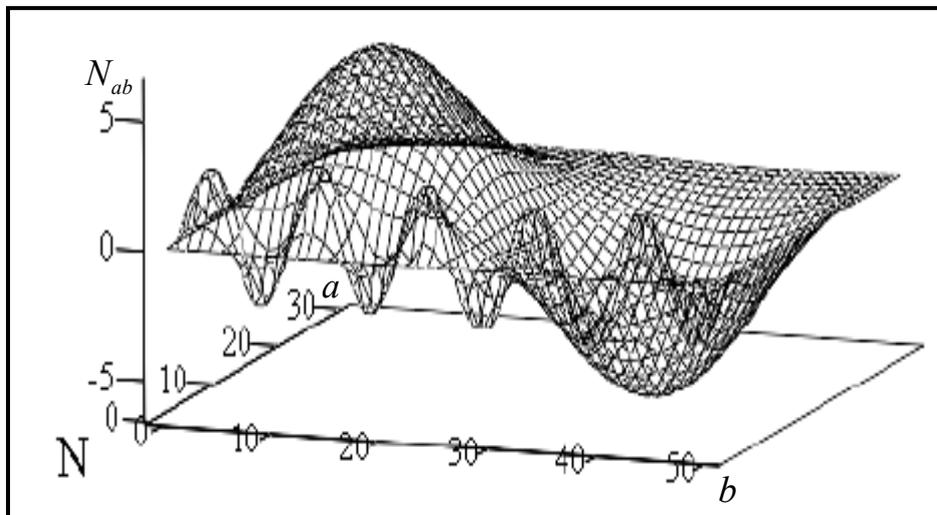


Рис. 10. Вейвлет-коэффициенты сигнала в виде суммы двух синусоид.

Пример 4. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{0,0001}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{0,00005}t + \varphi\right)$$

с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1,570797$ и белого гауссова шума $n(t)$ с нулевым математическим ожиданием и средне-квадрати-

ческим отклонением $g = 0.5$.

Зададим в *MathLab* программу действий

```
function bigarm_rauch
t=0:0.000001:0.001; F1=10000; F2=2*F1; a1=-1.570797;
s1(1:200)=0; t2=0.0002:0.000001:0.007;
s=sin(2*pi*F1*t2+a1)+ sin(2*pi*F2*t2+a1);
s3(1:300)=0; s=[s1 s2 s3];
randn ('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t)); x=s+n;
figure (1); subplot (211), plot (t, x, 'k'); t
title ('Сигнал x(t)'); grid on;
gtext('F=10 КГц, g=0.5 В');
subplot (212), c=cwt (x, 1:124, 'mexh', 'abslb', [0 50]);
title ('Вейвлет-спектр W(a, b)'); xlabel ('Временной сдвиг, b');
ylabel ('Временной масштаб, a');
end
```

Исследуемый сигнал и его вейвлет-спектрограмма показаны на рис. 11.

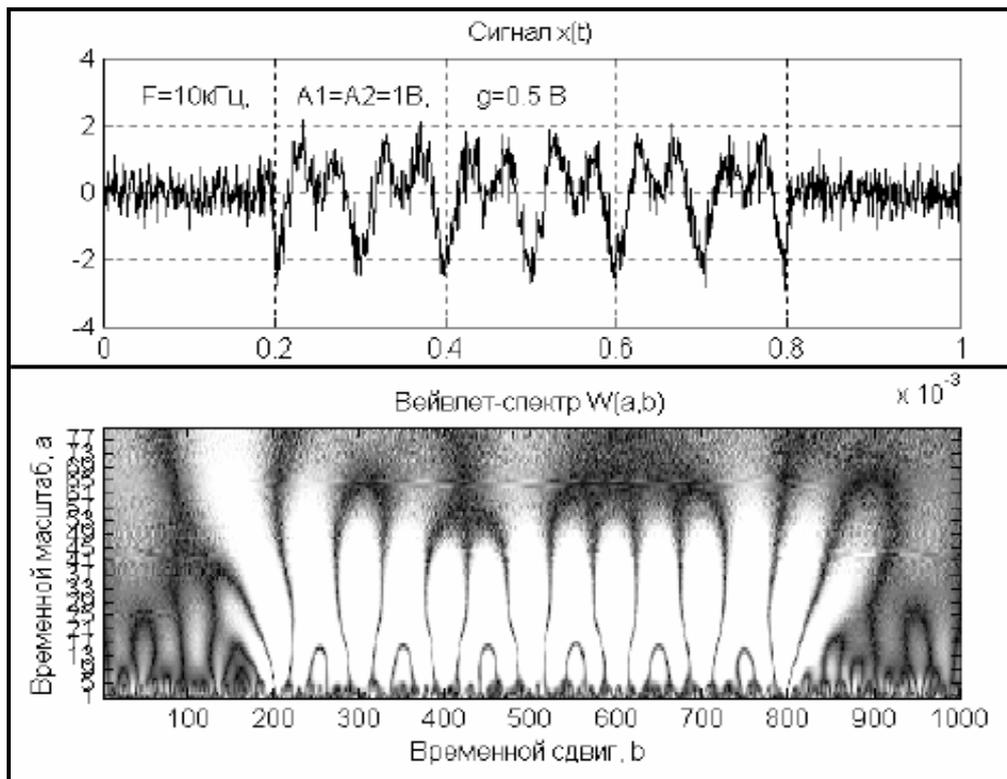


Рис. 11. Зашумлённый сигнал и его вейвлет-копия.

● Выбор программного обеспечения для проведения компьютерного эксперимента определяется каждым исследователем самостоятельно. ●

Вейвлет-анализ в отличие от Фурье-преобразования позволяет различить включение другого сигнала через определённый промежу-

ток времени (в данном случае рассматриваются синусоиды с периодами $T_1 = 25$, $T_2 = 50$) и сумму синусоид ($\alpha = 1$). Включение сигнала показано на рис. 12а, а сумма синусоид на рис. 12б.

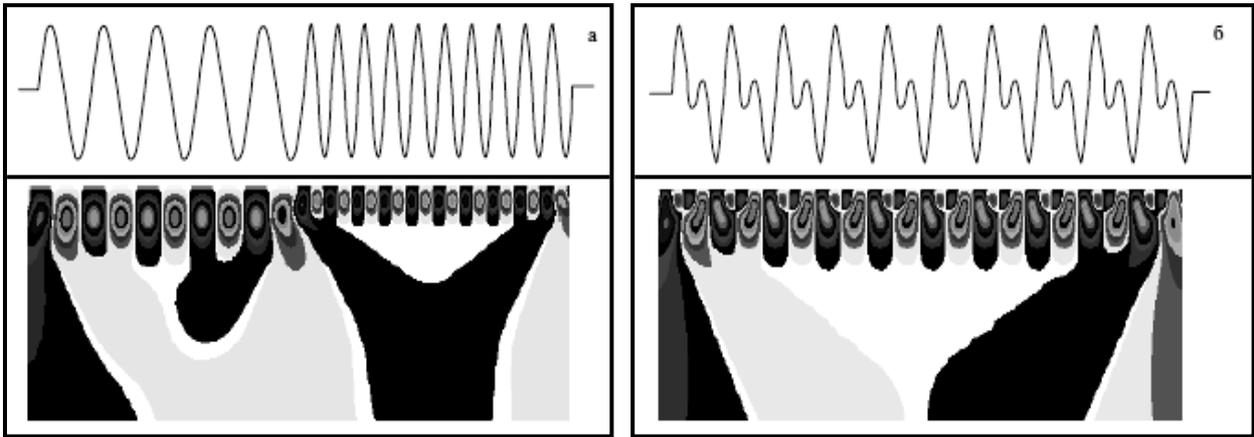


Рис. 12. Вейвлет-отображение включения сигнала (а) и суммы синусоид (б).

Использование “маленьких волн” позволяет не только проанализировать отображаемую функцию, но и выявить её особенности, связанные, например, с фазовым сдвигом. Эта особенность при сдвиге по фазе на π синусоиды с периодом $T_1 = 25$ показана на рис. 13.

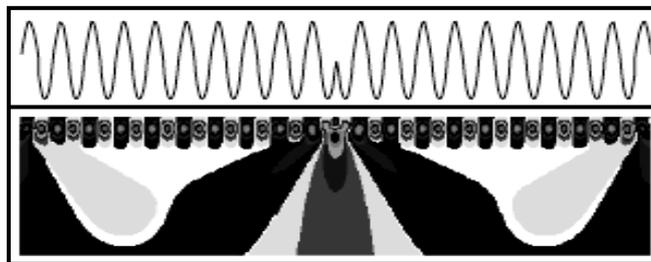


Рис. 13. Выявление особенности анализируемого сигнала.

*Анализ особенности сигнала с помощью **ряда Фурье** приводит к появлению дополнительных пиков, так как особенность влияет на значения всех коэффициентов и частоты **Фурье-преобразования**. Это приводит к неправильной интерпретации сигнала: предполагается существование нескольких масштабов, в то время как он один.*

● В реальных сигналах часто присутствуют импульсные помехи, различного рода наклоны и ступеньки, которые плохо выявляются **гармониками Фурье**. Вейвлетные функции позволяют определить не только особенность сигнала, но её положение и вид. Изолированная особенность локально влияет на отображающий вейвлет,

поэтому её можно или скорректировать, или удалить из сигнала. ○

94.2. Вейвлеты и распознавание реальных образов

Иерархичность базиса вейвлетов способствует их применению для анализа каскадов различной физической природы, турбулентности, *фрактальных множеств* и временных рядов.

Фрактальные множества. Рассмотрим вейвлетное представление “пыли” Кантора (рис. 14а, см. 89).

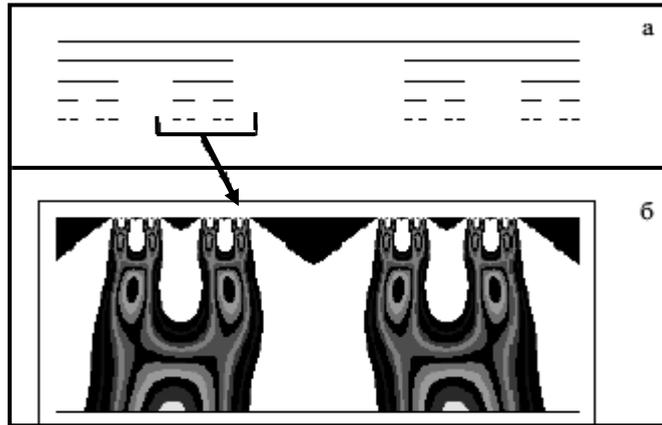


Рис. 14. Вейвлет-анализ фрактала Кантора.

Канторовская “пыль” в дальнейшем используется для построения двоичного множества, состоящего из последовательности нулей (отрезок отсутствует) и единиц (наличие отрезка). Картина вейвлетных коэффициентов (рис. 14б) чётко демонстрирует иерархию подмножеств фрактала Кантора, отображая распад каждого максимума более высокого уровня на два максимума нижележащего множества.

Изменение погодных условий. Некоторые физические процессы описываются временными рядами, которые представляют собой долговременные наблюдения за параметрами физического явления. Например, изучение метеорологических условий в Тихом океане привело к выявлению крупномасштабного атмосферно-океанического явления, известного под кодовым названием Южное Колебание (в атмосфере) и Эль-Ниньо (в океанических водах). Этот процесс возникает в результате резкого потепления воды вблизи тихоокеанского побережья Центральной Америки, приводит к перемещению огромных масс воздуха между Восточным и Западным полушариями, что влияет на состояние всей земной атмосферы. Южное Колебание и Эль-Ниньо представляют собой планетарные “качели”, которые не только перемещают массы воздуха, но и являются причиной возникновения мус-

сонов, сопровождаемых проливными тропическими дождями. Атмосферно-океанические изменения описываются с помощью временной зависимости некоторого индекса $C(t)$, который определяет состояние водно-воздушной системы океан-атмосфера. При отрицательном значении этого индекса происходит заметное снижение градиента давления между земными полушариями. Уменьшение сопротивления ветра приводит в движение тёплые воды океана. Они устремляются вдоль побережья Южной Америки на север (Эль-Ниньо), что и приводит к возникновению Южного Колебания в атмосфере планеты. Резкие смены температуры воды и воздуха могут привести к экологическим катастрофам в океане и на суше: тайфунам в Китае, холодным зимам в Восточной Азии, засухам в Австралии, разливам Нила в Египте.

На рис. 15а показан временной ряд, отображающий число появлений Эль-Ниньо в разные годы, а также диаграмма вейвлетного анализа этого ряда. Вейвлет-анализ среднемесячных колебаний индекса $C(t)$ показал автомодельность процесса Южное Колебание – Эль-Ниньо и наличие иерархии периодов, отображающих каскадность процесса, от месяца до нескольких десятков лет.

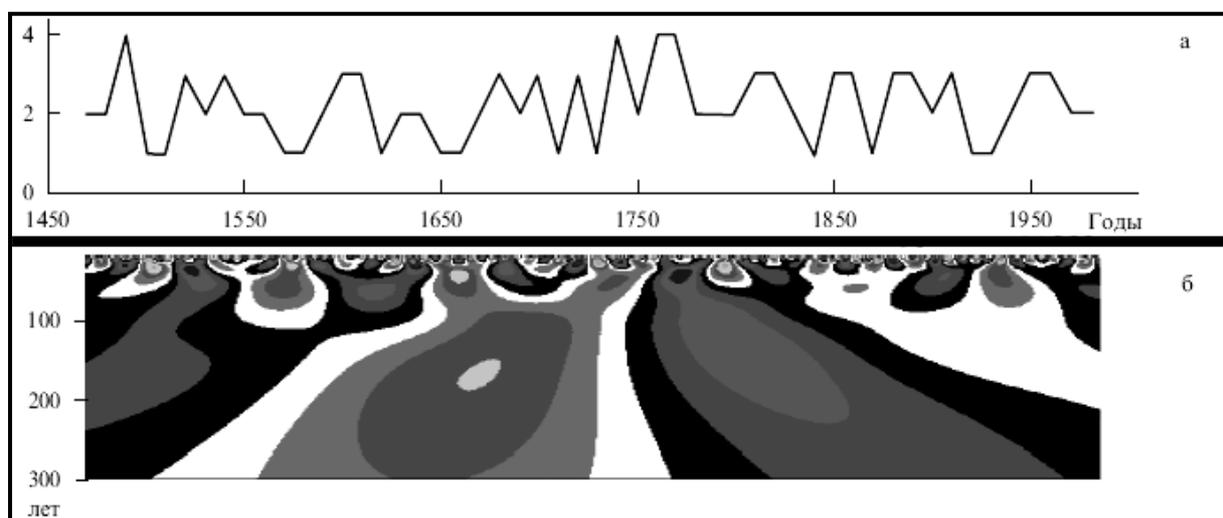


Рис. 15. Временная зависимость числа появлений Эль-Ниньо (а) и его вейвлет-диаграмма (б).

Сложные атомные структуры. Отсутствие точного аналитического метода решения проблемы многих тел предполагает построение приближённых моделей. Поэтому в настоящее время преобладают экспериментальные методы исследования электронных спектров многочастичных атомарно-молекулярных систем. Сложность и фрактальная природа спектров осложняет их расшифровку с помощью гармониче-

ских рядов Фурье. Например, для описания потенциала атома урана требуется 2^{100} коэффициентов Фурье, вычисление которых является непосильной задачей даже для самых современных, быстродействующих компьютеров. Использование всплесковых функций позволяет восстановить потенциал атома с высокой точностью и надёжностью (рис. 16).

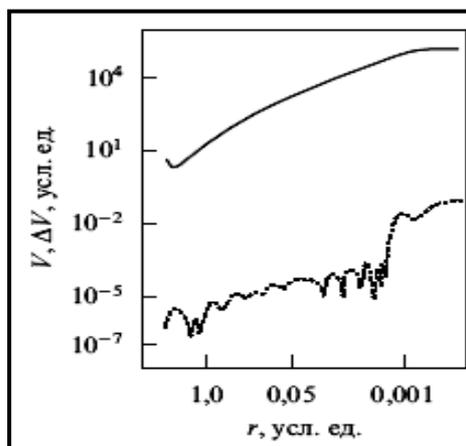


Рис. 16. Кулоновский потенциал V и точность его вычисления ΔV в зависимости от расстояния r до атома.

Вейвлет-анализ биений сердца. Изучение временных интервалов между биениями сердца с помощью “*маленьких волн*” привело к установлению новой меры в определении ритмичной динамики сердца. Для анализа составлялась временная последовательность интервалов между сердцебиениями, описываемая функцией от номера интервала, что дало возможность различать здоровых и больных пациентов (рис. 17), несмотря на то, что приведенная методика вызывает сомнение в связи со статистической зависимостью вейвлет-коэффициентов между собой.

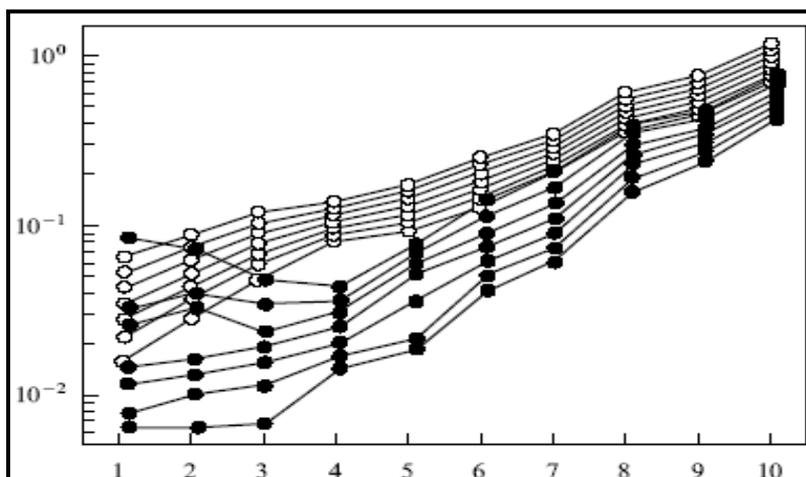


Рис. 17. Дисперсии вейвлет-коэффициентов здоровых (○) и больных (●) пациентов.

Сжатие и кодирование информации. Хранение и кодирование информации в компьютере с ограниченной памятью, её передача по линиям связи с ограниченной пропускной способностью требует её сжатия и декодировки. Сжатие сигнала и его реконструкция проводятся с применением прямого и обратного вейвлет-преобразования. Оцифровка информации используется в дальнейшем для воспроизведения данных и картин на экране компьютера. Однако хранение информации в оцифрованном виде требует больших объёмов памяти. В этой связи были разработаны различные способы сжатия информации: *архивация* данных происходит без потери их первоначального вида, а при *квантовании* информации происходит её частичная потеря. На рис. 18 показано сжатие оригинальной фотографии (а) по JPEG-алгоритму (б) и с использованием вейвлетов (в).

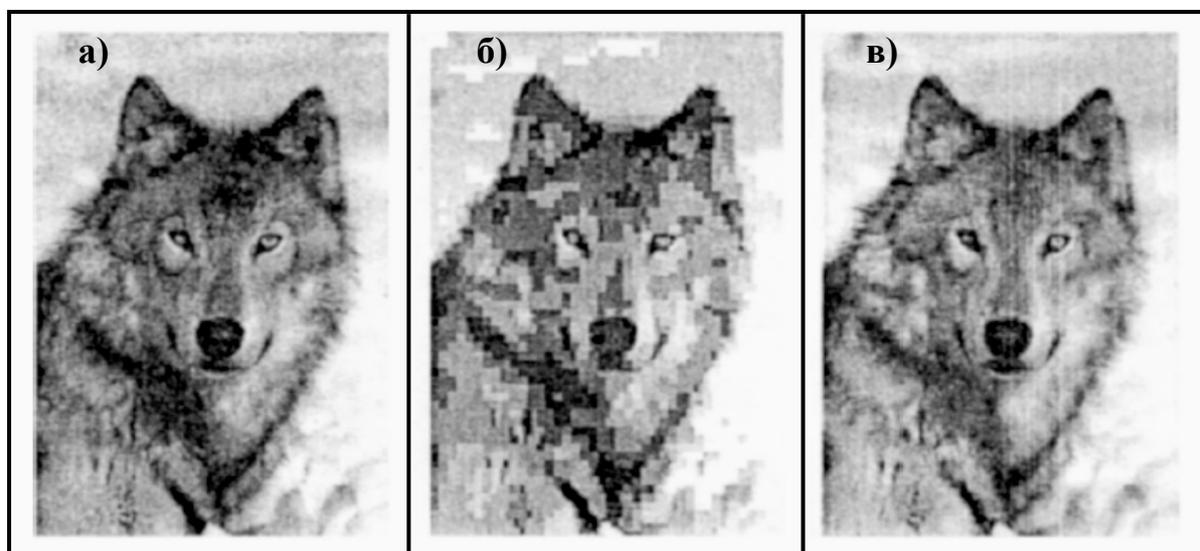


Рис. 18. Сжатие фотографии волка по разным алгоритмам.

Сравнение восстановленных изображений демонстрирует значительное превосходство вейвлетной реконструкции в сравнении с JPEG-алгоритмом.

Вейвлетное представление выявляет структуру анализируемой информации, масштабы происходящих событий, даёт их частотную характеристику. Следует отметить, что вейвлет-преобразование не является заменой гармонического анализа Фурье, оно его дополняет и уточняет. Однако не стоит поддаваться иллюзиям, что вейвлеты позволят решить абсолютно любую задачу. Как отмечал Мейер, “ни один “универсальный алгоритм” не сможет подойти к тому исключительно разнообразному набору ситуаций, с которым нам приходится сталкиваться”.

ТФШ

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 1**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{100}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{100}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{200}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{10000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{50000}t + \varphi\right).$$

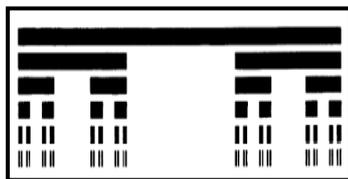
с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn` ('state', 0); $g=0.5$; $n=g*\text{randn}(\text{size}(t))$) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g=0.5$.

4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{100}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{100}t\right) + f(t)$, если функция зашумления $f(t) = t(t-1) + n(t)$ (см. задание 3).

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 2$, $\beta = 3$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 2**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{20}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{200}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{200}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{300}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{20000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{100000}t + \varphi\right).$$

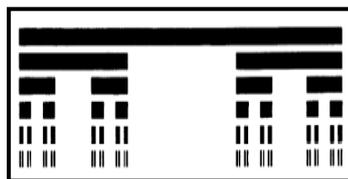
с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{200}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{100}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{200}t\right) + f(t)$, если функция зашумления $f(t) = t(t-1) + n(t)$ (см. задание 3).

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 3$, $\beta = 2$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 3**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{30}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{300}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{300}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{400}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{30000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{150000}t + \varphi\right).$$

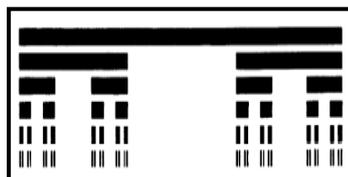
с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{300}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{150}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{300}t\right) + f(t)$, если функция зашумления $f(t) = t(t-1) + n(t)$ (см. задание 3).

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 1,5$, $\beta = 4$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 4**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{40}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{400}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{400}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{500}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{40000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{200000}t + \varphi\right).$$

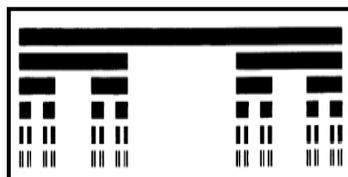
с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{400}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{200}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{400}t\right) + f(t)$, если функция зашумления $f(t) = t(t-1) + n(t)$ (см. задание 3).

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 1$, $\beta = 6$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 5**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{50}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{500}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{500}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{600}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{50000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{250000}t + \varphi\right).$$

с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

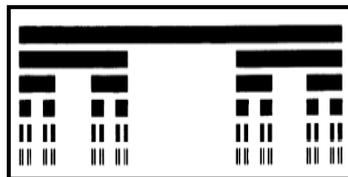
4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{500}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{250}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{500}t\right) + f(t)$, если функция зашумления

$$f(t) = t(t-1) + n(t) \text{ (см. задание 3).}$$

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 4$, $\beta = 1,5$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 6**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{600}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{600}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{700}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{60000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{300000}t + \varphi\right).$$

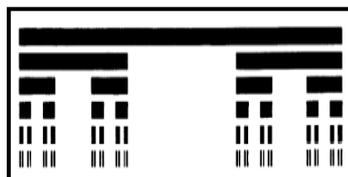
с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{600}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{300}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{600}t\right) + f(t)$, если функция зашумления $f(t) = t(t-1) + n(t)$ (см. задание 3).

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 6$, $\beta = 1$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 7**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{70}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{700}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{700}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{800}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{70000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{350000}t + \varphi\right).$$

с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

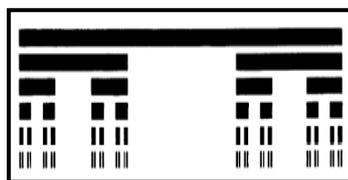
4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{700}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{350}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{700}t\right) + f(t)$, если функция зашумления

$$f(t) = t(t-1) + n(t) \text{ (см. задание 3).}$$

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 2,5$, $\beta = 4$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 8**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{80}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{800}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{800}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{900}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{80000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{400000}t + \varphi\right).$$

с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

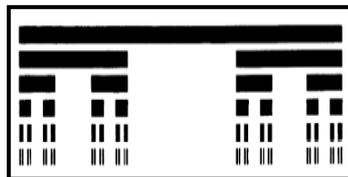
4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{800}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{400}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{800}t\right) + f(t)$, если функция зашумления

$$f(t) = t(t-1) + n(t) \text{ (см. задание 3).}$$

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 4$, $\beta = 2,5$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 2**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{90}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{900}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{900}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{1000}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{90000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{450000}t + \varphi\right).$$

с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

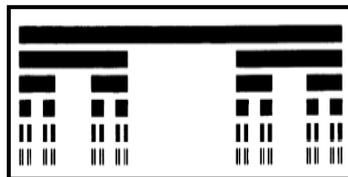
4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{900}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{450}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{900}t\right) + f(t)$, если функция зашумления

$f(t) = t(t-1) + n(t)$ (см. задание 3).

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 5$, $\beta = 1,4$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала



“Пыль” Кантора.

Задания для самостоятельного решения

Вейвлет-анализ**Вариант 10**

1. При помощи математических оболочек *Mathcad* (а) и *MathLab* (б) найти коэффициенты вейвлет-преобразования функций:

$$\text{а) } s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{100}t\right); \quad \text{б) } s(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{1000}t\right).$$

2. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования суммы двух гармонических сигналов $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{1000}t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2000}t\right)$.

3. Исследовать с помощью всплесковых функций сигнал $x(t)$, состоящий из суммы двух гармонических сигналов

$$s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{100000}t + \varphi\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{500000}t + \varphi\right).$$

с одинаковыми фазовыми сдвигами $\varphi = -1.5708$ и белого гауссова шума $n(t)$ (моделируется в оболочке *MathLab* при помощи случайной функции `randn('state', 0); g=0.5; n=g*randn(size(t))`) с нулевым математическим ожиданием и средне-квадратическим отклонением $g = 0,5$.

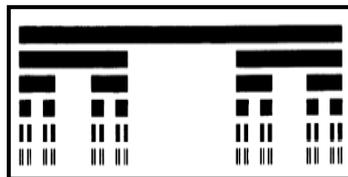
4. Провести вейвлет-анализ сигнала $s(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{1000}t\right), & 0 \leq t \leq 250 \\ \sin\left(\frac{2\pi}{500}t\right), & 250 < t \leq 1000 \end{cases}$.

5. Исследовать сигнал $s(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{1000}t\right) + f(t)$, если функция зашумления

$$f(t) = t(t-1) + n(t) \text{ (см. задание 3).}$$

6. Найти коэффициенты вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса $w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k t)$, если $\alpha = 1,5$, $\beta = 4$ ($\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2} \approx 5,7124$).

7. Построить вейвлет-образ фрактала

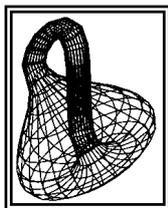


“Пыль” Кантора.

Список использованных источников

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: теория и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т.166, № 11. – С. 1135-1170.
2. Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения.– Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. – 2002. – 272 с.
3. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Ч.1. – Москва: Мир, 1990. – 349 с.
4. Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования.– Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИЯФ им. Д.В. Скобельцина, 2004. – 82 с.





ТФШ. Теория вейвлетов. Дифференциалы

Тема: Дифференциалы

95. “Эредитарность, дальное действие и степенные законы”

95.1. Эредитарность (наследственность)

Наличие эредитарности проявляется в эффектах памяти (среды с памятью), явлениях гистерезиса, механической усталости металлов, запаздывании электромагнитных и других волн, дипольных моментах атомов и молекул, наведенных пролетающими в их окрестности заряженными частицами. Следствием дального действия является установление ближнего и дальнего порядков в хаотической, случайной среде.

Например, при описании броуновского движения А. Эйнштейн предположил, что смещения частицы Броуна статистически независимы во времени, т.е. отсутствует влияние предыстории на сиюминутное положение частицы. Известно, что броуновское движение обладает нулевым значением временной корреляционной функции, если её смещения описываются нормальной случайной величиной, распределённой по закону Гаусса. Именно применение закона Гаусса обеспечило Эйнштейну независимость смещений, хотя это предположение и выглядит сомнительным.

Дальнедействующие силы постоянно видоизменяют распределение атомов среды, в которой перемещается броуновский “бродяга”. Совместное действие пространственно-временных корреляционных сил является причиной случайных блужданий броуновской частицы. Кроме того, нельзя считать время соударения между частицей и атомами достаточно малой величиной. Если бы это было так, то последующее смещение игнорировало бы законы сохранения импульса и энергии, которые учитывают значения динамических характеристик *до* и *после* столкновения. Этот факт говорит о корреляционной связи между скоростями частицы в предыдущий и настоящий моменты времени. Согласно молекулярно-кинетической теории, скорость атомов (молекул) среды определяется температурой. Случайные флуктуации температуры, возникающие в произвольной точке среды, приводят к тому, что локальная температура отличается от температуры среды. Это явление вызывает флуктуации скорости частицы. Таким образом, движение частицы не только испытывает случайные изменения, но и вносит возмущения в среду, которые из-за дального действия и эредитарности

среды могут оказывать существенное влияние на дальнейшие перемещения самой частицы. Другими словами, среда выступает в роли накопителя информации, которая используется для регулирования движения броуновского “бродяги”. Такой подход не требует обязательного использования закона Гаусса. В этом случае динамическая система характеризуется наличием обратной связи между частицей и средой (саморегуляция), накоплением и использованием информации, дальностью действия и эредитарностью. Моделирование случайных блужданий броуновской частицы с учётом перечисленных явлений назовём **синергетическим** (*синергетика (лат.) – энергия совместного действия*). Первым, кто обратил внимание на возникновение эредитарности, был Пикар (1907). Его идеи были развиты Вольтерра, который сформулировал общие положения явлений *линейной наследственности*:

1) **принцип линейности**. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка, которая формулируется следующим образом:
$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y'_0 \end{cases}$$
. Вводя обозначение $y''(x) = \varphi(x)$,

получим $y'(x) = y'_0 + \int_0^x \varphi(s) ds$ и $y(x) = y_0 + \int_0^x y'(\xi) d\xi$. Отсюда находим, что

$y(x) = y_0 + xy'_0 + \int_0^x \int_0^\xi \varphi(s) ds d\xi$. Изменив порядок интегрирования в двойном

интеграле, получим $y(x) = y_0 + xy'_0 + \int_0^x (x-s)\varphi(s) ds$. Подставляя найденные

выражения для искомой функции и её производных в условие задачи Коши, найдём интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\varphi(x) - \int_0^x Q(x; s)\varphi(s) ds = \tilde{f}(x),$$

где $Q(x; s) = -[a(x) + (x-s)b(x)]$ и $\tilde{f}(x) = f(x) - [\{a(x) + xb(x)\}y'_0 + b(x)y_0]$.

Уравнение Вольтерра показывает, что вторая производная искомой функции зависит от начальных условий. Это означает, что решение задачи Коши также будет зависеть от начальных условий или предистории исследуемого процесса. Используя δ -функцию Дирака, которая

определяется формулой $\delta(x-s) = \begin{cases} 0, & x \neq s \\ 1, & x = s \end{cases}$ (неэредитарное слагаемое),

перепишем уравнение Вольтерра в виде $\int_0^x \tilde{Q}(x; s)\varphi(s) ds = \tilde{f}(x)$, где яд-

ро уравнения $\tilde{Q}(x,s) = \delta(x-s) - Q(x,s)$ определяет эволюцию второй производной решения задачи Коши. Вольтерра распространил свою теорию и на отрицательную полуось времени, т.е.

$$\int_{-\infty}^t \tilde{Q}(t;\tau) \varphi(\tau) d\tau = \tilde{f}(t).$$

Данное интегральное уравнение удовлетворяет принципу детерминизма, так как интегрирование ведётся только по предшествующим моментам времени.

2) **принцип затухания**. Этот принцип сводится к требованию

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tilde{Q}(t;\tau) = 0.$$

3) **принцип инвариантности**. Ядро уравнения должно удовлетворять соотношениям $\tilde{Q}(t;\tau) = \tilde{Q}(t-a;\tau-a) = \tilde{Q}(t-\tau;0) = \tilde{\Phi}(t-\tau)$.

Наличие корреляционного времени τ_k говорит о существовании *ограниченной эредитарности*: по истечении промежутка времени τ_k стирается информация о событиях, которые происходили ранее. Другими словами, динамическая система теряет память о начальных условиях, что соответствует её переходу в область *детерминированного хаоса*.

95.2. Вынужденные колебания при наличии памяти

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания материального тела массой m на пружине с коэффициентом упругости k под действием внешней побуждающей силы $F(t)$ при отсутствии сопротивления среды. Колебания описываются уравнением

$$m\ddot{x} + kx = F(t).$$

При выводе этого уравнения завуалировано была введена гипотеза о корреляционной независимости воздействий возвращающей силы в различные моменты времени и её мгновенном действии на колеблющееся тело. При таком подходе игнорируются эффекты, связанные с тем, что пружина растягивается только до определённого уровня, а затем начинает сжиматься. Накопленную информацию о своём состоянии пружина использует для возврата тела в исходное положение. Следовательно, и в этом примере пренебрежение состоянием пружины и её памятью приводит к одностороннему восприятию вынужденных колебаний.

При *синергетическом подходе* уравнение колебаний надо заменить на интегродифференциальное уравнение вида

$$m\ddot{x} + k \int_{-\infty}^t \tilde{\Phi}(t - \tau) x(\tau) d\tau = F(t),$$

где $\tilde{\Phi}(t - \tau) = \delta(t - \tau) - \Phi(t - \tau)$. Если система не обладает “памятью” о предыдущих состояниях, то функция $\Phi(t - \tau) = 0$, а эредитарное уравнение принимает классический вид. Возвращающая сила определяется по классической формуле, но с помощью вариационной производной $F(x) = -\frac{\delta U(x)}{\delta x} = -k \int_{-\infty}^t \tilde{\Phi}(t - \tau) x(\tau) d\tau$. Выделив неэредитарную часть

$\delta(t - \tau)$ в функции памяти $\tilde{\Phi}(t - \tau)$ и умножив эредитарное уравнение колебаний на скорость \dot{x} , перепишем его в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m\dot{x}^2(t)}{2} + \frac{kx^2(t)}{2} - kx(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t - \tau) x(\tau) d\tau \right] + kx^2(t)\Phi(0) + kx(t) \int_{-\infty}^t \dot{\Phi}(t - \tau) x(\tau) d\tau = F \frac{dx(t)}{dt}.$$

Выражение, которое записано в квадратных скобках, представляет собой *полную энергию* системы E_h , равную сумме кинетической энергии $K = \frac{m\dot{x}^2(t)}{2}$ и потенциальной энергии *эредитарной системы*

$$U = \frac{kx^2(t)}{2} - kx(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Вводя обозначения для скорости изменения диссипативной функции $\frac{\delta W(t)}{dt} = - \left\{ kx^2(t)\Phi(0) + kx(t) \int_{-\infty}^t \dot{\Phi}(t - \tau) x(\tau) d\tau \right\}$ (значок δ указывает на то, что функция диссипации $W(t)$ не является полным дифференциалом), работы внешней силы $dA(t) = F(t)dx(t)$, приходим к уравнению

$$dE_h(t) - \delta W(t) = dA(t).$$

95.3. Степенные законы

Учёт *эредитарности* тождественен введению в рассмотрение сил сопротивления, а полная энергия системы расходуется на выполнение работы против внешних сил и диссипацию (рассеивание) энергии. Последнее замечание находится в полной гармонии с термодинамическим подходом, если система состоит из ансамбля тождественных осцилляторов. При классическом подходе к описанию вынужденных колебаний решение содержит экспоненту, однако большинство физических и других явлений описываются степенными законами. В таблице 1

приведен малый перечень физических явлений и процессов, которые описываются *степенными законами*.

Таблица 1.

Физические явления и их степенные законы.

Явление или процесс	Степенной закон
Лейденская банка	Падение напряжения: $\Delta u(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \approx 1$
Ограниченная диффузией агрегация	Концентрация кластеров: $n(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha = 1$
Конденсатор с диэлектрическим заполнением	Составляющая тока: $I_d(t) \sim (t - t_0)^\alpha$, $\alpha \in (-1; 0)$
Деформация вязкоупругих материалов	Деформация: $\sigma(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$
Релаксация полимеров	Число полимеров, вовлечённых в движение: $n(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$
Люминесценция	Ток затухания: $I(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$
Турбулентность	Скорость изотропного турбулентного движения: $v(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha = \frac{5}{7}$
Звуковые волны	Коэффициент поглощения: $\gamma(\omega) \sim \omega^\alpha$, $\alpha \in [0; 2]$
Аномальная кинетика экситонов	Коэффициент скорости аннигиляции: $k(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in [0; 1)$
Распределение случайных величин	Плотность Леви-Смирнова: $f(x) \sim x^{-\alpha}$, $\alpha = \frac{3}{2}$
Излучение фотонов наночастицей	Закон распределения: $P(T_{on} > t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$

Будем называть *стандартной степенной функцией* соотношение, которое задаётся равенством

$$\Phi_\mu(t > 0) = \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

где $\Gamma(\mu) = \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция (рис. 1), которая при целых значениях аргумента $\mu = n$ равна факториалу числа n , т.е.

$$\Gamma(n+1) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \Gamma(0) = 0! = 1.$$

Распространённость *степенных законов* тесно связана с их *свойствами*:

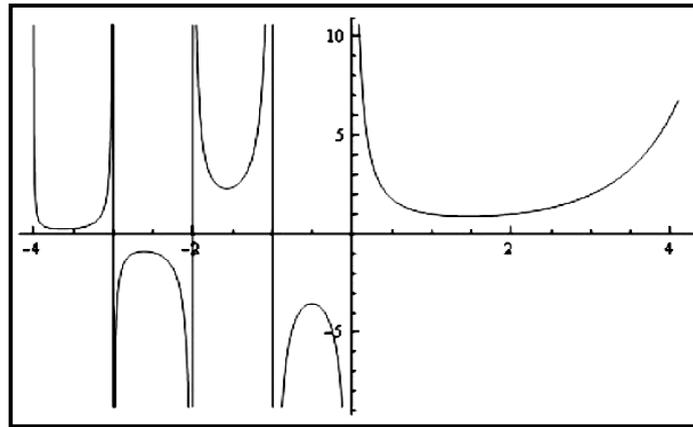


Рис. 1. График гамма-функции действительного аргумента.

- 1) самоподобие или однородность $\Phi_\mu(\lambda t) = \lambda^{\mu-1} \Phi_\mu(t)$;
 2) функции $\Phi_\mu(t)$ образуют полугруппу, т.е. их свёртка

$$\Phi_\mu * \Phi_\nu(t) = \int_0^t \Phi_\mu(t-\tau) \Phi_\nu(\tau) d\tau = \Phi_{\mu+\nu}(t);$$

для значений аргумента $\mu = \dots, -3, -2, -1, 0 = -n$ функции $\Phi_\mu(t)$ определяются через δ -функцию Дирака и её производные:

$$\Phi_{-n}(t) = (-1)^n \delta^{(n)}(t);$$

- 3) функции $\Phi_\mu(t)$ являются оригиналами преобразования Меллина

$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} p^{-\mu} e^{pt} dp \quad (\text{Re } p > \alpha),$$

от степенных функций $p^{-\mu}$ комплексной переменной $p = x + iy$, α – ограничитель роста экспоненты в преобразовании Лапласа;

- 4) для нахождения Фурье-трансформант $\Phi_\mu(k)$ функций $\Phi_\mu(t)$ достаточно переменную преобразования Лапласа p поменять на комплексную переменную преобразования Фурье $(-ik)$, тогда

$$\Phi_\mu(k) = (-ik)^{-\mu};$$

- 5) стандартные степенные функции не обладают трансляционной симметрией, т.е. $\Phi_\mu(t + \tau) \neq \text{const} \cdot \Phi_\mu(t)$;

6) имеет особенность при $t = 0$, при приближении аргумента к нулю ($t \rightarrow 0$) быстро убывает;

7) при увеличении аргумента ($t \rightarrow \infty$) убывает достаточно медленно (“длинный” или “тяжёлый хвост”).

Графики некоторых функций $\Phi_\mu(t)$ показаны на рис. 2.

Отсутствие или наличие эрмитарности у системы, состояние которой описывается функцией $f(t)$, определяется следующим условием:

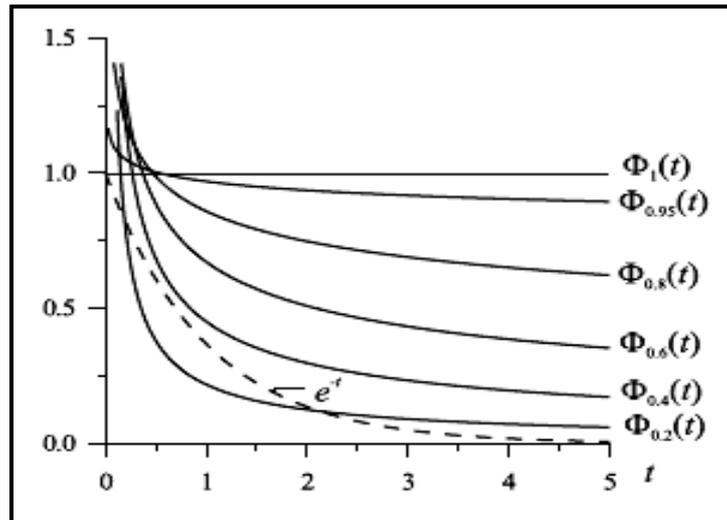


Рис. 2. Графики ряда наследственных функций.

Если скорость изменения функции $\frac{df(t)}{dt}$ в момент времени t пропорциональна значению функции $f(t)$ в тот же момент времени t , то система неэредитарна; в противном случае – система обладает памятью.

Например, если $f(t) = e^{-t}$, то система неэредитарна, а если $f(t) = t^u$, то поведение системы определяется её наследственностью.

96. «Хвостатые» распределения»

96.1. Энтропия и её определение

Согласно теории Больцмана, хаотичность ансамбля динамических систем характеризуется энтропией, которая определяется посредством функции распределения $f(x; \dot{x}; t)$:

$$S(f) = - \int f \ln f dV,$$

где $dV = dx d\dot{x}$ – элемент фазового объёма. Из этого определения энтропии следует, что она сохраняется с течением времени. Постоянство энтропии следует из уравнения Лиувилля

$$\frac{df}{dt} = 0,$$

определяющего неизменность фазового объёма, занятого ансамблем частиц в фазовом пространстве: $\frac{dS(f)}{dt} = - \int (1 + \ln f) \frac{df}{dt} dV = 0$. Установить точный вид функции распределения для ансамбля не представляется возможным. Это связано со свойством перемешиваемости для динамических систем.

Оно возникает из-за подвижности взаимодействующих частиц. В этой связи приходится вводить ограничения на вид функции распределения $f(x, \dot{x}, t)$, например, в виде её огрубления. Однако при огрублении определения функции распределения $f(x; \dot{x}; t)$, например, в виде

$$p(t) = \frac{1}{\delta V} \int f(x; \dot{x}; t) dV$$

(δV – область огрубления), ситуация изменяется. Функция распределения $p(t)$ теперь зависит от времени, следовательно, и новая энтропия $S(p) = -\int p \ln p dV$ также будет функцией времени.

Плотность распределения p для непрерывной случайной величины X удовлетворяет условию нормировки. В одномерном случае оно имеет вид $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$. Дифференциальная функция распределения $p(x)$ применяется для нахождения числовых характеристик таких, как математическое ожидание m (наиболее вероятное значение x_0 , которое может принять случайная величина X), дисперсия \mathcal{D} и средне-квадратическое отклонение $\sigma^2 = \mathcal{D}$ (параметры рассеивания значений x_i случайной величины X относительно математического ожидания):

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx, \quad \mathcal{D} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x) dx.$$

Выполнение этих условий приводит к тому, что уравнение $\delta S(p) = 0$ имеет решение, которое представляет собой нормальный закон распределения (закон ошибок, закон Гаусса)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Святая вера математиков в центральную теорему теории вероятностей, а физиков – в стационарность энтропии Больцмана, привела к тому, что распределения с бесконечными значениями математического ожидания и дисперсии оказались вне их исследований. Бесконечные значения математического ожидания и дисперсии означают, что плотность вероятности $p(x)$ недостаточно быстро убывает на бесконечности (“длинный” или “тяжёлый хвост”). Принципиальных возражений против использования “хвостатых” распределений с бесконечными моментами нет. Использование “атавистических” распределений $g(x)$ возможно при отказе от указанных выше условий и замене их на равенство $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \ln[p(x)] dx = const = c$. Тогда условие стационарности энтропии $\delta S = 0$ приводит к решению $p(x) = g(x)$. Следовательно, любое

распределение с плотностью вероятности $g(x)$ удовлетворяет условию стационарности энтропии Больцмана-Гиббса.

96.2. Энтропия Цаллиса

Другой способ получения распределений, которые отличаются от закона Гаусса и имеют “тяжёлые хвосты”, был предложен Цаллисом. Он использовал *обобщённую энтропию* вида

$$S(p(x); q) = \frac{1 - \sum_{i=1}^N p_i^q(x)}{q - 1},$$

где q – показатель “деформации” вероятности. Энтропия Цаллиса связана с энтропией Реньи соотношением

$$S_q = \frac{\ln[1 - (q - 1)S(p(x); q)]}{q - 1}.$$

Математический формализм, основанный на использовании обобщённой энтропии, сохраняет в термодинамической теории неизменными преобразования Лежандра, теорему Эренфеста, уравнение фон Неймана и теорему взаимности Онзагера для любого действительного числа q . Для случая непрерывных случайных величин энтропию Цаллиса представим в виде

$$S(p(x); q) = \frac{1}{q - 1} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma p(x)]^q d\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right].$$

Используя условие стационарности энтропии, соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 [p(x)]^q dx = \sigma^{3-q},$$

метод неопределённых коэффициентов Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta S(p(x); q) = & \delta \left\{ \frac{1}{q - 1} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma p(x)]^q d\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right] + \mu \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \right] + \right. \\ & \left. + \nu \left[\sigma^{3-q} - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 [p(x)]^q dx \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

получим следующий класс распределений

$$p(x; q) = \frac{A(q)}{[1 + \beta(q - 1)x^2]^{\frac{1}{q-1}}}, \quad q \in (1; 3), \quad x \in R,$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} p(x; q) = \frac{A(q)}{[1 + \beta(q-1)x^2]^{\frac{1}{q-1}}}, |x| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta(1-q)}} \\ p(x; q) = 0, |x| > \frac{1}{\sqrt{\beta(1-q)}} \end{array} \right., q \in (-\infty; 1).$$

При значении параметров распределения $q=2$, $A(2)=\frac{1}{\pi}$ и $\beta=1$ первая из полученных формул переходит в известное **распределение Коши**, называемое в **электродинамике Максвелла** естественной формой **спектральной линии Лоренца**. Такой же вид имеет формула **Брейта-Вигнера**, которая описывает сечение ядерных реакций вблизи резонансов. **Распределение Коши** обладает следующими **свойствами**:

- 1) *математическое ожидание существует в смысле главного значения указанного несобственного интеграла;*
- 2) *дисперсия бесконечна;*
- 3) *среднее арифметическое значение суммы случайных величин с **распределениями Коши** распределяется также по **закону Коши** (возрастание числа слагаемых величин не изменяет “статистическую погрешность” среднего арифметического значения).*

97. “Элементы теории дифференциалов”

97.1. Производные дробного порядка

Множественное интегрирование функции $f(x)$ задаётся формулой $\phi_n(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1$. **Коши** получил формулу, которая позволяет заменить множественное интегрирование вычислением одного интеграла $\phi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy$. Производя замену целого аргумента n на нецелую (в том числе и дробную) переменную μ , получим

$$\phi_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-y)^{\mu-1} f(y) dy.$$

Введём в рассмотрение оператор обыкновенной целой производной порядка n в виде $D_t^n \equiv \frac{d^n}{dt^n}$. Действие этого оператора на непрерывно дифференцируемую функцию $f(t)$ приводит к n -ой производной функции (нулевая производная равна самой функции):

$$D_t^0 f(t) = f(t); D_t^1 f(t) = f^{(1)}(t); D_t^2 f(t) = f^{(2)}(t); \dots; D_t^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

Производные целого порядка обладают следующими свойствами:

– *однородность* $D_t^n f(\lambda t + \eta) = \lambda^n f^{(n)}(\lambda t + \eta)$;

– *линейность* $D_t^n \sum_{i=1}^N C_i f_i(t) = \sum_{i=1}^N C_i f_i^{(n)}(t)$;

– *полугрупповое свойство* $D_t^m D_t^n f(t) = f^{(m+n)}(t) = D_t^{m+n} f(t)$;

– *коммутативность* $D_t^m D_t^n f(t) = D_t^n D_t^m f(t)$.

Рассмотрим целые производные от элементарных функций и их обобщения по Коши:

- степенная функция $f(t) = t^k$ (k – целое число)

$$D_t f(t) = k t^{k-1}; D_t^2 f(t) = k(k-1)t^{k-2}; D_t^3 f(t) = k(k-1)(k-2)t^{k-3}; \dots;$$

$$D_t^n f(t) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)t^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} t^{k-n}.$$

Степенные функции с отрицательным показателем степени используются при исследовании асимптотического ($t \rightarrow \infty$) поведения других функций. n -ая производная функции равна

$$D_t^n t^{-k} = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} t^{-(k+n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)} t^{-(k+n)}.$$

Нецелая производная порядка β от степенной функции $f(t) = t^\alpha$ с вещественным показателем степени α имеет вид

$$D_t^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} t^{\alpha-\beta}, & \alpha \geq 0 \\ (-1)^\beta \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} t^{-(\alpha+\beta)}, & \alpha < 0 \end{cases}.$$

На рис. 3 изображены графики нецелых производных от константы ($\alpha = 0$) при пошаговом изменении их порядка.

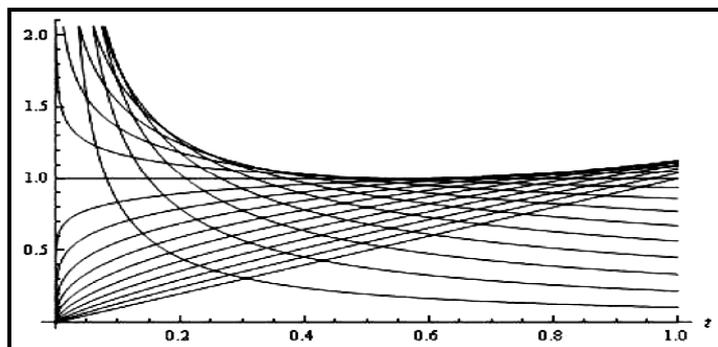


Рис. 3. Дробные производные от 1 при изменении β от -1 до 1 с шагом $0,1$.

- **экспоненциальная функция** $f(t) = e^{\alpha t}$ (α – действительное число): $D_t f(t) = \alpha e^{\alpha t}$; $D_t^2 f(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}$; $D_t^3 f(t) = \alpha^3 e^{\alpha t}$; ...; $D_t^n f(t) = \alpha^n e^{\alpha t}$. Следовательно, нецелая производная порядка β от экспоненциальной функции $f(t) = e^{\alpha t}$ имеет вид $D_t^\beta f(t) = \alpha^\beta e^{\alpha t}$.

Если порядок дробной производной меньше нуля ($\beta < 0$), то нецелая производная от экспоненциальной функции будет функцией комплексного переменного.

- **логарифмическая функция** $f(t) = \log_a t$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

$$D_t f(t) = \frac{1}{t \ln a}; \quad D_t^2 f(t) = -\frac{1}{t^2 \ln a}; \quad D_t^3 f(t) = \frac{1 \cdot 2}{t^3 \ln a};$$

$$D_t^4 f(t) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{t^4 \ln a}; \quad \dots; \quad D_t^n f(t) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{t^n \ln a}.$$

Следовательно, нецелая производная порядка β от логарифмической функции имеет вид

$$D_t^\beta f(t) = (-1)^{\beta-1} \Gamma(\beta) \frac{1}{t^\beta \ln a}.$$

- **синусоида** $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

$$D_t f(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi) = \omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$D_t^2 f(t) = \omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{2}\right); \quad D_t^3 f(t) = \omega^3 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$D_t^4 f(t) = \omega^4 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{4\pi}{2}\right); \quad \dots; \quad D_t^n f(t) = \omega^n \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Нецелая производная порядка β от синусоиды имеет вид

$$D_t^\beta f(t) = \omega^\beta \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Рассмотрим производные с целым, но отрицательным показателем порядка. Для этого вычислим первую производную от функции,

записав её в виде $\phi_n(x) = \int_a^x \phi_{n-1}(x_n) dx_n$, тогда

$$D_x \phi_n(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \phi_{n-1}(x_n) dx_n = \phi_{n-1}(x).$$

Заменив порядок производной n на $-n$, можно записать равенство

$$D_{a,x}^{-n} \phi(x) = \phi^{(-n)}(x) = I_{a,x}^{-n} \phi(x),$$

где оператор $D_{a,x}^{-n} = I_{a,x}^{-n}$ представляет собой n -кратное интегрирование функции $\phi(x)$, которое с учётом **формулы Коши** можно представить в

виде

$$D_{a,x}^{-n} = I_{a,x}^{-n} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^x (x-y)^{-n-1} \dots dy,$$

а для нецелого исчисления –

$$D_{a,x}^{-\beta} = I_{a,x}^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_a^x (x-y)^{-\beta-1} \dots dy.$$

Эта производная называется **дробной производной Римана-Лиувилля** отрицательного порядка при значении $\beta > 0$. Заметим, что операторы $D_t^{\beta > 0}$ и $D_t^{\beta < 0}$ не коммутируют, т.е. $D_t^{\beta > 0} \cdot D_t^{\beta < 0} \neq D_t^{\beta < 0} \cdot D_t^{\beta > 0}$.

97.2. Дифференциалы

Оператор D_t^β с действительным порядком производной называется **дифференциалом**.

Распространение определения **дробной производной Римана-Лиувилля** на положительные значения порядка производной приводит к формулам для левостороннего ($[\beta]$ и $\{\beta\}$ – целая и дробная части числа β , соответственно)

$$D_{a,x}^\beta = D_{a,x}^{[\beta]+1} I_{a,x}^{1-\{\beta\}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_a^x (x-\xi)^{-\beta-1} \dots d\xi, & \beta < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\{\beta\})} D_x^{[\beta]+1} \int_a^x (x-\xi)^{-\{\beta\}} \dots d\xi, & \beta \geq 0 \end{cases}$$

и правостороннего

$$D_{x,b}^\beta = D_{x,b}^{[\beta]+1} I_{x,b}^{1-\{\beta\}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_x^b (\xi-x)^{-\beta-1} \dots d\xi, & \beta < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\{\beta\})} (-D_x)^{[\beta]+1} \int_x^b (\xi-x)^{-\{\beta\}} \dots d\xi, & \beta \geq 0 \end{cases}$$

дифференциалов.

Отметим, что **интегральные производные Римана-Лиувилля** от степенных функций с отрицательными показателями степени не существуют. Кроме того, они не имеют нулевых функций, которые обращают интеграл в нуль при любых значениях аргумента.

Разложение функции $f(x)$ в **ряд Тейлора** содержит целые производные от функции любого порядка. **Ряд Тейлора** позволяет восстановить функцию в области определения по счётному множеству её производных. Ещё большую информацию несут производные с действи-

тельным порядком производных. Одним из обобщений ряда Тейлора является его представление в виде

$$f(x + \xi) = c \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{D_{a,x}^{ci+\beta} f(x)}{\Gamma(ci + \beta + 1)} \xi^{ci+\beta}, \quad c \in (0; 1].$$

При $c = 0$, $\beta = 0$ с учётом равенства $\frac{1}{\Gamma(i+1)} = 0$ ($i = \dots, -3, -2, -1$) эта формула превращается в стандартный ряд Тейлора. Существуют и другие представления ряда Тейлора с использованием дробного исчисления.

Применяя ряд Тейлора к определению дробной производной, получим

$$\mathbf{D}_{a,x}^{\beta} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i + n\beta + 1)} (x-a)^{i-\beta} + \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\xi)}{(x-\xi)^{\beta-n+1}} d\xi,$$

здесь величина $n = [\beta] + 1$. Дробная производная от степенной функции

$\Phi_{\mu}(x-a)$ определяется по формуле $\mathbf{D}_{x,b}^{\beta} \Phi_{\mu}(x-a) = \frac{(x-a)^{\mu-\beta-1}}{\Gamma(\mu-\beta)}$. Если $\mu = \beta - \nu$

и $\nu \in [0; \beta)$, то $\mathbf{D}_{x,b}^{\beta} \Phi_{\beta-\nu}(x-a) = 0$.

Помимо дробной производной Римана-Лиувилля используется также нецелая производная Капуто, которая задаётся оператором

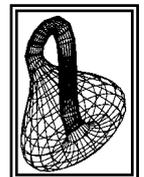
$$\mathfrak{D}_{a,x}^{\beta} = I_{a,x}^{n-\beta} D_x^n,$$

и производная Маршо

$$\mathfrak{D}_{a,x}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left\{ \beta \int_a^x \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-\xi)^{\beta+1}} d\xi + \frac{f(x)}{(x-a)^{\beta}} \right\}.$$

Дробные производные для аналитических функций $f(z)$ комплексного аргумента $z = x + iy$ получают путём обобщения интегральной формулы Коши на случай комплексных показателей порядка производной:

$$D_{\mathcal{L}}^{\kappa} = I_{\mathcal{L}}^{\kappa} = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\kappa+1}} d\zeta.$$



Задания для самостоятельного решения

Дифференциалы

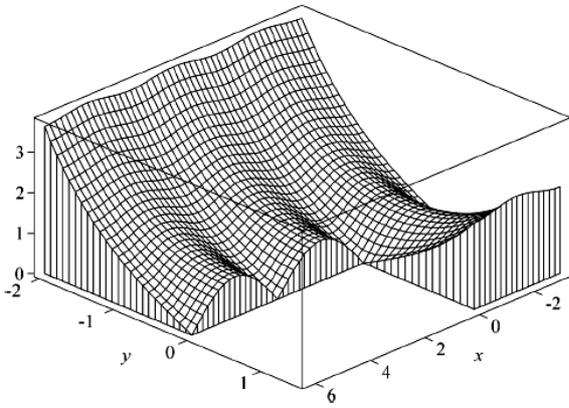
Вариант 1-10

Составить *свой вариант индивидуального задания* по данной теме, содержащий не менее 5 задач.

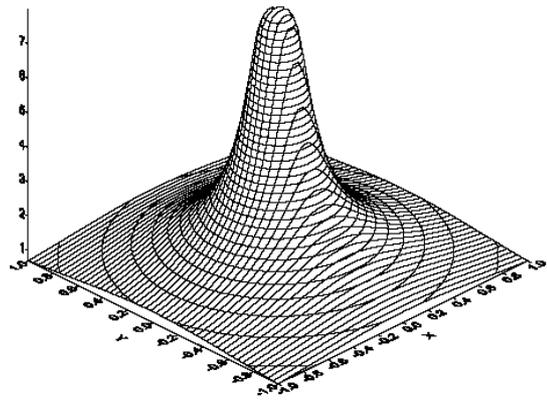
Список использованных источников

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: “Артишок”. – 2008. – 512 с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. – Киев: НАН Украины. – 2008. – 256 с.
4. Рехвиашвили С.Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30, вып. 2. – С. 33-37.
5. Рехвиашвили С.Ш. Нестационарная электропроводность полимеров в модели с дробным интегродифференцированием // Физика твёрдого тела. – 2007. – Т. 49, вып. 8. – С. 1522-1526.
6. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.1. Инструментарий (методика решения задач). – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 540 с.
7. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.

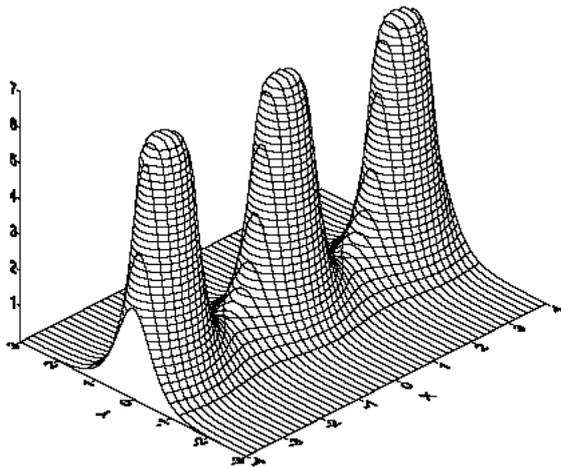
Поверхности функций комплексного переменного



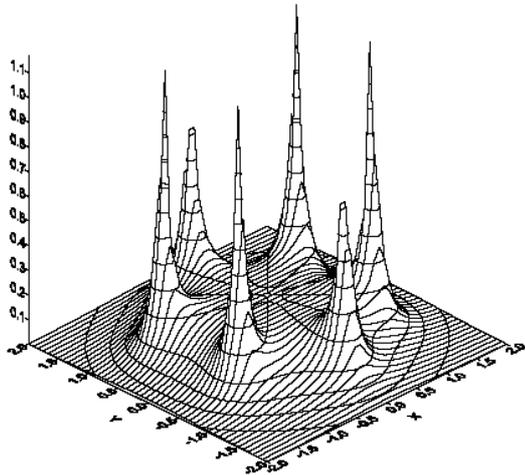
$$f(z) = \sin z$$



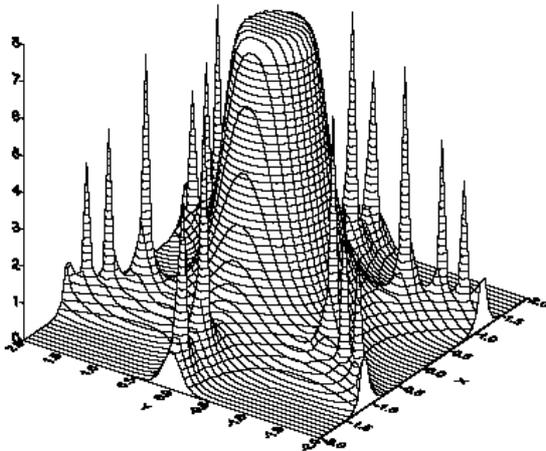
$$f(z) = \frac{1}{z}$$



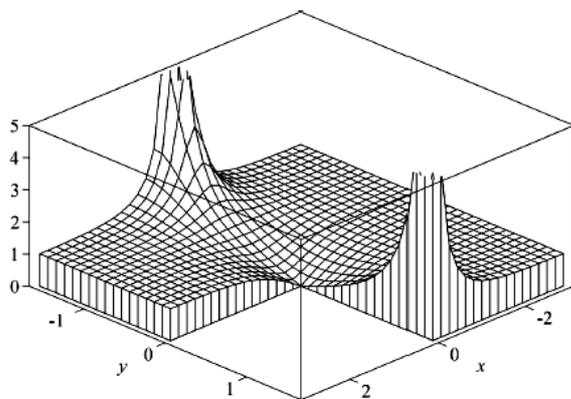
$$f(z) = \frac{1}{\sin^3 z}$$



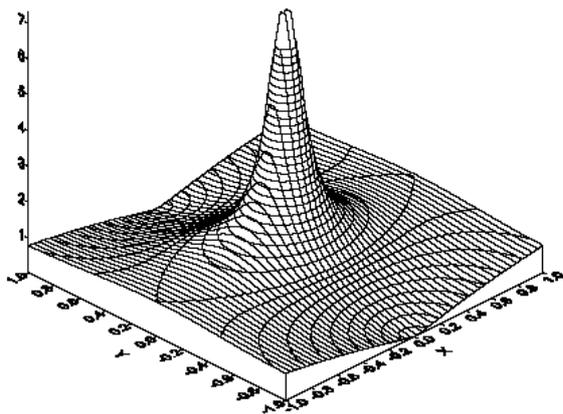
$$f(z) = \frac{1}{a+z^6}$$



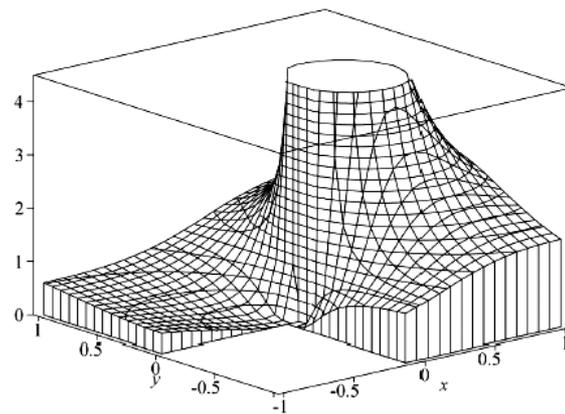
$$f(z) = \frac{1}{\sin(z^3)}$$



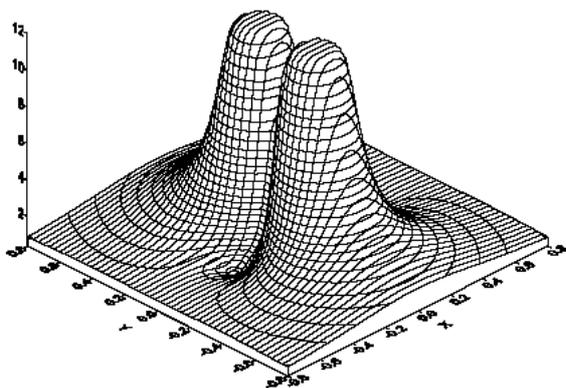
$$f(z) = \text{th } z$$



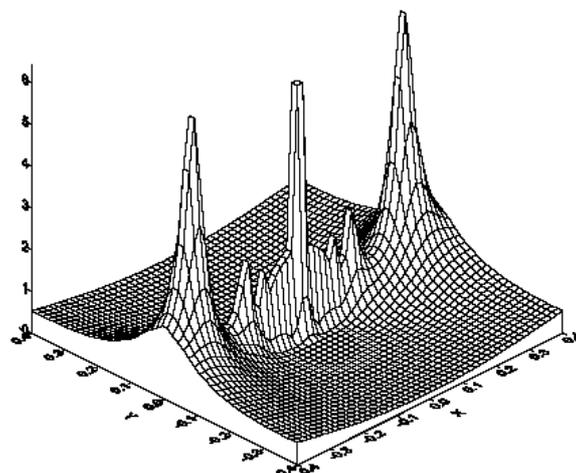
$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



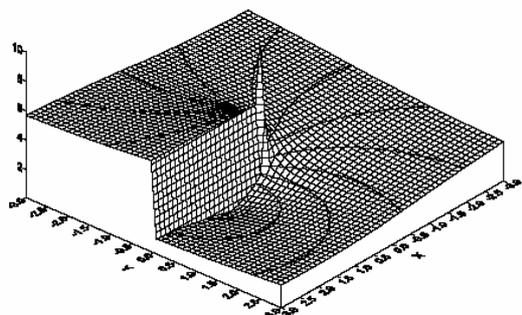
$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$



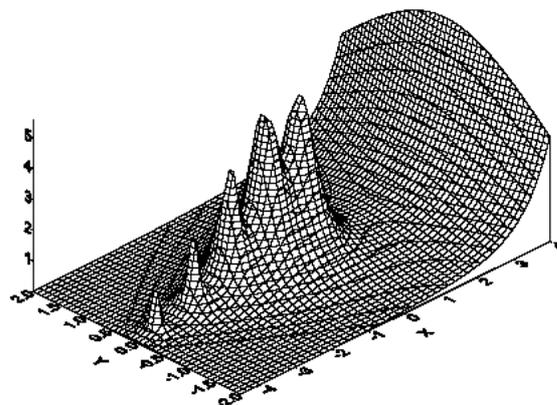
$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$



$$f(z) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$$



$$f(z) = \ln z$$



$$f(z) = \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! n^z}{\prod_{k=0}^n (z+k)} \right)$$

Латинский и греческий алфавиты

БУКВЫ ЛАТИНСКОГО АЛФАВИТА					
Прямой шрифт	Курсив	Название	Прямой шрифт	Курсив	Название
A a	<i>A a</i>	а	N n	<i>N n</i>	эн
B b	<i>B b</i>	бэ	O o	<i>O o</i>	о
C c	<i>C c</i>	це	P p	<i>P p</i>	пэ
D d	<i>D d</i>	дэ	Q q	<i>Q q</i>	ку
E e	<i>E e</i>	е	R r	<i>R r</i>	эр
F f	<i>F f</i>	эф	S s	<i>S s</i>	эс
G g	<i>G g</i>	же (гэ)	T t	<i>T t</i>	тэ
H h	<i>H h</i>	аш	U u	<i>U u</i>	у
I i	<i>I i</i>	и	V v	<i>V v</i>	вэ
J j	<i>J j</i>	жи (йот)	W w	<i>W w</i>	дубль-вэ
K k	<i>K k</i>	ка	X x	<i>X x</i>	икс
L l	<i>L l</i>	эль	Y y	<i>Y y</i>	игрек
M m	<i>M m</i>	эм	Z z	<i>Z z</i>	зэт

БУКВЫ ГРЕЧЕСКОГО АЛФАВИТА			
Начертание	Название	Начертание	Название
A α	альфа	N ν	ню (ни)
B β	бэта	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο ο	о микρόν
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Z ζ	дзэта	Σ σ	сигма
Η η	эта	Τ τ	та́у
Θ θ (ϑ)	тэта	Υ υ	ипсилон
Ι ι	и́ота	Φ φ	фи
Κ κ	каппа	Χ χ	хи
Λ λ	лямбда (лямбда)	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю (ми)	Ω ω	о méга



*Терехов С.В.
Варюхин В.Н.
Петренко А.Г.*



Вариационные принципы классической механики

Учебное пособие

*Донецк
ГОУ ВПО «ДонНУ»
2018*

Оглавление

	Стр.
I. Особенности метода Эйлера-Лагранжа	478
1. Введение. Применение вариационных принципов для построения аналитической механики.....	478
2. Фазовое пространство (q, \dot{q}, t) (q, \dot{q}, L или H), сопряжённые кинетические фокусы (СКФ), изохронная вариация обобщённой координаты.....	486
3. Изохронная вариация действия и уравнение движения.....	490
4. Выводы.....	501
Список использованных источников	502
II. Разновидности механики	506
1. Введение. Проблемы аналитической механики.....	506
2. Учёт диссипативных сил в рамках формализма Эйлера-Лагранжа.....	507
3. Связи и степени свободы.....	510
4. Независимость вариаций времени.....	513
5. Различные виды аналитической механики.....	515
6. Выводы.....	519
Список использованных источников	520

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

...нельзя повредить истине более, чем желанием построить её на
ложных умозаключениях

*П. Мопертюи*¹

...все явления природы следуют какому-нибудь закону *максимума*
или *минимума*

*Л. Эйлер*²

Знание немногих *принципов* легко возмещает незнание некоторых
фактов

*К. Гельвеций*³

I. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

1. Введение. Применение вариационных принципов для построения аналитической механики

Методы вариационного исчисления широко используют при решении ряда математических задач, которые моделируют физические и другие процессы в *сложных* системах, принадлежащих к тому или иному уровню организации материи. Однако теория функционалов содержит проблемы как научного (например, решение уравнений в вариациях, вычисление функциональных интегралов негауссовского типа [1] и др.), так и методического плана, например, по содержанию и последовательности изложения вариационных методов в курсе “Механика”.

Целью данной работы является анализ информационного содержания вариационных принципов Мопертюи-Эйлера-Лагранжа (*закон стационарного действия*) и Гамильтона-Остроградского (*законы переменного и варьированного действия*), которому недостаточно уделяют внимания как в учебной литературе [2-4], так и в ряде научных статей [5, 6].

¹*Вариационные принципы механики.* /Сб. статей. //Под ред. Л.С. Полака. – М.: Гос. изд-во физ. мат. лит, 1959. – с. 41-55.

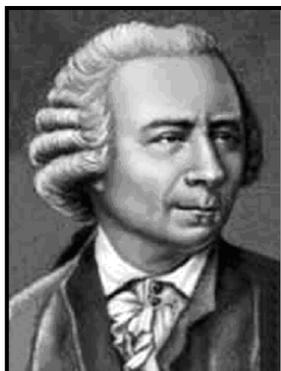
² там же, с. 31-40.

³*Гельвеций. Сочинения* /В 2-х томах //Под ред. Х.Н. Момджяна. – М.: Мысль, 1973. – 647 с.

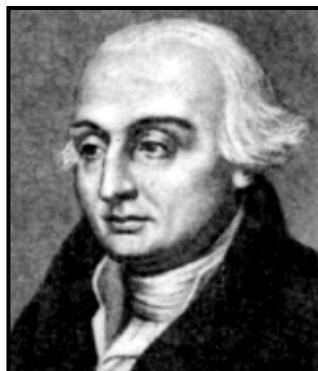
Впервые мысль о том, что законы природы могут быть получены из малого числа аксиом, была высказана П.Л.М. Мопертюи (рис. 1а) в докладе Парижской академии наук под названием “Согласование различных законов природы, которые до сих пор казались несовместимыми” (1744). Однако истоком



а) *Пьер Луи Моро де Мопертюи*
(1698-1759)



б) *Леонард Эйлер*
(1707-1783)



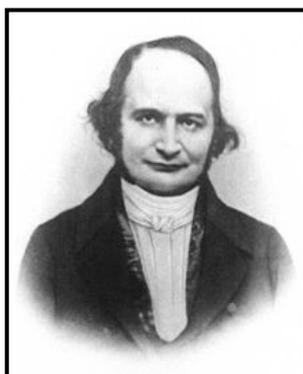
в) *Жозеф Луи Лагранж*
(1736-1813)



г) *Уильям Роуэн Гамильтон*
(1805-1865)



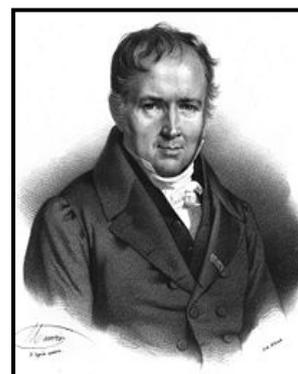
д) *Адриен Мари Лежандр*
(1752 - 1833)



е) *Карл Густав Якоб Якоби*
(1804 - 1851)



ж) *Михаил Васильевич Остроградский*
(1801 - 1861)



з) *Симеон Дени Пуассон*
(1781 - 1840)

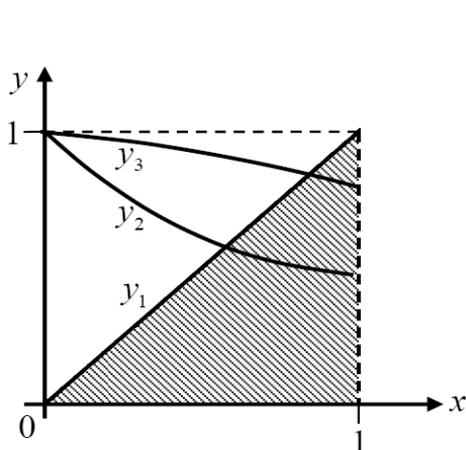
Рис. 1. Учёные, внесшие существенный вклад в становление вариационного исчисления и его развитие.

вариационного исчисления по праву считается изданная в 1748 году статья П.Л.М. Мопертюи “Законы движения и покоя, выведенные из метафизического принципа” (см., например, [7]). В ней был окончательно сформулирован общий принцип наименьшего действия: “Когда в природе происходит некоторое изменение, Количество Действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным”. Это утверждение вызвало резкую критику со стороны профессора Берлинской академии С. Кёнига (в члены Берлинской академии наук он был рекомендован президентом этой академии П.Л.М. Мопертюи; профессор С. Кёниг занимался теорией камертонов). Согласно Л. Эйлеру (рис. 1б) [8]: “...одних он пытается убедить, что принцип знамен. де Мопертюи лишён

всякого основания, других же, т.е. тех, кого он не сумел убедить в этом, он старается заставить поверить, что этот принцип открыт самим Лейбницем; но во втором Кёниг преуспел не более, чем в первом”. После того, как Л. Эйлер продемонстрировал применимость принципа наименьшего действия к задачам статики [8, 9], а Ж.Л. Лагранж (рис. 1в) – к проблемам динамики [10, 11], вариационный метод получил широкое распространение. К развитию вариационного исчисления применительно к механическим задачам приложили свои усилия У.Р. Гамильтон (рис. 1г), А.М. Лежандр (рис. 1д), К.Г.Я. Якоби (рис. 1е), М.В. Остроградский (рис. 1ж), С.Д. Пуассон (рис. 1з), С. Ли и многие другие выдающиеся учёные.

Вариационный метод базируется на отыскании наименьшего или экстремального значения функционала (определённого интеграла от некоторой функции), заданного на ограниченном множестве интегрируемых функций (линий, ограниченных одними и теми же значениями аргумента)⁴.

Например, рассмотрим множество непрерывных функций $y_i(x)$ на интервале $x \in [0; 1]$ и вычислим площадь



$$J[y_i(x)] = \int_0^1 y_i(x) dx$$

под заданными кривыми [8]:

$$\begin{cases} y_1(x) = x; & J = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2} \\ y_2(x) = \frac{1}{1+x}; & J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \\ y_3(x) = \frac{1}{1+x^2}; & J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Рис. 2. Вычисление площади фигур, ограниченных сверху функцией $y_i(x)$ на интервале $x \in [0; 1]$.

Среди указанных функций наименьшее значение площадь J достигает в первом случае (рис. 2). Если подынтегральная функция $y_i(x, \alpha)$ зависит от параметра α , то и определённый интеграл J является функцией этого

⁴Эта постановка задачи аналогична отысканию наименьшего значения непрерывной функции на заданном ограниченном интервале изменения аргумента (на конечном множестве действительных чисел): непрерывная функция $y(x)$ достигает своего наименьшего значения на концах заданного интервала изменения аргумента или в критической точке (в этой точке первая производная функции $y'(x) = 0$) внутри этого отрезка.

параметра и называется *функционалом* $J[y_i(x, \alpha)]$, например,

$$J[y_i(x, \alpha)] = \int_0^1 (\alpha x + 1) dx = \left(\frac{\alpha x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{\alpha}{2} + 1;$$

$$J[y_i(x, \alpha)] = \int_0^1 (x + \alpha) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \alpha x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \alpha.$$

Рассмотрим некоторые аспекты аналитической механики, которые понадобятся при исследовании содержания вариационных принципов механики для *свободной* частицы (*отсутствуют связи*). При решении задач аналитической механики материальная частица перемещается вдоль линии, называемой *траекторией движения* (*экстремалью, геодезической линией*) [2, 3]. Описание движения механических систем, согласно Дж.У. Гиббсу, проводится в *фазовом (конфигурационном) пространстве*, на числовых осях которого откладывают обобщённую координату $q(t)$ ⁵ (траектория движения, t – время) и обобщённую скорость $\dot{q}(t)$ материальной частицы вдоль экстремали (в дальнейшем все введённые величины, вариационные функции, а также обобщённые импульс p и силу $\dot{p} = F$ будем считать безразмерными). Для отыскания *истинной траектории движения* применяют два вариационных принципа: *Мопертюи-Эйлера-Лагранжа* и *Гамильтона-Остроградского*. В первом случае отыскивается экстремум определённого интеграла от удвоенной кинетической энергии, а во втором – от функции Лагранжа. Несмотря на разницу в подходах, уравнения движения имеют один и тот же вид: они сводятся ко второму закону Ньютона.

В классической динамике Лагранжа движение частицы по экстремале происходит при *стационарном значении действия* $S[q(t), \dot{q}(t)]$, при этом вариации начальной $\delta q(t_1)$ и конечной $\delta q(t_2)$ точек экстремали считают *фиксированными* [8-11] и *равными нулю*. Под *вариацией* обобщённой координаты точки экстремали $\delta q(t)$ понимают её виртуальное смещение в заданный момент времени (рис. 3). Вариационный экстремум действия отыскивается путём обращения в нуль вариации интеграла от функции Лагранжа (*лагранжиана*)

$$\boxed{L(q, \dot{q}, t) = \frac{dS}{dt} = C(q, \dot{q}) - \Pi(q)}, \quad (1)$$

⁵Конфигурационное пространство Гиббса описывается геометрией Римана. В дальнейшем, согласно [3], будем понимать под $q(t)$ (и соответственно под $\dot{q}(t)$) в случае многочастичной динамической системы совокупность всех обобщённых координат (обобщённых скоростей).

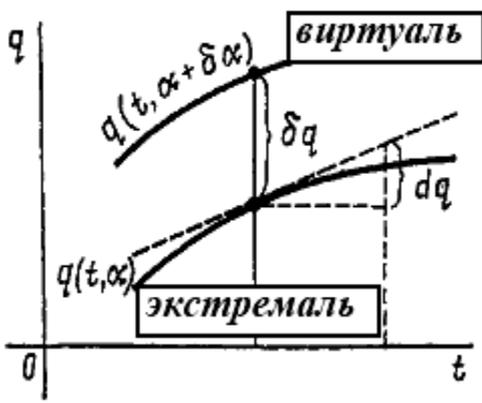


Рис. 3. Вариация обобщённой координаты $\delta q(t)$ и дифференциал $dq(t)$ [12].

обобщённая сила $\dot{p} = F(q, \dot{q}, t)$ для лагранжевых систем определяется соотношением [13]

$$F(q, \dot{q}, t) = - \frac{\partial \Pi(q, \dot{q}, t)}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right). \quad (3)$$

Механическая система в ограниченной области будет находиться в *равновесии*, если потенциальная энергия *стационарна*, т.е. не зависит от времени. Если положение равновесия не лежит внутри выделенной области конфигурационного пространства, то механическая система движется к её границе, где *свойство стационарности потенциальной энергии необязательно*.

Истинное движение свободной частицы задаётся дифференциальным уравнением второго порядка (*вторым законом Ньютона*), которое получают из обнуления вариации действия (2) при нулевых значениях вариаций положений граничных точек:

$$\begin{cases} \delta t_1 = \delta t_2 = 0 \\ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \delta S = 0^6. \quad (4)$$

Отказавшись от второго условия системы (4) и варьируя время, Гамильтон получил закон *переменного* ($\delta t_{1,2} = 0$; $\delta q_{1,2} \neq 0$; $\delta S = p \delta q|_{t_1}^{t_2}$), а М.В. Остроградский – *варьированного* ($\delta t_{1,2} \neq 0$; $\delta q_{1,2} \neq 0$) действия [14]

(здесь $C(q, \dot{q})$ – кинетическая, а $\Pi(q)$ – потенциальная энергия для натуральных систем), посредством которой действие S определяется формулой [2, 3]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (2)$$

Отметим, что в общем случае вводят обобщённую потенциальную энергию, которая зависит не только от обобщённых координат материальных частиц, но и от их обобщённых скоростей (например, *гироскопические силы*), а также времени. Следовательно,

⁶Согласно К.Г. Якоби, приведенная формулировка принципа наименьшего действия справедлива, *только на очень малых участках траектории движения, на всей геодезической линии действие принимает стационарное, но необязательно минимальное значение*. Поэтому метод Эйлера-Лагранжа называют *принципом стационарного действия*.

$$\delta S = L \delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = [p \delta q - H \delta t] \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (5)$$

где $p = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}}$ – обобщённый импульс, а гамильтониан

$$H(q, p, t) = C(q, p) + \Pi(q, t). \quad (6)$$

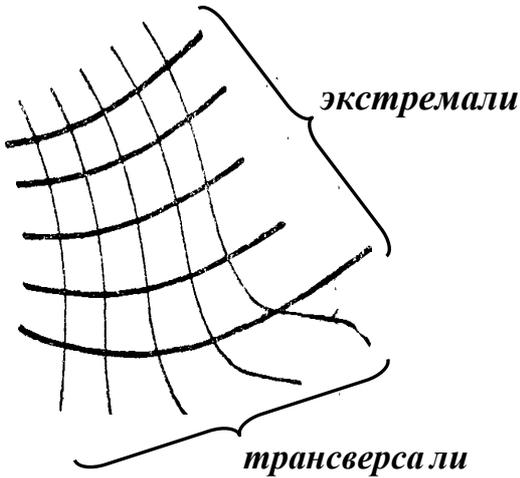


Рис. 4. Экстремали и трансверсали механического движения.

Обращение правой части равенства (5) в нуль определяет условие трансверсальности [15, с. 40] на концах экстремали. Кратчайшие кривые, проходящие через точки трансверсальности, называются в математике трансверсальными поля (рис. 4), а в физике – эквипотенциальными линиями [16, 17]. Трансверсали являются экстремальными функциями $\phi(q, t)$, описывающих поведение поля, в котором происходит движение частицы. Поле не достигает экстремального значения в областях, где выполняется уравнение Лапласа $\Delta\phi(q, t) = 0$

и концентрируется в тех точках, где $\Delta\phi(q, t) < 0$ [16]. Условие трансверсальности выделяет особые канонические преобразования, которые сохраняют как вид уравнений движения, так и условия трансверсальности.

По теории Гамильтона уравнения движения классической частицы определяются системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}; & \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{cases}. \quad (7)$$

Если гамильтониан не зависит явно от времени, то в процессе движения он сохраняется, т.е. является интегралом движения, при этом изображающая точка в конфигурационном пространстве движется по изоэнергетической поверхности. Динамическая система с неизменной общей механической энергией называется консервативной.

Гамильтониан является сопряжённой переменной по отношению к инверсированному времени, т.е. к $-t$ [13]. Это означает, что замена времени t на обратное время $-t$, не меняет вида уравнений (7), что указывает на однородность времени и наличие (см. теорему Нётер [15, с. 40]) соответствующего это-

му свойству интеграла движения (*гамильтониана*). Наиболее эффективным методом решения системы уравнений (7) является поиск таких преобразований координат конфигурационного пространства, которые приводят задачу к решению более простых уравнений. Например, первая пара уравнений системы (7) при переходе в область комплексных функций по формулам $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$; $z^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$ принимает более простой вид $i \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z^*}$. Отметим, что преобразования, при которых *остаётся инвариантным лагранжиан системы, приводят к инвариантности уравнений движения.*

Функция Гамильтона связана с лагранжианом (1) *преобразованием А.М. Лежандра* (предложено автором в 1789 году (см., например, [18-21]); применяется в аналитической механике, термодинамике, теории мультифракталов и др.):

$$H(q, p, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t), \quad (8)$$

которое позволяет перейти от исследования любого плоского (пространственного) объекта к исследованию касательных к нему линий (касательных плоскостей).

Не следует отождествлять гамильтониан $H(q, p, t)$ системы с её *полной механической энергией* $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r)$, хотя в большинстве практически важных случаях они совпадают. Например, для “спящего волчка” (волчок Лагранжа – волчок, вращающийся вокруг своей вертикальной оси симметрии при отсутствии трения) полная механическая энергия в лабораторной системе отсчёта $E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgh$ (I – момент инерции волчка, $\dot{\varphi}$ – угловая скорость вращения, m – масса волчка, $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, h – расстояние от точки вращения до центра тяжести). При переходе к новой обобщённой координате $\alpha = \varphi - \omega_0 t$ гамильтониан $H = p_\alpha \dot{\alpha} - L = E - p_\alpha \omega_0$ (обобщённый импульс $p_\alpha = I(\dot{\alpha} + \omega_0)$), а полная механическая энергия волчка $E = \frac{p_\alpha^2}{2I} + mgh$ [13].

В общем случае преобразование Лежандра определяет сопряжённые

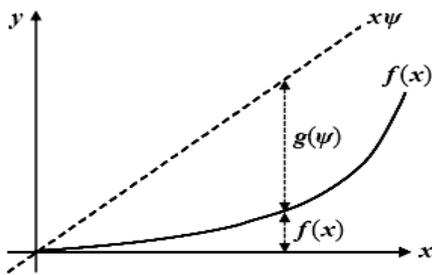


Рис. 5. Одномерные сопряжённые функции.

функции с помощью нижеприведенных соотношений (рис. 5)⁷

$$\boxed{f(x, y, z) + g(\psi, \xi, \zeta) = x\psi + y\xi + z\zeta}, \quad (9)$$

при этом дифференциалы указанных функций $df(x, y, z)$ и $dg(\psi, \xi, \zeta)$ равны

$$df(x, y, z) = \psi dx + \xi dy + \zeta dz, \quad (10)$$

$$dg(\psi, \xi, \zeta) = x d\psi + y d\xi + z d\zeta. \quad (11)$$

К.Г. Якоби установил другую связь между функциями Лагранжа и Гамильтона, причём гамильтониан H определяет частную производную по времени от действия $\frac{\partial S}{\partial t}$ (см., например, [15]), а обобщённый импульс p – частную производную от действия по обобщённой координате:

$$\boxed{H = -\frac{\partial S}{\partial t}; p = \frac{\partial S}{\partial q}}^8. \quad (12)$$

Общее решение первого уравнения (12) содержит столько постоянных, сколько независимых переменных имеет гамильтониан H .

Известный русский математик М.В. Остроградский обосновал перестановочность операции варьирования δ с операцией взятия производной по аргументам (например, по времени $\frac{d}{dt}$), дифференциала d и интегрирования \int [22, 23]:

$$\begin{cases} \delta \dot{q} = \delta \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{d(\delta q)}{dt} \\ \delta (dq) = d(\delta q) \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \end{cases}. \quad (13)$$

⁷Для существования преобразования Лежандра необходимо и достаточно, чтобы определитель (“гессиан”), составленный из вторых частных производных заданных функций по своим аргументам, был отличен от нуля. Дуальное относительно выбора “старой” и “новой” функций преобразование Лежандра, по-видимому, отображает более глубокую связь между обобщёнными координатами и потенциалами полей, вызывающими перемещение материальной частицы; при построении физической картины мира роль преобразования Лежандра пока до конца не раскрыта.

⁸В векторном виде обобщённый импульс $p = gradS = \nabla S$ определяется градиентом действия, т.е. он ортогонален поверхности постоянного действия, а движение частицы происходит в направлении, перпендикулярном к этой поверхности.

С.Д. Пуассон ввёл в вариационное исчисление обобщение скобок Лагранжа и получил уравнение эволюции функций вдоль экстремалей [15]

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]}, \quad (14)$$

где скобка Пуассона

$$\boxed{[f, H] = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}}. \quad (15)$$

Если функция f не зависит явно от времени и скобка Пуассона (15) равна нулю, то функция f является *интегралом движения*.

Указанные аспекты аналитической механики демонстрируют информационную насыщенность вариационных принципов, поэтому остановимся на тех знаниях, которые неявно используются при вариационном решении той или иной задачи. Поиск универсальных синергетических закономерностей (самоорганизация, когерентное поведение, универсальные флуктуации, возникновение динамического хаоса и др.), появление странных аттракторов на фазовых портретах сложных систем, возникновение структур при протекании необратимых процессов, фрактальная геометрия объектов, а также протекающие в сложных системах кинетические или динамические явления побуждают исследователей к формированию новых вариационных принципов. Плодотворность вариационного метода применительно к различным по своей природе системам не вызывает сомнений, однако его применение в различных областях естествознания требует поиска новых адиабатических инвариантов движения.

Следовательно, актуальность анализа информационного содержания вариационных принципов Мопертюи-Эйлера-Лагранжа и Гамильтона-Остроградского вызвана как необходимостью их более чёткого математического изложения в учебной литературе по физике (например, в учебниках [2-4] вариационный подход изложен в слишком сжатой форме), так и его обобщения на случай описания сложных и неравновесных систем различных уровней организации материи с учётом детерминированных и хаотических перемещений компонентов.

2. Фазовое пространство (q, \dot{q}, t) (q, \dot{q}, L или H), сопряжённые кинетические фокусы (СКФ), изохронная вариация обобщённой координаты

1. Наглядное отображение потоков и течений в фазовом пространстве. Функция Лагранжа L (Гамильтона H) зависит от трёх аргументов: времени t , обобщённой координаты q и обобщённой скорости \dot{q} (обобщённого им-

пульса p). Однако, согласно Дж.У. Гиббсу, поведение динамической системы изображают только на фазовой плоскости, по координатным осям которой откладывают обобщённую координату q и обобщённую скорость \dot{q} . Следовательно, фазовые портреты физических процессов являются всего лишь их *топографическими картами*. В силу того, что человек получает через зрительные каналы ~90% информации [24] и реальное пространство имеет три измерения, то огромную роль при обучении играют пространственные изображения. Поэтому добавим к фазовому пространству Гиббса временную ось (рис. 6, [25]) или сопряжённую к ней ось гамильтониана (на рис. 7 показан геометрический вид гамильтониана гармонического (линейного) осциллятора [26])

$$H = \frac{m(\dot{q} - \dot{q}_0)^2}{2} + \frac{k(q - q_0)^2}{2},$$

q_0 и \dot{q}_0 – положение равновесия и скорость при прохождении этого положения).

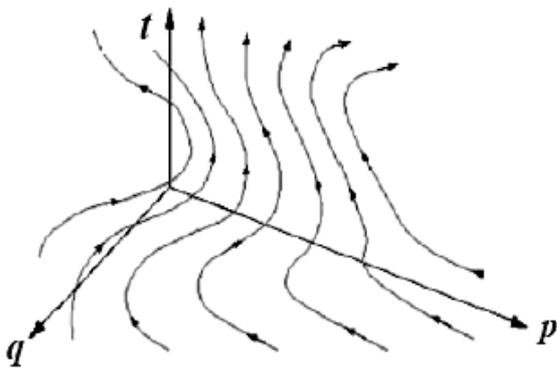


Рис. 6. *Потоки в фазовом пространстве Гамильтона с дополнительной осью времени [25].*

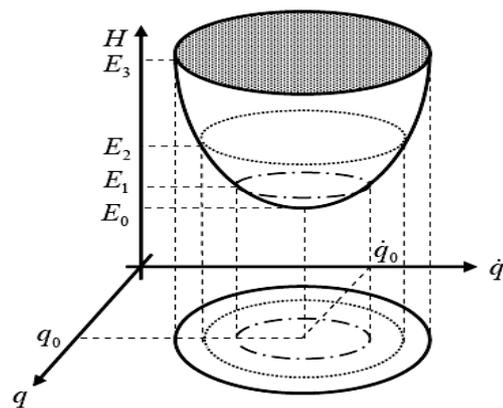


Рис. 7. *Гамильтониан и фазовый портрет линейного осциллятора.*

Такие изображения существенно повышают информационную составляющую геометрического отображения физического содержания процесса. Например, параллельные фазовой плоскости сечения энергетического параболоида показывают, как изменяются эллипсы, отображающие гармонические колебания материальной частицы в зависимости от её полной механической энергии E_i (рис. 7).

2. Сопряжённые кинетические фокусы (СКФ). К.Г. Якоби заметил, что вариация действия (2) имеет экстремум не при любой длине промежутка $[t_1; t_2]$, а только при достаточно малой. Если начальная и конечная точки траектории движения соединяются двумя бесконечно близкими траекториями дви-

жения, по которым в течение одного и того же времени может происходить движение материальной частицы, то точки называются *сопряжёнными кинетическими фокусами* (СКФ, рис. 8; место положение СКФ обозначим q_f) [26]. Примером СКФ являются полюса сферы: движение свободной частицы (связи и их реакции отсутствуют) может происходить вдоль меридианов, расположенных бесконечно близко друг к другу. Присутствие на экстремали сопряжённого кинетического фокуса (точка A_1 на экстремали ABA_1Q ; $q(t_1) < q_f < q(t_2)$; рис. 9) не позволяет действию S достичь минимума в виду существования виртуального пути $AHNTQ$, на котором действие принимает значение меньше, чем на траектории движения.

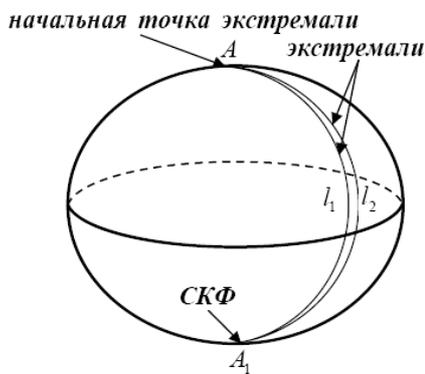


Рис. 8. Сопряжённые кинетические фокусы A и A_1 .

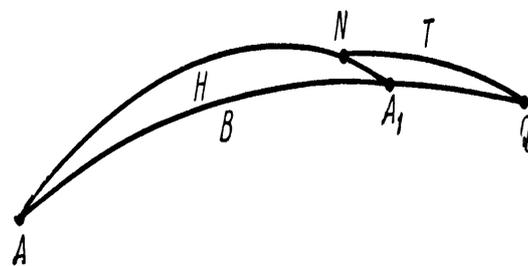


Рис. 9. Виртуальная траектория $AHNTQ$ обходит сопряжённый кинетический фокус A_1 [26].

На траектории движения $AHNTQ$ вторая вариация действия $\delta^2 S = 0$ [26] (если $\delta^2 S < 0$, то виртуальная кривая не является экстремалью, см. ниже), поэтому экстремаль $AHNTQ$ будет бесконечно близка к истинной траектории движения. Выполнение условий

$$\delta S = 0; \quad \delta^2 S = 0; \quad \delta^3 S \neq 0 \quad (16)$$

указывает на *лабильность* динамической системы (односторонняя устойчивость движения) и *отсутствие экстремума*. Аналитический способ поиска СКФ наиболее подробно изложен в работе [26]. Если СКФ лежит перед конечной точкой интервала интегрирования $[t_1; t_2]$, то действие на траектории движения не будет достигать ни минимума, ни максимума [27].

3. Изохронная вариация обобщённой координаты. При использовании вариационного подхода Эйлера-Лагранжа (закон стационарного действия) время t не является варьируемой переменной, поэтому вариацию обобщённой координаты $\delta q(t)$ можно назвать *изохронной* [12] (обобщённые скорости в лагран-

жевой динамике зависят от обобщённых координат, вследствие чего их вариация не рассматривается). Существование изохронной⁹ вариации указывает на зависимость обобщённой координаты $q(t)$ от некоторых натуральных (естественных) параметров α_i ($i = 1 \dots n$), которые характеризуют траекторию движения.

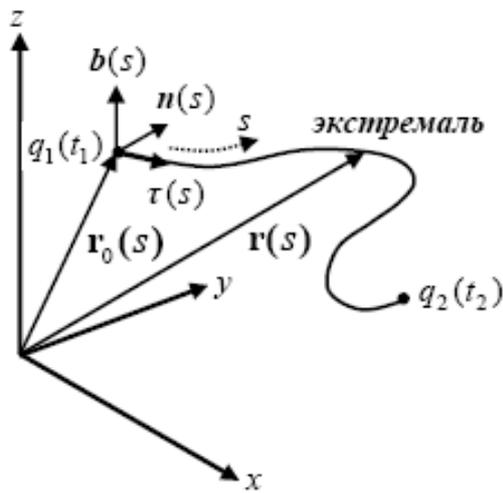


Рис. 10. Описание траектории движения с помощью естественных параметров.

В качестве таких параметров могут выступать: а) кривизна и кручение экстремали; б) расстояние от начальной точки движения (наличие памяти о пройденном пути); в) флуктуации (шумовые смещения) [25]; г) полевые воздействия других частиц или систем. Например, описание экстремали в терминах ортов (единичных векторов) Серре-Френе [21] имеет вид (рис. 10):

$$\mathbf{r}(s, y, z) = \mathbf{r}_0(s) + y \mathbf{n}(s) + z \mathbf{b}(s), \quad (17)$$

где орты Серре-Френе удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

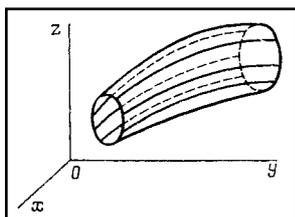
$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds} &= \boldsymbol{\tau}(s); & \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} &= \chi \mathbf{n}(s); \\ \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} &= \eta \mathbf{b}(s) - \chi \boldsymbol{\tau}(s); & \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} &= -\eta \mathbf{n}(s) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

здесь χ – кривизна (*curvature*), а η – кручение (*torsion*) экстремали.

Следовательно, под *изохронной вариацией* обобщённой координаты $\delta q(t)$ следует понимать соотношение (см. также [12])

$$\delta q(t, \alpha_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i = \zeta(t, \alpha_i) \delta \alpha, \quad (19)$$

где функция, определяющая “скорость” изменения обобщённой координаты в зависимости от натуральных параметров геодезической линии, т.е. оп-



⁹При изохронном варьировании все траектории движения имеют различные граничные точки, но начальное и конечное времена для всех экстремалей будут одинаковы. Это означает, что все траектории движения образуют трубку одномоментных движений. При неизменности контура начального движения трубка является *виртуально-устойчивой*; в противном случае – расширение (сужение) стартового контура одномоментных движений указывает на *виртуальную неустойчивость* [12, с. 76].

ределяет поле изменений параметров экстремали равна¹⁰

$$\zeta(t, \alpha_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial q(t, \alpha_i)}{\partial \alpha_i}; \quad (20)$$

$\delta \alpha_i = \gamma_i \delta \alpha$; $\gamma_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha} = \frac{d \alpha_i}{d \alpha}$ – относительная доля вариации характеристики i в общем параметрическом изменении траектории движения; $\delta \alpha$ – бесконечно малая величина ($\delta \alpha \ll 1$).

Формула (19) показывает: каковы бы ни были виртуальные изменения естественных параметров экстремали, их суммарное действие на изменение истинной траектории движения должно быть значительно меньше наперёд заданной бесконечно малой величины. Это требование определяет плавное изменение изохронной вариации и её малость вдоль геодезической линии (отбрасываются вторая и высшие вариации обобщённой координаты в силу их более высокой степени малости), а также обеспечивает близость виртуальной траектории к экстремали. Обращение вариаций обобщённой координаты (18) в нуль на концах экстремали связано с обнулением в этих точках “скорости” изменения параметров геодезической линии ($\zeta(t, \alpha_i)|_{t_1, t_2} = 0$), что приводит (в силу независимости вариаций натуральных параметров) к обнулению частных производных от обобщённой координаты по естественным аргументам ($\frac{\partial q}{\partial \alpha_i} \Big|_{t_1, t_2} = 0$). Последнее утверждение эквивалентно достижению обобщённой координатой экстремальных значений по натуральным параметрам на концах геодезической линии.

3. Изохронная вариация действия и уравнение движения

1. Свойства лагранжиана. Приведём без доказательства ряд свойств функции Лагранжа:

а) аддитивность. Если механическая система состоит из n *невозмущённых* между собой частей, поведение каждой из которых описывается лагранжианом L_i ($i = 1 \dots n$), то функция Лагранжа L всей системы определяется по аддитивному закону

¹⁰Формулы (17)-(20) указывают на то, что *механическая задача в евклидовом пространстве заменяется геометрической задачей об экстремали в пространстве конфигураций*.

$$L = \sum_{i=1}^n L_i. \quad (21)$$

Формула (21) отображает тот факт, что движение каждой части описывается своим уравнением эволюции, не содержащим характеристики движения других частей системы;

б) калибровка. Две функции Лагранжа $L'(q, \dot{q}, t)$ и $L(q, \dot{q}, t)$, отличающиеся на функцию, зависящую только от времени $\psi(t)$ ([28], см. ниже формулу (22)), или на полную производную по времени от какой-либо функции обобщённой координаты и времени $f(q, t)$ (формула (23), см. также [3, с.13])

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \psi(t), \quad (22)$$

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}, \quad (23)$$

описывают движение материальной частицы одним и тем же уравнением;

в) инвариантность относительно точечных (или канонических) преобразований. Если новые обобщённые координаты Q связаны со старыми координатами невырожденной связью $Q = Q(q)$ (определитель, составленный из частных производных отличен от нуля ($\det |\partial Q / \partial q| \neq 0$), т.е. существует обратное преобразование $q = q(Q)$), то функция Лагранжа с новыми координатами удовлетворяет такому же уравнению Эйлера, как и лагранжиан со старыми координатами [28];

г) подобие консервативных систем. Произведём над консервативной механической системой преобразование подобия, выполнив замены массы $m = \alpha m'$, времени $t = \beta t'$ и пространственных координат $q = \gamma q'$. Если коэффициенты подобия связаны соотношением [28]

$$\alpha^{\mu-1} \beta^2 \gamma^{\nu-2} = \pm 1 \quad (24)$$

где показатели степени μ и ν определяют порядок однородности потенциальной энергии по массе и координатам, то консервативные системы будут подобны¹².

2. Первая вариация действия. Разложим лагранжиан $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ в сходящийся ряд Маклорена (см., например, [29]) по вариациям обобщённой

¹¹Здесь коэффициенты подобия могут принимать отрицательные и даже комплексные значения.

¹²Для того чтобы две материальные частицы с массами m и m' двигались по подобным траекториям, необходимо также соблюдение кинематического подобия и при начальных условиях движения ($dt = \beta dt'$; $dq = \gamma dq'$).

координаты $q(t)$ и обобщённой скорости $\dot{q}(t)$. Проинтегрируем ряд по времени в интервале $[t_1; t_2]$, получим [9, 15, 23, 30-33]

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt = \delta S + \frac{1}{2!} \delta^2 S + \frac{1}{3!} \delta^3 S + \dots + \frac{1}{\nu!} \delta^\nu S + \dots \quad (25)$$

где соответствующие вариации действия *при изохронном варьировании* (закон стационарного действия) равны

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt, \quad (26)$$

$$\delta^2 S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^2} (\delta q)^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \delta q \delta \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} (\delta \dot{q})^2 \right) dt, \quad (27)$$

$$\delta^3 S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^3 L}{\partial q^3} (\delta q)^3 + 3 \frac{\partial^3 L}{\partial q^2 \partial \dot{q}} (\delta q)^2 \delta \dot{q} + 3 \frac{\partial^3 L}{\partial q \partial \dot{q}^2} \delta q (\delta \dot{q})^2 + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^3} (\delta \dot{q})^3 \right) dt, \dots \quad (28)$$

Перепишем первую вариацию действия (26) в виде

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \nabla_p L \cdot \delta l dt, \quad (29)$$

где $\nabla_p = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial q} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}$ – оператор Гамильтона в фазовом пространстве Гиббса;

$\delta l = \mathbf{i} \delta q + \mathbf{j} \delta \dot{q}$ – вариация положения точки на фазовой траектории в момент времени t . Проинтегрируем соотношение (29) вдоль замкнутого контура δq – $\delta \dot{q}$ – $\delta l = \partial D$ (∂D – граница односвязной области D или контур одновременных состояний системы), который будем обходить против часовой стрелки, и воспользуемся теоремой Грина [34, с. 190], тогда криволинейный интеграл второго рода от первой вариации действия

$$\oint_C \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial D} \nabla_p L \cdot \delta l dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \right) \delta q \delta \dot{q} dt = 0. \quad (30)$$

Так как функция Лагранжа непрерывна, то вторые смешанные производные с различным порядком дифференцирования равны между собой (выполняется равенство $\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}$), поэтому интеграл (30) по области D равен нулю. Други-

ми словами, равенство (30) показывает, что *циркуляция градиента лагранжиана по любому замкнутому контуру фазового пространства постоянна и равна нулю.*

3. Экстремальность траектории движения. Обращение в нуль первой вариации действия (26) определяет критическую линию, которая соединяет граничные точки $q_1(t_1)$ и $q_2(t_2)$. Эта линия может и не быть экстремалью: *экстремальность критической кривой определяет знак второй вариации действия* (27). Эта квадратичная форма будет положительной при выполнении теоремы Сильвестра (см., например, [33, с. 109; 34]), т.е. *критическая кривая является экстремалью при выполнении условий*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \\ a_{11} > 0 \text{ (} a_{22} > 0 \text{)} - \mathbf{min} \\ a_{11} < 0 \text{ (} a_{22} < 0 \text{)} - \mathbf{max} \end{array} \right. , \quad (31)$$

где коэффициенты¹³ $a_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^2}$, $a_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}$, $a_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$. Если величина Δ принимает отрицательные значения ($\Delta < 0$), то на выбранном множестве кривых действие не достигает экстремального значения. При значении $\Delta = 0$ надо исследовать знак третьей вариации действия (28).

В качестве примера указанных случаев на рис. 11 приведены зависимости потенциальной энергии линейного осциллятора (рис. 11а), перевёрнутого осциллятора П.Л. Капицы (рис. 11б), лабильной системы (рис. 11в) [35, 36] от обобщённой координаты и отвечающие им фазовые портреты. Из рис. 11а и 11б видно, что преобразование Лежандра (8) преобразует эллиптический параболоид, отображающий гамильтониан линейного маятника, в гиперболический параболоид, изображающий лагранжиан перевёрнутого маятника П.Л.Капицы (рис. 12). В первом случае центр тяжести маятника находится ниже оси подвеса (рис. 12г), а во втором – выше оси опоры (рис. 12д), т.е. является зеркальным отображением центра тяжести линейного осциллятора. Таким образом, *преобразование Лежандра указывает на существование “зеркальных” физических процессов.*

4. Уравнение Эйлера-Лагранжа и его особенности. Проинтегрировав второе слагаемое в подынтегральном выражении (26) по частям, получим для первой вариации действия

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt . \quad (32)$$

¹³В зависимости от знаков коэффициентов a_{ij} подынтегральная квадратичная форма (23) описывает различные геометрические фигуры: эллипсоид, параболоиды и т.д.

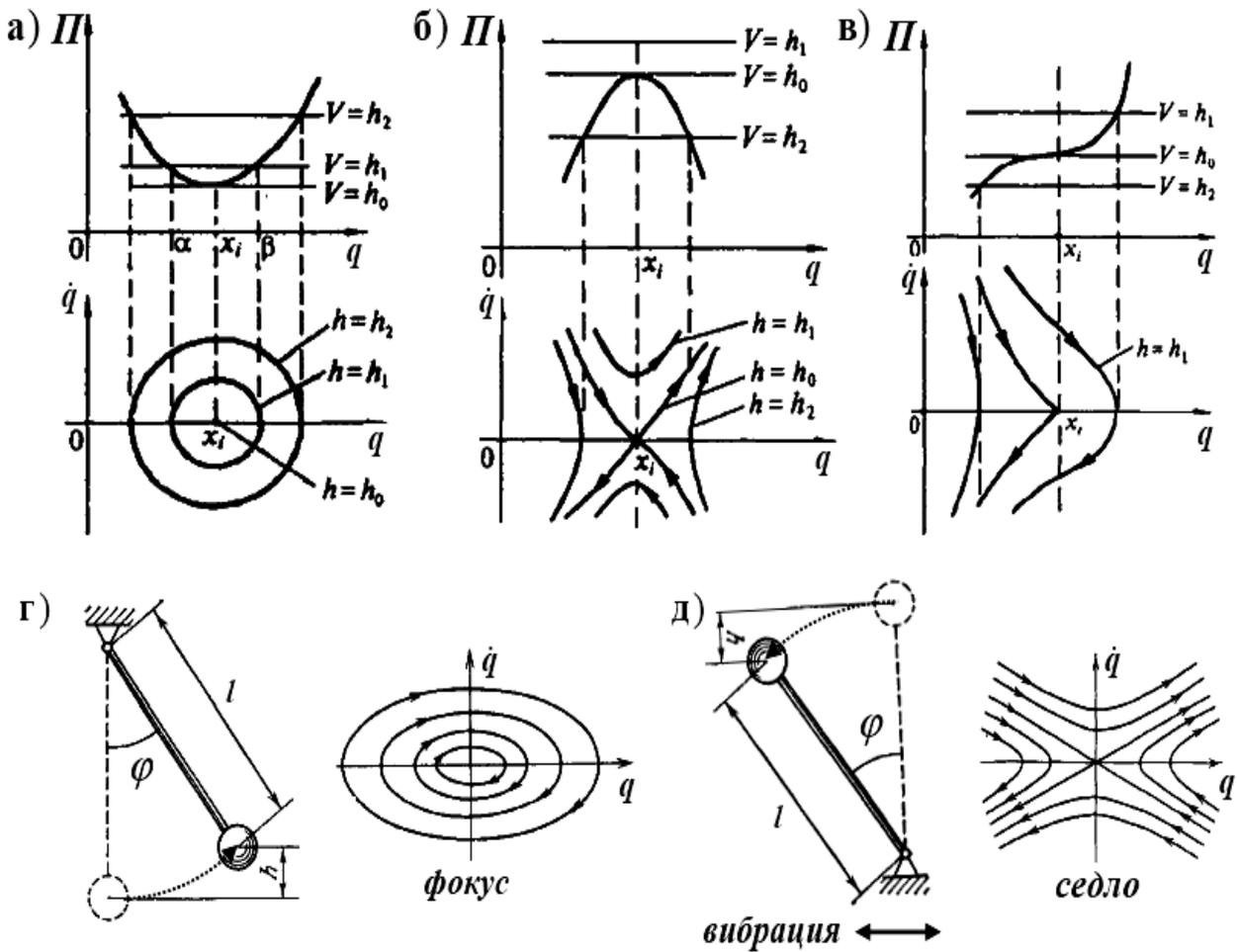


Рис. 11. Потенциальная энергия $\Pi(q)$, соответствующий ей фазовый портрет (а-в) [35] и примеры динамических систем (г – линейный осциллятор; д – осциллятор П.Л. Капицы) [36].

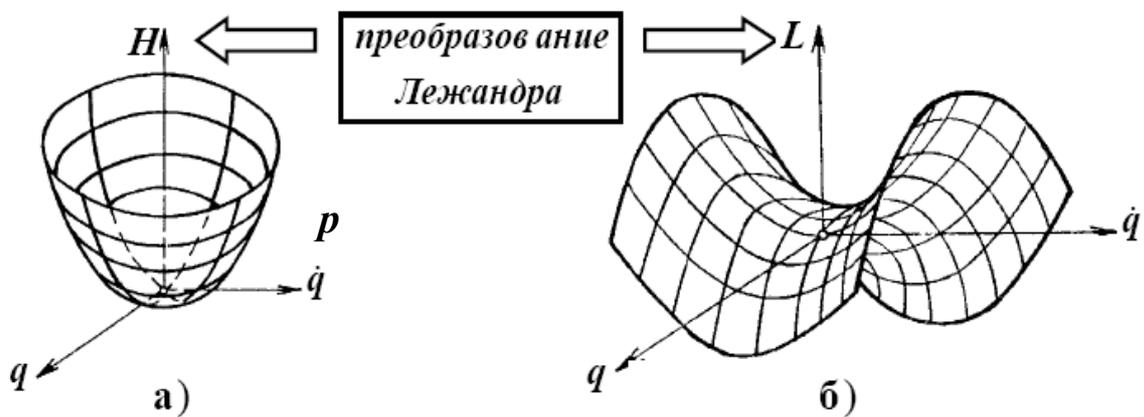


Рис. 12. Гамильтониан (а) и лагранжиан (б) линейного осциллятора.

Если концы истинной траектории движения зафиксированы ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ – необязательное условие) и действие стационарно ($\delta S = 0$), то по лемме Дюбуа-Реймонда [15, 32] получаем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}. \quad (33)$$

Уравнение (33) совместно с условиями (31) определяют экстремаль, а при нарушении одного из этих соотношений траектория перемещения материальной частицы таковой не является. Дифференциальное уравнение (33) соответствует второму закону динамики Ньютона, если положить, что обобщённые импульс p и сила \dot{p} равны

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial C(\dot{q})}{\partial \dot{q}}, \quad \dot{p} = F = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q}. \quad (34)$$

Отметим, что для обозначений (34) уравнение Эйлера (33) обращается в тождество. Если лагранжиан явно не зависит от обобщённой координаты q , то из уравнения (33) следует сохранение обобщённого импульса

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \Leftrightarrow p = const.$$

Такие обобщённые координаты называют *циклическими*¹⁴ (*скрытыми*). Например, скрытой координатой является угол φ , определяющий движение частицы по замкнутой траектории и не входящий в явном виде в лагранжиан. В качестве примера рассмотрим случай, когда циклической координатой является время. Полная производная лагранжиана по времени (с учётом уравнения движения (33)) равна [28]

¹⁴Лагранжиан явным образом не зависит от циклических обобщённых координат, но зависит от их производных по времени, при этом циклический импульс сохраняется в процессе движения. В частности, *циклическость времени приводит к сохранению гамильтониана, взятого с противоположным знаком (консервативность системы)*. Исключение циклической скорости из функции Лагранжа приводит к появлению фиктивной потенциальной энергии и может сопровождаться появлением фиктивной кинетической энергии, зависящей от обобщённых скоростей частиц по линейному закону [23]. Если время явным образом не входит в преобразование координат $x = x(q, t)$, то кинетическая энергия в обобщённых координатах будет однородной квадратичной функцией обобщённых скоростей [13] (см. также замечание ¹⁷). Согласно Герцу (Герц Г. Принципы механики. Л.Герц. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 11-15), циклические переменные описывают *скрытые* движения, которые не влияют на макроскопическое движение системы и не могут быть обнаружены. Кинетическое взаимодействие между циклическими и нециклическими переменными проявляется в виде *гироскопических сил*. Отметим, что нециклические аргументы проявляются в макроскопическом движении в виде полигенных сил (например, в виде *силы трения*).

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} =, \quad (35) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \end{aligned}$$

она преобразуется к виду

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) \right\} = - \frac{dH}{dt}. \quad (36)$$

Если функция Лагранжа не зависит явным образом от времени ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), т.е. время является циклической координатой, то гамильтониан H (в большинстве случаев и полная механическая энергия системы) сохраняется. Метод Эйлера-Лагранжа не учитывает не только наличие циклических координат и соответствующие им интегралы движения, он также игнорирует существование в природе *гироскопических* и *диссипативных* сил.

Гироскопические силы появляются в динамической системе при её вращении, создают гироскопический момент, откуда и возникло их название. К ним относятся, например, *инерционная сила Кориолиса* $\mathbf{F}_K = -2m[\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}_r]$ (m – масса частицы, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\dot{\mathbf{q}}_r$ – относительная скорость; понятие “сила инерции” было введено И. Кеплером [36]) и *гироскопическая часть электромагнитной силы Лоренца* $\mathbf{F}_L = \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{H}]$ (e – заряд частицы, c – скорость света, $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$ – напряжённость магнитного поля, $\mathbf{A}(q)$ – векторный потенциал). Потенциальная энергия $\Pi_g(q, \dot{q})$ гироскопической силы, которая *не разрушает консервативности* динамической системы, является *однородной*¹⁵ линейной функцией обобщённой скорости [28]

$$\boxed{\Pi_g(q, \dot{q}) = \mathbf{A}(q) \cdot \dot{\mathbf{q}}}. \quad (37)$$

Она добавляется к потенциальной энергии Π системы и удовлетворяет уравнению (32), при этом *обобщённый импульс частицы является линейной функцией скорости*.

¹⁵Согласно Эйлеру, функция $f(q, \dot{q})$ называется *однородной* функцией порядка m , если выполняется равенство $f(\lambda q, \lambda \dot{q}) = \lambda^m f(q, \dot{q})$, при $\lambda > 0$.

Действительная работа гироскопической силы

$$\boxed{F_g = \text{rot } A(q) \times \dot{q}} \quad (38)$$

всегда равна нулю. Это означает, что вращение не вызывает рассеяния энергии, т.е. мощность гироскопических сил также равна нулю.

Из вышеизложенного вытекает: гироскопические силы (наряду с другими силами) участвуют только в формировании траектории движения системы, но не участвуют в создании каналов диссипации энергии в неконсервативных объектах.

Наличие в системе диссипативных сил (например, силы трения; понятие “диссипативная сила” было введено в физику У.Томсоном (лордом Кельвином)) **приводит к разрушению свойства консервативности механической системы и к обмену энергией с внешней средой** [37], т.е. в данном случае гамильтониан динамической системы не является интегралом движения и изменяется с течением времени. Например, диссипативную силу для изотропной среды (тензор коэффициентов диссипации $\alpha_{ij}(q) = \alpha(q)\delta_{ij}$, где символ Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$) при ламинарном (тело имеет малый размер и движется с малой скоростью, что приводит к подавлению завихрений в вязкой среде) перемещении динамической системы или силу Стокса

$$\boxed{F_D = -\frac{\partial R(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = -\alpha(q) \dot{q}} \quad (39)$$

учитывают в правой части уравнения (33) при использовании диссипативной функции Рэля $R(q, \dot{q})$ (см., например, [13, с. 35; 28, 38, с. 137])

$$\boxed{2R(q, \dot{q}) = \alpha(q)\dot{q}^2 = -F_D \cdot \dot{q}}, \quad (40)$$

(мощность гироскопических сил $R(q, \dot{q}) = 0$ ¹⁶) при этом скорость изменения гамильтониана склерономной системы (на систему наложены связи, которые явно не зависят от времени) при условии независимости в явном виде от времени потенциальной энергии системы определяется формулой

$$\frac{dE}{dt} = -2R(q, \dot{q}). \quad (41)$$

¹⁶Если на систему действуют потенциальные ($F_1(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial \Pi(q, \dot{q}, t)}{\partial q}$) и непотенциальные силы ($F_2(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right)$, см. формулу (3) на с.5), то функция Рэля определяется мощностью непотенциальных сил $-2R(q, \dot{q}) = F_2 \cdot \dot{q} < 0$.

При диссипации происходит убыль полной энергии ($dE/dt < 0$), поэтому для таких объектов функция Рэля является положительно определённой квадратичной формой обобщённых скоростей ($F_D \cdot \dot{q} < 0$, *сильная диссипация*). В системах с частичной диссипацией функция Рэля может обращаться в нуль даже тогда, когда какие-либо обобщённые скорости составляющих систему компонентов отличны от нуля, тогда говорят, что *диссипация слабая*, тогда выполняется нестрогое неравенство $\frac{dE}{dt} \leq -2R(q, \dot{q})$ ¹⁷.

5. Преобразование Лежандра, консервативность и закон сохранения момента импульса. Используя определения (34), перепишем (32) в виде

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} (F \delta q + p \delta \dot{q}) dt, \quad (42)$$

Воспользуемся преобразованием Лежандра (8)-(11):

$$\delta \Phi = F \delta q - \delta(-\Pi) = \delta A - \delta(-\Pi), \quad \delta H = p \delta \dot{q} - \delta L, \quad (43)$$

где $F = \frac{\partial(-\delta \Pi)}{\partial(\delta q)}$, $p = \frac{\partial(\delta L)}{\partial(\delta \dot{q})}$; однородная, сопряжённая, потенциальная функция $\Phi(F)$ зависит от обобщённой силы F ; $\delta A = F \delta q$ – вариация работы, совершаемой реальными силами F на виртуальном смещении δq , т.е.

$$\delta \Phi (F) = q \delta F = q \delta \dot{p}, \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}}. \quad (44)$$

Тогда выражение (42) примет вид

¹⁷Для *склерономных* (на систему наложены связи, которые явно не зависят от времени) систем уравнение (40) имеет вид [39]: $\frac{dE}{dt} = -2R(q, \dot{q}) + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$. При движении произвольной *голомомной* (на систему наложены геометрические связи, которые не зависят явно от скорости движения) системы теорема о диссипации полной механической энергии утверждает, что скорость диссипации $\frac{dE}{dt} = -2R(q, \dot{q}) + \frac{d(C_0 + C_1)}{dt} - \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}$, где $C_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)^2$ – однородная функция обобщённой скорости нулевой степени, $C_1 = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \dot{q}$ – однородная функция обобщённой скорости первой степени, m – масса частицы, \mathbf{r} – радиус-вектор, определяющий положение частицы в евклидовом пространстве, $C = C_2 + C_1 + C_0$ – кинетическая энергия частицы, $C_2 = m \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2$ – однородная функция обобщённой скорости второй степени.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta\Phi - \delta\Pi + \delta H + \delta L) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt, \quad (45)$$

т.е. вариация полной механической энергии δH динамической системы будет равна

$$\delta H = \delta\Pi - \delta\Phi. \quad (46)$$

С другой стороны, вариация гамильтониана равна $\delta H = \delta\Pi + \delta C$, поэтому

$$\delta C = -\delta\Phi. \quad (47)$$

Для консервативной системы функция Гамильтона постоянна ($\delta H = 0$), следовательно, виртуальное изменение силового потенциала $\delta\Phi$ совпадает с виртуальным изменением потенциальной энергии $\delta\Pi$ системы, а по равенству (47) – $\delta C = -\delta\Pi$. Это равенство означает, что *убыль потенциальной энергии компенсируется увеличением кинетической энергии*. Увеличение (убыль) потенциальной энергии в какой-либо точке траектории приводит к уменьшению (росту) кинетической энергии частицы, а, следовательно, к изменению её скорости перемещения по траектории. Это, в свою очередь, приведёт к возрастанию (уменьшению) времени движения, т.е. время должно быть варьируемой величиной (*неизохронная вариация*). Возникшее противоречие снимается *законом варьированного действия*.

Рассмотрим подынтегральное выражение в формуле (42) для случая вращательного движения, когда происходит поворот на угол $\delta\varphi$, тогда

$$\begin{aligned} F \delta q + p \delta \dot{q} &= \dot{p} (\delta\varphi \times q) + p (\delta\bar{\varphi} \times \dot{q}) = \\ &= \delta\bar{\varphi} (q \times \dot{p} + \dot{q} \times p) = \delta\bar{\varphi} \frac{d(q \times p)}{dt} = \delta\varphi \frac{dL}{dt}, \end{aligned} \quad (48)$$

где L – обобщённый момент импульса. Таким образом, *закон стационарного действия для вращательного движения сводится к сохранению момента импульса*. Законы сохранения импульса и энергии являются следствием однородности пространства-времени при сдвиге в пространстве и во времени, соответственно. *Изотропность пространства-времени обеспечивает сохранение скорости движения центра масс при равномерном поступательном движении и момента импульса при пространственном повороте* (см. теорему Нётер [15, с.40]).

Помимо указанных сохраняющихся величин существуют и другие выражения, которые не изменяют своего вида при канонических преобразованиях. К ним относятся интегральные инварианты [28]: для закона переменного действия существует инвариант А. Пуанкаре $I_1 = \oint_C p \delta q$ – *относительный (универсальный) интегральный инвариант первого порядка*, который не за-

висит от гамильтониана системы; для закона варьированного действия – интегральный инвариант Пуанкаре-Картана $I_1^* = \oint_C p \delta q - H \delta t$ (здесь время играет

роль дополнительной обобщённой координаты, а гамильтониан с отрицательным знаком – роль соответствующего ей обобщённого импульса). Постоянство во времени инварианта Пуанкаре обеспечивает нулевое значение вариации гамильтониана, т.е. консервативность системы, а сохранение инварианта Пуанкаре-Картана – неизменность интенсивности вихревой трубки фазовой жидкости [39]. Абсолютный интегральный инвариант $I_2 = \iint_D \delta p \delta q$ описы-

вает неизменность фазового объёма (теорема Лиувилля) механической системы при движении (канонических преобразованиях). Помимо этих инвариантов существуют другие относительные и абсолютные интегральные инварианты (см., например, [28]).

6. Обобщённый импульс и “скорость” изменения характера экстремали.

Используя соотношения (19), (33) и определения (34), запишем (42) в виде

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (F \delta q + p \delta \dot{q}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{p} \zeta + p \dot{\zeta}) \delta \alpha dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d(p \zeta)}{dt} \delta \alpha dt = 0. \quad (49)$$

Согласно лемме Дю-Буа-Реймонда [3-5], получаем, что

$$p \zeta = k, \quad (50)$$

здесь k – константа интегрирования. Равенство (50) показывает, что обобщённый импульс обратно пропорционален “скорости” изменения обобщённой координаты в зависимости от характера экстремали. Домножив равенство (50) на вариацию характера экстремали $\delta \alpha$, получим

$$p \delta q = k \delta \alpha. \quad (51)$$

Из равенства (51) следует неизменность величины $p \delta q$ с течением времени, так как правая часть (51) не зависит от времени.

Обращение в нуль вариаций обобщённой координаты на концах экстремали приводит к нулевым значениям функции ζ ($\lim_{t \rightarrow t_1(t_2)} \zeta = 0$ или по

(50) к бесконечным значениям обобщённого импульса в крайних точках:

$\lim_{t \rightarrow t_1(t_2)} p = \infty$), что является необязательным условием при изохронной вариации ввиду постоянства величины $p \delta q$.

Отсюда следует, что в случае стационарного действия при вычислении первой вариации действия (равенство (32) с учётом (34)) проинтегрированное выражение $p \delta q|_{t_1}^{t_2} = 0$. Это равенство показывает, что закон Ньютона (равенство (33) с учётом определений (34)) выполняется и на траекториях движения со свободными концами.

Другая форма записи соотношения (50) имеет вид

$$\dot{p}\zeta + p\dot{\zeta} = 0 \text{ (или } \dot{p}\delta q = -p\delta\dot{q}\text{),} \quad (52)$$

откуда следует

$$\frac{\dot{p}}{p} = -\frac{\dot{\zeta}}{\zeta} = \lambda(t, \alpha), \quad (53)$$

где функция $\lambda(t, \alpha)$ является величиной, обратной ко времени, и определяет в зависимости от её знака экспоненциальное затухание (нарастание) обобщённого импульса и нарастание (затухание) “скорости” изменения вариации обобщённой координаты. Интегрируя полученные дифференциальные уравнения без граничных условий, получим

$$p(t, \alpha) = p_0 \exp\left(\int \lambda(t, \alpha) dt\right), \quad (54)$$

$$\zeta(t, \alpha) = \zeta_0 \exp\left(-\int \lambda(t, \alpha) dt\right). \quad (55)$$

Из формул (54) и (55) вытекает, что, например, уменьшение вариации обобщённой координаты сопровождается увеличением импульса, что приводит к взаимной блокировке изменений этих функций в силу соотношения (50).

4. Выводы

Подход Эйлера позволил заменить решение механической задачи в пространстве Евклида на отыскание экстремальной линии, соединяющей начальную и конечную точки в конфигурационном пространстве Гиббса, которое в общем случае описывается геометрией Римана. Сформулированные разными исследователями вариационные принципы аналитической механики являются информационными кодами, содержащими в свёрнутом виде определённый массив знаний. Необходимо различать *три* различных вариации механического действия:

1) *стационарное*

$$\begin{cases} \delta q(t_1, \alpha) = 0, & \delta q(t_2, \alpha) = 0 \\ \delta t_1(\alpha) = 0, & \delta t_2(\alpha) = 0 \end{cases}, \quad (56)$$

при этом вариация действия равна нулю $\delta S = 0$;

2) *переменное*

$$\begin{cases} \delta q(t_1, \alpha) \neq 0, & \delta q(t_2, \alpha) \neq 0 \\ \delta t_1(\alpha) = 0, & \delta t_2(\alpha) = 0 \end{cases}; \quad (57)$$

при этом вариация действия определяется формулой $\delta S = p\delta q|_{t_1}^{t_2} \neq 0$;

3) *варьированное*

$$\begin{cases} \delta q(t_1, \alpha) \neq 0, & \delta q(t_2, \alpha) \neq 0 \\ \delta t_1(\alpha) \neq 0, & \delta t_2(\alpha) \neq 0 \end{cases}, \quad (58)$$

при этом вариация действия равна

$$\delta S = L \delta t \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt, \quad (59)$$

а варьирование под знаком интеграла является *изохронным*. Изохронное варьирование и учёт выполнимости уравнения Эйлера-Лагранжа переводят формулу (59) в равенство (5), т.е. $\delta S = (p \delta q - H \delta t) \Big|_{t_1}^{t_2} \neq 0$.

Последовательное применение вариационных принципов при решении механических задач должно опираться на: учёт скрытой информации; наличии или отсутствии на заданном отрезке экстремали сопряжённых кинетических фокусов; определении способа варьирования обобщённых аргументов; непрерывности исходных и сопряжённых по Лежандру вариационных функций; выполнении условий леммы Дю-Буа-Реймонда и теоремы Сильвестра; возможности существования лабильных состояний у динамических систем; сохранении некоторых величин при движении и т.д. Информационный анализ современного состояния механики также указывает на наличие целого ряда нерешённых вопросов: вид уравнений движения при независимом варьировании времени и параметров экстремали; существование функций состояния механической системы, отличных от лагранжиана и гамильтониана, а, следовательно, возможность иной формулировки основных положений аналитической механики; не-ньютоновское поведение динамической системы (например, сложные автоколебания или возникающие нелинейные эффекты при приближении к точкам бифуркации) и другие.

Список использованных источников

1. *Захаров А.Ю.* Функциональные методы в классической статистической физике / А.Ю. Захаров. // Учебн. пос. – Великий Новгород: НовГУ им. Я. Мудрого, 2006. – 53 с.
2. *тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики / Д. тер Хаар. – М.: Наука, 1974. – 223 с.
3. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // В 10-ти т., Т.1. Механика. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
4. *Затовський О.В.* Лекції з курсу “Класична механіка” / О.В. Затовський, В.П. Олейник. // Ч.1. Динаміка Лагранжа. Малі коливання. – Одеса: ОНУ, 2005. – 51 с.

5. Максимов Г.А. Обобщенный вариационный принцип для диссипативной гидродинамики и механики сплошной среды / Г.А. Максимов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т.2, № 4. – С. 92-104.
6. Бондаренко Ю.А. Сохранение фазового объёма и каноничности в конечно-разностных схемах газовой динамики, построенных последовательным вариационным методом / Ю.А.Бондаренко // Математическое моделирование. – 2011. – Т.23, № 2. – С. 75-95.
7. Мопертюи П. Законы движения и покоя, выведенные из метафизического принципа / П. Мопертюи. // В сб. статей: Вариационные принципы механики (932 с.). Под ред. Л.С. Полака. – М.: ГИФМЛ, 1959. – С. 41-55.
8. Эйлер Л. Диссертация о принципе наименьшего действия, с разбором возражений славнейшего проф. Кёнига, выдвинутых против этого принципа / Л. Эйлер // В сб. статей: Вариационные принципы механики (932 с.). Под ред. Л.С. Полака. – М.: ГИФМЛ, 1959. – С. 96-108.
9. Эйлер Л. Соответствие между общими принципами покоя и движения Мопертюи законов природы, которые наблюдаются в действии любых сил / Л. Эйлер // В сб. статей: Вариационные принципы механики (932 с.). Под ред. Л.С. Полака. – М.: ГИФМЛ, 1959. – С. 78-95.
10. Лагранж Ж. Аналитическая механика, Т.1 / Ж. Лагранж. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 594 с.
11. Лагранж Ж. Аналитическая механика, Т.2 / Ж. Лагранж. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 440 с.
12. Добронравов В.В. Основы аналитической механики / В.В. Добронравов. – М.: Высшая школа, 1976. – 264 с.
13. Лич Дж.У. Классическая механика. /Дж.У. Лич. – М.: ИИЛ, 1961. – 173 с.
14. Гамильтон У. Об общем методе в динамике, посредством которого изучение движений всех свободных систем притягивающихся или отталкивающихся точек сводится к отысканию и дифференцированию одного центрального соотношения или характеристической функции / У. Гамильтон // В сб. статей: Вариационные принципы механики (932 с.). Под ред. Л.С. Полака. – М.: ГИФМЛ, 1959. – С. 175-233.
15. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения /Л.Я. Цлаф // Справ. рук-во. – М.: Наука, 1966. – 176 с.
16. Морс Ф.М. Методы теоретической физики. Т.1 / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. – М.: ИИЛ, 1958. – 931 с.
17. Смирнов В.И. Вариационное исчисление / В.И. Смирнов, В.И. Крылов, Л.В. Канторович. – Л.: Кубуч, 1933. – 204 с.

18. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/2690/ЛЕЖАНДРА
19. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
20. Мюнстер Г. Химическая термодинамика / Г. Мюнстер. – М.: Мир, 1971. – 295 с.
21. Дубровин Б.А. Современная геометрия / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
22. Остроградский М.В. Дифференциальные уравнения проблемы изопериметров / М.В. Остроградский // В сб. статей: Вариационные принципы механики (932 с.). Под ред. Л.С. Полака. – М.: ГИФМЛ, 1959. – С. 315-387.
23. Ланцош К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
24. Литовченко И.Д. Эргономика и дизайн промышленного оборудования / И.Д. Литовченко. – Керчь: КГМТУ, 2011. – 235 с.
25. Сбитнев В.И. Виртуальные, случайные, квантово-механические движения. Принцип наименьшего действия / В.И. Сбитнев // Квантовая Магия. – 2008. – Т.5, № 3. – С. 3101-3122.
26. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
27. Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика / Э.Т. Уиттекер. – Ижевск: ИД “Удмуртский университет”, 1999. – 588 с.
28. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику / И.М. Беленький. – М.: Высшая школа, 1964. – 323 с.
29. Ильин В.А. Математический анализ. Начальный курс / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. – М.: МГУ, 1985. – 662 с.
30. Гельфанд И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 228 с.
31. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению / Н.И. Ахиезер. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 248 с.
32. Блисс Г.А. Лекции по вариационному исчислению / Г.А. Блисс. – М.: ИИЛ, 1950. – 347 с.
33. Лаврентьев М. Основы вариационного исчисления, Т.1, Ч.1 / М. Лаврентьев, Л. Люстерник. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 148 с.
34. Воднев В.Т. Основные математические формулы / В.Т. Воднев, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович. // Справочник. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 269 с.
35. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний / В.Д. Горяченко // Учебн. пос. – М.: Высшая школа, 2001. – 395 с.

- 36.** *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко // Учебн. пос. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
- 37.** *Геронимус Я.Л.* Теоретическая механика (очерки об основных положениях) / Я.Л. Геронимус // Учебн. пос. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
- 38.** *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды / Г. Циглер. – М.: Мир, 1966. – 136 с.
- 39.** *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер // Учебн. пос. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

II. РАЗНОВИДНОСТИ МЕХАНИКИ

...природа действует наиболее *лёгкими* и *доступными* путями.
П. Ферма¹

...принцип виртуальных скоростей превращает *любую проблему статики* в вопрос чистой математики, а с помощью *принципа Д'Аламбера* динамика, в свою очередь, сводится к статике.
К. Гаусс²

...Но когда этот закон наименьшего, или, лучше было бы назвать, *стационарного действия*, применяется к *определению фактического движения* системы, он служит только для того, чтобы по правилам вариационного исчисления получить дифференциальные уравнения движения второго порядка, которые *всегда можно получить другим путём*.

У. Гамильтон³

1. Введение. Проблемы аналитической механики

В отличие от вариационного принципа Мопертюи-Эйлера-Лагранжа в законе переменного действия Гамильтона варьируемой величиной являются *положения граничных точек* [1]. Это приводит к тому, что граничные точки экстремали не фиксируются, т.е. произведение обобщённого импульса на вариацию обобщённой координаты становится функцией времени.

$$\delta S = p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} = p(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) \delta q(t_2) - p(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \delta q(t_1) \neq 0, \quad (1)$$

где $p(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2)$ и $p(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)$ – значения обобщённых импульсов в начальной $(q(t_1), t_1)$ и конечной $(q(t_2), t_2)$ пространственно-временных точках истинных экстремалей, удалённых от других граничных точек иной истинной траектории движения на расстояния $\delta q(t_1)$ и $\delta q(t_2)$, соответственно. Таким образом, *закон переменного действия устанавливает изменение действия при переходе от одного истинного движения к бесконечно близко расположенному другому истинному перемещению материальной точки*.

Если, помимо вариации граничных точек траектории движения, варь-

¹*Вариационные принципы механики*. /Сб. статей. //Под ред. Л.С. Полака. – М.: Гос. изд-во физ. мат. лит, 1959. – с. 7-10.

²там же, с. 170-172.

³там же, с. 175-233.

ируется полная механическая энергия системы (варьируется время), то, согласно теории Гамильтона-Остроградского, выражение для вариации действия принимает вид [2]:

$$\delta S = (p \delta q - H \delta t) \Big|_{t_1}^{t_2} \neq 0. \quad (2)$$

В этом случае используемый вариационный принцип называется *принципом варьированного действия* [3]. Таким образом, механическое действие S разделяют на классы по способу варьирования аргументов лагранжиана: *стационарное*, *переменное* и *варьированное* (см. часть I, формулы (56)-(59); далее по всему тексту ссылки будем писать в виде (I.56)-(I.59)).

Однако в литературе отсутствует рассмотрение случая, когда время и характер экстремали являются независимыми величинами. В этом случае все аргументы действия варьируются и оно состоит из двух частей

$$S = \int_{q(t_1, \alpha)}^{q(t_2, \alpha)} p dq - \int_{t_1}^{t_2} H dt, \quad (3)$$

поэтому будем называть его *смешанным*. Другой проблемой аналитической механики является вопрос о существовании экстремальных качеств динамической системы, отличных от действия. Их появление связано с различными гиперплоскостями, пересекающими риманово пространство возможных конфигураций динамического поведения материального объекта. В этих гиперплоскостях действие может не достигать экстремального значения, но при этом может сохраняться, например, консервативность системы. Следовательно, возникает потребность в решении вопроса о существовании других механических потенциалов, обеспечивающих локальный экстремум того или иного свойства объекта.

Целью данного пособия является рассмотрение вопросов о последовательном учёте диссипативных сил в рамках формализма Эйлера-Лагранжа; о связях и степенях свободы; случая независимого варьирования аргументов смешанного действия; о разновидностях формулировок вариационных принципов аналитической механики и возможности неньютоновского поведения динамической системы.

2. Учёт диссипативных сил в рамках формализма Эйлера-Лагранжа

Введение в правую часть уравнения Эйлера-Лагранжа (I.33) диссипативной силы Стокса (I.39) (см., например, уравнение Ланжевена [4, пункт 1.10]) лежит вне рамок формализма аналитической механики. Для последовательного

учёта диссипации энергии (неконсервативные системы) были предложены метод *зеркальных объектов* [5, с. 284-285; 6] и *интегральной диссипации* [7]. В методе зеркальных объектов совместно с заданной системой, которая теряет энергию, рассматривают сопряжённую к ней систему с отрицательной диссипацией, т.е. эта система поглощает энергию, отданную во внешнюю среду исследуемой системой. Во втором методе из лагранжиана системы вычитают проинтегрированное на заданном интервале времени значение диссипативного потенциала.

1. Метод зеркальных объектов. Рассмотрим метод зеркальных объектов на примере одномерного затухающего осциллятора [5, 6], поведение которого описывается уравнением

$$\boxed{m\ddot{q} + \alpha \dot{q} + kq = 0}, \quad (4)$$

где m – масса колеблющейся частицы, α – коэффициент сопротивления среды (коэффициент затухания колебаний), k – коэффициент упругости пружины (см. решение уравнения (4) в работе [8, с.40]). Предположим, что существует зеркально сопряжённый к исходному осциллятору другой такой же осциллятор, который поглощает энергию, рассеянную первой системой. Другими словами, для зеркального осциллятора материальная частица совершает нарастающие колебания в среде с отрицательным сопротивлением. Положение колеблющейся частицы для второго осциллятора будем задавать обобщённой координатой q_1 и формально запишем лагранжиан объединённой системы в виде

$$L = m\dot{q}\dot{q}_1 - \frac{1}{2}\alpha(q_1\dot{q} - q\dot{q}_1) - kqq_1^4. \quad (5)$$

Воспользовавшись формулами (I.34), найдём обобщённые импульсы p (p_1) и силы F (F_1) осцилляторов:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}_1 - \frac{1}{2}\alpha q_1, \quad p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q} + \frac{1}{2}\alpha q; \quad (6)$$

$$F = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}_1 - kq_1, \quad F_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}\alpha\dot{q} - kq. \quad (7)$$

Подставив выражения (6) и (7) в уравнение (I.33), получим два уравнения вида (5) для исходного и зеркально отображённого по трению осцилляторов

$$\begin{cases} m\ddot{q} + \alpha \dot{q} + kq = 0 \\ m\ddot{q}_1 - \alpha \dot{q}_1 + kq_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

⁴Преобразование Лежандра (см. рис. I.11 и I.12) приводит к “зеркальности” потенциальной энергии, т.е. отвечает смене устойчивого равновесия неустойчивым. Дуальность по силе трения приводит к возникновению энергетической перекачки от исходного объекта к зеркально сопряжённой системе.

Из второго уравнения (8) видно, что колебания зеркального осциллятора будут возрастать по амплитуде (перед коэффициентом α стоит знак минус) также быстро, как убывают по амплитуде колебания исходного осциллятора. Это означает, что гамильтониан системы в целом

$$H = p\dot{q} + p_1\dot{q}_1 - L = m\dot{q}\dot{q}_1 + kqq_1. \quad (9)$$

будет интегралом движения. Таким образом, предложенный искусственный приём позволяет учесть в рамках теории Эйлера-Лагранжа диссипативные силы.

2. Интегральная диссипация. Другой подход к проблеме нарушения консервативности динамической системы был продемонстрирован в работе [7], где автором был сделан ряд явных и неявных допущений. Г.А. Максимов предложил учитывать диссипативную функцию в плотности лагранжиана \mathcal{L} системы в виде интегрального вычитаемого $\int_0^t D(\dot{q})d\tau$ от диссипативной функции $D(\dot{q})$:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, \nabla q) = C(\dot{q}) - \Pi(\nabla q) - \int_0^t D(\dot{q})d\tau. \quad (10)$$

Предложенный автором работы [7] подход обладает целым рядом недостатков: а) отсутствует явная зависимость плотности лагранжиана \mathcal{L} системы от времени t и евклидоваго радиус-вектора \mathbf{r} , по которым проводится интегрирование плотности лагранжиана; б) в тексте статьи [7] не оговорены смысл временного интервала $[0, t]$ и его место на временном интервале $[t_1, t_2]$ интегрирования плотности лагранжиана \mathcal{L} ; в) соотношение (10) описывает частный случай физически неопределённой системы (наличие или отсутствие связей не оговаривается; потенциальная энергия зависит от потока обобщённой координаты, однако в силу скалярности потенциальной энергии эта зависимость должна быть симметричной по потокам, т.е. потенциальная функция должна быть чётной по отношению к своему аргументу; автор отождествил диссипативные функции Рэлея и Онзагера, хотя они имеют разную физическую природу: первая возникает при динамическом движении системы в целом, а вторая – при кинематическом перемещении компонентов внутри системы, поэтому имеет место приведенное в тексте статьи [7] замечание, взятое из учебника [9]); г) при варьировании последнего слагаемого неявно учтено обращение в нуль вариации смещения $\delta u(\mathbf{r}, 0)$ в точке $t=0$ или частной производной от диссипативной функции $\frac{\partial D(\dot{q}(0))}{\partial \dot{q}} = 0$; д) при отбрасывании скорости изменения диссипативной силы автор приводит математические соображения, связанные с сингулярностью этой величины, игнорируя тот факт, что получаемые уравнения будут справедливы в некоторой малой окрестности точки t' ; е) проигнорирова-

ны коллективные свойства ансамбля тождественных частиц, т.е. не проведено усреднение гамильтониана системы по ансамблю, в результате которого состояние системы будет характеризоваться термодинамическим потенциалом, называемым внутренней энергией. Однако вывод автором известных уравнений гидродинамики и механики сплошной среды указывает на наличие рационального зерна в предложенном автором [7] подходе.

3. Связи и степени свободы

Если на местоположение или скорость динамической системы наложены геометрические или кинематические ограничения (конфайменты), то говорят о наличии *связей*. Связи делают движение объекта несвободным, т.е. они изменяют экстремаль свободного перемещения. В выбранной инерциальной системе отсчёта связь определяется соотношением вида

$$f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0, \quad (11)$$

в которое входят время t , радиус-вектор \mathbf{r} , определяющий местоположение материальной частицы, и скорость его изменения $\dot{\mathbf{r}}$.

Наличие геометрической связи ($f(t, \mathbf{r}) = 0$; *голономная* система) приводит к тому, что частица *не может занимать произвольное положение в пространстве для данного момента времени* [10]. В общем случае дифференциальной связи (11) система *может в выбранный момент времени находиться в произвольной пространственной точке, но её скорость уже не будет произвольной* – она определяется из соотношения (11). Каждая конечная связь влечёт за собой дифференциальную связь вида (получается из конечной связи путём дифференцирования)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla f = 0, \quad (12)$$

где $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$ – градиент связи, \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} – единичные

векторы (орты) декартовой системы координат. Формула (12) указывает на сохранение функции $f(t, \mathbf{r})$, заданной неявно в виде равенства $f(t, \mathbf{r}) = C$, где C – константа интегрирования. Если дифференциальная связь неинтегрируема, то динамическая система называется *неголономной*. Таким образом, система является *голономной* при отсутствии связей (свободная система), а для несвободной системы – при наличии геометрической (конечной) или дифференциальной, но интегрируемой связи. Если условие (11) *не зависит явно от времени t* , то связь называется *стационарной*, а динамическая система – *склерономной*. В

противном случае связь будет *нестационарной*, а система – *реономной*. Виды связи и их характеристики приведены в табл. 1 [11].

Таблица 1.

Классификация связей $f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = 0$ в динамических системах

Характеристика связи	Название связи	Формула ограничения	Название системы
Не зависит явно от времени	<i>Стационарная</i>	$\frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial t} = 0$	Склерономная
Зависит явно от времени	<i>Нестационарная</i>	$\frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial t} \neq 0$	Реономная
Не зависит явно от скорости движения	<i>Геометрическая (дифференциальная интегрируемая; конечная)</i>	$\frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 0$	Голономная
Зависит явно от скорости движения	<i>Кинематическая (дифференциальная неинтегрируемая)</i>	$\frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \neq 0$	Неголономная

Если материальная частица движется по неизменной поверхности, то уравнение стационарной связи описывается уравнением заданной поверхности $f(\mathbf{r}) = 0$. Если поверхность перемещается в пространстве или деформируется, то связь является нестационарной, но геометрической, т.е. задаётся уравнением $f(t, \mathbf{r}) = 0$. Если расстояние между двумя материальными точками не изменяется (стационарная связь) в процессе движения, то речь идёт о голономной склерономной системе из двух точек. Если их движение осуществляется в строго определённом направлении (например, движение конька по льду), то система будет неголономной. При изменении расстояния между точками с течением времени (нестационарная связь) и произвольности их перемещения голономная система будет реономной.

Рассмотрим склерономные диссипативные системы:

а) *консервативная* (все действующие на систему силы потенциальные, причём потенциальная энергия системы $\Pi(q)$ не зависит явно от времени). В этом случае полная механическая энергия динамической системы $E = C(\dot{q}) + \Pi(q)$ сохраняется при любом движении, т.е. является инвариантом движения и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dE}{dt} = 0 ; \tag{13}$$

б) *диссипативная* (на динамическую систему действуют *непотенциальные* силы $F_2(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right)$, причём потенциальная энергия системы $\Pi(q)$ не зависит явно от времени). Для такой динамической системы скорость изменения полной механической энергии определяется мощностью непотенциальных сил F_{i2} :

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i F_{i2} \dot{q}_i ; \quad (14)$$

в) *диссипативная* (присутствуют *непотенциальные* силы F_{i2} , причём потенциальная энергия системы $\Pi(q, t)$ *зависит явно от времени*). Для такой динамической системы скорость изменения полной механической энергии определяется мощностью непотенциальных сил F_{i2} и локальной скоростью изменения потенциальной энергии:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i F_{i2} \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi(q, t)}{\partial t} . \quad (15)$$

При движении произвольной *голономной* системы теорема о диссипации полной механической энергии утверждает, что скорость диссипации

$$\frac{dE}{dt} = -2R(q, \dot{q}) + \frac{d(C_0 + C_1)}{dt} - \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} , \quad (16)$$

где $C_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)^2$ – однородная функция обобщённой скорости нулевой степени, $C_1 = m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \dot{q}$ – однородная функция обобщённой скорости первой степени, m – масса частицы, \mathbf{r} – радиус-вектор, определяющий положение частицы в евклидовом пространстве, $C = C_2 + C_1 + C_0$ – кинетическая энергия частицы, $C_2 = m \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2$ – однородная функция обобщённой скорости второй степени.

Все вышеперечисленные связи определяются равенствами, поэтому их называют *удерживающими*.

Если связь задана неравенством

$$f(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) > 0 , \quad (17)$$

то связь между точками называют *неудерживающей*. В этом случае траекторию движения динамической системы можно разбить на участки, где связь является удерживающей, и зоны, где она полностью отсутствует [10].

Ограничение свободы перемещения, которое возникает при наложении связей, приводит к понятию *числа степеней свободы*. Свободная частица может перемещаться вдоль любого направления в пространстве, следовательно, она имеет *три степени свободы* для движения вдоль координатных осей декартовой системы отсчёта. Её движение по абсолютно твёрдой поверхности исключает одну степень свободы, а перемещение внутри трубки определённого размера приводит к тому, что число степеней свободы сокращается до единицы. Если же движение частицы ограничено со всех сторон, то у неё отсутствуют степени свободы и их число равно нулю, т.е. частица будет зафиксирована в некоторой точке пространства. Таким образом, под *числом степеней свободы* надо понимать число *независимых вариаций обобщённых координат* динамической системы [12].

Если на систему наложены только *голономные* связи, то все декартовы координаты системы определяются через n независимых обобщённых координат. В этом случае число степеней свободы k равно числу независимых обобщённых координат, т.е.

$$k = n . \quad (17)$$

При наличии j *неголономных* связей число степеней свободы уменьшается на их количество [12]:

$$k = n - j . \quad (18)$$

Отсутствие фиксации двух граничных точек траектории движения изменяет соотношение (18) и приводит к выражению эйлеровского типа [12]:

$$k = n - j + 2 . \quad (19)$$

Например, для свободной частицы ($j=0$), состояние движения которой можно описать с помощью одной обобщённой координаты ($n = 1$, в качестве такой координаты используют модуль радиуса-вектора $q = r = |\mathbf{r}|$, при этом полная механическая энергия частицы равна $E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \Pi(q)$), выражение (19) даёт правильное значение (в отличие от формулы (18)):

$$k = n - j + 2 = 1 - 0 + 2 = 3 , \quad (20)$$

т.е. свободная частица имеет 3 степени свободы. Это означает, что она может перемещаться вдоль координатных осей декартовой системы отсчёта.

4. Независимость вариаций времени

Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского (законы переменного и варьированного действия) базируется на варьировании всех аргументов

функциональных потенциалов, включая и время t (неизохронное варьирование). Будем считать независимыми аргументами время t и характер α экстремали (случай зависимости времени от натуральных параметров рассмотрен, например, в работе [12]) и вычислим неизохронную вариацию обобщенной координаты свободной частицы

$$\delta q(t, \alpha) = \xi(t, \alpha) \delta t + \zeta(t, \alpha) \delta \alpha, \quad (21)$$

где $\xi(t, \alpha) = \frac{\partial q(t, \alpha)}{\partial t}$ – функция, определяющая локальную скорость перемещения по экстремали, т.е. описывает поле локальных скоростей. Если функция ξ является бесконечно малой по сравнению с функцией изменения характера экстремали ζ ($\xi \ll \zeta$), то вариацию $\delta q(t)$ будет *изохронной*, в другом предельном случае ($\zeta \ll \xi$) – вариация $\delta q(t)$ становится *изопараметрической*. Если траектория движения не имеет изломов, то функции $\xi(t, \alpha)$ и $\zeta(t, \alpha)$ связаны между собой соотношением, вытекающим из непрерывности смешанных частных производных функции $q(t, \alpha)$:

$$\frac{\partial \xi(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \zeta(t, \alpha)}{\partial t}. \quad (22)$$

Соотношение (22) показывает, что изменение локальной скорости перемещения частицы вдоль экстремали совпадает со скоростью изменения геометрического образа траектории движения. Другими словами это означает, что частица всегда передвигается по экстремали как бы не изменялась её скорость перемещения или сама траектория движения.

В отличие от обнуления изохронной вариации обобщённой координаты формула (21) приводит к системе равенств

$$\begin{cases} \xi(t, \alpha)|_{t_1, t_2} = 0 \\ \zeta(t, \alpha)|_{t_1, t_2} = 0 \end{cases}. \quad (23)$$

Система уравнений (23) показывает, что фиксация обобщённых координат на концах геодезической линии требует, чтобы они в этих точках были стационарны во времени и экстремальны по характеру траектории движения.

Первые дифференциалы функций $\xi(t, \alpha)$ и $\zeta(t, \alpha)$ равны

$$d\xi(t, \alpha) = \frac{\partial \xi}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (24)$$

$$d\zeta(t, \alpha) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (25)$$

Дифференцируя равенство (21) по времени с учётом соотношений (22), (24) и (25), получим для вариации обобщённой скорости следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{q}(t, \alpha) &= \dot{\xi}(t, \alpha) \delta t + \dot{\zeta}(t, \alpha) \delta \alpha = \\
 &= \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \right] \delta t + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \right] \delta \alpha = \\
 &= \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \dot{\alpha} \right] \delta t + \left[\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \right] \delta \alpha = \\
 &= \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \delta \alpha .
 \end{aligned} \tag{26}$$

Если скорость изменения характера экстремали $\dot{\alpha}$ является постоянной величиной, то скорость движения частицы по геодезической линии равна

$$\dot{q} = \xi + \zeta \dot{\alpha} \tag{27}$$

и представляет собой субстанциональную производную обобщённой координаты в параметрическом пространстве. В противном случае обобщённая скорость определяется системой уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \dot{\alpha} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \end{cases} . \tag{28}$$

Если правые части уравнений системы (28) обращаются в нуль, то скорость движения частицы может достигать локального экстремума и принимать критическое значение, которому соответствует стационарное по времени и экстремальное по натуральным параметрам движение частицы. Условием достижения локального экстремума в параметрическом пространстве является обращение в нуль скобок Пуассона по аргументам t и α :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = [\xi, \zeta] = 0 . \tag{29}$$

Следовательно, до вычисления вариации действия (или другого функционала) необходимо задать способ варьирования обобщённых аргументов, который определит вид механического действия.

5. Различные виды аналитической механики

Для описания состояния механической системы достаточно использовать время t , обобщённую координату $q(t)$ и обобщённую скорость $\dot{q}(t)$ [14] (а также другие аргументы: гамильтониан H , обобщённый импульс p и обобщённую силу \dot{p}). В механике Лагранжа мгновенная скорость изменения действия определяется лагранжианом L (I.1), который назовём *варьируемой функцией*. Функция Лагранжа L связана с гамильтонианом H преобразованием Лежандра (I.7), который определяет локальную скорость изменения действия (I.11). Пол-

ная механическая энергия H динамической системы также может быть вариатором для другого свойства динамической системы, отличного от действия. Поэтому исследуем возможность существования отличных от лагранжиана L и гамильтониана H вариаторов, которые сопряжены с ними, имеют другие аргументы и определяют уравнения движения динамической системы.

Используя преобразование Лежандра, определим новые варьируемые функции (табл. 2), число которых равно числу сочетаний C_4^2 из четырёх допустимых аргументов (q, \dot{q}, p, \dot{p}) по два элемента (время t не варьируется):

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$$

Таблица 2.

Вариаторы, их аргументы и сопряжение с лагранжианом

№ п/п	Варируемые функции	Аргументы	Частные производные
1.	Лагранжиан L	q, \dot{q}	$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{p}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$
2.	Гамильтониан H	q, p	$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}, \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$
3.	G	q, \dot{p}	не сопряжён
4.	I	\dot{q}, p	не сопряжён
5.	J	\dot{q}, \dot{p}	$\frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = -p, \frac{\partial J}{\partial \dot{p}} = q$
6.	K	p, \dot{p}	$\frac{\partial K}{\partial p} = \dot{q}, \frac{\partial K}{\partial \dot{p}} = q$

Из табл. 2 видно, что *варируемые функции* образуют пары по своим аргументам: $L-K, H-J, G-I$, так как частные производные от одной функции по своим аргументам приводят к аргументам другой функции, входящей в пару. Из полученных выражений видно, что для построения аналитической механики достаточно первых производных по времени от обобщённых координат и импульсов. *Варируемые функции* L, H, J и K связаны между собой соотношениями:

$$\begin{cases} H(q, p, t) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}, t) \\ J(\dot{q}, \dot{p}, t) = q\dot{p} - L(q, \dot{q}, t) = q\dot{p} + \dot{q}p - H(q, p, t) = -\dot{q}p + K(p, \dot{p}, t). \\ K(p, \dot{p}, t) = q\dot{p} + \dot{q}p - L(q, \dot{q}, t) = q\dot{p} + H = \dot{q}p + J \end{cases} \quad (30)$$

Из формул (30) следует, что возможны альтернативные формулировки вариационных принципов и иной вид уравнений движения, которые взаимно дополняют друг друга.

В гамильтоновом пространстве (q, p, t) перепишем равенство (I.1) в виде

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = L = p\dot{q} - H \Rightarrow \frac{dS}{dt} - p\dot{q} = -\frac{dT}{dt} = -H}, \quad (31)$$

где новый вариационный функционал $T(q, p, t)$ определяет новое свойство динамической системы, которое назовём *консервативностью*, а вариационный принцип имеет формулировку: *движение динамической системы вдоль истинной траектории сопровождается экстремальной консервативностью системы*. Выразив консервативность T из равенства (31) через определённый интеграл по времени от гамильтониана H и вычислив её первую вариацию с учётом равенств второй строки табл. 1, получим уравнение Эйлера в виде (обобщённый импульс $p = p(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}$ зависит от обобщённой координаты q и скорости её изменения \dot{q}):

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \right) - \dot{q} \frac{\partial p}{\partial q} + \dot{p} = 0}, \quad \dot{q} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (32)$$

Если обозначить силу инерции (*силу Даламбера* [15])

$$\boxed{F_D = \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \right) - \dot{q} \frac{\partial p}{\partial q}}, \quad (33)$$

то уравнение (32) можно трактовать как третий закон Ньютона: *сила противодействия (F_D) равна по величине силе действия (\dot{p}) и противоположна ей по направлению*. Если обобщённый импульс p зависит от обобщённой скорости \dot{q} по линейному закону (например, в случае гироскопического потенциала (I.34))

$$p = a(q)\dot{q} + b(q), \quad (34)$$

то сила Даламбера имеет вид

$$F_D = a(q)\ddot{q} - \frac{db(q)}{dq}\dot{q} = a(q)\ddot{q} + F_S. \quad (35)$$

Формула (33) показывает, что *вязкое трение* (закон Стокса [16, с.138]: сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости движения

$F_S = -\kappa\dot{q}$, $\kappa = \frac{db(q)}{dq}$ – коэффициент трения) увеличивает силу инерции при

влажном скольжении ($\kappa < 0$) и уменьшает её – при сухом сопротивлении ($\kappa > 0$). Формулы (34) и (35) описывают движение тел с малыми размерами и скоростями перемещения, т.е. *консервативность достигает экстремума при наличии вязкого трения только для малоподвижных систем с малой скоростью перемещения (ламинарное движение)*. Если обобщённый импульс p не зависит от обобщённой координаты q , то сила Стокса F_S равна нулю.

Экстремальные функционалы и их варьируемые функции L , H , J и K представлены в табл. 3.

Таблица 3.

Экстремальные функционалы, уравнения движения и граничные условия

№ п/п	Функционал, варьируемые функции	Уравнение движения	Граничные условия
1.	Действие S , лагранжиан L	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big _{t_1}^{t_2} = 0$
			$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$
2.	Консервативность T , гамильтониан H	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} = 0$	$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \delta q \Big _{t_1}^{t_2} = 0$
			$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$
3.	Функционал $U = qp + T$, J	$\frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = 0$	$\frac{\partial J}{\partial \dot{p}} \delta p \Big _{t_1}^{t_2} = 0$
			$\delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$
4.	Функционал $V = qp - S$, K	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial K}{\partial p} = 0$	$\frac{\partial K}{\partial \dot{p}} \delta p \Big _{t_1}^{t_2} = 0$
			$\delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$

Если в строке 3 табл. 3 обозначить через

$$P = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{p}} \right) = \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \dot{q} \quad (36)$$

импульс отдачи (инерции) при движении, то уравнение Эйлера будет отображать *интегральную формулировку третьего закона Ньютона: импульс действия p равен по величине импульсу противодействия P и противоположен ему*

по направлению. С учётом последней строки табл. 3 уравнение движения с варьируемой функцией K (строка 4, табл. 3) превращается в тождество. Из проведенного анализа видно, что указанные пары образуют совокупность варьируемых функций, определяющих разновидности аналитической механики.

Пара варьируемых функций $G-I$, не сопряжённых с лагранжианом L , связаны между собой преобразованием Лежандра вида:

$$G(q, \dot{p}) = q\dot{q} + p\dot{p} - I(\dot{q}, p), \quad (37)$$

причём их частные производные по своим аргументам равны

$$\frac{\partial G}{\partial q} = \dot{q}, \quad \frac{\partial G}{\partial p} = p; \quad (38)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{q}} = q, \quad \frac{\partial I}{\partial p} = \dot{p}, \quad (39)$$

соответственно (иное сопряжение аргументов при возврате к размерным величинам приводит к несовпадению размерностей произведений независимых переменных). Соотношение (37) перепишем в виде

$$G(q, \dot{p}) = \frac{dH_0}{dt} - I(\dot{q}, p), \quad (40)$$

здесь $H_0(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ – гамильтониан обобщённого линейного осциллятора. При учёте формулы (15) равенство (40) переходит (для склерономных систем с явной зависимостью потенциальной энергии от времени) в выражение

$$G(q, \dot{p}) = -2R(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \Pi(q, \dot{q}, t)}{\partial t} - I(\dot{q}, p), \quad (41)$$

которое по виду соответствует соотношению Эйлера (см., например, [13, с.138]) для описания правильных многогранников, топологически подобной сфере. Следовательно, рассматриваемая пара варьируемых функций $G-I$ описывает *неньютоновскую динамику механической системы с диссипативными явлениями и лежит вне рамок анализа закона стационарного действия.*

В заключение отметим, что в конце XX века академиком РАН В.В. Козловым была предложена «вакономная механика» [17], критические замечания относительно которой изложены в книге П.В. Харламова [18].

6. Выводы

Вариационные принципы аналитической механики являются *информационными кодами*, содержащими в свёрнутом виде определённый массив знаний. Поэтому их последовательное применение при решении механических задач должно опираться на учёте скрытой информации: наличие или отсут-

ствие на заданном отрезке экстремали сопряжённых кинетических фокусов, способ варьирования обобщённых аргументов, непрерывность исходных и сопряжённых по Лежандру *варьируемых функций*, выполнение условий теоремы Сильвестра, возможность существования лабильных динамических систем ($\delta S = 0$; $\delta^2 S = 0$; $\delta^3 S \neq 0$), сохранение некоторых величин при движении. Выбор в качестве *варьируемой функции* одной из функций L , H , J и K определяет одну из разновидностей механики Ньютона и соответствующий ей вариационный принцип. Существование пары *варьируемых функций* $G - I$ указывает на неньютоновский тип перемещения механической системы, которая в осциллирующем режиме диссипирует энергию.

Список использованных источников

1. *Беленький И.М.* Введение в аналитическую механику / И.М. Беленький. – М.: Высшая школа, 1964. – 323 с.
2. *Гамильтон У.* Об общем методе в динамике, посредством которого изучение движений всех свободных систем притягивающихся или отталкивающихся точек сводится к отысканию и дифференцированию одного центрального соотношения или характеристической функции / У. Гамильтон // В сб. статей: Вариационные принципы механики (932 с.). Под ред. Л.С. Полака. – М.: ГИФМЛ, 1959. – С. 175-233.
3. *Леви-Чивита Т.* Курс теоретической механики. Т.2, Ч.2 / Т. Леви-Чивита, У. Амальди. – М.: Иностранная литература, 1951. – С. 441.
4. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных / В.В. Учайкин. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
5. *Морс Ф.М.* Методы теоретической физики. Т.1 / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. – М.: ИИЛ, 1958. – 931 с.
6. *Лич Дж.У.* Классическая механика / Дж.У.Лич. – М.: Изд-во иностран. лит-ры, 1961. – 173 с.
7. *Максимов Г.А.* Обобщенный вариационный принцип для диссипативной гидродинамики и механики сплошной среды / Г.А. Максимов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т.2, № 4. – С. 92-104.
8. *Терехов С.В.* Фракталы и физика подобия / С.В. Терехов. – Донецк: Цифровая типография, 2011. – 255 с.
9. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // В 10-ти т., Т.V. Статистическая физика. – М.: Наука, 1964. – 568 с.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер // Учебн. пос. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

- 11.** *Смолин И.Ю.* Основы аналитической динамики (введение в аналитическую механику) / И.Ю. Смолин. – Томск: ТомГУ, 2007. – 32 с.
- 12.** *Добронравов В.В.* Основы аналитической механики / В.В. Добронравов. – М.: Высшая школа, 1976. – 264 с.
- 13.** *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. / И. Лакатос. – М.: Наука, 1967. – 152 с.
- 14.** Парс Л.А. Аналитическая механика / Л.А. Парс. – М.: Наука, 1971. – 636 с.
- 15.** *Веретенников В.Г.* Метод переменного действия / В.Г. Веретенников, В.А. Сеницын. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.
- 16.** *Зисман Г.А.* Курс общей физики Т.1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – М.: Наука, 1974. – 338 с.
- 17.** *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями / В.В. Козлов // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика: I – 1982, № 3, с. 92-100; II – 1982, № 4, с. 70-76; III – 1983, № 3, с. 102-111; IV – 1987, № 5, с. 76-83; VI – 1988, № 6, с. 51-54.
- 18.** *Харламов П.В.* Очерки об основаниях механики / П.В. Харламов // Научн. изд. – Киев: Наукова думка, 1995. – 407 с.

Авторы: Терехов Сергей Владимирович,

д.ф.-м.н., доц., в.н.с. отдела № 16,
ГУ ДонФТИ им. А.А. Галкина.

Варюхин Виктор Николаевич,

д.ф.-м.н., проф., зав. каф. “Теоретической
физики и нанотехнологий”, ДонНУ,
директор ГУ ДонФТИ им. А.А. Галкина.

Учебное пособие: Математическая библиотечка студента-физика. Т. 3 (часть VI, для студентов специальности «Теоретическая физика»: части I–III). Решение задач по теории функций нескольких переменных, теории функций комплексного переменного, операционному исчислению, тензорной алгебре, уравнениям математической физики, вычислительной математике, вейвлетам, фракталам, дифференциалам // Учебное издание для студентов физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов / Донецк: ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина. – 2018. – 521 с.