Терехов С.В.

Варюхин В.Н.

Математическая библиотечка студента-физика

Том 2

Решение задач

по интегральному исчислению, теории рядов, дифференциальным уравнениям I и II порядков, теории вероятностей и математической статистике

Донецк

ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина»

2018

Терехов С.В.

Варюхин В.Н.

Математическая библиотечка студента-физика

Том 2

(*части* III–V)

Решение задач

по интегральному исчислению, теори рядов,
дифференциальным уравнениям I и II порядков,
теории вероятностей и математической статистике

Донецк

ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина»

2018

УДК 512.8
PACS 02.10.Ud
Т35

Авторы-составители:
С.В. Терехов, д-р физ.-мат. наук, доцент, в.н.с.,
В.Н. Варюхин, д-р физ.-мат. наук, профессор

Рецензенты:
А.Г. Петренко, д-р.физ.-мат.наук, профессор,
В.М. Юрченко, д-р.физ.-мат.наук, профессор

Рекомендовано к изданию ученым советом
ГОУ ВПО Донецкого национального университета
протокол № 1 *от* «27» *января* 2017 *г.*

Т35 ***Терехов С.В.***, ***Варюхин В.Н.*** Математическая библиотечка студента-физика. Т. 2 (части III−V). Решение задач по интегральному исчислению, теории рядов, дифференциальным уравнениям I и II порядков, теории вероятностей и математической статистике // Учебное издание для студентов физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов / Донецк: ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина. – 2018. – 425 с.

В учебном пособии изложены основные теоретические сведения по различным разделам математики, приведено большое количество примеров.

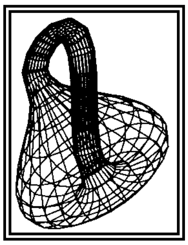
Для студентов всех специальностей и форм обучения физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов, молодых преподавателей.

УДК 512.8
PACS 02.10.Ud

Оглавление

Стр.

Стр.



III. *Интегральное исчисление*

Тема: *Неопределённый интеграл*

24. “***Неопределённый интеграл и его свойства***”

24.1. *Первообразная. Неопределённый интеграл*

При решении многих практических задач таких, как вычисление длин линий, площадей, отыскание траекторий движения и других, применяют интегральное исчисление.

Первообразной функции $f(x)$, заданной на множестве X, называется дифференцируемая на множестве X функция $F(x)$, если $\forall x \in X$ первая производная $F'(x)$ равна функции $f(x)$, т.е.

$$\boxed{F'(x) = f(x)}.$$

Здесь и далее под множеством X понимаются конечные, полубесконечные и бесконечные интервалы, кроме того, подразумевается существование как обычной производной внутри вышеуказанных множеств, так и односторонних производных на их границах (см. п. 17.2, ***17***).

Теорема 1 (*о существовании первообразной*; *теорема Коши*)**.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом интервале *существует первообразная* этой функции.

Теорема 2. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, заданной на множестве X, то $\forall x \in X$ функция $\boxed{F(x)+C}$ (C – произвольная постоянная) также является первообразной функции $f(x)$.

Док-во: $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$.

Теорема 3. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то они отличаются друг от друга на постоянную величину.

Док-во: Пусть $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$. Введём в рассмотрение вспомогательную функцию $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$, которая определена на открытом интервале $(a;\, b)$. По условию теоремы $\forall x \in (a;b)$

$$\Phi'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Следовательно, по ***Теореме 3***, п. 22.3, ***22*** функция $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x) = C$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Пример 1. Пусть дана функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Найти *первообразную* этой функции. В *случае наличия двух первообразных* показать, что они отличаются на постоянную величину.

Для функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ существуют две первообразные

$$F_1(x)=\arcsin x \text{ и } F_2(x)=-\arccos x.$$

Их разность $\Phi(x)=F_2(x)-F_1(x)=-\arccos x-\arcsin x=-\dfrac{\pi}{2}=C$.

Если функция $f(x)$, заданная на множестве X, имеет хотя бы одну *первообразную* $F(x)$ на этом множестве, то она имеет бесконечно много первообразных.

Отыскание всех возможных первообразных называется ***неопределённым интегрированием***.

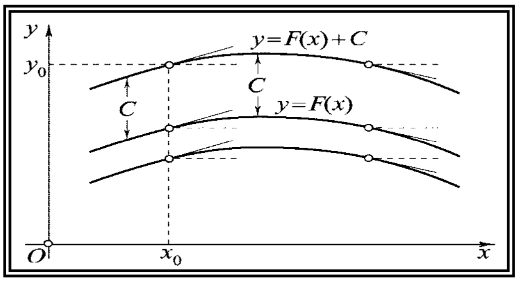
Интегрирование является *обратной* операцией к взятию дифференциала от функции.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется ***неопределённым интегралом*** и обозначается

$$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C},$$

где $\boxed{\int}$ – *знак неопределённого интеграла*, $\boxed{f(x)}$ – *подынтегральная функция*, $\boxed{x}$ – *переменная интегрирования*, $\boxed{f(x)dx}$ – *подынтегральное выражение*, $\boxed{F(x)}$ – *какая-либо первообразная функции* $f(x)$ на множестве X, $\boxed{C}$ – *постоянная интегрирования*.

Неопределённый интеграл является *функцией* аргумента x.



С геометрической точки зрения неопределённый интеграл представляет множество всех интегральных кривых $y=F(x)+C$, получаемых при непрерывном движении одной из них вдоль оси ординат. Угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой $y=F(x)$ равен $k=F'(x)=f(x)$. Поэтому геометрически неопределённое интегрирование сводится к отысканию кривой по известному в каждой точке множества X угловому коэффициенту касательной к графику искомой кривой.

24.2. *Свойства неопределённого интеграла*

<u>1</u>. <u>*Производная от неопределённого интеграла*</u> равна подынтегральной функции $\boxed{\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)}$.

Док-во: По определению неопределённого интеграла

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2. *Дифференциал неопределённого интеграла* равен подынтегральному выражению $\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}$.

Док-во: По определению дифференциала от неопределённого интеграла имеем $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)\,dx$.

3. Если подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции $F(x)$, то неопределённый интеграл равен

$$\boxed{\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+C}.$$

Док-во: Так как $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$, то $\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x)+C$.

○ Свойства **2.** и **3.** неопределённого интеграла показывают, что при последовательном применении операций неопределённого интегрирования и взятия дифференциала от интеграла (или наоборот) происходит взаимное уничтожение этих операций. ○

4. Неопределённый интеграл от линейной комбинации функций равен той же самой линейной комбинации неопределённых интегралов от этих функций ($\boxed{a_i \in R,\ a_i \neq 0}$):

$$\int \left[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x)\right] dx = a_1 \int f_1(x)\,dx + a_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + a_n \int f_n(x)\,dx.$$

○ Несмотря на то, что при вычислении каждого интеграла i возникает своя константа интегрирования C_i, в ответе пишут одну постоянную интегрирования $C = a_1 C_1 + a_2 C_2 + \ldots + a_n C_n$. ○

а) *неопределённый интеграл от суммы* (*разности*) *функций равен сумме* (*разности*) *неопределённых интегралов от данных функций*

$$\boxed{\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx}.$$

б) *отличный от нуля постоянный множитель* ($\boxed{a \in R,\ a \neq 0}$) *можно выносить за знак неопределённого интеграла* $\boxed{\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx}$.

5. Если $F(x)$ является *первообразной* для функции $f(x)$, то

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C}.$$

6. Вид *первообразной* для неопределённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования (свойство *инвариантности*)

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt = \int f(u)\,du = \int f(y)\,dy = \ldots}$$

Пример 2. Чему равны первообразные для неопределённых интегралов $\int \cos x\,dx$ и $\int \cos t\,dt$?

Так как $\begin{cases}(\sin x)' = \cos x \\ (\sin t)' = \cos t\end{cases}$, то $\begin{cases}\int \cos x\,dx = \sin x + C \\ \int \cos t\,dt = \sin t + C\end{cases}$.

Отметим, что среди вышеприведенных нет таких свойств

$$\boxed{\cancel{\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}}} \quad \boxed{\cancel{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx}}.$$

24.3. *Таблица основных неопределённых интегралов*

Так как неопределённое интегрирование является *обратной операцией* к взятию первой производной функции, то хорошее знание таблицы первых производных (см. п. 18.1, ***18***) от элементарных функций позволяет хорошо запомнить таблицу неопределённых интегралов (табл. 1). Правильность нахождения первообразной можно проверить взятием от неё первой производной, в результате, согласно определению, должна быть получена подынтегральная функция. Отметим, что аргумент x в табл. 1 может быть заменён любой другой буквой в соответствии со свойством **6.** для неопределённых интегралов.

Неопределённые интегралы от функций $\mathrm{tg}\,x$ и $\mathrm{ctg}\,x$ могут быть вычислены с применением метода замены переменной интегрирования (см. п. 25.2, ***25***), но, тем не менее, они включены в табл. 1, так как часто встречаются в практических задачах.

Таблица 1.

Неопределённые интегралы от элементарных функций

Подинтегральная функция	*Неопределённый интеграл*	*Частные случаи*
0	$\int 0\,dx = C$	
Степенная x^p	$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C,\ (p \neq -1)$	$p=0$: $\int 1dx = \int dx = x + C$
		$p=1$: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
		$p=-\frac{1}{2}$: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$ $(p=-1)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$, $(x \neq 0)$	
Показательная a^x	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a>0; a \neq 1)$	$\int e^x dx = e^x + C$

Тригонометрические		
$\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	
$\cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	
$\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$, $(x \neq k\pi,\ k \in Z)$	
$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$, $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z)$	
$\mathrm{tg}\,x$	$\int tg\,x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$, $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z)$	
$\mathrm{ctg}\,x$	$\int ctg\,x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$, $(x \neq k\pi,\ k \in Z)$	
Дробные $\frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{b}\right) + C$, $(\lvert x\rvert \leq \lvert b\rvert,\ b \neq 0)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$, $(\lvert x\rvert \leq 1)$
$\frac{1}{s^2 + x^2}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{s^2 + x^2} = \frac{1}{s}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{s}\right) + C$, $(s \neq 0)$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C$
$\frac{1}{x^2 - k^2}$	$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\ln\left\lvert\frac{x - k}{x + k}\right\rvert + C$, $(k \neq 0,\ x \neq k)$	$\int \frac{dx}{k^2 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2 - k^2}$ (*высокий* логарифм)
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm \alpha}\right\rvert + C$, $(\alpha \neq 0,\ x^2 - \alpha > 0)$	(*длинный* логарифм)
Гиперболические		$\mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$
$\mathrm{sh}x$	$\int \mathrm{sh}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$	$\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
$\mathrm{ch}x$	$\int \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$	$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + C$, $(x \neq 0)$	$\mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \frac{1}{\mathrm{th}x} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C$	

Пример 3. Найти $\int \sqrt[3]{x^2}dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; $\int 4^x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$; $\int \frac{dx}{x^2+16}$; $\int \frac{dx}{x^2-3}$.

1) $\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$;

3) $\int 4^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2-7} \right| + C$;

5) $\int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{dx}{16+x^2} = \int \frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{4} arctg\left(\frac{x}{4}\right) + C$;

6) $\int \frac{dx}{x^2-3} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C$.

<u>25</u> “*Методы интегрирования*”

25.1. *Тождественные преобразования подынтегральной функции*

Преобразования базируются на использовании простых приёмов, алгебраических и тригонометрических формул, свойств подынтегральной функции, разложении полиномов на простые множители и свойствах неопределённого интеграла.

<u>1</u>. Почленное деление числителя дроби на знаменатель $\boxed{\frac{a\pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}}$.

○ *Нет формулы почленного деления* ***знаменателя дроби на её числитель***, т.е. $\boxed{\cancel{\frac{a}{b\pm c} \ne \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}}}$. ○

Пример 1. Найти $\int \frac{3x-4\sqrt{x}}{x}dx$.

Выполним в подынтегральной функции почленное деление числителя дроби на её знаменатель и воспользуемся свойством линейности неопределённого интеграла (**<u>4.</u>**, п. 24.2, ***<u>24</u>***)

$$\int \frac{3x-4\sqrt{x}}{x}dx = \int\left(\frac{3x}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int\left(3 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \int 3\,dx - \int \frac{4\,dx}{\sqrt{x}} = 3\int dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$
$$= 3x - 8\sqrt{x} + C.$$

Из этого примера видно, что слова “*найти неопределённый интеграл*” означают: за счёт преобразований подынтегральной функции и использования свойств неопределённого интеграла заданный интеграл надо привести к совокупности табличных интегралов и воспользоваться этой таблицей.

2. Использование противоположных арифметических операций (например, *сложение-вычитание*).

Пример 2. Найти $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$.

Анализ подинтегральной функции $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ показывает, что в числитель дроби надо добавить и вычесть **1** (при этом подинтегральная функция не изменится), а затем воспользоваться первым приёмом (почленное деление числителя дроби на её знаменатель)

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} dx = \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - arctg\, x + C.$$

3. Использование алгебраических или тригонометрических формул, например,

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}; \quad \boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)};$$

$$\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)}; \quad \boxed{2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha};$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}; \quad \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1};$$

$$\boxed{\cos ec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}}; \quad \boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}};$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}; \quad \boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}; \quad \boxed{tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}}$$

и других формул.

Пример 3. Найти $\int (2x-1)^2\, dx$.

Воспользуемся формулой квадрата разности $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$:

$$\int (\overset{a}{2x} - \overset{b}{1})^2\, dx = \int (4x^2 - 4x + 1)\, dx = 4\int x^2 dx - 4\int x\, dx + \int dx = 4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + C =$$

$$= \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + C.$$

Пример 4. Найти $\int \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 dx$.

Поступим аналогично ***Примеру 3*** ($\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$):

$$\int\left(\overset{a}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\overset{b}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\overbrace{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}^{\sin x}+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx=$$

$$1$$

$$=\int(1+\sin x)\,dx=\int dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C\,.$$

4. Использование свойств функций, например,

$$\boxed{x^{\alpha}\,x^{\beta}=x^{\alpha+\beta}};\qquad \boxed{\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}=x^{\alpha-\beta}};$$

$$\boxed{\left(x^{\alpha}\right)^{\beta}=x^{\alpha\beta}};\qquad \boxed{\sqrt[\beta]{x^{\alpha}}=x^{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Пример 5. Вычислить $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.

$$\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx=\int\sqrt{x\sqrt{x\,x^{\frac{1}{2}}}}\,dx=\int\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}\,dx=\int\sqrt{x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}\,dx=\int\sqrt{x\,x^{\frac{3}{4}}}\,dx=\int\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}\,dx=$$

$$=\int\left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int x^{\frac{7}{8}}dx=\frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}}+C=\frac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}}+C\,.$$

Пример 6. Вычислить $\int 5^{x+1}\,4^{x-2}\,dx$.

$$\int 5^{x+1}\,4^{x-2}\,dx=\int 5^x\,5\,\frac{4^x}{4^2}\,dx=\frac{5}{16}\int 5^x\,4^x\,dx=\frac{5}{16}\int(5\cdot 4)^x\,dx=\frac{5}{16}\int 20^x\,dx=\frac{5}{16}\frac{20^x}{\ln 20}+C\,.$$

5. Использование разложения полиномов на простые множители, например, при значении дискриминанта $D=b^2-4ac>0$

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)},$$

где x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Пример 7. Найти $\int\frac{x^2-5x+6}{x-3}dx$.

По теореме Виета уравнение $x^2-5x+6=0$ имеет корни $x_1=2$ и $x_2=3$, т.е. разложение квадратичного полинома на простые множители имеет вид: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Подставим полученное выражение в подинтегральную функцию, получим

$$\int\frac{x^2-5x+6}{x-3}dx=\int\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}dx=\int(x-2)\,dx=\int x\,dx-2\int dx=\frac{x^2}{2}-2x+C.$$

25.2. *Метод замены переменной интегрирования*

Данный метод основан на применении формулы

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \left|\begin{array}{l} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)\,dx \end{array}\right| = \int f(t)\,dt}.$$

Метод замены переменной интегрирования применяют в двух случаях:

а) *Если аргумент функции отличается от простого аргумента* x, *то этот сложный аргумент принимается в качестве новой переменной интегрирования* t.

Пример 8. Вычислить $\int e^{-2x}\,dx$.

Так как показатель степени экспоненты отличается от простого аргумента x, то этот показатель степени принимаем в качестве новой переменной интегрирования, т.е.

$$\int e^{-2x}dx = \left|\begin{array}{l} t=-2x \quad dt=-2\,dx \\ dx=-\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C.$$

○ После нахождения первообразной с новой переменной интегрирования надо ***обязательно вернуться к старой переменной интегрирования***. ○

Пример 9. Вычислить $\int (3x-2)^{10}\,dx$.

Выражение, стоящее в круглых скобках, является аргументом степенной функции и отличается от простого аргумента x, поэтому принимаем его в качестве новой переменной интегрирования, т.е.

$$\int (3x-2)^{10}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=3x-2, \quad dt=3\,dx \\ dx=\dfrac{1}{3}dt \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int t^{10}\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^{11}}{11} + C = \frac{(3x-2)^{11}}{33} + C.$$

Пример 10. Вычислить $\int \sin(2x)\,dx$.

Выражение, стоящее в круглых скобках, является аргументом функции синус и отличается от простого аргумента x, поэтому принимаем его в качестве новой переменной интегрирования, т.е.

$$\int \sin(2x)\,dx = \left|\begin{array}{l} t=2x, \quad dt=2\,dx \\ dx=\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \sin t\;dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{\cos(2x)}{2} + C.$$

б) *Если элементарная функция, содержащаяся в подынтегральном выражении, имеет простой аргумент* x *и в качестве множителя при* dx *присутствует первая производная этой функции*, то в качестве *новой переменной интегрирования* t *принимается* ***элементарная функция***.

Пример 11. Найти $\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dx$.

В подынтегральном выражении содержится элементарная функция tgx и в качестве множителя при dx присутствует её первая производная $\frac{1}{\cos^2 x}$, следовательно, в качестве новой переменной интегрирования принимаем tgx:

$$\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C .$$

Пример 12. Найти $\int \frac{x - arctgx}{1 + x^2} dx$.

Данный пример объединяет тождественные преобразования подынтегральной функции с методом замены переменной интегрирования. Выполним почленное деление числителя дроби на её знаменатель и разобьём интеграл на два интеграла, для которых применяются два случая замены переменной интегрирования

$$\int \frac{x - arctgx}{1+x^2} dx = \int \frac{x\,dx}{\boxed{1+x^2}} - \int \frac{\boxed{arctgx}\,dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} t = \boxed{1+x^2} \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \dfrac{1}{2} dt \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} y = \boxed{arctgx} \\ dy = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \int y\,dy = \frac{1}{2}\ln|t| -$$

$$- \frac{y^2}{2} + C = \frac{1}{2}\left(\ln\left|1 + x^2\right| - arctg^2 x\right) + C .$$

○ Умение отыскивать подходящую замену вырабатывается в процессе многократных упражнений, однако можно указать ряд случаев, когда можно сразу ***увидеть необходимую замену переменной интегрирования при анализе подынтегрального выражения***, например,

$$\int f(\underline{\sin x})\, \underline{\underline{\cos x\, dx}} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \underline{\underline{\cos x\, dx}} \end{array} \right| = \int f(t)\, dt ;$$

$$\int f(\underline{x^2}) \underline{\underline{x\, dx}} = \left| \begin{array}{l} t = \underline{x^2}, \;\; dt = 2x\, dx \\ \underline{\underline{x\, dx}} = \dfrac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int f(t)\, dt \ldots$$

Из рассмотренных примеров видно, что ***умение хорошо интегрировать зависит от хорошего знания таблицы производных от элементарных функций*** (см. п. 18.1, ***18***). ○

25.3. *Метод интегрирования по частям*

Интегрирование по частям основано на использовании формулы дифференциала от произведения двух функций (п. 19.1, ***19***)

$$d(UV) = V\,dU + U\,dV,$$

откуда находим, что произведение $U\,dV = d(UV) - V\,dU$. ***Формула интегрирования по частям*** имеет вид:

$$\boxed{\int UdV = UV - \int VdU}.$$

Для того чтобы знать, какую из функций принимать за U (всё остальное в подынтегральном выражении принимается за dV), рассмотрим *наиболее часто встречающиеся случаи*:

1). $\boxed{\int P_n(x)\begin{Bmatrix} a^x \\ \sin(bx) \\ \cos(bx)\end{Bmatrix} dx}$, где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – полином (*многочлен*) порядка n.

В этом случае $\boxed{\int \underbrace{P_n(x)}_{U} \underbrace{\begin{Bmatrix} a^x \\ \sin(bx) \\ \cos(bx)\end{Bmatrix} dx}_{dV} = \left| \begin{array}{ll} U = P_n(x) & dV = \begin{Bmatrix} a^x \\ \sin(bx) \\ \cos(bx)\end{Bmatrix} \\ dU = P_n'(x)\,dx \;\Leftarrow & V = \int \begin{Bmatrix} a^x \\ \sin(bx) \\ \cos(bx)\end{Bmatrix} dx \end{array} \right|}.$

Для нахождения выражения dU используют определение дифференциала функции (см. п. 19.1, ***19***). При вычислении функции V интегрируют выражение dV, а постоянную интегрирования не пишут, так как она не оказывает влияния на окончательный вид ответа. После выполнения этих действий применяют *формулу интегрирования по частям*.

Пример 13. Вычислить $\int x^2 e^x\,dx$.

Применим метод интегрирования по частям

$$\int \underbrace{x^2}_{U} \underbrace{e^x\,dx}_{dV} = \left| \begin{array}{ll} U = x^2 & dV = e^x\,dx \\ dU = 2x\,dx \;\Leftarrow & V = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2\int \underbrace{x}_{U} \underbrace{e^x dx}_{dV} =$$

$$= x^2 e^x - 2\left| \begin{array}{ll} U = x & dV = e^x\,dx \\ dU = dx \;\Leftarrow & V = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x\,dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C.$$

○ Из приведенного примера видно, что *при необходимости метод интегрирования по частям применяется* ***повторно***. ○

○ Другой метод интегрирования, который будет рассмотрен в п. 28.2 **28**, основан на использовании метода неопределённых коэффициентов. Например, для подынтегральной функции $f(x)=P_n(x)e^x$ первообразную можно отыскивать в виде $F(x)=G_n(x)e^x$, где $G_n(x)$ – полином порядка n с неизвестными коэффициентами b_i ($i=0\dots n$). По определению $\boxed{F'(x)=f(x)}$, т.е.

$$G_n'(x)e^x+G_n(x)e^x=P_n(x)e^x.$$

Следовательно, выполняется равенство $G_n'(x)+G_n(x)=P_n(x)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x, получают систему линейных алгебраических уравнений (*СЛАУ*) относительно неизвестных коэффициентов $b_i\,(i=0...n)$. Решая *СЛАУ*, находят числовые значения коэффициентов b_i и подставляют их в выражение для первообразной. ○

Пример 13а. Найти $\int x^2\,e^x\,dx$.

Так как подынтегральная функция $f(x)=x^2e^x=P_2(x)e^x$, то первообразную будем искать в виде $F(x)=G_2(x)e^x=(b_2x^2+b_1x+b_0)e^x$. Используя определение первообразной, запишем равенство

$$G_n'(x)+G_n(x)=P_n(x)\Rightarrow 2b_2x+b_1+b_2x^2+b_1x+b_0=x^2.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x, которые стоят слева и справа от знака равенства, получим *СЛАУ* относительно неизвестных коэффициентов b_i $(i=0...n)$: $\begin{cases}x^2: b_2=1\\ x: 2b_2+b_1=0\\ x^0: b_1+b_0=0\end{cases}$. Решение *СЛАУ* имеет вид: $b_2=1$ (первое уравнение *СЛАУ*); $b_1=-2$ (второе уравнение *СЛАУ*); $b_0=2$ (третье уравнение *СЛАУ*). Таким образом, $\int x^2\,e^x\,dx=(x^2-2x+2)e^x+C$.

2). В интегралах вида $\boxed{\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\log_a x\\ \arcsin x\\ \arccos x\\ arctg\,x\\ arcctg\,x\end{Bmatrix}dx=\left|\,U=\begin{Bmatrix}\log_a x\\ \arcsin x\\ \arccos x\\ arctg\,x\\ arcctg\,x\end{Bmatrix}\;dV=P_n(x)dx\right\|}$.

Пример 14. Вычислить $\int \ln^2 x\,dx$.

Действуя, согласно методике, получим

$$\int \underbrace{\ln^2 x}_{U}\,\underbrace{dx}_{dV} = \left| \begin{matrix} U = \ln^2 x & dV = dx \\ dU = 2\ln x \dfrac{dx}{x} & V = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x - 2\int \underbrace{\ln x}_{U}\,\underbrace{dx}_{dV} =$$

$$= x\ln^2 x - 2\left| \begin{matrix} U = \ln x & dV = dx \\ dU = \dfrac{dx}{x} & V = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x - 2(x\ln x - \int dx) = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C.$$

Пример 15. Найти $\int x^p \ln x\,dx,\ p \in R$.

Вначале рассмотрим случай, когда $p \neq -1$:

$$\int \underbrace{x^p}_{dV}\,\underbrace{\ln x}_{U}\,\underbrace{dx}_{dV} = \left| \begin{matrix} U = \ln x & dV = x^p dx \\ dU = \dfrac{dx}{x} & V = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} \end{matrix} \right| = \frac{x^{p+1}\ln x}{p+1} - \frac{1}{p+1}\int x^p dx =$$

$$= \frac{x^{p+1}\ln x}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} + C.$$

Например, $p = -3$, тогда

$$\int x^{-3}\ln x\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

В случае, когда $p = -1$ получим:

$$\int x^{-1}\ln x\,dx = \int \ln x \frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

3). Для интегралов вида $\int a^x \begin{Bmatrix} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix} dx$, которые называются *возвратными*, на первом шаге интегрирования *безразлично*, какую из функций (показательную a^x или тригонометрическую $\begin{Bmatrix} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix}$) принимать в качестве функции U. Однако на втором шаге в качестве функции U надо ***обязательно*** принимать ту из функций (показательную a^x или тригонометрическую $\begin{Bmatrix} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{Bmatrix}$), которая была принята на первом шаге, в противном случае интеграл возвращается к своему исходному виду при отсутствии проинтегрированной части.

Пример 16. Найти $\int e^x \sin x\,dx$.

$I=\int e^x\sin x\,dx=\left|\begin{array}{ll} U=\sin x & dV=e^x\,dx \\ dU=\cos x\,dx & V=e^x \end{array}\right|=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=$(если сейчас в качестве функции U выбрать экспоненту, то интеграл вернётся к своему первоначальному виду при отсутствии проинтегрированной части; убедитесь в этом *самостоятельно*)

$$=e^x\sin x-\left|\begin{array}{ll} U=\cos x & dV=e^x\,dx \\ dU=-\sin x dx & V=e^x \end{array}\right|=e^x\sin x-(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx)=$$

$=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)-I$. Решим полученное уравнение относительно буквы I:

$$I=e^x(\sin x-\cos x)-I;\ \text{ или }\ 2I=e^x(\sin x-\cos x).$$

Отсюда находим, что $I=\int e^x\sin x\,dx=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$.

○ Метод интегрирования по частям применяют в ряде случаев для вывода *рекуррентных* (*возвратных*) соотношений, которые позволяют вычислять одни интегралы через другие. ○

Пример 17. Найти $\int\dfrac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ при $n\in N$, $n\geq 2$.

$$I_n=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\left|\begin{array}{ll} U=(a^2+x^2)^{-n} & dV=dx \\ dU=-n(a^2+x^2)^{-n-1}2x & V=x \end{array}\right|=\frac{x}{(a^2+x^2)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}=$$

(во втором интеграле выполним тождественные преобразования, см. п. 25.1, ***Пример 2***, <u>25</u>)

$$=\frac{x}{(a^2+x^2)^n}+2n\int\frac{(a^2+x^2)-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(a^2+x^2)^n}+2n\left(\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}-a^2\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}\right)=$$

(воспользуемся обозначением для искомого интеграла)

$=\dfrac{x}{(a^2+x^2)^n}+2n\left(I_n-a^2I_{n+1}\right)$. Отсюда получаем

$$I_n=\frac{x}{(a^2+x^2)^n}+2n\left(I_n-a^2I_{n+1}\right).$$

Решив это равенство относительно I_{n+1}, найдём

$$\boxed{I_{n+1}=\frac{x}{2n\,a^2(a^2+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2n\,a^2}I_n}.$$

Например, надо вычислить интеграл $I_2=\int\dfrac{dx}{(a^2+x^2)^2}$, т.е. $n+1=2$, $n=1$:

$$I_2=\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{x}{2\,a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2\,a^2}I_1;$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 \text{ (табличный).}$$

Следовательно,

$$I_2 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2\,a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2\,a^3} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C\,.$$

4). Нестандартные интегралы требуют для своего вычисления приобретения студентами опыта на практических занятиях.

Пример 18. Найти $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{ll} U = x & dV = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ dU = dx & V = tg\,x \end{array} \right| = x\ tg\,x - \int tgx\,dx = x\ tg\,x + \ln\left|\cos x\right| + C\,.$$

● В зависимости от использованного метода интегрирования первообразные заданного интеграла могут отличаться друг от друга, но только на постоянную величину (см. ***Теорему 3***, п. 24.1, ***24***). ●

Пример 19. Вычислить $\int (2x-1)^2\,dx$.

Возведём выражение, стоящее в круглых скобках, в квадрат, воспользуемся свойством линейности неопределённого интеграла (см. свойство **4.**, п. 24.1, ***24***) и таблицей интегралов для степенной функции (см. п. 24.3, ***24***):

$$\int (2x-1)^2\,dx = \int (4x^2 - 4x + 1)\,dx = 4\int x^2 dx - 4\int x dx + \int dx = 4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + C_1 =$$

$$= \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + C_1\,.$$

Пример 19а. Вычислить $\int (2x-1)^2\,dx$.

Воспользуемся методом замены переменной интегрирования, т.е.

$$\int (2x-1)^2\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 2x-1, \quad dt = 2\,dx \\ \hline dx = \dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + C_2 = \frac{(2x-1)^3}{6} + C_2\,.$$

Преобразуем полученную первообразную

$$F_2(x) + C_2 = \frac{(2x-1)^3}{6} + C_2 = \frac{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{6} + C_2 = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x - \frac{1}{6} + C_2\,.$$

Если положить

$$C_1 = -\frac{1}{6} + C_2\,,$$

то ответы в рассмотренных примерах совпадают.

<u>26</u> "*Комплексные числа*"

26.1. *Формы записи комплексного числа*

Найти решение простейшего квадратного уравнения $x^2+1=0$ в области действительных чисел невозможно, так как нельзя извлекать корень чётной степени из отрицательного числа. Однако если выполнить решение формально, то получим $x_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$.

Выражение $\boxed{i=\sqrt{-1}}$ называется ***мнимой единицей***.

Комплексным числом называется выражение вида $\boxed{z=x+iy}$, где $x, y\in R$, причём $x=\mathrm{Re}z$ называется ***действительной***, а $y=\mathrm{Im}z$ – ***мнимой*** частями комплексного числа z. Приведенная форма записи комплексного числа z называется ***алгебраической***.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются ***равными***, если *равны их действительные* $\boxed{x_1=x_2}$ *и мнимые* $\boxed{y_1=y_2}$ *части*.

Комплексное число называется ***нулевым***, если *действительная и мнимая части* равны *нулю* ($\boxed{z=0=0+i\,0}$).

○ Если равна нулю только действительная часть ($x=0$) комплексного числа, то число $\boxed{z=0+iy}$ называется ***мнимым***. Если равна нулю только мнимая часть ($y=0$) комплексного числа, то число $\boxed{z=x+i0}$ называется ***действительным***, т.е. множество действительных чисел R содержится в множестве комплексных чисел C ($R\subset C$). ○

Комплексно-сопряжённым к комплексному числу $z=x+iy$ называется комплексное число $\boxed{\bar{z}=x-i\,y}$.

○ Для получения *комплексно-сопряжённого числа* из данного числа $z=x+iy$, достаточно изменить знак мнимой единицы на противоположный ($i\to -i$). ○

Пример 1. Записать комплексно-сопряжённое число к комплексному числу $z=3-2i$.

Согласно определению комплексно-сопряжённого числа, получаем $\bar{z}=$ $=3+2i$.

○ Двойное комплексное сопряжение приводит к исходному комплексному числу, т.е. $\bar{\bar{z}}=z$. ○

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом невозможно в области действительных чисел, так как *нельзя извлекать корень чётной степени из отрицательного числа на множестве действительных чисел*. Однако это ограничение снимается в области комплексных чисел.

Пример 2. Решить квадратное уравнение $x^2-2x+2=0$.
Вычислим дискриминант уравнения $D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=-4$, таким образом, $\sqrt{D}=2i$. Следовательно, $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$ и $x_2=$ $=\overline{x_1}=1+i$.

○ Решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом всегда состоит из комплексно-сопряжённых корней. ○

Комплексное число $z=x+iy$ изображается на комплексной плоскости xOy в виде вектора, соединяющего начало координат с точкой $M(x;y)$ (рис. 1):

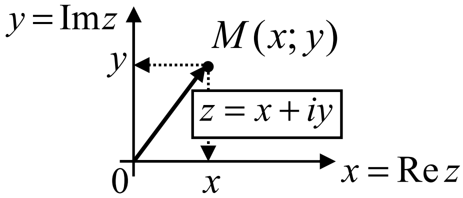


Рис. 1. *Отображение комплексного числа на комплексной плоскости.*

Пример 3. Изобразить на комплексной плоскости число $z=2-3i$ (рис. 2).

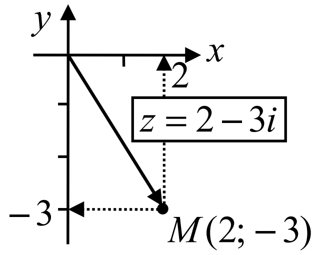


Рис. 2. *Отображение комплексного числа* $z=2-3i$ *на комплексной плоскости.*

Если перейти от декартовой системы координат к полярной системе отсчёта, т.е. $\boxed{\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}}$ ($\rho\ge0,\varphi\in[0;2\pi]$ или $\boxed{-\pi<\varphi\le\pi}$), то комплексное число $\boxed{z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$. Полученная форма записи комплексного числа называется ***тригонометрической***. Обратный переход от полярной системы отсчёта к декартовой системе координат осуществляется по формулам: $\boxed{\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)\end{cases}}$, при этом $\boxed{\rho=|z|}$ называется ***модулем***, а $\boxed{\varphi=\arg z=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ – ***аргументом*** комплексного числа z, который определяется с точностью до слагаемого $2\pi k,\ k\in Z$.

○ Аргумент комплексного числа $z=x+iy$ определяется в зависимости от знаков действительной и мнимой частей:

$$\boxed{\varphi = \begin{cases} \pi \operatorname{sgn} y + arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), & x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y, & x = 0 \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0 \end{cases}},$$

где функция знака $\boxed{\operatorname{sgn} y = \begin{cases} -1, & y < 0 \\ 0, & y = 0 \\ +1, & y > 0 \end{cases}}$.

Известно, что дифференцируемую функцию можно представить по ***формуле Тейлора-Маклорена*** (см. *п.1*, **Лекция № 21**), например,

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots}; \quad \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots};$$

$$\boxed{e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \cos x + i \sin x}.$$

Последняя формула называется ***формулой Эйлера***. Используя эту формулу, запишем комплексное число $z = x + iy$ в ***показательной*** *форме*: $\boxed{z = \rho e^{i\varphi}}$. Отсюда видно: произведение и отношение комплексных чисел равны:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}};$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}}.$$

26.2. *Действия над комплексными числами*

1. Для того чтобы *сложить* (*найти разность*) два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, надо *сложить* (*найти разность*) отдельно действительные и мнимые части, т.е.

$$\boxed{z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)}.$$

Пример 4. Найти сумму и разность чисел $z_1 = 1 + 3i$ и $z_2 = 2 - 2i$. Изобразить все числа на комплексной плоскости.
Найдём сумму заданных комплексных чисел $z_3 = z_1 + z_2 = 3 + i$. Вычислим разность данных чисел $z_4 = z_1 - z_2 = -1 + i5$. Изобразим заданные и полученные числа на комплексной плоскости (рис. 3):

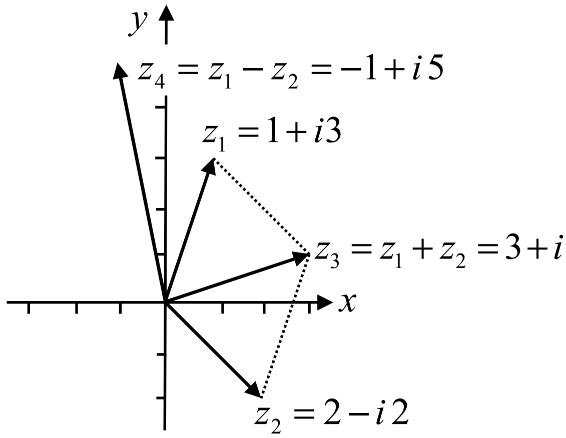


Рис. 3. *Отображение комплексных чисел на комплексной плоскости.*

Отметим, что $\boxed{z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z = 2x}$, а $\boxed{z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\, z = 2y}$.

Сложение комплексных чисел обладает переместительным (коммутативным)

$$\boxed{z_1 + z_2 = z_2 + z_1}$$

и сочетательным (ассоциативным)

$$\boxed{(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)}$$

свойствами.

2. Для того чтобы найти *произведение* двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ и } z_2 = x_2 + iy_2,$$

надо их перемножить, как два выражения с учётом того, что $i^2 = -1$:

$$\boxed{z_3 = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)}.$$

Произведение комплексных чисел обладает *переместительным* (*коммутативным*)

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1},$$

сочетательным (*ассоциативным*)

$$\boxed{(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)}$$

и *распределительным* (*дистрибутивным*)

$$\boxed{(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3}$$

свойствами.

Отметим, что $\boxed{z \cdot \bar{z} = |\,z\,|^2 = x^2 + y^2}$.

Модуль разности двух комплексных чисел определяет расстояние между точками на комплексной плоскости:

$$\boxed{|\,z_2 - z_1\,| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d}.$$

Произведение комплексных чисел в тригонометрической форме записи имеет вид

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cdot (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)) =$$
$$= \rho_1 \rho_2 \,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Из полученной формулы видно, что модули комплексных чисел перемножаются, а аргументы складываются. Следовательно, n-ая степень любого комплексного числа будет иметь вид

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))}.$$

При умножении комплексных чисел и возведении комплексного числа в степень используют степени мнимой единицы: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$; $i^7 = -i$ …, т. е. при любом целом k выполняются равенства: $\boxed{i^{4k} = 1}$; $\boxed{i^{4k+1} = i}$; $\boxed{i^{4k+2} = -1}$; $\boxed{i^{4k+3} = -i}$.

При извлечении корня n-ой степени применяют ***<u>формулу Муавра</u>***

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right]},$$

где величина $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

<u>3</u>. *Деление* комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексное число $z_2 = x_2 + i\,y_2$ ($z_2 \neq 0 + i\,0$) осуществляется по формуле

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме записи имеет вид: $\boxed{z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$, т.е. при делении комплексных чисел берут отношение модулей этих чисел, а из аргумента первого числа вычитают аргумент второго комплексного числа.

<u>27</u> "Интегрирование рациональных дробей"

27.1. *Полиномы. Разложение полиномов на простые множители*

Напомним, что полиномом n-ой степени называется выражение вида $\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$, где числа a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, $a_0 \in R; n \in N$, а переменная величина x может принимать как действительные, так и комплексные значения. Если два полинома тождественно равны между собой, то равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. Например, при тождественном равенстве полиномов $\boxed{Ax^3 + Bx^2 + Dx + E \equiv -x^3 + 3x^2 - 4}$ коэффициенты полинома, стоящего слева от знака тождественного равенства ($\equiv$), должны быть равны коэффициентам при соответствующих степенях x полинома, стоящего справа от знака равенства, т.е.

$$\begin{cases} x^3: A=-1 \\ x^2: B=3 \\ x\ \ : D=0 \\ x^0: E=-4 \end{cases}.$$

Теорема 1 (*теорема Безу*)**.** Если полином степени n разделить на выражение $(x-x_0)$, то остаток деления будет равен $P_n(x_0)$.

Док-во: Пусть $P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x)+R$, где R – остаток деления. Полагая $x=x_0$, получим $P_n(x_0)=R$, следовательно,

$$P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x)+P_n(x_0).$$

Если x_0 является *корнем уравнения* $P_n(x)=0$, то *остаток деления равен нулю*, т.е. $P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x)$.

Теорема 2 (*теорема Гаусса*)**.** Любой полином степени n имеет хотя бы один корень z (действительный или комплексный).

Теорема 3 (*о разложении полинома на простые множители*)**.** Любой полином степени n можно представить в виде произведения коэффициента при старшей степени a_n полинома на n сомножителей вида $(z-z_n)$, где z_n – корни уравнения $P_n(z)=0$, т.е.

$$\boxed{P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_2z^2+a_1z+a_0=a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)}.$$

Док-во: Воспользуемся следствием из ***теоремы Безу***

$$P_n(z)=(z-z_1)P_{n-1}(z).$$

Поступая аналогично, найдём, что

$$P_{n-1}(z)=(z-z_2)P_{n-2}(z),\ \dots\ ,\ P_2(z)=(z-z_{n-1})P_1(z),\ P_1(z)=(z-z_n)a_n.$$

Пример 1. Разложить на простые множители полином $2x^2-3x-2$. Найдём корни уравнения $2x^2-3x-2=0$. Дискриминант квадратного уравнения $D=25>0$, следовательно, $x_1=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3+5}{4}=2$. Таким образом, разложение полинома на простые множители имеет вид:

$$2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2).$$

Теорема 4. Если число z_1 является комплексным корнем полинома $P_n(z)$, то комплексно-сопряжённое число $\overline{z_1}$ также является корнем этого полинома.

Пример 2. Найти корни полинома $x^2+3x+6{,}25$.

Найдём корни уравнения $x^2+3x+6{,}25=0$. Дискриминант уравнения

$D=-16<0$, следовательно, $z_1=\dfrac{-3-i4}{2}$; $z_2=\dfrac{-3+i4}{2}$. Отсюда видно, что $z_2=\overline{z_1}$.

○ Из данного примера видно, что *комплексно-сопряжённые корни представляются в разложении полинома на простые сомножители* ***в виде квадратных многочленов вида*** $x^2+p_ix+q_i$ ***с отрицательными дискриминантами*** $D_i=p_i^2-4q_i<0$. ○

Если корень x_i повторяется в разложении полинома на простые сомножители α_i раз, то он называется ***кратным корнем*** или ***корнем кратности*** α_i.

○ В разложении полинома на простые множители кратные вещественные корни представлены скобками вида $(x-x_i)^{\alpha_i}$, а кратные комплексно-сопряжённые корни – скобками вида $(x^2+p_ix+q_i)^{\beta_i}$. В общем случае разложение полинома $P_n(x)$ на простые множители имеет вид:

$$\boxed{P_n(x)=a_n\,(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}...(x-x_n)^{\alpha_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}...(x^2+p_kx+q_k)^{\beta_k}},$$

причём

$$\boxed{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n+2(\beta_1+\beta_2+...+\beta_k)=n},$$

а некоторые из кратностей могут равняться единице (например, все кратности равны 1). ○

Пример 3. Разложить на простые множители полином x^2+2x+1.
Полином представляет собой полный квадрат, поэтому после сворачивания он принимает вид $x^2+2x+1=(x+1)^2$, т.е. корень $x=-1$ является корнем кратности 2.

27.2. *Интегрирование рациональных дробей. Метод неопределённых коэффициентов Лагранжа*

Отношение двух полиномов $\boxed{\dfrac{P_n(x)}{G_m(x)},\ (G_m(x)\neq 0)}$ называется ***рациональной дробью***. Если $\boxed{n<m}$, то дробь называется ***правильной***, а в случае, когда $\boxed{n\geq m}$ – ***неправильной*** (см. п. 0.3, ***<u>0</u>***).

Интегрирование рациональных дробей проводится по следующей методической схеме: *если рациональная дробь* ***неправильная***, *то выделяют* “*целую*” *часть*, *которая легко интегрируется* (интегралы от “*целой*” части являются табличными (см. в таблице неопределённых интегралов интегрирование степенной функции, п. 24.3*,* ***<u>24</u>***)) *и правильную рациональную дробь*, *интегрирование которой проводится* *следующим образом* (покажем ***схему*** на конкретном примере):

Пример 4. Вычислить $\int \frac{2x^2-3x+1}{(x^2-5x+6)(x^2+1)}\,dx$.

1). *Знаменатель **правильной рациональной дроби** раскладывают на простые множители.*

В данном примере надо разложить на простые сомножители полином x^2-5x+6. По теореме Виета корнями уравнения $x^2-5x+6=0$ будут $x_1=2$; $x_2=3$, следовательно, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Полином x^2+1 имеет комплексные корни, поэтому он является простым сомножителем.

2). ***Правильная рациональная дробь** раскладывается на сумму простых дробей, число которых равно числу простых сомножителей в разложении знаменателя дроби на простые множители*

$\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}=$(знаменатель дроби имеет ***три*** простых сомножителя, следовательно, будет ***три*** простых дроби)

$$=\underline{\qquad\quad}+\underline{\qquad\quad}+\underline{\qquad\quad}.$$

3). *В знаменатели простых дробей пишут один из простых сомножителей знаменателя правильной рациональной дроби*:

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}=\frac{}{x-2}+\frac{}{x-3}+\frac{}{x^2+1}.$$

4). *В числитель простой дроби пишут полином с неизвестными коэффициентами, степень которого на единицу ниже, чем степень полинома, стоящего в знаменателе простой дроби*

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

В случае кратных корней количество простых дробей определяется кратностью корня, причём в знаменатели простых дробей записывается кратный корень с увеличением его степени на единицу, пока не будет достигнута кратность корня. Степень полинома для всех этих дробей, который записывается в числитель простой дроби, определяется по первой степени кратного корня. Например,

$$\frac{2x+7}{(x-4)^5}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{D}{(x-4)^3}+\frac{E}{(x-4)^4}+\frac{F}{(x-4)^5}.$$

Литеру C *использовать не рекомендуется, так как она задействована в роли постоянной интегрирования.*

5). *Сумма простых дробей приводится к общему знаменателю и числитель получившейся дроби приравнивается к числителю исходной дроби*

$$A(x-3)(x^2+1)+B(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)(x-3)=2x^2-3x+1$$

$$A(x^3-3x^2+x-3)+B(x^3-2x^2+x-2)+D(x^3-5x^2+6x)+E(x^2-5x+6)=2x^2-3x+1,$$

(после раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем)

$$(A+B+D)x^3+(-3A-2B-5D+E)x^2+(A+B+6D-5E)x+(-3A-2B+6E)=2x^2-3x+1.$$

6). *Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной величины* x *в левой и правой частях равенства, получают систему линейных алгебраических уравнений* (*СЛАУ*, см. п. 3.1, **<u>*3*</u>**) *относительно неизвестных коэффициентов* A, B, D, …:

$$\begin{cases} x^3: \quad A+B+D=0 \\ x^2: -3A-2B-5D+E=2 \\ x\ : \quad A+B+6D-5E=-3 \\ x^0: -3A-2B+6E=1 \end{cases}.$$

○ Если разложение полинома, стоящего в знаменателе дроби, на простые множители содержит не кратные действительные корни, то процедура отыскания неопределённых коэффициентов упрощается путём подстановки в левую и правую части полученного равенства значений корней (***<u>метод частных значений</u>***), например,

$$A(x-3)(x-2)+B(x+1)(x-2)+D(x-3)(x+1)=3x^2-4x+5;$$

$$\begin{cases} x=-1: 12A=12 \Rightarrow A=1 \\ x=3\ :\ 4B=20 \Rightarrow B=5 \\ x=2\ : -3D=15 \Rightarrow D=-5 \end{cases}. \ ○$$

7). *Решают СЛАУ и находят числовые значения неизвестных коэффициентов* A, B, D, …: $A=-\dfrac{3}{4}$, $B=\dfrac{43}{40}$, $D=-\dfrac{13}{40}$, $E=\dfrac{11}{40}$.

8). *Числовые значения неопределённых коэффициентов подставляют в разложение правильной рациональной дроби на простые дроби* (п. **4**) данной схемы)

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x-2)(x-3)(x^2+1)}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{43}{40}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{40}\,\frac{13x-11}{x^2+1}.$$

9). *Полученное разложение рациональной дроби на простые дроби интегрируется*

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{(x^2-5x+6)(x^2+1)}\,dx=-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{43}{40}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{40}\int\frac{13x-11}{x^2+1}\,dx.$$

Пример 6. Вычислить $\int \frac{3x^5-15x^3+7}{x^3+2x^2}\,dx$.

Подинтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому выделим “*целую*” часть и правильную рациональную дробь:

$$\frac{3x^5-15x^3+7}{x^3+2x^2}=3x^2-6x-3+\frac{6x^2+7}{x^3+2x^2}.$$

Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на простые множители, представим эту дробь в виде суммы простых дробей:

$$\frac{6x^2+7}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x+2}.$$

Приводя сумму простых дробей к общему знаменателю и приравнивая числитель получившейся дроби к числителю исходной дроби, получим после раскрытия скобок и приведения подобных членов: $A(x^2+2x)+$ $+B(x+2)+Dx^2=6x^2+7$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем *СЛАУ*:

$$\begin{cases} x^2:\ A+D=6 \\ x\ :\ 2A+B=0 \\ x^0:\ 2B=7 \end{cases} \Rightarrow \quad A=-\frac{7}{4};\quad B=\frac{7}{2};\quad D=\frac{31}{4}.$$

Таким образом, подинтегральную функцию можно представить в виде:

$$\frac{3x^5-15x^3+7}{x^3+2x^2}=3x^2-6x-3-\frac{7}{4}\frac{1}{x}+\frac{7}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{31}{4}\frac{1}{x+2}.$$

Проинтегрируем полученное выражение

$$\int\frac{3x^5-15x^3+7}{x^3+2x^2}\,dx=3\int x^2dx-6\int x\,dx-3\int dx-\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{31}{4}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=x^3-3x^2-3x-\frac{7}{4}\ln|\,x\,|-\frac{7}{2x}+\frac{31}{4}\ln|\,x+2\,|+C.$$

27.3. *Интегрирование элементарных дробей*

При интегрировании рациональных дробей возникают интегралы вида $\boxed{\int\frac{dx}{(x\pm a)^m}}$ и $\boxed{\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx}$ с квадратичным полиномом, имеющим отрицательный дискриминант ($D=p^2-4q<0$).

Интегралы первого вида $\int\frac{dx}{(x\pm a)^m}$ путём замены $\boxed{\begin{Vmatrix} t=x\pm a \\ dt=dx \end{Vmatrix}}$ сводятся к табличным интегралам $\int \frac{dt}{t^m} = \begin{cases} -\frac{1}{(m-1)t^{m-1}}, & m \neq 1 \\ \ln|t|, & m = 1 \end{cases}$.

Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ вычисляют с помощью замены

$$\boxed{\left\| \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x^2+px+q)' = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx \end{array} \right\|},$$

которая при $n=1$ приводит к интегралу $\int \frac{Mt+K}{t^2+\frac{|D|}{4}}\,dt$, где $K = N - \frac{Mp}{2}$.

Использование метода тождественных преобразований подинтегральной функции позволяет записать этот интеграл в виде:

$$\int \frac{Mt+K}{t^2+\frac{|D|}{4}}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{|D|}{4}} + K\int \frac{dt}{t^2+\frac{|D|}{4}} = M\left| \begin{array}{ll} u = t^2 + \frac{|D|}{4} & du = 2t\,dt \\ t\,dt = \frac{du}{2} & \end{array} \right| +$$

$$+\frac{2K}{|D|} arctg\left(\frac{2t}{|D|}\right) = \frac{M}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{2K}{|D|} arctg\left(\frac{2t}{|D|}\right) = \frac{M}{2}\ln|u| + \frac{2K}{|D|} arctg\left(\frac{2t}{|D|}\right) + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2K}{|D|} arctg\left(\frac{2x+p}{|D|}\right) + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ $(n>1)$ рассмотрены в ***Примере 17***, п. 25.3, **25**.

Пример 7. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Воспользуемся вышеуказанной заменой переменной интегрирования

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+4x+8} = \left| \begin{array}{ll} t = \frac{1}{2}(x^2+4x+8)' = x+2 & \\ x = t-2 & dx = dt \\ 2x+5 = 2t+1 & \\ x^2+4x+8 = t^2+4 & \end{array} \right| = \int \frac{(2t+1)\,dt}{t^2+4} = \int \frac{2t\,dt}{t^2+4} + \int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = t^2+4 \\ du = 2t\,dt \end{array} \right| + \frac{1}{2} arctg\left(\frac{t}{2}\right) = \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} arctg\left(\frac{t}{2}\right) = \ln|u| + \frac{1}{2} arctg\left(\frac{t}{2}\right) + C =$$

$$= \ln\left|x^2+4x+8\right| + \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C.$$

<u>*28*</u> "*Интегрирование тригонометрических функций*"

28.1. *Универсальная тригонометрическая подстановка*

При вычислении неопределённых интегралов от рациональных функций, <u>*зависящих только от тригонометрических функций*</u>, т.е. интегралов вида $\boxed{\int R(\sin(ax);\cos(ax))dx}$, применяют *универсальную тригонометрическую подстановку*. Её использование обосновано формулами, которые связывают синус и косинус (аргумент ax) с тангенсом половинного аргумента ($ax/2$):

$$\boxed{\sin(ax)=\frac{2\sin\left(\frac{ax}{2}\right)\cos\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{ax}{2}\right)}=\frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{ax}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{ax}{2}\right)}};$$

$$\boxed{\cos(ax)=\frac{\cos^2\left(\frac{ax}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{ax}{2}\right)}=\frac{1-tg^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{ax}{2}\right)}},$$

где угол $-\frac{\pi}{2}<\frac{ax}{2}<\frac{\pi}{2}$. Таким образом, при вычислении интегралов вида $\boxed{\int R(\sin(ax);\cos(ax))dx}$ применяют *универсальную тригонометрическую подстановку*

$$\boxed{\begin{array}{c} t=tg\left(\frac{ax}{2}\right); \\ x=\frac{2}{a}arctg(t);\quad dx=\frac{2}{a}\cdot\frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin(ax)=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos(ax)=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{array}}$$

Из этих формул видно, что вне зависимости от величины параметра a формулы носят *универсальный* характер.

Пример 1. Вычислить $\int\frac{dx}{\sin(2x)+\cos(2x)}$.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой

$$\int\frac{dx}{\sin(2x)+\cos(2x)}=\left|\begin{array}{l} t=tg\left(\frac{2x}{2}\right);\ x=arctgt;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2} \\ \sin(2x)=\frac{2t}{1+t^2};\quad \cos(2x)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{2t+1-t^2}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t^2-2t-1}=-\left|\begin{matrix} y=\frac{1}{2}(t^2-2t-1)'=t-1 & \\ t=y+1 & dt=dy \\ t^2-2t-1=y^2-2 & \end{matrix}\right|=-\int\frac{dy}{y^2-2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-3}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx-3}{tgx+1}\right|+C.$$

Отметим, что *универсальную тригонометрическую подстановку* ***следует применять не во всех случаях***. Для некоторых типов интегралов от тригонометрических функций, которые будут рассмотрены ниже, существуют более простые способы вычисления:

а) если $\boxed{R(-\sin(ax);\cos(ax))=-R(\sin(ax);\cos(ax))}$, то применяют подстановку $\boxed{\cos(ax)=t}$;

б) если $\boxed{R(\sin(ax);-\cos(ax))=-R(\sin(ax);\cos(ax))}$, то применяют подстановку $\boxed{\sin(ax)=t}$;

в) если $\boxed{R(-\sin(ax);-\cos(ax))=R(\sin(ax);\cos(ax))}$, то применяют подстановку $\boxed{tg(ax)=t}$ (или $\boxed{ctg(ax)=t}$).

28.2. *Интегралы вида* $\boxed{\int\sin^m(ax)\cos^n(ax)\,dx}$ ($\boxed{m}$ и $\boxed{n}$ – *целые числа*)

а) *Если хотя бы одно из чисел* m или n является <u>*нечётным*</u> <u>*целым*</u> *числом*, то *от* <u>*нечётной*</u> *степени отделяют один множитель, а оставшуюся* <u>*чётную*</u> *часть выражают через другую тригонометрическую функцию с помощью основного тригонометрического тождества*

$$\boxed{\sin^2(ax)+\cos^2(ax)=1},$$

при этом надо помнить, что

$$\boxed{\sin(ax)\,dx=-\frac{d(\cos(ax))}{a}};\ \boxed{\cos(ax)\,dx=\frac{d(\sin(ax))}{a}}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}dx$.

Согласно изложенному способу вычисления, получим

$$\int\frac{\sin^3x}{\cos^4x}dx=\int\frac{\sin^2x\,\sin x}{\cos^4x}dx=\int\frac{(1-\cos^2x)\sin x\,dx}{\cos^4x}=\left|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \\ \sin x\,dx=-dt\end{matrix}\right|=-\int\frac{(1-t^2)\,dt}{t^4}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t^4}+\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C=\frac{1}{3\cos^3x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{dx}{\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{1-\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| + C = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C .$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Применим *универсальную тригонометрическую подстановку*:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = tg\left(\frac{x}{2}\right),\ x = 2\, arctg\, t \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},\ \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C .$$

б). Если m и n являются *чётными* *неотрицательными* *целыми* *числами*, то используют *тригонометрические формулы понижения степени*:

$$\boxed{\cos^2(ax) = \frac{1}{2}[1+\cos(2ax)]};\ \boxed{\sin^2(ax) = \frac{1}{2}[1-\cos(2ax)]};$$

$$\boxed{\sin(ax)\cos(ax) = \frac{1}{2}[\sin(2ax)]}.$$

и *формулы подобия* (свойство **5.**, п. 24.2, ***24***):

$$\boxed{\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C};\ \boxed{\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C};\ \boxed{\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C}, \ldots$$

Пример 5. Вычислить $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos(4x))\,dx = \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos(4x)\,dx\right) = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right) + C .$$

в). Если m и n являются *чётными* *целыми* *числами*, *причём* *хотя бы одно из них* *является* *отрицательным* *числом*, то *используют замену* $\boxed{tg\,(ax) = t}$ (или $\boxed{ctg\,(ax) = t}$).

Пример 6. Найти $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^6 x}$.

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x \cdot 1\ dx}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)\ dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x \cdot (1 + tg^2 x) \cdot d(tgx) = \left| \begin{matrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx) \end{matrix} \right| =$$

$$= \int t^2 \cdot (1 + t^2) \cdot dt = \int t^2 dt + \int t^4 dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

28.3. *Интегралы* $\boxed{\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx}$, $\boxed{\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx}$, $\boxed{\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx}$

При вычислении таких интегралов используют формулы:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right]};$$

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]};$$

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]}$$

и *формулы подобия* (см. выше).

Пример 7. Вычислить $\int \sin(\overset{\alpha}{2x})\cos(\overset{\beta}{3x})dx$.

Так как $\alpha = 2x$ и $\beta = 3x$ (обратите внимание на тот факт, что величина α всегда определяется по синусу при наличии косинуса), то

$$\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin(-x) + \sin(5x))dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin(5x)dx - \int \sin x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(5x)}{5} + \cos x\right) + C.$$

Пример 8. Вычислить $\int \sin(2x)\sin(4x)dx$.

$$\int \sin(2x)\sin(4x)dx = \frac{1}{2}\int (\cos(2x) - \cos(6x))dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos(2x)\,dx - \int \cos(6x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(6x)}{6}\right) + C.$$

28.4. *Интегралы вида* $\boxed{\int tg^m x\ \sec^{2n} x\,dx}$ *и* $\boxed{\int ctg^m x\ co\sec^{2n} x\,dx}$

($\boxed{m}$ и $\boxed{n}$ – ***целые положительные числа***)

Напомним, что

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}},\ \boxed{co\sec x = \frac{1}{\sin x}},\ \boxed{tgx = \frac{\sin x}{\cos x}},\ \boxed{ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}}.$$

При интегрировании используются формулы

$$\boxed{1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2\alpha};\ \boxed{1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{cosec}^2\alpha},$$

при этом надо помнить, что

$$\boxed{\sec^2 x\,dx=d(tgx)} \text{ и } \boxed{\operatorname{cosec}^2 x\,dx=-d(ctgx)}.$$

Пример 9. Вычислить $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int tg^4x\sec^4 x\,dx=\int tg^4x\sec^2 x\sec^2 x\,dx=$$

$$=\int tg^4x\left(1+tg^2x\right)\sec^2 x\,dx=\left|\begin{matrix}t=tgx\\ dt=\sec^2 x\,dx\end{matrix}\right|=\int t^4\left(1+t^2\right)dt=\int t^4\,dt+\int t^6\,dt=$$

$$=\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{tg^5x}{5}+\frac{tg^7x}{7}+C.$$

Частными случаями рассмотренных интегралов являются интегралы вида $\boxed{\int tg^m x\,dx}$ и $\boxed{\int ctg^m x\,dx}$ $(m>1)$. Такие интегралы вычисляются *путём отделения квадрата подинтегральной функции и использованием приведенных формул*, или применением замены

$$\boxed{t=tgx} \text{ (или } \boxed{t=ctgx}\text{)}.$$

Пример 10. Вычислить $\int ctg^3x\,dx$.

$$\int ctg^3x\,dx=\int ctgx\,ctg^2x\,dx=\int ctgx\left(1+\operatorname{cosec}^2 x\right)dx=\int ctgx\,dx+\int ctgx\operatorname{cosec}^2 x\,dx=$$

$$=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx+\left|\begin{matrix}t=ctgx\quad dt=-\operatorname{cosec}^2 x\,dx\\ \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-dt\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}y=\sin x\\ dy=\cos x\,dx\end{matrix}\right|-\int t\,dt=\int\frac{dy}{y}-\frac{t^2}{2}=$$

$$=\ln|y|-\frac{t^2}{2}+C=\ln|\sin x|-\frac{ctg^2x}{2}+C.$$

Пример 10а. Найти $\int ctg^3x\,dx$.

$$\int ctg^3x\,dx=\left|\begin{matrix}t=ctgx;\ x=arcctgt\\ dx=-\dfrac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=-\int\frac{t^3\,dt}{1+t^2}=-\int\frac{t^2\,tdt}{1+t^2}=\left|\begin{matrix}y=1+t^2;\ t^2=y-1\\ tdt=\dfrac{1}{2}dy\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{y-1}{y}dy=-\frac{1}{2}\left(\int dy-\int\frac{dy}{y}\right)=-\frac{1}{2}(y-\ln|y|)+C=-\frac{1}{2}(1+t^2-\ln|1+t^2|)+C=$$

$$=-\frac{1}{2}(1+ctg^2x-\ln|1+ctg^2x|)+C=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+2\ln|\sin x|\right)+C.$$

28.5. *Интегралы вида* $\boxed{\int \sec^{2n+1} x\,dx}$ *и* $\boxed{\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx}$ ($\boxed{n}$ – *целое положительное число*)

Такие интегралы вычисляются методом интегрирования по частям с использованием *рекуррентных* формул. Например,

$$I_{2n+1} = \int \sec^{2n+1} x\,dx = \int \underbrace{\sec^{2n-1} x}_{U}\,\underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dV} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} U = \sec^{2n-1} x & dV = \sec^2 x\; dx \\ dU = (2n-1)\sec^{2n-1} x\, tgx\, dx & V = tgx \end{array} \right| =$$

$$= tgx \sec^{2n-1} x - (2n-1)\int \sec^{2n-1} x\, tg^2 x\, dx =$$

$$= tgx \sec^{2n-1} x - (2n-1)\int \sec^{2n-1} x\,(\sec^2 x - 1)dx =$$

$$= tgx \sec^{2n-1} x - (2n-1)\int \sec^{2n+1} x\; dx + (2n-1)\int \sec^{2n-1} x\, dx =$$

$$= tgx \sec^{2n-1} x - (2n-1)I_{2n+1} + (2n-1)I_{2n-1}.$$

Решая это равенство относительно величины I_{2n+1}, получаем

$$\boxed{I_{2n+1} = \frac{tgx \sec^{2n-1} x + (2n-1)I_{2n-1}}{2n}}.$$

Соотношения полученного типа называются ***рекуррентными***.

Рекуррентные соотношения позволяют по установленному значению интеграла более низкого порядка вычислять значения интеграла более высокого порядка. Аналогично полученному *рекуррентному* соотношению получают формулу для вычисления $\boxed{\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx}$.

Пример 11. Вычислить $\int \cos^{-3} x\,dx$.

Согласно *рекуррентному* соотношению, получаем:

$$I_3 = \int \cos^{-3} x\,dx = \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2} tgx\; \sec x + \frac{1}{2} I_1 .$$

Интеграл I_1 вычислен в ***Пример 3***, поэтому окончательный ответ имеет вид $I_3 = \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2} tgx\; \sec x + \frac{1}{2} \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

<u>29</u> "*Интегрирование некоторых иррациональных функций*"

29.1. *Интегралы вида* $\boxed{\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}\right)dx}$ $(ad - bc \neq 0)$

Интегралы такого типа вычисляются по следующей ***схеме***:

– у дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{k}{l}$ находят наименьший общий знаменатель, который обозначим через λ;

– проводят замену $\boxed{\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^{\lambda}}$.

В результате приведенных действий данный интеграл переходит в неопределённый интеграл от рациональной функции.

Частным случаем дробно-линейной иррациональности является линейная иррациональность, когда коэффициенты $c=0$ и $d=1$.

Пример 1. Вычислить $\int \dfrac{dx}{\underline{\sqrt{x+1}}\,(\underline{\underline{\sqrt[3]{x+1}}}+1)}$.

В данном примере $\underline{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \dfrac{m}{n}=\dfrac{1}{2}$; $\underline{\underline{\sqrt[3]{x+1}}} \Leftrightarrow \dfrac{k}{l}=\dfrac{1}{3}$, ($\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$), следовательно, наименьший общий знаменатель этих дробей равен **6**. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}\,(\sqrt[3]{x+1}+1)} = \left| \begin{array}{l} x+1=t^6 \Rightarrow x=t^6-1 \\ t=\sqrt[6]{x+1} \qquad dx=6t^5dt \\ \sqrt{x+1}=t^3;\ \sqrt[3]{x+1}=t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3(t^2+1)} = 6\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} =$$

$$= 6\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt = 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 6\,(t - arctg\ t) + C =$$

$$= 6\left(\sqrt[6]{x+1} - arctg\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right) + C.$$

29.2. *Интегралы вида* $\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$

Интегралы такого вида путём замены

$$\boxed{t=\frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)' = ax+\frac{b}{2} \Rightarrow x=\frac{2t-b}{2a}}$$

приводятся к одному из интегралов вида:

<u>**А.**</u> $\boxed{\int R\left(t,\ \sqrt{\alpha^2-t^2}\right)dt}$; <u>**Б.**</u> $\boxed{\int R\left(t,\ \sqrt{t^2-\alpha^2}\right)dt}$; <u>**В.**</u> $\boxed{\int R\left(t,\ \sqrt{\alpha^2+t^2}\right)dt}$.

Для вычисления этих интегралов применяют следующие тригонометрические замены

<u>**А.**</u> $\boxed{t=\alpha\sin z}$; <u>**Б.**</u> $\boxed{t=\dfrac{\alpha}{\sin z}}$; <u>**В.**</u> $\boxed{t=\alpha\ tg z}$,

которые позволяют избавиться от квадратного корня.

Пример 2. Вычислить $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Данный интеграл соответствует интегралам типа <u>**А**</u>, поэтому

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin z,\;\; z=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)\\ dx=2\cos z\,dz\end{array}\right|=\int 4\sin^2 z\sqrt{4-4\sin^2 z}\,2\cos z\,dz=$$

$=16\int \sin^2 z\cos^2 z\,dz=$(вычислен в ***Примере 5***, п. 28.2, ***28***)=

$$=2\left(z-\frac{\sin(4z)}{4}\right)+C=2\left(z-\frac{2\sin(2z)\cos(2z)}{4}\right)+C=2z-\sin(2z)\sqrt{1-\sin^2(2z)}+C=$$

$$=2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\cdot\sqrt{1-x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}+C.$$

Пример 3. Вычислить $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}(x^2+2x+3)'=x+1\\ x=t-1\qquad dt=dx\\ x^2+2x+3=t^2+2\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{2}\,tg\,z\\ dt=\sqrt{2}\dfrac{dz}{\cos^2 z}\end{array}\right|=\int\frac{dz}{\cos z}=$$

=(интеграл вычислен в ***Примере 3***, п. 28.2, ***28***)=

$$=\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Пример 4. Вычислить $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}=\left|\begin{array}{ll} x=\dfrac{4}{\sin z} & z=\arcsin\left(\dfrac{4}{x}\right)\\ dx=-4\dfrac{\cos z\,dz}{\sin^2 z} & \end{array}\right|=-\frac{1}{4}\int dz=\frac{1}{4}z+C=\frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4}{x}\right)+C.$$

Пример 5. Вычислить $\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\underline{x^2+2x+5}}}=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}(\underline{x^2+2x+5})'=x+1\\ x=t-1,\; dt=dx,\;\; x^2+2x+5=t^2+4\end{array}\right|=\int\frac{(t-1)dt}{\sqrt{t^2+4}}=\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4}}-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=t^2+4\quad du=2t\,dt\\ t\,dt=\dfrac{du}{2}\end{array}\right|-\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{u}}-\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|=\sqrt{u}-\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

Пример 6. Вычислить $\int\dfrac{dx}{\sqrt{25+x^2}}$.

Данный интеграл соответствует интегралам типа **<u>В</u>**, поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 5tgz, \ \ z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{5}\right) \\ dx = 5\dfrac{dz}{\cos^2 z} \end{matrix} \right| = \int \frac{5\,dz}{\cos^2 z\sqrt{25+25tg^2 z}} = \int \frac{dz}{\cos z} =$$ (интеграл вычислен в ***Примере 3***, п. 28.2, ***<u>28</u>***)=

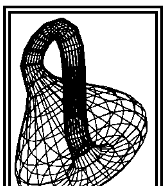
$$= \ln\left| tg\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left| tg\left(\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{5}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

29.3. *Понятие о неберущихся интегралах*

Интегралы, *первообразные* $F(x)$ которых *не выражаются через элементарные функции*, называются ***неберущимися***:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\ln x}; \ \int e^{-x^2}dx; \ \int \frac{\sin x}{x}dx; \ \int \frac{\cos x}{x}dx}.$$

Неберущиеся в элементарных функциях интегралы встречаются при решении целого ряда практических задач. Так ***<u>интеграл Пуассона</u>*** $\boxed{\int e^{-x^2}dx}$ встречается в теории вероятностей, при решении задач по диффузии, теплопроводности, электрическому разряду, росту агрегатов и т.д. Первообразная таких интегралов, которая представляет собой неэлементарную "специальную" функцию, может быть найдена с помощью степенных рядов (см. тему: ***Ряды***).



III

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 1

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. *Тождественные преобразования подинтегральной функции*

а) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int \left(14x^3+\frac{3}{1+x^2}\right)dx$.

2. *Метод замены переменной интегрирования*

а) $\int e^{2x}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; в) $\int \frac{arctg\,x+x}{1+x^2}dx$.

3. *Метод интегрирования по частям*

а) $\int \ln x\,dx$; б) $\int x\,e^{2x}\,dx$; в) $\int x\,arctgx\,dx$;

г) $\int x^2\cos x\,dx$; д) $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

4. *Интегрирование квадратичных полиномов*

а) $\int \frac{x+5}{3-4x-4x^2}dx$; б) $\int \frac{2-x}{\sqrt{9x^2+6x+13}}dx$.

5. *Метод интегрирования рациональных дробей*

а) $\int \frac{2x^3+1}{x^3-1}dx$; б) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-2)}dx$.

6. *Интегрирование тригонометрических функций*

а) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; б) $\int \cos^3(2x)dx$; в) $\int tg^5 x\,dx$;

г) $\int \sec^4 x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(4x)}$; е) $\int \sin(2x)\cos(3x)dx$;

ж) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

7. *Интегрирование некоторых иррациональных функций*

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; б) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$; г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

8. *Разные интегралы*

а) $\int\left(7x^2-2x+\frac{9}{x}\right)dx$; б) $\int \frac{6x+7}{x^2-4x+1}dx$; в) $\int \sec^4(2x)dx$;

г) $\int \frac{dx}{1+5\sin x+2\cos x}$; д) $\int \frac{\ln(3x+2)}{(3x+2)^3}dx$; е) $\int \sin^6(5x)dx$;

ж) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$; з) $\int \frac{3x-5}{x^2(x-1)}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант <u>2</u>

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int x^{-2}(1-x)^3\,dx$; б) $\int\left(5\sin x+\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int tg\,(5x)\,dx$; б) $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$; в) $\int\dfrac{e^x+e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int x^2\,e^{-\frac{x}{2}}\,dx$; б) $\int x\sin(5x)\,dx$; в) $\int x\,arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$;

г) $\int x\,\ln\left(x^2+3\right)dx$; д) $\int e^{2x}\cos x\,dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int\dfrac{2x-6}{x^2+5x+7}\,dx$; б) $\int\dfrac{3x+1}{\sqrt{8x-x^2-12}}\,dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int\dfrac{3x+5}{x^4+x^2}\,dx$; б) $\int\dfrac{x^3+5x-1}{x^3-1}\,dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int\dfrac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$; б) $\int\sin^6(3x)\,dx$; в) $\int ctg^3(2x)\,dx$; г) $\int\dfrac{dx}{\sin^3(2x)}$;

д) $\int\operatorname{cosec}^4 x\,dx$; е) $\int\sin(5x)\cos(3x)\,dx$; ж) $\int\dfrac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$; б) $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$; в) $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{16+x^2}}$; г) $\int\dfrac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x^4}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int(8x+9)8^{-x}\,dx$; б) $\int\left(5\cos x-e^x+\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$; в) $\int\dfrac{9-10x}{\sqrt{15-6x-x^2}}\,dx$;

г) $\int 5x\,4^{-x^2}\,dx$; д) $\int\cos(9x)\cos(11x)\,dx$; е) $\int\dfrac{\sqrt{9x^2-1}\,dx}{3x^2}$;

ж) $\int\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2-x}}\,dx$; з) $\int tg^3(3x-4)\,dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант **3**

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx$; б) $\int\frac{1-3x+7x^4}{x}dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int 2^{5x}\,dx$; б) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int\frac{\arcsin^2 x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int\arccos x\,dx$; б) $\int x^{-5}\ln x\,dx$; в) $\int x^2\,3^x\,dx$;

г) $\int arctgx\,dx$; д) $\int e^x\sin(2x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int\frac{x+2}{9x^2-6x+13}dx$; б) $\int\frac{1-x}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int\frac{x^3+3}{x^3-x^2-2x}dx$; б) $\int\frac{x+4}{x^2\left(x^2+1\right)}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int\sin^4(2x)\cos^2(2x)dx$; б) $\int\cos^5 x\,dx$; в) $\int tg^3(2x)dx$; г) $\int\sec^4(3x)dx$;

д) $\int\frac{dx}{\cos^3(2x)}$; е) $\int\cos(2x)\cos(3x)dx$; ж) $\int\frac{dx}{3+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}dx$; б) $\int\sqrt{1-4x^2}\,dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; г) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}\,dx}{x^2}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int\frac{8\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt{2x+1}}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+16x^2\right)^3}}$; в) $\int\sin^3 x\cos^5 x\,dx$;

г) $\int\frac{7x^4-5x+2}{x^3+x^2-2x}dx$; д) $\int\frac{dx}{\sin^3(3x-5)}$; е) $\int\frac{6x+7}{x^2-4x+1}dx$;

ж) $\int(7-x)\sin(9x)dx$; з) $\int\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант <u>4</u>

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. *Тождественные преобразования подинтегральной функции*

а) $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{15}{x^3}\right)dx$; б) $\int\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 dx$.

2. *Метод замены переменной интегрирования*

а) $\int ctg(3x)dx$; б) $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$; в) $\int\frac{3x-5arctg^2 x}{1+x^2}dx$.

3. *Метод интегрирования по частям*

а) $\int(4-3x)e^{-3x}dx$; б) $\int(x+5)\sin(3x)dx$; в) $\int\arcsin(4x)dx$;

г) $\int\frac{\ln(x+3)}{(x+3)^4}dx$; д) $\int e^{3x}\sin(2x)dx$.

4. *Интегрирование квадратичных полиномов*

а) $\int\frac{3x+1}{5-4x-2x^2}dx$; б) $\int\frac{4-x}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx$.

5. *Метод интегрирования рациональных дробей*

а) $\int\frac{x^3+1}{(x-2)(x-4)}dx$; б) $\int\frac{x+2}{x^4+16x^2}dx$.

6. *Интегрирование тригонометрических функций*

а) $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$; б) $\int\cos^4(3x)dx$; в) $\int ctg^3(2x)dx$; г) $\int\cos ec^4 x\,dx$;

д) $\int\frac{dx}{\cos^3(5x)}$; е) $\int\sin(3x)\cos x\,dx$; ж) $\int\frac{dx}{5+6\sin x}$.

7. *Интегрирование некоторых иррациональных функций*

а) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; б) $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; г) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

8. *Разные интегралы*

а) $\int\frac{7x^5}{x^3-64}dx$; б) $\int\frac{7x-15}{4x^2-2x+5}dx$; в) $\int\frac{6}{\sqrt{7x+11}}dx$;

г) $\int\frac{dx}{2+3\cos x+4\sin x}$; д) $\int\sin^5 x\,dx$; е) $\int\frac{10x^8-11x}{x^4}dx$;

ж) $\int\sqrt{1-121x^2}\,dx$; з) $\int x\,tg^2(3x)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 5

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$; б) $\int \left(\cos^{-2}x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int e^{5x}\,dx$; б) $\int \sqrt[3]{x^3-8}\,x^2\,dx$; в) $\int \frac{x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (3x+4)e^{3x}\,dx$; б) $\int (2x-5)\cos(4x)dx$; в) $\int arctg\left(\sqrt{8x-1}\right)dx$;

г) $\int \ln(x+3)dx$; д) $\int 5^x \sin x\,dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{3x+2}{x^2-6x+10}dx$; б) $\int \frac{x-2}{\sqrt{7-12x-4x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{x^5-12x^3+7}{x^3+2x^2}dx$; б) $\int \frac{2x+1}{x^3-4x}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^5 x\cos^2 x\,dx$; б) $\int \sin^4(3x)dx$; в) $\int tg^3(4x)dx$; г) $\int \sec^4(2x)dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sin^3(5x)}$; е) $\int \sin(3x)\sin(5x)dx$; ж) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$;

в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \frac{12x-1}{\sqrt{9-6x-x^2}}dx$; б) $\int \frac{7}{5-3x}dx$; в) $\int \cos ec^4(5x)dx$;

г) $\int \frac{15\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$; д) $\int \frac{3x^2+5}{\left(x^2-1\right)^2}dx$; е) $\int (3x-1)2^x\,dx$;

ж) $\int (9-5x)\sin(2x)dx$; з) $\int \left(5tg\,x-\frac{23}{7\cos^2 x}\right)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 6

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{11x-2}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int (5tg\,x + 3ctg\,x)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int 10^{2x-5}\,dx$; б) $\int x\sqrt{2x^2+7}\,dx$; в) $\int \frac{3\arcsin^4 x + 9x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (5-6x)e^{2x}\,dx$; б) $\int (4x+7)\cos(2x)dx$; в) $\int \arccos(3x-1)dx$;

г) $\int \frac{\ln(2x-9)}{(2x-9)}dx$; д) $\int 3^x \cos(5x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{4-3x}{10-6x+x^2}dx$; б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{7-12x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{5x^3-2x^2+9}{x(x+1)(x-3)}dx$; б) $\int \frac{x+1}{3x^4+6x^2}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^3(3x)\cos^2(3x)dx$; б) $\int \cos^4(2x-5)dx$; в) $\int ctg^4(5x)dx$;

г) $\int \cos ec^4 x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^3(4x+1)}$; е) $\int \cos(2x)\cos(5x)dx$;

ж) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{x^3}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}dx$; б) $\int \sqrt{36-x^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(64+x^2)^3}}$; г) $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \arccos(8x)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; в) $\int \sin^2(3x)\cos^4(3x)dx$;

г) $\int ctg^4(2x-1)dx$; д) $\int \sin(4x)\sin(3x)dx$; е) $\int \frac{\ln(x+2)}{(x+2)^2}dx$;

ж) $\int x^2\sqrt{9x^2-1}\,dx$; з) $\int \frac{x(1-2x^2)}{16+x^4}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 7

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int\left(\frac{11}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{\sqrt{x^3}}\right)dx$; б) $\int\left(2^x+x^{-1}+\frac{5}{\sqrt{x^2-7}}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int\cos(5x)dx$; б) $\int x^{-\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}\,dx$; в) $\int\frac{1+\sqrt{1+tg\,x}}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int(5x-2)e^{3x}\,dx$; б) $\int(4x-2)\cos(3x)dx$; в) $\int x\,arctg(2x)dx$;

г) $\int\ln(x-1)dx$; д) $\int 4^x\cos(5x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int\frac{7x+5}{9+6x-8x^2}dx$; б) $\int\frac{3x-8}{\sqrt{2x^2+4x+25}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int\frac{3x^2+6x+1}{(x^2+2)(x+1)^2}dx$; б) $\int\frac{x^3-1}{5x^3+x^2}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int\sin^5 x\cos^4 x\,dx$; б) $\int\sin^4(3x)dx$; в) $\int ctg^3(4x)dx$; г) $\int\cos ec^4 x\,dx$;

д) $\int\frac{dx}{\sin^3(2x)}$; е) $\int\cos(6x)\cos(7x)dx$; ж) $\int\frac{dx}{1-\cos x-\sin x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; б) $\int\frac{x^4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$;

в) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{36+x^2}}$; г) $\int\frac{\sqrt{x^2-4}\,dx}{x^4}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int x\,e^{3-2x^2}\,dx$; б) $\int\cos ec^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$; в) $\int\frac{3x-7}{1-16x-x^2}dx$;

г) $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; д) $\int(3x-2)\cos(2x)dx$; е) $\int\frac{x^3}{x^3+27}dx$;

ж) $\int\frac{5-9x}{x^3}dx$; з) $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 8

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{\left(x^2-2x\right)^2}{x^3}dx$; б) $\int \left(2^{x+2}+5\,tg\,x-4\sin x\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int \frac{\sin\left(x^{-1}\right)}{x^2}dx$; б) $\int x\,e^{-x^2}\,dx$; в) $\int \frac{x\,arctg\,x^2+x}{1+x^4}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (4x-3)e^{-2x}\,dx$; б) $\int (5x+17)\sin(4x)dx$; в) $\int 7x\,arctg(5x)dx$;

г) $\int x^3\ln(3x+2)dx$; д) $\int 4^x\cos(7x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{5-x}{6x^2+2x+5}dx$; б) $\int \frac{2+9x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{2x^2-x+8}{x(x+4)(x-2)}dx$; б) $\int \frac{3x^3+4}{\left(x^2+1\right)^2x}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^2(2x-1)\cos^3(2x-1)dx$; б) $\int \sin^4(3-x)dx$; в) $\int ctg^5x\,dx$;

г) $\int \sec^4(7x)dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(9x)}$; е) $\int \sin(9x)\cos(2x)dx$;

ж) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{7x-5}{\sqrt{2x+1}}dx$; б) $\int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$; в) $\int \sqrt{9+x^2}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \frac{dx}{\sin^3\left(\frac{4x}{7}\right)}$; б) $\int 4\arccos(5x)dx$; в) $\int \frac{\cos x\,dx}{2+\sin x+\cos x}$;

г) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; д) $\int \frac{2x}{(x+2)^2\left(x^2+16\right)}dx$; е) $\int x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}\,dx$;

ж) $\int \sqrt[7]{3-8x}\,dx$; з) $\int ctg^4(7x)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 9

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; б) $\int\left(-3\,tg\,x+\frac{6}{\cos^2 x}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int\frac{dx}{1-2x}$; б) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$; в) $\int\frac{1-2\cos x}{\sin^2 x}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int(2-x)e^{-3x}\,dx$; б) $\int x^2\cos(5x)dx$; в) $\int arctg\left(\sqrt{2x+1}\right)dx$;

г) $\int\ln\left(x^2+4\right)dx$; д) $\int x\,ctg^2 x\,dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int\frac{x+2}{5+2x-6x^2}dx$; б) $\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+8x-25}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int\frac{4x^2+3x+1}{\left(x^2+1\right)(x+2)^2}dx$; б) $\int\frac{x^3+8}{x^3+4x^2}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int\sin^4(2x)\cos^3(2x)dx$; б) $\int\cos^6 x\,dx$; в) $\int tg^3(5x)dx$;

г) $\int\sec^4(3x)dx$; д) $\int\frac{dx}{\sin^3(7x)}$; е) $\int\sin(2x)\sin(8x)dx$;

ж) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; б) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$; в) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(49+x^2\right)^3}}$; г) $\int\frac{\sqrt{x^2-121}\,dx}{x}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int\frac{2-7x}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx$; б) $\int\ln^2 x\,dx$; в) $\int(x+6)5^{-x}dx$;

г) $\int ctg^5 x\,dx$; д) $\int\frac{\sqrt{4x^2-1}\,dx}{5x}$; е) $\int\frac{\sin x}{\sqrt[6]{\cos x}}dx$;

ж) $\int\cos^5 x\,dx$; з) $\int\left(3^{x-1}-\frac{5}{7\left(1+x^2\right)}+\frac{4}{\sqrt{x^2-5}}\right)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 10

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int\left(2e^x+4x^2-\sqrt[5]{x^7}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{4}{x}-\frac{5}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int e^{3x}\,dx$; б) $\int\frac{7x^5}{x^{12}+4}dx$; в) $\int\frac{\arcsin^7 x+8}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int x\,2^x\,dx$; б) $\int x^2\cos x\,dx$; в) $\int\frac{arctg\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$;

г) $\int(x+1)^2\ln(x+1)dx$; д) $\int e^x\sin(6x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int\frac{x+10}{4x^2-4x-5}dx$; б) $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int\frac{5x-2}{x^3+2x^2+x}dx$; б) $\int\frac{x^5+x-1}{x^3+1}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int\sin^3(5x)\cos^4(5x)dx$; б) $\int\cos^6(8x)dx$; в) $\int tg^{-3}x\,dx$;

г) $\int\sec^3(10x)dx$; д) $\int\frac{dx}{\sin^4(7x)}$; е) $\int\sin(3x)\cos(6x)dx$;

ж) $\int\frac{dx}{2+\cos(4x)}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}$; б) $\int x^2\sqrt{64-x^2}\,dx$; в) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$; г) $\int\frac{\sqrt{x^2-144}\,dx}{x^2}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int\frac{11x+15}{7-2x-x^2}dx$; б) $\int\cos^6(3-5x)dx$; в) $\int\frac{\left(3+2x^2\right)^2}{x^3}dx$;

г) $\int\frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; д) $\int\frac{x^3-5x^2+3x}{2\left(x^3+1\right)}dx$; е) $\int\frac{2x^3-7x}{\sqrt{16-x^2}}dx$;

ж) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$; з) $\int\sin(7x)\sin(3x)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 11

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int\left(7-5x-\frac{9}{x}\right)dx$; б) $\int\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int\frac{3^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$; б) $\int\frac{3x+2}{\sqrt{5-x^2}}dx$; в) $\int\frac{5-2\cos x}{6\sin^2 x}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int(2x+5)e^{3x}\,dx$; б) $\int(3x-4)\cos(2x)dx$; в) $\int arctg\left(\sqrt{3x-17}\right)dx$;

г) $\int\frac{\ln(x-5)}{(x-5)^3}\,dx$; д) $\int 2^x\sin x\,dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int\frac{x+11}{7-6x-2x^2}dx$; б) $\int\frac{4-x}{\sqrt{5-6x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int\frac{x^3+4x^2-5x-7}{(x^2+9)(x-4)^2}dx$; б) $\int\frac{2x^3-5}{x^3+2x^2}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int\sin^5(2x)\cos^3(2x)dx$; б) $\int\cos^4(8x)dx$; в) $\int tg^5 x\,dx$; г) $\int\cos ec^4 x\,dx$;

д) $\int\frac{dx}{\sin^3(11x)}$; е) $\int\cos(7x)\cos(9x)dx$; ж) $\int\frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$; в) $\int\frac{2x^2\,dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; г) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int(7-6x)\cos(3x)dx$; б) $\int\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$; в) $\int\frac{dx}{\cos^3(3-4x)}$;

г) $\int x^{-2}9^{\frac{1}{x}}\,dx$; д) $\int\cos ec^4(x+7)dx$; е) $\int\frac{12-17x}{\sqrt{x^2-8x+1}}dx$;

ж) $\int\frac{x}{3+5x^2}dx$; з) $\int\left(1-7\sin x+\frac{12}{5\sin^2 x}\right)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 12

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{5-7\sqrt{x}}{x^2}dx$; б) $\int \frac{3-2\,ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int tg\,(3x+2)dx$; б) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$; в) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (5x-4)2^x\,dx$; б) $\int (3x-2)\sin(2x)dx$; в) $\int arctg\left(\sqrt{3x+4}\right)dx$;

г) $\int \frac{\ln(7x-2)}{(7x-2)^2}dx$; д) $\int e^{4x}\cos(6x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{2x-9}{x^2+2x-11}dx$; б) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{2x^3-40x-9}{x(x+4)(x-2)}dx$; б) $\int \frac{5x-3}{(x^2+1)x}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^2(9x)\cos^3(9x)dx$; б) $\int \sin^4(7x)dx$; в) $\int tg^3(5x-1)dx$;

г) $\int \sec^6 x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(5x)}$; е) $\int \sin(6x)\cos(9x)dx$;

ж) $\int \frac{dx}{4+\cos(2x)}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}dx$; б) $\int \sqrt{16-x^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}\,dx}{x^4}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$; б) $\int \sin^8 x\cos^3 x\,dx$; в) $\int \frac{5x^3+8x}{16+x^4}dx$;

г) $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x}dx$; д) $\int tg^5(1-x)dx$; е) $\int x^2\,7^{x-1}dx$;

ж) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$; з) $\int \frac{23x^2+4}{(x-4)^2\,x}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант **13**

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{(1+2x)^3}{x} dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int \frac{dx}{3x+1}$; б) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$; в) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4+e^{4x}}} dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (x-2) e^{3x} dx$; б) $\int (2x+5)\cos(7x) dx$; в) $\int arctg\left(\sqrt{7x+3}\right) dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x^6} dx$; д) $\int 3^x \cos x\, dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{3x+7}{x^2-14x+1} dx$; б) $\int \frac{4x-3}{\sqrt{12x^2-x+18}} dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{x^2+9x-12}{(x-5)^2(x^2+9)} dx$; б) $\int \frac{5x^3+6}{x^3+8x^2} dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^6(7x)\cos^5(7x) dx$; б) $\int \cos^6(6x) dx$; в) $\int ctg^3(5x) dx$;

г) $\int \sec^4(11x) dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(14x)}$; е) $\int \sin(8x)\sin(12x) dx$;

ж) $\int \frac{dx}{4+5\cos x+8\sin x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x-2}+1} dx$; б) $\int x^2\sqrt{36-x^2}\, dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-49}\, dx}{x^4}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \sin(5x)\sin(7x) dx$; б) $\int \frac{x^3+1}{x^2-2x} dx$; в) $\int (7x+3) 5^x dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x}}$; д) $\int \sin^6(2x+3) dx$; е) $\int 9^{5x-7} dx$;

ж) $\int \frac{dx}{5\sin x+3\cos x}$; з) $\int \frac{4-7x}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант <u>14</u>

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$; б) $\int \frac{\left(4+3\sqrt{x}\right)^2}{x} dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int e^{2x-5} dx$; б) $\int \cos^3 x \sin(2x) dx$; в) $\int \frac{1+x}{25+x^2} dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (2x-11)e^{5x} dx$; б) $\int (3-x)\cos(7x) dx$; в) $\int \arcsin(3x) dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$; д) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{3x+2}{x^2+24x+25} dx$; б) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{2x^3-x^2-7x+12}{x(x-3)(x+1)} dx$; б) $\int \frac{5x-8}{x^4-x^2} dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$; б) $\int \sin^4(2x+6) dx$; в) $\int tg^5(3x-1) dx$;

г) $\int \sec^4(5x) dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}$; е) $\int \cos(4x)\cos(3x) dx$;

ж) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}-1} dx$; б) $\int \sqrt{1-25x^2}\, dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}\, dx}{5x^4}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \frac{3x-25}{4x^2-10x+1} dx$; б) $\int \frac{dx}{1-5x}$; в) $\int \frac{2x+17}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2} dx$;

г) $\int \operatorname{cosec}^4(6x) dx$; д) $\int \left(7\sqrt{x}+5\sqrt[6]{x^5}\right) dx$; е) $\int (8-3x)\cos(5x) dx$;

ж) $\int \frac{\ln x}{x^9} dx$; з) $\int \sqrt{16x^2-1}\, dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 15

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int 5^{x}\left(1+\dfrac{5^{-x}}{\sqrt{x^{3}}}\right)dx$; б) $\int \dfrac{17-4\cos^{3}x}{\cos^{2}x}dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int \dfrac{dx}{x-10}$; б) $\int \sin^{2}x\cos x\,dx$; в) $\int \dfrac{3x+16}{x^{2}-25}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (6x-7)9^{x}\,dx$; б) $\int (4x-17)\sin(3x)dx$; в) $\int \arcsin\left(\dfrac{5x}{2}\right)dx$;

г) $\int \dfrac{\ln x}{7x^{5}}dx$; д) $\int 2^{x}\sin(4x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \dfrac{3x-18}{4x^{2}-2x+5}dx$; б) $\int \dfrac{15-6x}{\sqrt{x^{2}+2x+3}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \dfrac{3x^{5}-14x^{3}-11}{x^{3}+x}dx$; б) $\int \dfrac{3x-22}{(x^{2}+16)(x-2)}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^{4}x\cos^{2}x\,dx$; б) $\int \sin^{5}(2x-1)dx$; в) $\int tg^{5}(x+1)dx$;

г) $\int \sec^{4}(2x)dx$; д) $\int \dfrac{dx}{\sin^{3}(27x)}$; е) $\int \sin(8x)\sin x\,dx$;

ж) $\int \dfrac{dx}{2-\sin(2x)}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$; б) $\int \sqrt{1-9x^{2}}\,dx$; в) $\int \dfrac{x^{2}\,dx}{\sqrt{(4+x^{2})^{5}}}$; г) $\int \dfrac{dx}{x^{2}\sqrt{x^{2}-169}}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int x\,arctgx\,dx$; б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(25+x^{2})^{3}}}$; в) $\int \ln x\,dx$;

г) $\int tg^{5}x\,dx$; д) $\int \cos^{3}(2x)dx$; е) $\int \dfrac{x+5}{3-4x-4x^{2}}dx$;

ж) $\int e^{2x}\,dx$; з) $\int \dfrac{dx}{5+3\cos x}$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 16

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$; б) $\int \frac{(2-3x)^2}{3x^3}dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int ctg(2x+1)dx$; б) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; в) $\int \frac{4-3x}{\sqrt{5-x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (2x+5)4^x\,dx$; б) $\int x^2\sin x\,dx$; в) $\int \arcsin(2x)dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{8x^4}dx$; д) $\int e^x\cos(4x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{4x-7}{1+2x-4x^2}dx$; б) $\int \frac{12-3x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{2x^3-3x^2+10}{(x-2)(x-4)}dx$; б) $\int \frac{6x+17}{x^4+16x^2}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^3(2x)\cos^4(2x)dx$; б) $\int \sin^6(2x-9)dx$; в) $\int tg^5(3x+4)dx$;

г) $\int \sec^4\left(\frac{x}{3}\right)dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(2x-1)}$; е) $\int \sin(5x)\cos(7x)dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$; б) $\int \sqrt{1-16x^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; г) $\int \sqrt{x^2-144}\,dx$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; б) $\int \frac{2-x}{\sqrt{9x^2+6x+13}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^3(4x)}$;

г) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; д) $\int \sin(2x)\cos(3x)dx$; е) $\int \frac{2x^3+1}{x^3-1}dx$;

ж) $\int x\,e^{2x}\,dx$; з) $\int\left(14x^3+\frac{3}{1+x^2}\right)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 17

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{(2+x)^3}{x^2}dx$; б) $\int \left(4tg\,x+\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int 3^{5x}\,dx$; б) $\int \frac{\sin x}{(2-\cos x)^3}dx$; в) $\int \frac{3x^7+5x^3}{\sqrt{8-x^8}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (x^2+15)3^x\,dx$; б) $\int (3x-11)\cos(5x)dx$; в) $\int arctg(5x+2)dx$;

г) $\int x\ln(3-2x)dx$; д) $\int e^{5x}\cos x\,dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{7x-5}{x^2-6x+10}dx$; б) $\int \frac{8-3x}{\sqrt{4x-x^2-3}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{2x^4+11}{x^4-x^2}dx$; б) $\int \frac{6x+21}{x^3-5x^2+6x}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^3(2x)\cos^8(2x)dx$; б) $\int \cos^6(8x)dx$; в) $\int tg^{-5}x\,dx$;

г) $\int \sec^4(7x)dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(3x-5)}$; е) $\int \sin(12x)\cos(13x)dx$;

ж) $\int \frac{dx}{7+3\cos(2x)}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}dx$; б) $\int \sqrt{196-x^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25+x^2}}$; г) $\int \frac{\sqrt{4x^2-1}\,dx}{x^2}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \sec^4 x\,dx$; б) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-2)}dx$; в) $\int \frac{1-3x+7x^4}{x}dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$; д) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; е) $\int x^2\cos x\,dx$;

ж) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; з) $\int \frac{arctg\,x+x}{1+x^2}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 18

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{x}dx$; б) $\int \left(12ctg\,x - \frac{7}{\sin^2 x}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int e^{5x-4}\,dx$; б) $\int \frac{\sin x}{2-3\cos x}dx$; в) $\int \frac{3+2x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (2+x)7^x\,dx$; б) $\int (7x-10)\sin(5x)dx$; в) $\int arctg(9x)dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; д) $\int x\,tg^2x\,dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{4-3x}{x^2-4x+5}dx$; б) $\int \frac{2x+8}{\sqrt{x^2+2x+9}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{2x^3+25}{x^3+2x^2+x}dx$; б) $\int \frac{x+2}{(x-1)^2x}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^5 x\cos^3 x\,dx$; б) $\int \cos^6(2x)dx$; в) $\int tg^4(3x)dx$;

г) $\int \cos ec^4(3x+2)dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^3(3x)}$; е) $\int \sin(5x)\cos(3x)dx$;

ж) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$; в) $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$; г) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+9}}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int x^{-2}\ln x\,dx$; б) $\int \cos^5 x\,dx$; в) $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$;

г) $\int \cos(2x)\cos(3x)dx$; д) $\int 2^{5x}\,dx$; е) $\int \frac{1-x}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$;

ж) $\int \frac{x^3+3}{x^3-x^2-2x}dx$; з) $\int \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 19

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. *Тождественные преобразования подинтегральной функции*

а) $\int\left(\frac{7}{\sqrt{x}}-\frac{10}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$; б) $\int\left(11ctg\,x+\frac{3}{9+x^2}\right)dx$.

2. *Метод замены переменной интегрирования*

а) $\int\cos(3x-1)dx$; б) $\int\frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}dx$; в) $\int\frac{5x-2}{4+x^2}dx$.

3. *Метод интегрирования по частям*

а) $\int(2x+1)e^{7x}\,dx$; б) $\int(2-3x)\sin(4x)dx$; в) $\int\arccos(5x)dx$;

г) $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$; д) $\int x\cos^2 x\,dx$.

4. *Интегрирование квадратичных полиномов*

а) $\int\frac{3x-2}{x^2-2x+7}dx$; б) $\int\frac{4-9x}{\sqrt{2x^2-6x+15}}dx$.

5. *Метод интегрирования рациональных дробей*

а) $\int\frac{5x^3-3}{x^3-8}dx$; б) $\int\frac{x^2-1}{(x+2)^2(x-3)}dx$.

6. *Интегрирование тригонометрических функций*

а) $\int\sin^2 x\cos^5 x\,dx$; б) $\int\cos^4(2x-1)dx$; в) $\int tg^5(9x)dx$;

г) $\int\cos ec^6 x\,dx$; д) $\int\sin(2x+1)\cos(3x-1)dx$; е) $\int\frac{dx}{\cos^3(6x)}$;

ж) $\int\frac{dx}{3\sin x+2\cos x}$.

7. *Интегрирование некоторых иррациональных функций*

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; б) $\int\sqrt{9+x^2}\,dx$; в) $\int\frac{x^4\,dx}{(4x^2-1)\sqrt{1-4x^2}}$; г) $\int\frac{\sqrt{x^2-225}\,dx}{x}$.

8. *Разные интегралы*

а) $\int\arccos x\,dx$; б) $\int\frac{x+2}{9x^2-6x+13}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{x^2-9}\,dx}{x^2}$;

г) $\int\frac{\arcsin^2 x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; д) $\int\sin^4(2x)\cos^2(2x)dx$; е) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

ж) $\int\frac{dx}{\cos^3(2x)}$; з) $\int\frac{dx}{3+\cos x}$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант <u>20</u>

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x} dx$; б) $\int \left(7\sqrt{x} + 5\sqrt[6]{x^5}\right) dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int 9^{5x-7}\, dx$; б) $\int \frac{dx}{1-5x}$; в) $\int \frac{5x^3+8x}{16+x^4} dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (7x+3)5^x\, dx$; б) $\int (8-3x)\cos(5x) dx$; в) $\int (2x+1)\, arctg\, x\, dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x^9} dx$; д) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x} dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{3x-25}{4x^2-10x+1} dx$; б) $\int \frac{4-7x}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{x^3+1}{x^2-2x} dx$; б) $\int \frac{2x+17}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^3(8x)\cos^2(8x) dx$; б) $\int \sin^6(2x+3) dx$; в) $\int ctg^7 x\, dx$;

г) $\int \operatorname{cosec}^4(6x) dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^3(4x-7)}$; е) $\int \sin(5x)\sin(7x) dx$;

ж) $\int \frac{dx}{5\sin x + 3\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4\sqrt{x}}}$; б) $\int \sqrt{(4+x^2)^3}\, dx$; в) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{36-x^2}}$; г) $\int \sqrt{16x^2-1}\, dx$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int tg^3(2x) dx$; б) $\int x^2\, 3^x\, dx$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} dx$;

г) $\int 4\, arctg\, x\, dx$; д) $\int \frac{5-2\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$; е) $\int \sec^4(3x) dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; з) $\int \frac{x+4}{x^2(x^2+1)} dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант <u>21</u>

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{\left(3+2x^2\right)^2}{x^3}dx$; б) $\int \left(1-7\sin x+\frac{12}{5\sin^2 x}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int x^{-2} 9^{\frac{1}{x}}dx$; б) $\int \frac{x}{3+5x^2}dx$; в) $\int \frac{2x^3-7x}{\sqrt{16-x^2}}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int x^2 7^{x-1}dx$; б) $\int (7-6x)\cos(3x)dx$; в) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$;

г) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$; д) $\int e^x \cos\,(2-3x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{11x+15}{7-2x-x^2}dx$; б) $\int \frac{12-17x}{\sqrt{x^2-8x+1}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{x^3-5x^2+3x}{2\left(x^3+1\right)}dx$; б) $\int \frac{23x^2+4}{(x-4)^2 x}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^8 x\cos^3 x\,dx$; б) $\int \cos^6(3-5x)dx$; в) $\int tg^5(1-x)dx$;

г) $\int \cos ec^4(x+7)dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^3(3-4x)}$; е) $\int \sin(7x)\sin(3x)dx$;

ж) $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx$; в) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+9x^2}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2-400}\,dx}{x^4}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \sqrt[3]{x^3-8}\,x^2\,dx$; б) $\int \sin^4(3x)dx$; в) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$;

г) $\int arctg\left(\sqrt{8x-1}\right)dx$; д) $\int \frac{3x+2}{x^2-6x+10}dx$; е) $\int \frac{2x+1}{x^3-4x}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sin^3(5x)}$; з) $\int \left(\cos^{-2} x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 22

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{5-9x}{x^3}dx$; б) $\int \left(3^{x-1} - \frac{5}{7\left(1+x^2\right)} + \frac{4}{\sqrt{x^2-5}}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int x\, e^{3-2x^2}\, dx$; б) $\int \sqrt[7]{3-8x}\, dx$; в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[6]{\cos x}} dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (x+6)5^{-x}dx$; б) $\int (3x-2)\cos(2x)dx$; в) $\int 4\arccos(5x)dx$;

г) $\int \ln^2 x\, dx$; д) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{3x-7}{1-16x-x^2}dx$; б) $\int \frac{2-7x}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{2x}{(x+2)^2\left(x^2+16\right)}dx$; б) $\int \frac{x^3}{x^3+27}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^2(1-x)\cos^4(1-x)dx$; б) $\int \cos^5 x\, dx$; в) $\int ctg^4(7x)dx$;

г) $\int \cos ec^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^3(3x)}$; е) $\int \cos(8x)\cos(3x)dx$;

ж) $\int \frac{\cos x\, dx}{2+\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{7\sqrt{x+1}+3}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$; б) $\int x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}\, dx$; в) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; г) $\int \frac{\sqrt{4x^2-1}\, dx}{5x}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \frac{x-2}{\sqrt{7-12x-4x^2}}dx$; б) $\int (3x+4)e^{3x}\, dx$; в) $\int tg^3(4x)dx$;

г) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$; д) $\int \sin(3x)\sin(5x)dx$; е) $\int \ln(x+3)dx$;

ж) $\int \frac{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}{x^2}dx$; з) $\int \frac{x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант **23**

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{10x^8 - 11x}{x^4}dx$; б) $\int \left(5tg\,x - \frac{23}{7\cos^2 x}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int \frac{7}{5-3x}dx$; б) $\int \frac{6}{\sqrt{7x+11}}dx$; в) $\int \frac{x\left(1-2x^2\right)}{16+x^4}dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (3x-1)2^x dx$; б) $\int (9-5x)\sin(2x)dx$; в) $\int \arccos(8x)dx$;

г) $\int \frac{\ln(x+2)}{(x+2)^2}dx$; д) $\int x\,tg^2(3x)dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{7x-15}{4x^2-2x+5}dx$; б) $\int \frac{12x-1}{\sqrt{9-6x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{3x^2+5}{\left(x^2-1\right)^2}dx$; б) $\int \frac{7x^5}{x^3-64}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^2(3x)\cos^4(3x)dx$; б) $\int \sin^5 x\,dx$; в) $\int ctg^4(2x-1)dx$;

г) $\int \cos ec^4(5x)dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^3(1+x)}$; е) $\int \sin(4x)\sin(3x)dx$;

ж) $\int \frac{dx}{2+3\cos x+4\sin x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{15\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}dx$; б) $\int \sqrt{1-121x^2}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$; г) $\int x^2\sqrt{9x^2-1}\,dx$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int \frac{x^5-12x^3+7}{x^3+2x^2}dx$; б) $\int \sin^5 x\cos^2 x\,dx$; в) $\int e^{5x}dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$; д) $\int \sec^4(2x)dx$; е) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

ж) $\int (2x-5)\cos(4x)dx$; з) $\int \frac{11x-2}{\sqrt{x^3}}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 24

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int\left(7x^2-2x+\dfrac{9}{x}\right)dx$; б) $\int\left(5\cos x-e^x+\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int 5x\,4^{-x^2}\,dx$; б) $\int\dfrac{4\arccos^3(3x)-7x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$; в) $\int\sqrt{4x-1}\,dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int(8x+9)8^{-x}dx$; б) $\int(7-x)\sin(9x)dx$; в) $\int\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2-x}}dx$;

г) $\int\dfrac{\ln(3x+2)}{(3x+2)^3}dx$; д) $\int e^{-x}\sin x\,dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int\dfrac{6x+7}{x^2-4x+1}dx$; б) $\int\dfrac{9-10x}{\sqrt{15-6x-x^2}}dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int\dfrac{7x^4-5x+2}{x^3+x^2-2x}dx$; б) $\int\dfrac{3x-5}{x^2(x-1)}dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int\sin^3(7x)\cos^5(7x)dx$; б) $\int\sin^6(5x)dx$; в) $\int tg^3(3x-4)dx$;

г) $\int\sec^4(2x)dx$; д) $\int\dfrac{dx}{\sin^3(3x-5)}$; е) $\int\cos(9x)\cos(11x)dx$;

ж) $\int\dfrac{dx}{1+5\sin x+2\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int\dfrac{8\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt{2x+1}}dx$; б) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$; в) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{(1+16x^2)^3}}$; г) $\int\dfrac{\sqrt{9x^2-1}\,dx}{3x^2}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int ctg^4(5x)dx$; б) $\int\dfrac{3\arcsin^4x+9x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int\dfrac{4-3x}{10-6x+x^2}dx$;

г) $\int\sin^3(3x)\cos^2(3x)dx$; д) $\int(5tg\,x+3ctg\,x)dx$; е) $\int\dfrac{5x^3-2x^2+9}{x(x+1)(x-3)}dx$;

ж) $\int(4x+7)\cos(2x)dx$; з) $\int\sqrt{x^2-16}\,dx$.

Задания для самостоятельного решения

Неопределённый интеграл

Вариант 25

Вычислить *неопределённые интегралы*:

1. ***Тождественные преобразования подинтегральной функции***

а) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$; б) $\int \left(5\sin x + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$.

2. ***Метод замены переменной интегрирования***

а) $\int 2^{5x} dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$; в) $\int \frac{x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

3. ***Метод интегрирования по частям***

а) $\int (5-6x)e^{2x} dx$; б) $\int (4x-2)\cos(3x) dx$; в) $\int 7x\, arctg(5x) dx$;

г) $\int \ln(x^2+4) dx$; д) $\int e^x \sin(6x) dx$.

4. ***Интегрирование квадратичных полиномов***

а) $\int \frac{x+11}{7-6x-2x^2} dx$; б) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-6x+1}} dx$.

5. ***Метод интегрирования рациональных дробей***

а) $\int \frac{x^2+9x-12}{(x-5)^2(x^2+9)} dx$; б) $\int \frac{5x-8}{x^4-x^2} dx$.

6. ***Интегрирование тригонометрических функций***

а) $\int \sin^3(2x)\cos^4(2x) dx$; б) $\int \cos^6(8x) dx$; в) $\int tg^4(3x) dx$;

г) $\int \cos ec^6 x\, dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^3(4x-7)}$; е) $\int \sin(7x)\sin(3x) dx$;

ж) $\int \frac{\cos x\, dx}{2+\sin x+\cos x}$.

7. ***Интегрирование некоторых иррациональных функций***

а) $\int \frac{15\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}} dx$; б) $\int \sqrt{4-x^2} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

8. ***Разные интегралы***

а) $\int x e^{3-2x^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+16x^2)^3}}$; в) $\int \frac{\cos x\, dx}{2+\sin x+\cos x}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x}}$; д) $\int (3x-2)\cos(2x) dx$; е) $\int \frac{2-7x}{\sqrt{x^2-8x+25}} dx$;

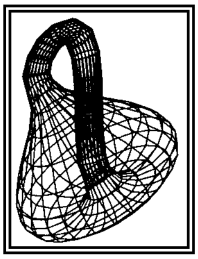
ж) $\int \frac{x^3+3}{x^3-x^2-2x} dx$; з) $\int \sqrt{1-4x^2} dx$.

Список использованных источников

1. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Ч.1. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1959. – 466 с.
2. Лузин Н.Н. Интегральное исчисление. – Москва: Высшая школа. – 1961. – 415 с.
3. Араманович И.Г., Гутер Р.С., Люстерник Л.А. и др. Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1961. – 350 с.
4. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1964. – 683 с.
5. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Т.1. – Москва: Просвещение. – 1966. – 640 с.
6. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – Москва: Наука. – 1967. – 736 с.
7. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – Москва: Наука. – 1967. – 704 с.
8. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1972. – 640 с.
9. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. – Минск: Вышэйшая школа. – 1973. – 350 с.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. – Москва: Наука. – 1974. – 479 с.
11. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.1. – Москва: Наука. – 1974. – 520 с.
12. Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С., Мордкович А.Г. Математический анализ. Интегральное исчисление. – Москва: Просвещение. – 1979. – 175 с.
13. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 1980. – 496 с.
14. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Т.2. – Минск: Вышэйшая школа. – 1985. – 221 с.
15. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. – Киев: Вища школа. – 1987. – 552 с.
16. Ивашев-Мусатов О.С. Начала математического анализа. – Москва: Наука. – 1988. – 288 с.
17. Зайцев И.А. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1991. – 400 с.
18. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. – Санкт-Петербург: Мифрил. – 1996. – 416 с.

19. Шипачев В.С. Высшая математика. – Москва: Высш. школа. – 1998. – 479 с.
20. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1999. – 528 с.
21. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. школа. – 1999. – 695 с.
22. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Ч.1. – Москва: МФТИ. – 2000. – 359 с.
23. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 592 с.
24. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. – Москва: ООО “Изд-во Астрель”; ООО “Изд-во АСТ”. – 2001. – 656 с.
25. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 672 с.
26. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. – Москва: ООО “ТК Велби”. – 2002. – 592 с.
27. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – Москва: МЦНМО. – 2002. – 664 с.
28. Гурова З.И., Каролинская С.Н., Осипова А.П. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 352 с.
29. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – 864 с.
30. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч.2. Основы математического анализа. – Минск: Амалфея. – 2003. – 352 с.
31. Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределённых интегралов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – 200 с.
32. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.
33. Геворкян П.С. Высшая математика. Основы математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 240 с.
34. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 648 с.
35. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 400 с.

36. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Ч.1. – Москва: Айрис-пресс. – 2005. – 288 с.
37. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. – Москва: Эксмо. – 2005. – 272 с.
38. Желтухин В.С. Неопределённые интегралы: методы вычисления. – Казань: Изд-во КГУ. – 2005. – 78 с.
39. Орловский Д.Г. Неопределённый интеграл. Практикум.– Санкт-Петербург: Лань. – 2006. – 432 с.
40. Зубков В.Г., Ляховский В.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б. Курс высшей математики: Учебное пособие для студентов заочной (дистанционной) формы обучения. Т.2. – Москва: МИИР. – 2007. – 269 с.
41. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.



<u>III</u>. *Интегральное исчисление*

Тема: *Определённый интеграл*

<u>30</u>. “Определённый интеграл и его свойства”

30.1. ***Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла***

<u>Задача 1</u>. Пусть на сегменте $[a;\, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, график которой лежит выше оси абсцисс. Необходимо вычислить площадь криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной слева прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$, снизу – прямой $y = 0$, а сверху – кривой $y = f(x)$. Из школьного курса математики известно: если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x) = \mathrm{const}$, то площадь прямоугольника определяется по формуле $\boxed{S = \mathrm{const}\cdot(b-a)}$ (рис. 1*а*):

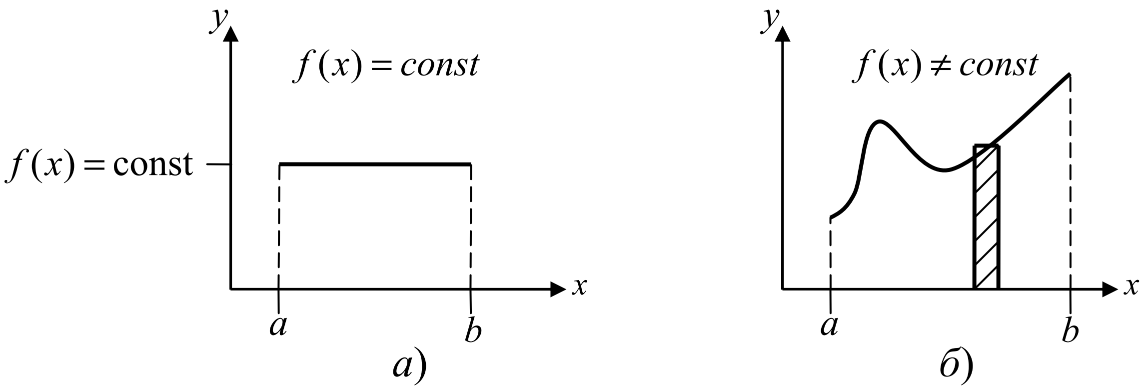


Рис. 1. *Вычисление площади криволинейной трапеции.*

Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x) \neq const$ (рис. 1*б*)), то для вычисления площади криволинейной трапеции $ABCD$ поступим следующим образом:

– сегмент $[a;\, b]$ произвольными точками разобьём на n частей, т.е.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b;$$

– внутри каждого элементарного отрезка $[x_i;\, x_{i+1}]$ возьмём произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$ в этой точке;

– вычислим площадь элементарного прямоугольника $s_i = f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$;

– просуммируем площади элементарных прямоугольников, получим приближённое значение площади криволинейной трапеции

$$S_n \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i;$$

Сумма S_n называется ***интегральной суммой***.

– обозначим через $d = \max(\Delta x_i)$ наибольшую длину элементарного отрезка и устремим количество точек разбиения к бесконечности, а величину $d \to 0$, тогда получим точное значение площади криволинейной трапеции $\boxed{S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i}$.

<u>Задача 2</u>. Пусть материальная точка движется со скоростью $V(t)$. Требуется вычислить путь, пройденный точкой за время от t_1 до t_2. Проводя аналогичные рассуждения, как и для ***<u>Задачи 1</u>***, получим

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} V(\xi_i)\,\Delta t_i\,.$$

Обобщая рассмотренные задачи, приходим к понятию ***определённого интеграла***.

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$. Произведём следующие действия:

– сегмент $[a;b]$ произвольными точками разобьём на n частей, т.е.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

длину каждой части обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$;

– внутри каждого элементарного отрезка $[x_i;\, x_{i+1}]$ возьмём произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$ в этой точке;

– вычислим произведения $s_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i$;

– просуммируем все произведения предыдущего пункта, получим

$$S_n \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,;$$

– обозначим через $d = \max(\Delta x_i)$ наибольшую длину элементарного отрезка и устремим количество точек разбиения к бесконечности, а величину $d \to 0$, тогда получим $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$.

Если полученный предел *существует*, то он называется ***определённым интегралом*** от функции $f(x)$ в пределах от a до b, т.е.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i},$$

где число $\boxed{a}$ называется ***нижним***, а число $\boxed{b}$ – ***верхним пределами интегрирования***.

○ В отличие от *неопределённого интеграла*, который является <u>*функцией*</u>, ***определённый интеграл*** даёт ***число***. ○

Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a;b]$, если существует предел интегральной суммы.

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, то на этом отрезке она *интегрируема*.

С геометрической точки зрения *определённый интеграл даёт **площадь криволинейной трапеции***, а с физической точки зрения – ***путь, пройденный материальной точкой за данный промежуток времени***.

30.2. *Свойства определённого интеграла*

1. *Определённый интеграл от линейной комбинации функций* равен той же линейной комбинации определённых интегралов от этих функций

$$\int_a^b [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x)]dx = A_1\int_a^b f_1(x)\,dx + A_2\int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + A_n\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Из этого свойства вытекают следующие частные случаи:

а) *определённый интеграл от суммы* (*разности*) *функций равен сумме* (*разности*) *определённых интегралов от этих функций*:

$$\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx}.$$

б) *постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла*: $\boxed{\int_a^b A\cdot f(x)\,dx = A\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$.

2. При перестановке пределов интегрирования местами определённый интеграл изменяет свой знак на противоположный

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}.$$

3. Если пределы интегрирования равны между собой, то определённый интеграл равен нулю $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$.

4. $\boxed{\int_a^b dx = b - a}$.

5. Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

6. (***аддитивность определённого интеграла***) Если точка $c \in [a;\,b]$ и функция $f(x)$ непрерывна на этом сегменте, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}.$$

Геометрический смысл свойства **6** (рис. 2):

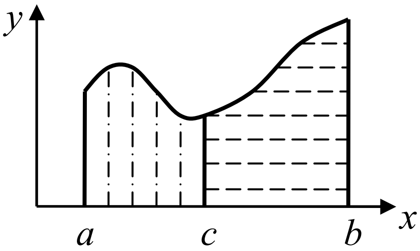
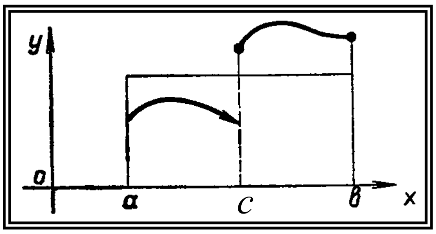


Рис. 2. *Иллюстрация свойства аддитивности определённого интеграла.*

○ Свойство *аддитивности определённого интеграла* справедливо и тогда, когда точка c лежит вне отрезка $[a;b]$: пусть, например, $c<a$, тогда можно записать, что

$$\int_c^b f(x)dx=\int_c^a f(x)dx+\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx-\int_c^a f(x)\,dx.$$

Используя свойство **2** для вычитаемого определённого интеграла, получим формулу свойства **6**. ○



○ Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ терпит разрыв, то такой точки c может не быть. ○

7. Значение определённого интеграла не зависит от того, какой буквой обозначается переменная интегрирования в определённом интеграле

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du=\ldots}.$$

30.3. *Неравенства для определённых интегралов*

Теореме 1. Если *непрерывные* на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $\boxed{f(x)\ge g(x)}$, то $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx}$.

○ Данная теорема применяется ***для сравнения определённых интегралов без их непосредственного вычисления***. ○

Док-во: Введём в рассмотрение новую функцию $\varphi(x)=f(x)-g(x)$. Так как $\varphi(x)\ge 0$, то по свойству **5** для определённого интеграла

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\ge 0.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

Пример 1. Пусть $f(x)=e^x$ и $g(x)=x$ заданы на отрезке $[0;\,1]$. Доказать, что $\int_0^1 e^x\,dx>\int_0^1 x\,dx$.

Построим графики данных функций на отрезке $[0;\,1]$ (рис. 3):

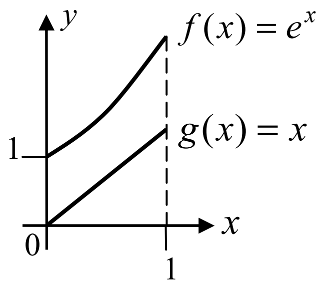


Рис. 3. *Сравнение определённых интегралов.*

Из рисунка видно, что $e^x > x \quad \forall x \in [0;1]$. Отсюда, по ***Теореме 1*** имеем

$$\int\limits_0^1 e^x\,dx > \int\limits_0^1 x\,dx.$$

Теорема 2. Если $m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ – наименьшее, а $M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ – наибольшее значения непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$\boxed{m\cdot(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a)}.$$

Данная теорема применяется ***для оценки определённого интеграла без его непосредственного вычисления***.

Док-во: Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и достигает своих наименьшего $m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ и наибольшего $M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ значений либо на концах заданного отрезка, либо внутри этого отрезка, то все её значения для данного интервала удовлетворяют двойному неравенству $m \le f(x) \le M$, следовательно, по ***Теореме 1*** для определённых интегралов будут выполняться неравенства $\int\limits_a^b m\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b M\,dx$ или с учётом следствия из свойства **1** для определённого интеграла имеем

$$m\int\limits_a^b dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M\int\limits_a^b dx.$$

Используя свойство **4** для определённого интеграла получаем

$$\boxed{m\cdot(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a)}.$$

Теорема 3. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

Теорема 4. (***о среднем интегральном значении подинтегральной функции***) Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, то существует такая точка $c\in[a;b]$, что $\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)}$.

Док-во: Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$ и достигает своих наименьшего $m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ и наибольшего $M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ значений, то из неравенств ***Теоремы 2*** следует, что $m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M$. С другой стороны, для непрерывных функций (***Теорема 6***, **Лекция № 16**) существует хотя бы одна точка $c\in[a;b]$ такая, что $m \le f(c) \le M$. Сравнивая полученные неравенства получаем, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$.

Величина $\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx}$ называется ***средним интегральным значением функции*** $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

31. "*Методы вычисления определённого интеграла*"

31.1. *Вычисление определённого интеграла на основе его дефиниции*

В качестве вычисления определённого интеграла, согласно его дефиниции, рассмотрим вычисление интеграла $\int\limits_a^b x\,dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\, \Delta x_i$. Разобьём исходный интервал на n элементарных интервалов с одинаковой длиной $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. На каждом i-ом элементарном отрезке выберем произвольную точку ξ_i следующим образом:

$$\xi_1 = a + \Delta x\,;\ \xi_2 = a + 2\,\Delta x\,;\ \ \xi_3 = a + 3\,\Delta x\,;\ \ \ldots\ ;\ \xi_n = a + n\,\Delta x\,.$$

Вычислим интегральную сумму ($f(\xi_i) = 1;\quad \Delta x_i = \Delta x$)

$$S_n \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \left[(a+\Delta x) + (a+2\Delta x) + \ldots + (a+n\Delta x)\right]\Delta x = \left[n\,a + \frac{\Delta x + n\Delta x}{2} n\right]\Delta x =$$

$$= n\,a\,\Delta x + \frac{(n+1)\,n}{2}\left(\Delta\,x\right)^2 = n\,a\frac{b-a}{n} + \frac{(n+1)\,n}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2} = a\,b - a^2 + \frac{n+1}{n}\,\frac{\left(b-a\right)^2}{2}\,.$$

Перейдём к пределу, устремив n к бесконечности (при этом $\Delta\,x \to 0$), получим

$$\int\limits_a^b x\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[a\,b - a^2 + \frac{n+1}{n}\,\frac{\left(b-a\right)^2}{2}\right] = a\,(b-a) + \frac{\left(b-a\right)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,.$$

31.2. *Производная от определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования*

Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ зависит как от подинтегральной функции $f(x)$, так и пределов интегрирования a и b.

Если верхний предел интегрирования в определённом интеграле ($b=x$) является переменной величиной, то интеграл $\boxed{I(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt}$ называется ***определённым интегралом с переменным верхним пределом интегрирования***.

Теорема 1 (*теорема Барроу*)**.** Производная от определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования равна значению подинтегральной функции на верхнем пределе интегрирования, т.е.

$$I'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x).$$

Док-во: Рассмотрим значение определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования в приращённой точке, т.е.

$$I(x+\Delta x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int\limits_a^{x} f(t)\,dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=I(x)+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\ .$$

Следовательно, приращение определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования будет равно

$$\Delta I=I(x+\Delta x)-I(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Согласно ***Теореме 4*** (***30***), можно записать, что

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(c)\Delta x\,.$$

Таким образом, получаем, что $\dfrac{\Delta I}{\Delta x}=f(c)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$, находим, что $\dfrac{dI}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta I}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(c)=f(c)$.

Пример 1. Найти производную от интеграла $\int\limits_2^x e^{-t^2}\,dt$.

По ***теореме Барроу*** имеем $\left(\int\limits_2^x e^{-t^2}\,dt\right)'=e^{-x^2}$.

31.3. *Формула Ньютона-Лейбница*

В силу того, что по ***теореме Барроу*** $I'(x)=f(x)$, то величина $I(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Если функция $F(x)$ является другой первообразной для функции $f(x)$, то в соответствии с ***Теоремой 2*** (***24***), они связаны соотношением

$$\boxed{I(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt=F(x)+C}.$$

При $x=a$ имеем $I(a)=0=F(a)+C$. Откуда находим, что $C=-F(a)$. При $x=b$ с учётом полученного выражения для постоянной интегрирования находим ***формулу Ньютона-Лейбница***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b}.$$

Согласно ***формуле Ньютона-Лейбница***, *определённый интеграл равен разности между значением первообразной на верхнем пределе интегрирования и значением этой первообразной на нижнем пределе интегрирования.*

Пример 2. Вычислить $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдём первообразную для подинтегральной функции и воспользуемся ***формулой Ньютона-Лейбница***

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\arcsin 1-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

31.4. *Метод замены переменной интегрирования*

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a;b]$ и пусть $x=\varphi(t)$, причём первая производная этой функции $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$, а значения этой функции на концах отрезка $[\alpha;\beta]$ равны $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, соответственно. Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt}.$$

Док-во: Вычислим левую и правую части данного равенства с использованием ***формулы Ньютона-Лейбница***:

левая часть $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$;

правая часть

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t)=F(\varphi(\alpha))-F(\varphi(\beta))=F(b)-F(a).$$

Отметим, что *при использовании метода замены переменной интегрирования в определённом интеграле*, ***надо обязательно пересчитывать пределы интегрирования***.

Пример 3. Вычислить $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Воспользуемся методом замены переменной интегрирования в определённом интеграле, получим $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| =$ (пересчитаем пределы интегрирования по формуле замены $t = 1 + x^2$:

x	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$
t	4	9

получим)

$$= \frac{1}{2} \int\limits_4^9 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\,\Big|_4^9 = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

При использовании *метода замены переменной интегрирования в определённом интеграле после нахождения первообразной с новой переменной интегрирования* ***не надо возвращаться к старой переменной интегрирования**, **а надо воспользоваться <u>формулой Ньютона-Лейбница</u>***.

31.5. *Интегрирование по частям в определённом интеграле*

Метод интегрирования по частям в определённом интеграле основан на формуле:

$$\boxed{\int\limits_a^b U\,dV = U\,V\Big|_a^b - \int\limits_a^b V\,dU}.$$

При использовании *метода интегрирования по частям в определённом интеграле* ***к проинтегрированной части применяется <u>формула Ньютона-Лейбница</u>***.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

К интегралам такого вида применяется *метод интегрирования по частям* (см. п. 25.3, ***<u>25</u>***)

$$\int\limits_1^e \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} U = \ln x & dV = dx \\ dU = \dfrac{dx}{x} & V = x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx = e\ln e - 1\ln 1 - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

31.6. *Определенный интеграл от чётной и нечётной функций по симметричному интервалу интегрирования*

Пусть функция $f(x)$ является <u>нечётной</u> функцией, т.е. $\boxed{f(-x) = -f(x)}$, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} t=-x & \\ x=-t & dx=-dt \end{matrix} \right| =$$

x	$-a$	0
t	a	0

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$-\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

<u>Вывод</u>: *Определённый интеграл от* ***<u>нечётной функции по симметричному интервалу интегрирования</u>*** *равен* ***<u>нулю</u>***.

Пусть функция $f(x)$ является *<u>чётной</u>* функцией, т.е. $f(-x)=f(x)$, тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} t=-x & \\ x=-t & dx=-dt \end{matrix} \right| =$$

x	$-a$	0
t	a	0

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

<u>Вывод</u>: *Определённый интеграл от* ***<u>чётной функции по симметричному интервалу интегрирования</u>*** *равен* ***<u>удвоенному значению определённого интеграла по половине симметричного интервала интегрирования</u>***.

Пример 5. Вычислить $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$.

В силу того, что подинтегральная функция является *<u>чётной</u>*, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 8\sin\left(\frac{x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 8\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = 4\sqrt{2}.$$

Пример 6. Вычислить $\int_{-3}^{3} e^{-x^2} \sin(2x)\,dx$.

Так как подинтегральная функция *<u>нечётная</u>*, то $\int_{-3}^{3} e^{-x^2} \sin(2x)\,dx = 0$.

<u>32</u>. “*Геометрические приложения определённого интеграла*”

32.1. *Площадь плоской фигуры*

<u>1</u>. Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a;b]$ и принимает на этом отрезке только неотрицательные значения ($f(x) \ge 0$), тогда, *согласно* *геометрическому смыслу*, ***определённый интеграл от функции в пределах от*** a ***до*** b ***будет равен площади криволинейной трапеции***

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, которая ограничена линиями $y=0$ и $y=4-x^2$.

Первая линия $y=0$ определяет прямую, которая является осью абсцисс, а вторая линия $y=4-x^2$ определяет параболу с ветвями, направленными вниз, и поднятую вверх по оси ординат на 4 единицы. Парабола пересекает ось абсцисс в точках ($4-x^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\mp 2$) $A(-2;0)$ и $B(2;0)$ (рис. 4).

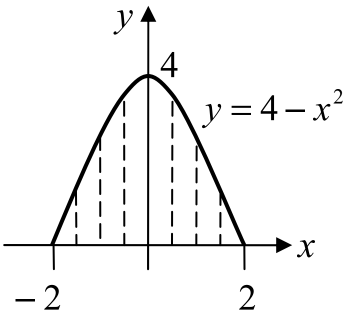


Рис. 4. *Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями* $y=0$, $y=4-x^2$, $x=-2$ *и* $x=2$.

Следовательно, $S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=$ (подинтегральная функция *чётная*, а пределы интегрирования симметричные, поэтому)

$$=2\int_0^2(4-x^2)\,dx=8\int_0^2 dx-2\int_0^2 x^2\,dx=8x\Big|_0^2-\frac{2x^3}{3}\Big|_0^2=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}.$$

Отсюда площадь плоской фигуры $S=\frac{32}{3}$ (*ед. пл.*).

2. Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* на сегменте $[a;b]$ и *принимает на этом отрезке только неположительные значения* ($f(x)\le 0$), *тогда* ***площадь плоской фигуры может быть вычислена по одной из формул***: $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$; $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$; $\boxed{S=-\int_a^b f(x)\,dx}$. Для практических расчётов предпочтительной является последняя формула.

3. Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* на отрезке $[a;b]$ и ***меняет на этом отрезке свой знак в точке*** $c\in[a;b]$, *например*, **с** "+" **на** "–", *тогда* ***площадь плоской фигуры определяется формулой***

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx}.$$

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, которая ограничена линиями $y=0$ и $y=\cos x$ при $x\in[0;\,\pi]$.

Заданные линии определяют полуволну косинусоиды, которая изменяет свой знак с “+” на “–” в точке $\frac{\pi}{2}\in[0;\,\pi]$ (рис. 5):

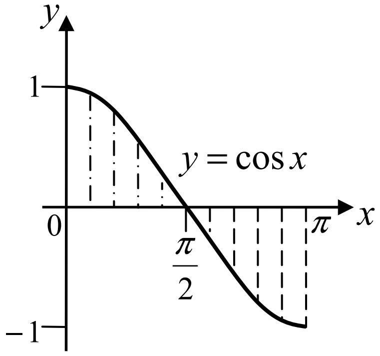


Рис. 5. *Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=0$ и $y=\cos x$ при $x\in[0;\,\pi]$.*

Следовательно, площадь такой плоской фигуры будет равна:

$$S=\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1-0-0+1=2\ (\textit{ед. пл.}).$$

<u>4</u>. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a;\,b]$ *и на этом отрезке удовлетворяют неравенству* $f(x)\ge g(x)$ (рис. 6), ***тогда площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле***:

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx}.$$

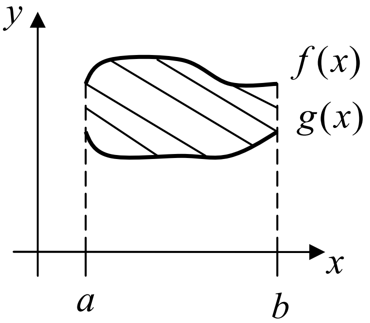


Рис. 6. *Площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a;\,b]$.*

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=x$ и $y=e^x$ при $x\in[0;1]$ (см. рис. 7, ***Лекция № 30***).

Если построить графики указанных линий (см. рис. 7, ***Лекция № 30***), то роль функции $f(x)$ играет функция $y=e^x$, а в качестве функции $g(x)$ выступает функция $y=x$, следовательно,

$$S=\int_1^1[e^x-x]\,dx=\int_0^1 e^x\,dx-\int_0^1 x\,dx=e^x\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=e-1-\frac{1}{2}=\frac{2e-3}{2}\,(\textit{ед. пл.}).$$

<u>5</u>. Если непрерывная кривая, ограничивающая *криволинейную трапецию, задана в параметрическом виде* $\boxed{\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}}$ *при* $t\in[\alpha;\beta]$, ***то пло-***

щадь трапеции вычисляется по формуле $\boxed{S=\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)\,dt}$.

Пример 4. Вычислить площадь под одной аркой циклоиды

$$\boxed{\begin{cases} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}}.$$

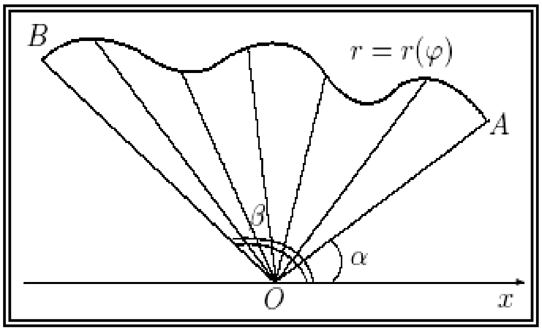
Циклоида – это кривая, которую описывает точка на ободе колеса при его полном повороте, следовательно, для одной арки циклоиды параметр $t\in[0;\,2\pi]$. По приведенной формуле площадь под аркой циклоиды равна:

$$S=\int\limits_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)^2\,dt = R^2\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt =$$

$$=R^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)dt = R^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos(2t)}{2}\right)dt =$$

$$= R^2\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}dt - 2\int\limits_0^{2\pi}\cos t\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos(2t)\,dt\right) =$$

$$= R^2\left(\frac{3}{2}\,t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin(2t)\Big|_0^{2\pi}\right) = 3\pi R^2\ (\text{ед. пл.}).$$



6. Если непрерывная кривая, которая ограничивает *криволинейную трапецию*, *задана в полярной системе координат* $\boxed{r=r(\varphi)}$ *и фигура ограничена лучами* α *и* β, ***то площадь плоской фигуры вычисляется, согласно формуле***

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi}.$$

Пример 5. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной одним витком ***спирали Архимеда***.

Спираль Архимеда (см. **9**) описывается уравнением $\boxed{r=a\varphi}$. Для одного витка ***спирали Архимеда*** угол $\varphi\in[0;2\pi]$. Используя вышеприведенную формулу, получаем

$$S=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{a^2\varphi^3}{6}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^3 a^2}{3}(\text{ед. пл.}).$$

32.2. *Вычисление объёма и площади поверхности тела*

1. (***объём любого тела с известным законом изменения площади поперечного сечения***). Пусть дано некоторое тело, для которого известен закон изменения площади поперечного сечения, например, вдоль оси абсцисс, т.е. $S(x)$ (рис. 7).

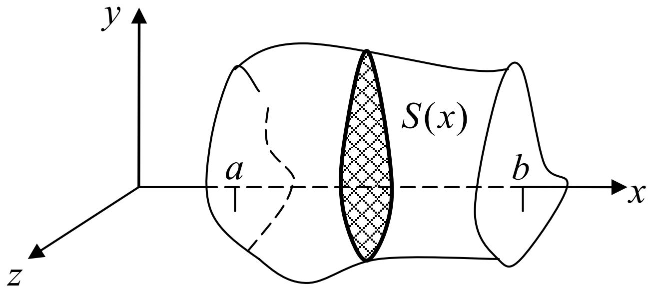


Рис. 7. *Объём тела с заданным законом изменения площади поперечного сечения.*

Тогда ***объём*** *такого* ***тела*** *вычисляется по формуле* $\boxed{V = \int\limits_a^b S(x)\,dx}$.

Пример 6. Вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Если зафиксировать абсциссу, т.е. положить $x = h$, то получим

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Разделив это равенство на $1 - \frac{h^2}{a^2}$, найдём, что в плоскости yOz эллипс описывается уравнением $\frac{y^2}{(b_1)^2} + \frac{z^2}{(c_1)^2} = 1$ с полуосями $b_1 = b\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2}$ и $c_1 = c\sqrt{1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2}$. Вычислим площадь этого эллипса (рис. 8). Так как эллипс симметричен относительно координатных осей, то достаточно вычислить площадь его четвёртой части (см. рис. 8) и увеличить полученную площадь в 4 раза, т.е.

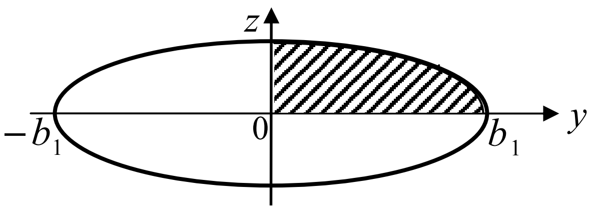


Рис. 8. *Отыскание закона изменения площади поперечного сечения эллипсоида.*

$S = 4\int\limits_0^{b_1} z\,dy = 4c_1\int\limits_0^{b_1}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b_1}\right)^2}\,dy =$ (произведём замену переменной интегрирования) $= \left|\begin{array}{l} y = b_1 \sin u \\ dy = b_1 \cos u\,du \end{array}\right| =$ (пересчитаем пределы интегрирования по формуле замены)

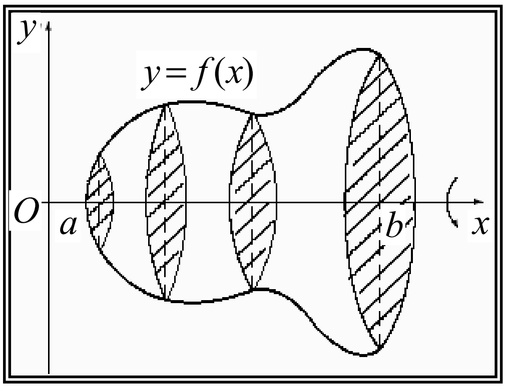
y	0	b_1
u	0	$\frac{\pi}{2}$

$= 4\,b_1\,c_1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du =$

$$= 2b_1c_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos(2u)\right)du = 2b_1c_1\left(u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(2u)}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi b_1c_1.$$

Следовательно, площадь поперечного сечения в направлении оси абсцисс с учётом выражений для полуосей b_1 и c_1 определяется формулой $S(x)=\pi bc\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Таким образом, объём эллипсоида будет равен

$$V=\int_{-a}^{a}S(x)\,dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi bc\left(x\Big|_0^a-\frac{x^3}{3a^2}\Bigg|_0^a\right)=\frac{4\pi}{3}abc.$$



2. (***объём тела вращения***) Если *тело получается путём ротации линии* $y=f(x)$ (или $x=g(y)$) вокруг оси Ox (Oy), то оно называется ***телом вращения***. *Площадь поперечного сечения* описывается формулой

$\boxed{S=\pi f^2(x)}$ (или $\boxed{S=\pi g^2(y)}$),

следовательно, ***объём тела вращения*** вычисляется по формуле:

$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$ – при вращении ***вокруг оси абсцисс***;

$\boxed{V=\pi\int_c^d g^2(y)\,dy}$ – при вращении ***вокруг оси ординат***.

Пример 7. Вычислить объём тела вращения, если оно получено путём ротации линии $y=4-x^2$ (рис. 4, ***31***) вокруг оси абсцисс при $x\in[-2;\,2]$. Согласно приведенной формуле:

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2\,dx=2\pi\int_0^2\left(4-x^2\right)^2dx=2\pi\int_0^2\left(16-8x^2+x^4\right)dx=$$

$$=2\pi\left(16x\Big|_0^2-\frac{8x^3}{3}\Bigg|_0^2+\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2\right)=2\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=\frac{512\pi}{15}(ед.\,об.).$$

3. (*площадь поверхности тела вращения*) ***Площадь поверхности тела вращения вычисляется по формуле***

$\boxed{\Omega=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}$ – при вращении ***вокруг оси абсцисс***;

$\boxed{\Omega=2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy}$ – при вращении ***вокруг оси ординат***.

Пример 8. Вычислить площадь поверхности тела вращения шара радиуса R.

Шар получается путём вращения линии $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси абсцисс при $x \in [-R; R]$. Первая производная от указанной функции

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

следовательно,

$$\Omega = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\pi R \int_0^R dx = 4\pi R x \Big|_0^R = 4\pi R^2 (ед.\ пл.).$$

32.3. *Длина дуги*

1. Если ***линия определяется явной функцией*** $y = f(x)$, то длина дуги при $x \in [a; b]$ вычисляется по формуле $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2}\, dx}$.

2. Если ***линия задана параметрически*** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ***при*** $t \in [\alpha; \beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле $\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x_t' \right)^2 + \left(y_t' \right)^2}\, dt}$.

3. Если ***линия задана в полярной системе координат*** $\boxed{\rho = \rho(\varphi)}$ ***и дуга ограничена лучами*** φ_1 ***и*** φ_2, то длина дуги вычисляется по формуле

$$\boxed{L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\rho_\varphi' \right)^2 + \rho^2}\, d\varphi}.$$

Пример 9. Вычислить длину дуги $y = 1 - \ln(\cos x)$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{6} \right]$.

Вычислим первую производную от заданной функции

$$y' = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = tgx.$$

Таким образом, $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + tg^2 x} = \frac{1}{\cos x}$. Следовательно, длина дуги

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x\, dx}{1 - \sin^2 x} = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix} \right| =$$ (пересчитаем пределы интегрирования)

$$= \int_0^{0,5} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| \Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = 0{,}5 \ln 3\, (ед.\, дл.).$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$
t	0	$\frac{1}{2}$

<u>33</u>. "Несобственные интегралы"

33.1. *Определённые интегралы с одним или двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной на интервале интегрирования функции.* (*Несобственные интегралы I рода*)

<u>Теорема 1</u>. Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* на интервале $[a;\infty)$ (или интервалах $(-\infty;a]$; $(-\infty;\infty)$). Если существует предел $\boxed{\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx}$ (или $\boxed{\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-A}^a f(x)\,dx}$; $\boxed{\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-A}^A f(x)\,dx}$, соответственно), то существует интеграл $\boxed{\int_a^\infty f(x)dx}$ (или интегралы $\boxed{\int_{-\infty}^a f(x)dx}$; $\boxed{\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx}$, соответственно).

Определённый интеграл *с одним или двумя бесконечными пределами интегрирования* от *непрерывной на интервале интегрирования функции* называется ***<u>несобственным интегралом I рода</u>***

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx \;\left(\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^a f(x)\,dx;\; \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^A f(x)\,dx\right).$$

○ *Несобственный интеграл I рода* вычисляется в смысле ***главного значения***. ○

В дальнейшем будем изучать только интегралы $\int_a^\infty f(x)dx$, другие интегралы рассматриваются аналогично.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} arctg\,x\,\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty}(arctg\,A - arctg\,0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^2} =$(применим метод замены переменной интегрирования)$=\left|\begin{array}{l} x = tg\,z;\; z = arctg\,x \\ dz = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array}\right| =$(пересчитаем пределы интегрирования)

x	0	A
z	0	$arctg\,A$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^{arctg\, A} \frac{dz}{1+tg^2 z} = \lim_{A\to\infty} \int_0^{arctg\, A} \cos^2 z\, dz = \frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \int_0^{arctg\, A} (1-\cos(2z))\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \left(z - \frac{\sin(2z)}{2} \right) \Bigg|_0^{arctg\, A} = \frac{1}{2} \lim_{A\to\infty} \left(arctg\, A - \frac{\sin(2\, arctg\, A)}{2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Несобственный интеграл I рода называется ***сходящимся***, если пределы в указанных выше равенствах конечны, в противном случае *несобственный интеграл I рода* называется ***расходящимся***.

Пример 3. Выяснить сходимость интеграла $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$.

Рассмотрим возможные случаи:

а) $p<1$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^A = \frac{1}{1-p} \lim_{A\to\infty} (A^{1-p}-1) = \infty$ – ***расходится***;

б) $p=1$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to\infty} \ln x \big|_1^A = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = \infty$ – ***расходится***;

в) $p>1$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^A = -\frac{1}{p-1} \lim_{A\to\infty} (\frac{1}{A^{p-1}} - 1) = \frac{1}{p-1}$ – ***сходится***.

Данный несобственный интеграл расходится при $p \le 1$ и сходится при $p>1$. Этот интеграл часто используется в теории рядов (см. ниже ***Тему***: ***Ряды***). Рассмотрим <u>*признак сходимости несобственного интеграла I рода*</u>:

<u>***Теорема 2.***</u> Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ *непрерывны* на интервале $[a;\infty)$ и удовлетворяют неравенству $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда: из *сходимости* интеграла $\int_a^\infty g(x)\,dx$ вытекает *сходимость* интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$, а из *расходимости* интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$ следует *расходимость* интеграла $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(e^x+1)}$.

На интервале $[1;\infty)$ справедливы неравенства $0 \le \frac{1}{x^2(e^x+1)} \le \frac{1}{x^2}$. Так как $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ($p=2>1$) сходится (см. ***Пример 3***), то по признаку сходимости сходится и интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(e^x+1)}$.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^\infty \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^3}}$.

На интервале $[1;\infty)$ справедливы неравенства $0 \le \dfrac{1}{\sqrt{x}} \le \dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}}$. Так как $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ ($p = \dfrac{1}{2} < 1$) расходится (см. ***Пример 3***), то по признаку сходимости расходится и интеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^3}}$.

Следствие из ***<u>Теоремы 2</u>***: Если сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty} |\, f(x) \,|\, dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx$.

33.2. *Определённые интегралы с конечными пределами интегрирования от функций, имеющих точки разрыва второго рода на интервале интегрирования.* (*Несобственные интегралы II рода*)

Если функция $f(x)$ ***не существует хотя бы в одной точке*** c отрезка $[a;b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ называется ***несобственным интегралом II рода***.

○ Если функция $f(x)$ терпит *разрыв II рода в точке* $c \in [a;b]$, то обычная дефиниция определённого интеграла как предела интегральной суммы непригодно. ○

Вычисление *определённого интеграла с конечными пределами от разрывной на интервале интегрирования функции* производится посредством предельного перехода

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx \right)}.$$

Если приведенные пределы существуют и конечны, то несобственный интеграл II рода называется ***сходящимся***, в противном случае – ***расходящимся***.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

$\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left| \begin{matrix} t = 1-x & x = 1-t \\ dx = -dt & \end{matrix} \right|$=(пересчитаем пределы интегрирования)=

x	0	$1-\varepsilon$
t	1	ε

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_1^{\varepsilon} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2 \lim_{\xi \to 0} \sqrt{t}\,\Big|_1^{\varepsilon} = -2 \lim_{\xi \to 0} (\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{1}) = 2.$$

Рассмотрим <u>*признак сходимости несобственных интегралов II рода*</u>:

<u>Теорема 2.</u> Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ *непрерывны* на интервале $[a;b]$ и удовлетворяют неравенству $0 \le f(x) \le g(x)$, а в точке $c \in [a;b]$ *обе функции терпят разрыв II рода*. Тогда: из *сходимости* несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$ вытекает *сходимость* интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из *расходимости* интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует *расходимость* интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

○ При исследовании сходимости несобственных интегралов I и II родов чаще всего используют интегралы, которые приведены в ***Примере 3***. ○

<u>34</u>. "*Применение определённого интеграла в науке и технике*"

34.1. *Работа по сжатию пружины*

Пусть тело массой m прикреплено к пружине с коэффициентом упругости k. Требуется вычислить работу, которую совершит сила упругости при растяжении пружины от a до b (рис. 9):

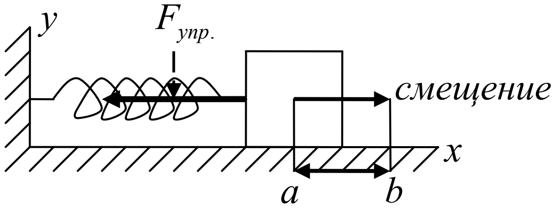


Рис. 9. *Вычисление работы упругой силы.*

Из физики известно, что

сила упругости $\boxed{F=-k\,x\ (k>0)}$, а ***работа*** $\boxed{d\,A=F\,dx}$.

Отсюда находим, что

$$A=\int_a^b F\,dx=-\int_a^b k\,x\,dx=-k\,\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=-\frac{k\,(b^2-a^2)}{2}\ (ед.\ раб.).$$

Если выполняется неравенство $a>b$, то $A>0$, т.е. она совершается *против* силы упругости. В противном случае *работа совершается силой упругости*.

34.2. *Работа по откачке жидкости из резервуара*

Пусть резервуар представляет собой параболоид вращения и имеет высоту h. Резервуар заполнен жидкостью с плотностью ρ. Вычислить работу, которую надо совершить при полной откачке жидкости из резервуара (рис. 10).

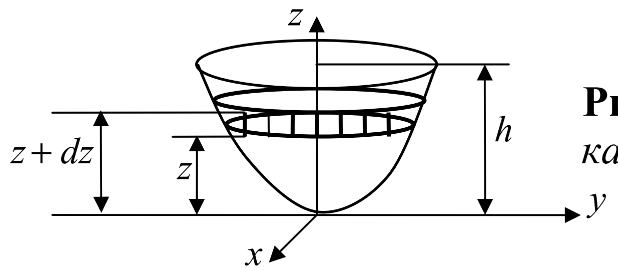


Рис. 10. *Вычисление работы по откачке жидкости из параболоида.*

Параболоид вращения задаётся уравнением $z = a(x^2 + y^2)$. На слой жидкости, расположенный на высоте между z и $z + dz$, действует сила тяжести $dP = gdm$, где g – ускорение свободного падения, dm – масса рассматриваемого слоя жидкости. В силу того, что $dm = \rho dV$ (dV – объём рассматриваемого слоя жидкости), то $dP = g\rho dV$. Для тела вращения, которым является резервуар с жидкостью, элемент объёма

$$dV = \frac{\pi z}{a} dz .$$

Работу, которую надо совершить по откачке этого слоя жидкости, равна

$$dA = (h - z)dP = \frac{\pi \rho g (h - z) z}{a} dz .$$

Следовательно, работа по откачке всей жидкости из резервуара равна

$$A = \frac{\pi \rho g}{a} \int_h^0 (hz - z^2) dz = -\frac{\pi \rho g h^3}{6a} .$$

34.3. *Работа по постройке пирамиды*

Пусть необходимо построить пирамиду высотой h со стороной основания a из материала с плотностью ρ. Требуется найти работу по возведению этой пирамиды (рис. 11).

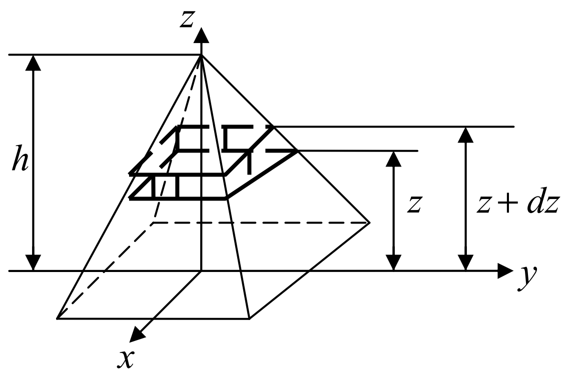


Рис. 11. *Вычисление работы по постройке пирамиды.*

Для того чтобы увеличить высоту пирамиды на dz, надо затратить материал массой $dm = \rho dV = \rho (FG)^2 dz$. Так как треугольник EOB подобен треугольнику EO_1G, то $\frac{BE}{GE} = \frac{OE}{O_1E} = \frac{h}{h - z}$. Так как треугольник EAB подобен треугольнику EFG, то $\frac{AB}{FG}=\frac{BE}{GE}$. Отсюда следует, что $\frac{a}{FG}=\frac{h}{h-z}$, т.е. $FG=\frac{a(h-z)}{h}$. Таким образом, сила тяжести, действующая на выделенный слой материала, будет равна $dP = g\rho dV = \frac{\rho g a^2}{h^2}(h-z)^2\,dz$. Элемент работы определяется формулой $dA = z\,dP$. Тогда работа по возведению всей пирамиды будет равна

$$A=\frac{\rho\, g\, a^2}{h^2}\int_0^h (h^2 z-2\,h\,z^2+z^3)\,dz=\frac{\rho\, g\, a^2 h^2}{12}\ .$$

34.4. *Давление жидкости на вертикально погруженную пластинку*

Пусть в жидкость с плотностью ρ вертикально погрузили пластину. Требуется вычислить давление, оказываемое со стороны жидкости на пластину (рис. 12).

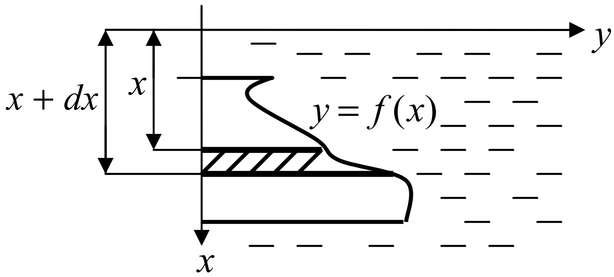


Рис. 12. *Вычисление давления жидкости на вертикально погружённую пластину.*

Давление на глубине x обозначим через $\mathrm{P}(x)$, тогда давление в слое жидкости от x до $x+dx$ будет равно

$$d\mathrm{P}=\rho\, g\, dV=\rho\, g\, x\, dS(x)=\rho\, g\, x\, f(x)\, dx\,,$$

где $f(x)$ – функция, которая описывает форму пластины. Отсюда находим давление, оказываемое со стороны жидкости на пластину:

$$\mathrm{P}=\rho\, g\int_a^b x\, f(x)\, dx\ .$$

Пример 1. Вычислить давление жидкости на пластину, имеющую форму полуокружности с радиусом R, диаметр которой совпадает с поверхностью (рис. 13).

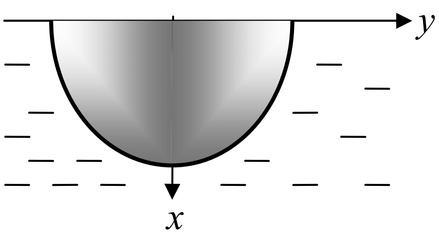


Рис. 13. *Вычисление давления жидкости на пластину, имеющую форму полуокружности с радиусом R.*

В данном примере $f(x)=2\sqrt{R^2-x^2}$, следовательно, давление жидкости на пластину равно $P = 2\rho g\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$. Используя метод замены переменной интегрирования, показать *самостоятельно*, что давление равно $P = \frac{2}{3}\rho g R^3$.

34.5. *Вторая космическая скорость*

Известно, что на любое тело массой m, которое находится на высоте x над поверхностью Земли, имеющей массу M и форму шара радиусом R, действует сила притяжения Земли $F = \gamma\frac{m M}{(R + x)^2}$, где γ – гравитационная постоянная.

Второй космической скоростью называется скорость, при которой тело не возвращается на Землю.

Это означает, что телу придаётся кинетическая энергия $K = \frac{mV^2}{2}$ (V – скорость движения), причём оно может переместиться в бесконечно удалённую точку по отношению к Земле. Для того чтобы переместить тело в бесконечно удалённую точку, необходимо совершить работу против сил гравитации $A = \int_0^\infty F dx = \gamma mM\int_0^\infty \frac{dx}{(R + x)^2} = \frac{\gamma mM}{R}$. Приравнивая полученное выражение для работы значению кинетической энергии, получим выражение для второй космической скорости

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = 11{,}186\left(\frac{км}{сек.}\right)}.$$

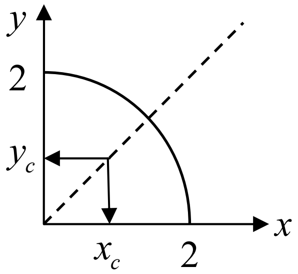
34.6. *Механические приложения определённого интеграла*

1. Пусть неоднородный стержень расположен на отрезке $[a;b]$, на котором его линейная плотность $\rho(x)$ является *непрерывной функцией*. Тогда его массу вычисляют по формуле $\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\,dx}$, а абсциссу центра тяжести – $\boxed{x_c = \frac{1}{m}\int_a^b x\rho(x)\,dx}$.

○ Для нахождения координат центра тяжести плоской физической нити с равномерным распределением массы по её длине ($\rho(x) = \mathrm{const}$), форма которой описывается функцией $f(x)$, применяют формулы:

$$\boxed{x_c=\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}=\frac{\int\limits_a^b xdl}{\int\limits_a^b dl}};\quad \boxed{y_c=\frac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}=\frac{\int\limits_a^b ydl}{\int\limits_a^b dl}}.$$ ○

Пример 2. Найти центр тяжести плоской фигуры, заданной уравнениями $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$.



Заданная фигура лежит в первом квадранте декартовой системы координат. Она симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, следовательно, выполняется равенство

$$\boxed{x_c=y_c=\frac{1}{l}\int\limits_a^b xdl}.$$

Для упрощения вычислений запишем уравнение окружности в параметрическом виде $\begin{cases} x=2\cos t;\ \ y=2\sin t \\ 0\leq t\leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Вычислим первые производные от координат $\begin{cases} x_t^{'}=-2\sin t \\ y_t^{'}=2\cos t \\ 0\leq t\leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Следовательно,

$$dl=\sqrt{(x_t^{'})^2+(y_t^{'})^2}\,dt=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=2dt.$$

Так как длина всей окружности $\boxed{L=2\pi R}$, то длина её четверти $l=$ $=\frac{1}{4}\cdot L=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot 2=\pi$. Таким образом, координаты центра тяжести данной однородной фигуры равны

$$x_c=y_c=\frac{1}{l}\int\limits_a^b xdl=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\,2dt=\frac{4}{\pi}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}.$$

○ Для нахождения координат центра тяжести криволинейной трапеции (см. рис. 1б, ***30***) используют выражения

$$\boxed{x_c=\frac{\int\limits_a^b xf(x)\,dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}};\quad \boxed{y_c=\frac{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{2\int\limits_a^b f(x)dx}}.$$ ○

III

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 1

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_0^1 e^x\,dx$; $\int_0^1 x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_1^4 \left(x^2 + x - 5 \right) dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = \cos x$; $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3} \right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_0^1 x^3\,dx$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}$; в) $\int_0^1 x\,4^x\,dx$; г) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x} + 5}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = 4 - x^2$; $y = 0$; б) $y = x^2\sqrt{9 - x^2}$; $y = 0$; $x \in [0; 3]$; в) $\rho = 1 - \sin\varphi$; $\rho = 1$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$; б) $x^2 - y^2 = 4$; $y = \pm 2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \end{cases} \quad (\textit{петля}).$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y^2 = 4x$; $x \in [0; 1]$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^2 + 1 \right) dx$; б) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgx\,dx$; г) $\int_0^1 \ln x\,dx$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 2

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_1^2 \left(x^2+1\right)dx$; $\int\limits_1^2 x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_0^2 e^{x^2}\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\sin x$; $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж.*

а) $x\,y=4$; $y=0$; $x=1$; $x=4$; б) $y=x^2\sqrt{4-x^2}$; $y=0$; $x\in[\,0;\ 2\,]$;

в) $\rho=\sqrt{\cos(2\varphi)}$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж.*

а) $y=x^2$; $y=0$; $x=2$; б) $\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$; $y\ge 3$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=1-\ln(\cos x);\ x\in\left[\,0;\ \frac{\pi}{6}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y=\dfrac{x^3}{3}$; $x\in[\,0;\ 1\,]$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x}$; б) $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{arctg\,x\,dx}{x^2+1}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tgx\,dx$; г) $\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{x^2-4x+3}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 3

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_1^2 e^x\,dx$; $\int_1^2 (x-1)dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_0^\pi \sin x\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=3x^2+x$; $x\in[0;\ 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_0^1 2^x\,dx$; б) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$; в) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} x\sin x\,dx$; г) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+1}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y^2=2x+4$; $x=0$; б) $x=y^2(y-1)$; $x=0$; в) $\rho=1-\sin\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y^2=x$; $x=1$; б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=1-\ln(\sin x);\ x\in\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y=\cos x$; $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^\infty \frac{dx}{9+x^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$; в) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x}$; г) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 4

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^1 \left(x^2 + 1 \right) dx$; $\int\limits_0^1 \frac{x}{2} dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_0^{\pi} \cos x \, dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = 2^x$; $x \in [0;\ 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_2^3 \left(1 + 2x + 3x^2\right) dx$; б) $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx}{x^2}$; в) $\int\limits_1^e \frac{\ln x \, dx}{x}$; г) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + 2}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$; б) $\begin{cases} x = 4\left(t - \sin t\right) \\ y = 4\left(1 - \cos t\right) \end{cases}$; $y \geq 4$; в) $\rho = 2\sqrt{\cos\left(2\varphi\right)}$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x^2$; $y = x$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; $y \geq 1$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x = 6t^2 \\ y = 2t\left(3 - t^2\right) \end{cases} \text{(петля)}.$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y = \sin x$; $x \in [0; \pi]$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x + 3) dx$; б) $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x \ dx}{x^3}$; в) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4}$; г) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 5

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_1^2 x^2\,dx$; $\int_1^2 (x+3)\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_1^3 2^x\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=x^2+3$; $x\in[0;\ 3]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; б) $\int_3^8 \frac{dx}{x^2-6x+34}$; в) $\int_0^1 x\,6^x\,dx$; г) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=\ln x$; $y=0$; $x=e$; б) $y=3\sin x$; $y=\sin x$; $x\in[0;\pi]$;

в) $\rho=3(1+\sin\varphi)$; $\rho=3$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $x=y^2$; $y=x$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; $y\ge 2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\rho=2(1+\cos\varphi);\ \varphi\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^\infty (x^2+x-1)\,dx$; б) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^3-1}$; в) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2-1}$; г) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 6

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_1^e \ln x \, dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = x^2 + x - 3$; $x \in [0; 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{7-6x-2x^2}}$; в) $\int\limits_0^1 x 10^x \, dx$; г) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+3}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x^3$; $y = 8$; $x = 0$; б) $y = (x-2)^3$; $y = 4x - 8$;

в) $\rho = 2(1+\sin\varphi)$; $\rho = 2$ (*вне кардиоиды*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x^2$; $y = 2x$; б) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x; \; x \in \left[0; \; \frac{7}{9}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y = \frac{x^3}{3}$; $x \in [-2; \, 2]$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} \, dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+9}$; в) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; г) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 7

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = 3x^2 + 2x - 1;\;\; x \in [1;\; 3]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_0^1 e^x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, \sin(2x)dx$; в) $\int\limits_1^2 x\, 5^x\, dx$; г) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = \sin x$; $y = 0$; $x \in [0; \pi]$; б) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$; $y \geq 1$; в) $\rho = 2\sin\varphi$; $\rho = 5\sin\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x^2$; $y = 5x$; б) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; $y = \pm 2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\rho = 5(1 - \cos\varphi);\; \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3};\; 0\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y = \dfrac{x^2}{2}$; $x \in [0; \sqrt{3}]$; (Oy).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{4 + x^2}$; б) $\int\limits_{-2}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2 - 1)^2}$; в) $\int\limits_{-5}^{5} \dfrac{dx}{x + 5}$; г) $\int\limits_1^2 \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x - 1}}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 8

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_1^2 e^{3x}\,dx$; $\int_1^2 x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_0^1 arctg\,x\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=7x^2-2x+6$; $x\in[0;\ 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})dx}{x^2}$; б) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{e^x+1}$; в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+4}}dx$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $xy=6$; $x+y=7$; б) $y=\sqrt{e^x-1}$; $y=5\ln 2$; $x=0$;

в) $\rho=\sin\varphi$; $\rho=\cos\varphi$; $\varphi\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=e^x$; $y=e^{2x}$; $x=1$; б) $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$; $y\geq 1$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x=2t\left(3-t^2\right) \\ y=6t^2 \end{cases} \text{ (петля).}$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y^2=4+x$; $x\in[-\sqrt{6};\sqrt{6}]$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; б) $\int_0^{\infty} x e^{-2x}\,dx$; в) $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{5x-1}$; г) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 9

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_1^{\sqrt{3}} arctg\, x\, dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = x^2 - 2x + 7$; $x \in [0;\ 1]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$; б) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin(3x)\, dx$; г) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} dx$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x$; $y = 2x$; $x = 3$; б) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$; $x \geq 3\sqrt{3}$; в) $\rho = 4\cos\varphi$; $\rho = \cos\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = 2^x$; $y = 2^{3x}$; $x = 1$; б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; $y = \pm 2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y = \frac{x^2 - 2\ln x}{4};\ x \in [1;\ 2].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $\begin{cases} x = 9t^2 \\ y = 3t\left(3 - t^2\right) \end{cases}$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, dx$; б) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{e^{-x} + 3}$; в) $\int_1^5 \frac{dx}{x - 2}$; г) $\int_2^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{x - 2}}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **10**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; $\int\limits_0^1 \sin x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_1^3 \left(x^2 + 7x - 2 \right) dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$; $x \in [0;\ 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x^2}$; б) $\int\limits_1^e \dfrac{1+\ln x}{x} dx$; в) $\int\limits_1^3 x\,7^x\,dx$; г) $\int\limits_1^4 \dfrac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} dx$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x$; $y = 3x$; $x = 2$; б) $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$; $y \ge 2$;

в) $\rho = 3\left(1 - \cos\varphi\right)$; $\rho = 3$ (*вне кардиоиды*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = \dfrac{1}{x}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 3$; б) $x = \left(y - 2 \right)^3$; $x = 2y - 4$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t\left(3 - t^2\right) \end{cases} \text{(петля)}.$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2 + \left(y - 1 \right)^2 = 16$; от $A\left(4;\ 1 \right)$ до $B\left(2\sqrt{2};\ 3\right)$; $\left(Oy \right)$.

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(2x - 7 \right) dx$; б) $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x \ln^3 x}$; в) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\int\limits_1^4 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **11**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^1 e^x\,dx$; $\int\limits_0^1 \cos x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg\,x\;dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=x^3-x+12$; $x\in[1;\;3]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+10}$; в) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x\,dx}{x^4}$; г) $\int\limits_1^2 \frac{7x\,dx}{\sqrt{5x-1}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=-x^2+1$; $y=0$; б) $x=(y-2)^3$; $x=y-2$; в) $\rho=3\sin\varphi$; $\rho=\sin\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $x\,y=5$; $y=0$; $x=1$; $x=2$; б) $\begin{cases} x=16\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$; $y\geq 2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\rho=2(1+\sin\varphi);\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2=4+y$; $x\in[-\sqrt{6};\sqrt{6}]$; (Oy).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_0^{\infty}(4x^3-15)dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{3x}-1)dx}{e^x}$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{3x-1}$; г) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^5 x}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 12

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^1 x^2\,dx$; $\int\limits_0^1 (x+1)dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_1^3 e^{3x}\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=x^2+x-2$; $x\in[2;\ 4]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_1^e \frac{\ln x\,dx}{x^3}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 x\,dx$; г) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=-x^2+3$; $y=0$; $x\ge 0$; б) $y=x\sqrt{16-x^2}$; $y=0$; $x\in[0;\ 4]$;

в) $\rho=\sin\varphi$; $\rho=2\sin\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=e^{2x}$; $y=0$; $x=0$; $x=1$; б) $y=x^2$; $y=0$; $x=2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\rho=3(1+\sin\varphi);\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $(x-4)^2+y^2=36$; от $A\left(2;4\sqrt{2}\right)$ до $B(4;6)$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_0^\infty x^5\,dx$; б) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3-5x^2}$; в) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{2x-4}$; г) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln^7 x}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **13**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_1^3 x^2\,dx$; $\int\limits_1^3 x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_0^2 \left(x^2 - 2x \right) dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = 5^x$; $x \in [0;\ 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_{-2}^{1} \left(1 + x - 3x^2 \right) dx$; б) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}$; в) $\int\limits_1^e \dfrac{\ln x\,dx}{x^6}$; г) $\int\limits_1^9 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{2x+7}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = x$; $y = 0$; $x = 2$; б) $\begin{cases} x = 3\left(t - \sin t \right) \\ y = 3\left(1 - \cos t \right) \end{cases}$; $y = 3$; $x \in [0;\ 3]$;

в) $\rho = 4\cos\varphi$; $\rho = 2\cos\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = 3^x$; $y = 3^{2x}$; $x = 1$; б) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; $y = \pm 1$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\rho = 4\left(1 - \sin\varphi \right);\ \varphi \in \left[0;\ \frac{\pi}{2} \right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $\begin{cases} x = 3t\left(3 - t^2 \right) \\ y = 9t^2 \end{cases}$ (Oy).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_3^\infty \dfrac{x^2 dx}{x^2 - 4}$; в) $\int\limits_0^7 \dfrac{dx}{x - 7}$; г) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} \dfrac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **14**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_2^3 \left(x^2 + 1 \right) dx$; $\int\limits_2^3 x\, dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_0^1 e^{3+x}\, dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x) = \cos x$; $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3} \right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_0^5 \dfrac{dx}{x^2 + 25}$; б) $\int\limits_2^5 \dfrac{dx}{x^2 + 2x + 10}$; в) $\int\limits_0^1 x\, 9^x\, dx$; г) $\int\limits_2^3 \dfrac{x\, dx}{\sqrt{4x + 3}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y = e^x$; $y = e^{3x}$; $x = 2$; б) $x = 4 - y^2$; $x = y^2 - 2y$; в) $\rho = 6\cos\varphi$; $\rho = 2\cos\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y = -x^2 + 2$; $y = 0$; б) $\begin{cases} x = 3\left(t - \sin t \right) \\ y = 3\left(1 - \cos t \right) \end{cases}$; $y = 0$; $x \in \left[0; \pi \right]$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y = \ln\left(x^2 + 1 \right);\ x \in \left[2; 3 \right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y^2 = 9x$; от $A(0; 0)$ до $B(4; 6)$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_{-\infty}^0 \left(x^2 - x - 7 \right) dx$; б) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x\, dx}{x^3 + 8}$; в) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x}$; г) $\int\limits_4^9 \dfrac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} - 3}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **15**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_1^2 x\,dx$; $\int_1^2 x\sin x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_{-1}^{1} 2^{x^2}\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\sin(2x)$; $x\in\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_1^6\left(x-\frac{6}{x}\right)dx$; б) $\int_2^3\frac{dx}{2x^2+8x-3}$; в) $\int_0^1 x11^x\,dx$; г) $\int_0^4\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x+9}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=3^x$; $y=3^{2x}$; $x=1$; б) $y=(x+1)^2$; $x=y-1$; в) $\rho=2\sin\varphi$; $\rho=2\cos\varphi$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=x$; $y=4x$; $x=3$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; $y=\pm 3$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x=3t\left(3-t^2\right) \\ y=9t^2 \end{cases} \quad (\textit{петля}).$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2+(y-2)^2=36$; от $A\left(2\sqrt{6};\,1\right)$ до $B(4;\,6)$; (Oy).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^\infty\left(1-2x^2\right)dx$; б) $\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln^8 x}$; в) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x-1}$; г) $\int_1^4\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **16**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^1 \left(2x^2+1\right)dx$; $\int\limits_0^1 \left(2x+1\right)dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_{-1}^1 \left(5x^2-1\right)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\cos\left(3x\right)$; $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_{-1}^1 \left(x^2+1\right)dx$; б) $\int\limits_2^{\frac{7}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\left(2x\right)dx$; г) $\int\limits_0^3 \dfrac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x+1}+2}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=\cos x$; $y=0$; $x\in\left[0;\pi\right]$; б) $y=2^x$; $y=2x^2$; $x=1$;

в) $\rho=1-\cos\varphi$; $\rho=1$ (*вне окружности*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=-x^2+2$; $y=0$; б) $\begin{cases} x=16\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$; $y\ge 2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x;\ x\in\left[0;\ \frac{8}{9}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t\left(1-t^2\right) \end{cases}$; $\left(Ox\right)$.

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^2\,dx}{\left(1+x\right)^3}$; в) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{2x-1}$; г) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{x\ln^4 x}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 17

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_1^2 x^2\,dx$; $\int\limits_1^2 x\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_{-1}^{1} 3^{x^2}\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\sin(2x)$; $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_1^3 \left(x^2-2x+5\right)dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx$; г) $\int\limits_1^4 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+9}\,dx$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=x^2$; $y^2=4-x^2$; б) $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t\end{cases}$; $x\ge 1$;

в) $\rho=1-\cos\varphi$; $\rho=1$ (*вне кардиоиды*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=\cos x$; $y=0$; $x=-\pi$; $x=0$; б) $x=\sqrt{4-y^2}$; $y=0$; $y=1$; $x=0$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x=16t^2 \\ y=4t\left(4-t^2\right)\end{cases} (\textit{петля}).$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2+y^2=25$; от $A(-3;\,4)$ до $B(4;\,3)$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+5)\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+8}$; в) $\int\limits_0^8\dfrac{dx}{x-7}$; г) $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x\ln^3 x}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 18

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_0^1 (x+2)dx$; $\int_0^1 (x-2)dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_0^1 6^x\ dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\cos(3x)$; $x\in[0;\ \pi]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_{-1}^{2}\left(x^3+1\right)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{tg^3 x}\,dx}{\cos^2 x}$; в) $\int_0^1 \arccos x\,dx$; г) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x+8}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж.*

а) $xy=3$; $y=0$; $x\in[1;\ 3]$; б) $y=x^2$; $y=0$; $x=1$;

в) $\rho=2(1+\cos\varphi)$; $\rho=2$ (*вне окружности*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж.*

а) $y=\sin x$; $y=0$; $x=\frac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases} x=9\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$; $y\geq 2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\rho=1-\sin\varphi\ ;\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2=9y$; от $A(0;0)$ до $B(6;4)$; (Oy).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^{\infty}(2x-1)dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{8+4x+x^2}}$; в) $\int_0^6\frac{dx}{x-1}$; г) $\int_1^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

***Вариант* 19**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_2^4 e^x\,dx$; $\int_2^4 e^{5x}\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_{-1}^{1}\left(3x^2-6x\right)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\sin(2x)$; $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg\,x\,dx$; б) $\int_0^{\frac{1}{8}}\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$; в) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$; г) $\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y^2=1+x$; $x=0$; б) $y=4-x^2$; $y=x^2-2x$;

в) $\rho=1+\cos\varphi$; $\rho=1$ (*вне окружности*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=tg\,x$; $y=0$; $x=\frac{\pi}{4}$; б) $\begin{cases}x=3\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$; $y\ge 1$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=\ln x;\ x\in\left[\frac{3}{4};\frac{12}{5}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $\begin{cases}x=2t\left(3-t^2\right)\\ y=6t^2\end{cases}$ (Oy).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^{\infty}(3x+1)dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+7}$; в) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x+1}$; г) $\int_1^4\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **20**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_0^1 (x+1)dx$; $\int_0^1 (x^2-1)dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_{-1}^{1} (4x^2-1)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\cos x$; $x\in[0;\ \pi]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\ dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{3-2x-x^2}$; в) $\int_1^e \ln^2 x\, dx$; г) $\int_4^9 \frac{dx}{4\sqrt{x}+1}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y^2=x$; $y^2=2x$; $x=1$; б) $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}$; $y\ge 1$;

в) $\rho=4(1+\cos\varphi)$; $\rho=4$ (*вне окружности*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=x$; $y=4x$; $x=2$; б) $xy=6$; $y=1$; $y=6$; $x=0$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases};\ y=0;\ t\in[0;\ 2\pi].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $y^2=4x$; от $A(0;0)$ до $B(3;2\sqrt{3})$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+3}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{2x}-1)\,dx}{e^x}$; в) $\int_0^2 \frac{dx}{2x-1}$; г) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+x-6}dx$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **21**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_1^2 x^2\,dx$; $\int\limits_1^2 x\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_{-1}^{1}\left(3x^2+2\right)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=2^x$; $x\in[0;\ 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{2x+5}$; б) $\int\limits_2^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$; в) $\int\limits_0^1 (x+1)\,3^x\,dx$; г) $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=x^2$; $y=2x^2$; $x=1$; б) $xy=6$; $y=1$; $y=6$; $x=0$; в) $\rho=2tg\,\varphi$; $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=3\sin x$; $x\in[0;\ \pi]$; б) $x=2\sqrt{y}$; $y=4$; $x=0$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=\dfrac{t}{3}\left(t^2-3\right) \end{cases} (\textit{петля}).$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2+y^2=4$; от $A(2;\ 0)$ до $B\left(\sqrt{3};1\right)$; (Oy).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_0^{\infty}\left(x\sqrt[3]{x}+1\right)dx$; б) $\int\limits_1^{\infty} x\,e^{-x}\,dx$; в) $\int\limits_{-4}^{0}\dfrac{dx}{x+4}$; г) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 22

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_{-2}^{-1} 2^x\,dx$; $\int\limits_{-2}^{-1} 2^{3x}\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_{-1}^{1}\left(4x^2+5\right)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\sin(3x)$; $x\in\left[\,0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_{1}^{2}\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)dx$; б) $\int\limits_{0}^{\ln 2}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{e^x+1}$; в) $\int\limits_{1}^{2}(3x-2)\,e^x\,dx$; г) $\int\limits_{2}^{7}\dfrac{dx}{\sqrt{5x+9}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $y=5-x^2$; $y=0$; $x=0$; б) $xy=2$; $y=1$; $y=2$; $x=0$;

в) $\rho=1+\cos\varphi$; $\rho=1$ (*вне окружности*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=3\cos x$; $y=0$; $x=0$; б) $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=\ln\left(\sin x\right);\ x\in\left[\,\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\,\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $\begin{cases}x=6t^2\\ y=2t\left(3-t^2\right)\end{cases}$ $\left(Ox\right)$.

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^x\,dx$; б) $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2\left(x+1\right)}$; в) $\int\limits_{-2}^{0}\dfrac{dx}{x+2}$; г) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{dx}{x\ln^3 x}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант **23**

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2-2x+9\right)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=e^{3x}$; $x\in\left[0;\ 2\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} ctg\,x\,dx$; б) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+2x-x^2}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-3\right)\sin\left(5x\right)dx$; г) $\int\limits_0^4\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}dx$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $xy=1$; $y=0$; $x=1$; $x=2$; б) $y=x^2$; $y^2=x$; в) $\rho=3tg\,\varphi$; $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=1-x^2$; $y=0$; б) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=\ln\left(1-x^2\right);\ x\in\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $\begin{cases} x=t\left(3-t^2\right) \\ y=3t^2 \end{cases}$ $\left(Oy\right)$.

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int\limits_{-\infty}^{0}\dfrac{x^2}{2}dx$; б) $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(x+1\right)}$; в) $\int\limits_0^3\dfrac{dx}{x-1}$; г) $\int\limits_0^1\dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 24

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_0^2 \left(3x^2+11\right)dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=\cos(2x)$; $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; б) $\int_{-2}^{1} \frac{(x-3)dx}{x^2+4x+14}$; в) $\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$; г) $\int_3^5 \sqrt{3x-7}\,dx$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $xy=1$; $y=0$; $x=2$; $x=4$; б) $x=4-(y-1)^2$; $x=y^2-4y+3$;

в) $\rho=tg\,\varphi$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $y=2\sin x$; $y=0$; $x=\frac{\pi}{4}$; б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=\ln(\cos x);\ x\in\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2+y^2=16$; от $A\left(2;\,2\sqrt{3}\right)$ до $B\left(3;\,\sqrt{7}\right)$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^{\infty} \sqrt[7]{x^5}\,dx$; б) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+6x+11}$; в) $\int_0^6 \frac{dx}{6-x}$; г) $\int_0^{16} \frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}\,dx$.

Задания для самостоятельного решения

Определённый интеграл

Вариант 25

1. Не вычисляя интегралов, указать, *какой из них больше* $\int_0^1 e^x\,dx$; $\int_0^1 x^2\,dx$.

2. Оценить интеграл, т.е. указать *два числа*, *между которыми заключено значение интеграла* $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$.

3. Найти *среднее интегральное значение функции* на интервале интегрирования $f(x)=3x^2+x$; $x\in[0;\ 2]$.

4. Вычислить указанные *интегралы*:

а) $\int_2^3 \left(1+2x+3x^2\right)dx$; б) $\int_3^8 \frac{dx}{x^2-6x+34}$; в) $\int_0^1 x10^x\,dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

5. Найти *площадь плоской фигуры*, ограниченной указанными линиями. *Выполнить чертёж*.

а) $xy=6$; $x+y=7$; б) $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}$; $x\ge 3\sqrt{3}$;

в) $\rho=3\left(1-\cos\varphi\right)$; $\rho=3$ (*вне кардиоиды*).

6. Найти *объём тела*, *полученного вращением* указанных линий: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy. *Выполнить чертёж*.

а) $xy=5$; $y=0$; $x=1$; $x=2$; б) $y=x^2$; $y=0$; $x=2$.

7. Найти *длину линии* или *её части*, соответствующей указанному интервалу изменения аргумента или указанным точкам на данной линии

$$y=\ln\left(x^2+1\right);\ x\in[2;\ 3].$$

8. Найти *площадь поверхности*, *полученной вращением* данной линии или её части, соответствующей данному интервалу изменения аргумента или данным точкам на линии $x^2+y^2=25$; от $A(-3;\ 4)$ до $B(4;\ 3)$; (Ox).

9. Исследовать на сходимость указанные *несобственные интегралы*:

а) $\int_0^{\infty}(3x+1)dx$; б) $\int_2^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^3}$; в) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x-1}$; г) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^4 x}$.

Список использованных источников

1. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Ч.1. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1959. – 466 с.
2. Лузин Н.Н. Интегральное исчисление. – Москва: Высшая школа. – 1961. – 415 с.
3. Араманович И.Г., Гутер Р.С., Люстерник Л.А. и др. Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1961. – 350 с.
4. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1964. – 683 с.
5. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Т.1. – Москва: Просвещение. – 1966. – 640 с.
6. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – Москва: Наука. – 1967. – 736 с.
7. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – Москва: Наука. – 1967. – 704 с.
8. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1972. – 640 с.
9. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. – Минск: Вышэйшая школа. – 1973. – 350 с.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. – Москва: Наука. – 1974. – 479 с.
11. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Т.1. – Москва: Наука. – 1974. – 520 с.
12. Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С., Мордкович А.Г. Математический анализ. Интегральное исчисление. – Москва: Просвещение. – 1979. – 175 с.
13. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 1980. – 496 с.
14. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Т.2. – Минск: Вышэйшая школа. – 1985. – 221 с.
15. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. – Киев: Вища школа. – 1987. – 552 с.
16. Ивашев-Мусатов О.С. Начала математического анализа. – Москва: Наука. – 1988. – 288 с.
17. Зайцев И.А. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1991. – 400 с.
18. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. – Санкт-Петербург: Мифрил. – 1996. – 416 с.

19. Шипачев В.С. Высшая математика. – Москва: Высш. школа. – 1998. – 479 с.
20. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного.– Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1999. – 528 с.
21. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. школа. – 1999. – 695 с.
22. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Ч.1. – Москва: МФТИ. – 2000. – 359 с.
23. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 592 с.
24. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. – Москва: ООО "Изд-во Астрель"; ООО "Изд-во АСТ". – 2001. – 656 с.
25. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 672 с.
26. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. – Москва: ООО "ТК Велби". – 2002. – 592 с.
27. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – Москва: МЦНМО. – 2002. – 664 с.
28. Гурова З.И., Каролинская С.Н., Осипова А.П. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 352 с.
29. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – 864 с.
30. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч.2. Основы математического анализа. – Минск: Амалфея. – 2003. – 352 с.
31. Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределённых интегралов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – 200 с.
32. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.
33. Геворкян П.С. Высшая математика. Основы математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 240 с.
34. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 648 с.
35. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 400 с.

36. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Ч. 1. – Москва: Айрис-пресс. – 2005. – 288 с.
37. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. – Москва: Эксмо. – 2005. – 272 с.
38. Желтухин В.С. Неопределённые интегралы: методы вычисления. – Казань: Изд-во КГУ. – 2005. – 78 с.
39. Орловский Д.Г. Неопределённый интеграл. Практикум.– Санкт-Петербург: Лань. – 2006. – 432 с.
40. Зубков В.Г., Ляховский В.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б. Курс высшей математики: Учебное пособие для студентов заочной (дистанционной) формы обучения. Т.2. – Москва: МИИР. – 2007. – 269 с.
41. Гаврилова Р.М., Костецкая Г.С., Карапетянц А.Н. Методические указания для самостоятельной работы студентов 1 курса физического факультета по теме «Определенный интеграл». Приложения, часть 2. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ. – 2003. – 25 с.
42. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.

Терехов С.В.

Варюхин В.Н.

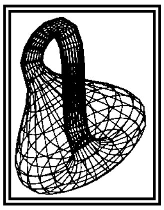
Математическая библиотечка студента-физика

Том 2

(*часть* IV)

Решение задач

по теории рядов, дифференциальным уравнениям I и II порядков



IV. *Ряды. Дифференциальные уравнения I и II порядков*

Тема: *Ряды*

<u>35</u>. “*Числовые ряды и их свойства*”

35.1. *Понятие числового ряда*

Ряды широко используются при решении различных задач в науке и технике.

Выражение вида $\boxed{a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} a_i}$ $(a_i \in R,\ i = 1 \div \infty)$ называется ***бесконечным числовым рядом*** или ***рядом***. Числа $\boxed{a_i\ (i = 1 \div \infty)}$ называются ***членами ряда***, выражение $\boxed{a_n = f(n)}$ называется ***общим членом ряда***.

Обычно нумерацию членов ряда начинают с 1, но возможна нумерация членов ряда с 0, например, $\boxed{a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_i}$, или с произвольного числа k – $\boxed{a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+n} + ... = \sum_{i=k}^{\infty} a_i}$.

Пример 1. Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...$.

При $\boxed{i = 1}$: $a_1 = \frac{1}{2}$; $\boxed{i = 2}$: $a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$; $\boxed{i = 3}$: $a_3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$; $\boxed{i = 4}$: $a_4 = \frac{1}{2^4}$; $\boxed{i = 5}$: $a_5 = \frac{1}{2^5}$, следовательно, общий член ряда $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Пример 2. Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + ...$.

При $\boxed{i = 1}$: $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, $\boxed{i = 2}$: $a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3}$, $\boxed{i = 3}$: $a_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$, $\boxed{i = 4}$: $a_4 = \frac{1}{4 \cdot 5}$, $\boxed{i = 5}$: $a_5 = \frac{1}{5 \cdot 6}$, следовательно, общий член ряда $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

Построим из членов ряда новую последовательность чисел так:

$$S_1 = a_1;$$
$$S_2 = a_1 + a_2;$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n .$$

Каждый член этой последовательности представляет собой сумму соответствующего числа первых членов числового ряда.

Величина $\boxed{S_i}$ называется ***i-ой частичной суммой*** *числового ряда*.

○ Так как числовой ряд содержит бесконечное число членов, то и последовательность частичных сумм будет содержать бесконечно много членов. ○

Пример 3. Вычислить первые четыре частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

$$S_1 = 1; \quad S_2 = 1 + 2 = 3; \quad S_3 = 1 + 2 + 3 = 6; \quad S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***сходящимся***, если $\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = S}$, где ***конечное число*** S называется ***суммой числового ряда***, т.е. $\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$. Если *предел частичных сумм* ***бесконечен*** или ***не существует***, то ряд называется ***расходящимся***.

○ Для сходящегося числового ряда с суммой S говорят, что *ряд сходится к числу* S. ○

○ Несмотря на то, что числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и его сумма $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обозначаются *одинаково*, из контекста поставленной задачи всегда понятно, о чём идёт речь в условии задания. ○

Исследование ряда на сходимость с использованием *n-ой частичной суммы* S_n называется ***исследованием ряда на сходимость по определению***.

Пример 4. Проверить на *сходимость* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *по определению*.

Для того чтобы вычислить *n-ую частичную сумму* S_n, представим общий член ряда $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ в виде суммы простых дробей (см. п. 27.2, <u>***27***</u>)

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} \Rightarrow A(n+1) + Bn = 1 .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\begin{cases} n\ : A+B=0 \\ n^0 : A=1 \end{cases}$. Откуда находим, что $A=1$, а $B=-1$. Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Вычислим n-*ую частичную сумму* S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cancel{\ldots} + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Из записи n-*ой частичной суммы* S_n видно, что после раскрытия скобок и сокращения подобных членов, она примет вид $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Вычислим сумму ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. Так как предел равен конечному числу, то данный *ряд сходится*.

○ В теории *числовых рядов* решают две задачи: 1) *исследуют ряд на сходимость*, т.е. определяют *конечна*, *бесконечна* или *не существует сумма заданного ряда* без её конкретного вычисления с помощью определённых признаков сходимости; 2) *вычисляют значение суммы ряда*, что возможно в исключительных случаях; если не удаётся точно вычислить сумму ряда, то её находят приближёнными методами. ○

35.2. *Свойства сходящихся рядов*

1. *Отбрасывание* ***конечного числа членов сходящегося ряда*** не влияет на *сходимость этого ряда*.

Док-во: Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится* и *его сумма* равна S. Отбросим l первых членов ряда и обозначим их сумму через S_l, а через S_{n-l} – сумму оставшегося ряда с l отброшенными членами, тогда

$$S_n = S_l + S_{n-l}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-l} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_l) = S - S_l$.

Так как полученное число *конечно*, то ряд с отброшенными l первыми членами ряда также *сходится*.

2. Если *все члены сходящегося ряда умножить на число* c, то *сходимость ряда не нарушается*, *а его сумма увеличится в* c *раз*.

3. Два *сходящихся* ряда $S_A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $S_B = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ можно почленно складывать и вычитать, при этом сумма получающегося ряда $S = S_A \pm S_B$, соответственно.

<u>**4**</u>. ***Необходимым***, ***но недостаточным***, ***признаком сходимости*** ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ является стремление общего члена ряда a_n к нулю при бесконечном возрастании номера n, т.е. $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$.

<u>Док-во:</u> Представим общий член ряда a_n в виде разности n-ой и $(n-1)$-ой частичных сумм: $a_n = S_n - S_{n-1}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ в силу *единственности предела* (см. п. 13.5, ***<u>13</u>***) имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Из рассмотренного свойства следует: при выполнении условия обращения в нуль общего члена ряда при бесконечном возрастании номера, ряд *может сходиться*, а *может и расходиться* (***ряд подозрителен на сходимость***). Если $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0}$ или указанный предел *не существует*, ***то ряд однозначно расходится***. В связи с этим при *исследовании рядов на сходимость* первым всегда применяют ***<u>необходимый признак сходимости</u>***, а затем – ***<u>достаточные признаки сходимости</u>***.

Пример 5. Установить возможность сходимости рядов

$$1).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};\quad 2).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad 3).\ \sum_{n=1}^{\infty} q^n\ \left(|q|<1\right).$$

1). Для первого ряда общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

ряд подозрителен на сходимость.

2). Для второго ряда общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0,$$

ряд подозрителен на сходимость.

3). Для третьего ряда общий член ряда $a_n = q^n$, поэтому при $|q|<1$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = 0,$$

ряд подозрителен на сходимость.
В силу того, что $|\,q\,| < 1$, то ряд является суммой бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен $a_1 = q$, т.е.

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}.$$

Так как *сумма ряда конечна*, то *ряд сходится*.
Отметим, что ***последний ряд при*** $|\,q\,| \geq 1$ ***расходится***, так как в этом случае его <u>*сумма равна бесконечности*</u>. Первый ряд, несмотря на выполнение ***необходимого признака***, *расходится*, а второй ряд – *сходится*, что будет доказано ниже.

Пример 6. Установить сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-3}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+5}$.

Первый *ряд подозрителен на сходимость*, так как при $n \to \infty$ его общий член ряда $a_n \approx \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (см. п. 14.4, <u>***14***</u>), а общий член второго ряда $a_n \approx \frac{3}{2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, т.е. *ряд расходится*.

<u>***36***</u>. "***Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов***"

36.1. *Сравнение знакоположительных рядов*

Если <u>*все члены ряда положительны*</u>, то ряд называется ***знакоположительным*** или ***положительным***.

Для *положительных рядов* всегда существует сумма, а частичные суммы удовлетворяют неравенству $S_{n+1} \geq S_n$, так как $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, а $S_n \geq 0$ и $a_{n+1} \geq 0$.

Рассмотрим <u>***достаточные признаки сходимости рядов***</u>.

<u>***Теорема 1***</u> (***признак сравнения***)**.** Если для двух положительных рядов $(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $(B) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, начиная с некоторого номера $n > N$, выполняется неравенство $\boxed{a_n \leq b_n}$, то из ***сходимости*** ряда (B) следует ***сходимость*** ряда (A), а из ***расходимости*** ряда (A) – ***расходимость*** ряда (B).

<u>***Док-во:***</u> Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет

на его сходимость, то без ограничения общности доказательства можно считать, что неравенство $a_n \le b_n$ выполняется с первых членов этих рядов. Обозначим n*-ые частичные суммы* этих рядов через A_n и B_n. Пусть ряд (B) сходится и его сумма равна S_B. Следовательно, частичные суммы этого ряда ограничены сверху суммой ряда, т.е. $B_n \le S_B$. Так как $a_n \le b_n$ и последовательности A_n и B_n неубывающие, то

$$A_n \le B_n \le S_B \;\Rightarrow\; A_n \le S_B ,$$

т.е. ряд (A) сходится. Аналогично доказывается и последнее утверждение теоремы (доказать *самостоятельно*).

○ ***В качестве рядов сравнения*** чаще всего используют ряды: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}}$ (***<u>ряд Дирихле</u>***), который ***сходится*** при $\boxed{p>1}$ и ***расходится*** при $\boxed{p\le 1}$; $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} q^n}$, который ***сходится*** при $\boxed{|\,q\,|<1}$ и ***расходится*** при $\boxed{|\,q\,|\ge 1}$. ○

Пример 1. Сравнить ряды $(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+3n+1}$ и $(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$, выяснить их сходимость.

Очевидно, что ***<u>необходимый признак сходимости</u>*** выполняется для обоих рядов. Ряд (B) сходится по ***<u>признаку сравнения</u>***, так как начиная с первого номера каждый член этого ряда меньше каждого члена ряда $(C)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, так как для ряда $p=2>1$:

$$i=1:\; b_1=\frac{1}{2} \;<\; c_1=1;$$

$$i=2:\; b_2=\frac{1}{8} \;<\; c_2=\frac{1}{4};$$

$$i=3:\; b_3=\frac{1}{18} \;<\; c_3=\frac{1}{9};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$i=n:\; b_n=\frac{1}{2n^2} \;<\; c_n=\frac{1}{n^2};\;\; \forall n\ge 1 \Rightarrow$$

по признаку сравнения *из сходимости ряда (C) следует сходимость ряда (B)*.

В свою очередь, начиная с первого члена каждый член ряда (A) будет меньше каждого члена ряда $(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$, следовательно, по ***<u>признаку сравнения</u>*** этот *ряд* также *сходится*:

$$i=1:\ a_1=\frac{1}{6}\quad<\quad b_1=\frac{1}{2};$$
$$i=2:\ a_2=\frac{1}{15}\quad<\quad b_2=\frac{1}{8};$$
$$i=3:\ a_3=\frac{1}{28}\quad<\quad b_3=\frac{1}{18};$$
…………………………………………..
$$i=n:\ a_n=\frac{1}{2n^2+3n+1}\ <\ b_n=\frac{1}{2n^2};\ \forall n\geq 1\ \Rightarrow$$
по признаку сравнения *из сходимости ряда* (B) *следует сходимость ряда* (A).

<u>Теорема 1*</u> (***предельный признак сравнения***)**.** Если для двух знакоположительных рядов $(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $(B)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ с ненулевыми членами справедливо предельное соотношение $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=C\ (0<C<\infty)}$, то ряды (A) и (B) или оба ***сходятся***, или оба ***расходятся***.

36.2. *Признак Даламбера*

<u>Теорема 2</u>*.** Пусть для положительного ряда $(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l}$. Тогда при $\boxed{l<1}$ ряд (A) ***сходится; при $\boxed{l>1}$ ряд (A) ***расходится***, а при $\boxed{l=1}$ ***<u>признак Даламбера</u> не работает***.

<u>Док-во:</u> Пусть $l<1$. Выберем число q такое, чтобы выполнялось двойное неравенство $l<q<1$. Так как при $n\to\infty$ отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to l$, а величина $q>l$, то существует такой номер N, что $\forall n>N$ будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, т.е.

$$a_2<qa_1;\quad a_3<qa_2<q^2a_1;\quad a_4<q\,a_3<q^3a_1;\quad \ldots;\quad a_{n+1}<q\,a_n<q^na_1.$$

В силу этих неравенств, начиная с номера N каждый член ряда (A) будет меньше каждого члена ряда $(B)=a_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$, который сходится, так как $q<1$, и представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии $S_B = \dfrac{a_1}{1-q}$. Следовательно, по ***признаку сравнения*** *ряд* (A) *сходится*. Аналогично доказывается случай, когда $l > 1$ (доказать *самостоятельно*).

Пример 2. Исследовать на *сходимость* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,2^n}$.

Очевидно, что ***необходимый признак сходимости*** ряда выполняется, т.е. *ряд подозрителен на сходимость*. Применим ***признак Даламбера***:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}\div\frac{1}{n\,2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,2^n}{(n+1)\,2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

следовательно, заданный *ряд сходится*.

36.3. *Интегральный и радикальный признаки Коши*

Если для ряда $(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ в выражении общего члена $a_n=f(n)$ заменить дискретную переменную n на непрерывный аргумент x $(n\to x)$, то получим функцию $f(x)$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям:
– *определена* на луче $[1;\,\infty)$;
– *непрерывна*, *положительна* и *монотонно убывает в области определения*. Тогда, если ***сходится*** несобственный интеграл I рода $\boxed{\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx}$, то ***сходится*** и ряд $\boxed{(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n}$, а в случае ***расходимости*** несобственного интеграла I рода $\boxed{\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx}$ – ***расходится*** и ряд $\boxed{(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n}$.

Док-во: Изобразим графически функцию $f(x)$ (рис. 1).

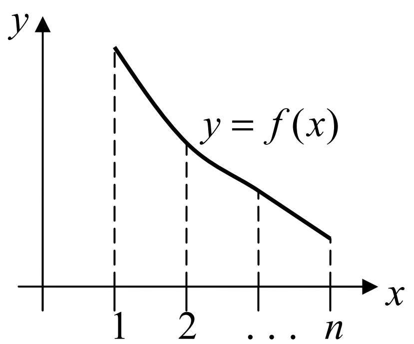


Рис. 1. *Непрерывная функция, отображающая числовой ряд.*

Так как функция $f(x)$ монотонно убывает, то для любого $x \in [1;\ \infty]$ и $n < x < n+1$ справедливы неравенства $f(n) > f(x) > f(n+1)$. Проинтегрируем эти неравенства

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx \ge \int_n^{n+1} f(x)\,dx \ge \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx.$$

В силу того, что $f(n) = a_n$ и $f(n+1) = a_{n+1}$, то вводя обозначение

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx\,,$$

перепишем неравенство в виде $a_n \ge b_n \ge a_{n+1}$.

Составим для ряда $(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ n*-ую частичную сумму*:

$$B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx + \ldots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx =$$

$$= \int_1^{n+1} f(x)\,dx = F(n+1) - F(1).$$

Если интеграл сходится, то $F(n+1)$ является конечным числом, а по признаку сравнения будет сходиться и ряд $(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$, в противоположном случае, когда $F(n+1) = \infty$, интеграл расходится, следовательно, будет расходиться и ряд $(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, если $p > 0$.

Так как $a_n = \dfrac{1}{n^p}$, то введём в рассмотрение определенную и непрерывно убывающую на луче $[1;\ \infty]$ функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ и вычислим несобственный интеграл I рода при $p \ne 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{S\to\infty} \int_1^S \frac{dx}{x^p} = \lim_{S\to\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^S = \lim_{S\to\infty} \frac{S^{1-p} - 1}{1-p}.$$

Отсюда видно, что

– при $\boxed{0 < p < 1}$ предел будет равен ∞, т.е. *интеграл расходится*, следовательно, и данный *ряд* тоже *расходится*;

– при $\boxed{p > 1}$ предел равен $\dfrac{1}{p-1}$, т.е. *интеграл сходится*, следовательно, и данный *ряд* тоже *сходится*.

Рассмотрим случай, когда $\boxed{p = 1}$, т.е. исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}$ называется ***гармоническим рядом***, а ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}}$ – ***обобщённым гармоническим рядом***.

Так как $a_n = \frac{1}{n}$, то введём в рассмотрение определённую и непрерывно убывающую на луче $[1;\infty]$ функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ и вычислим несобственный интеграл I рода:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{S\to\infty}\int\limits_1^{S}\frac{dx}{x} = \lim_{S\to\infty}\ln|x|\,\Big|_1^S = \lim_{S\to\infty}\left(\ln|S| - \ln 1\right) = \infty.$$

Отсюда получаем, что по ***<u>интегральному признаку Коши</u>*** *гармонический ряд расходится*.

○ Если функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям ***<u>Теоремы 3</u>*** на луче $[m;\infty]$, то для *сходимости* ряда $(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n = f(n))$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл I рода $\int\limits_m^{\infty} f(x)\,dx$. ○

<u>Теорема 4</u> **(*<u>радикальный признак Коши</u>*).** Пусть для знакоположительного ряда $(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует (конечный или бесконечный) предел $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \sigma}$. Если число $\boxed{\sigma < 1}$, то ряд (A) ***сходится***, а при $\boxed{\sigma > 1}$ или $\boxed{\sigma = \infty}$ – ***расходится***. При $\boxed{\sigma = 1}$ ***<u>радикальный признак Коши не работает</u>***.

Пример 4. Исследовать на *сходимость* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^6\left(\frac{8n+1}{9n+5}\right)^n$.

Применим ***<u>радикальный признак Коши</u>*** (общий член ряда задаётся формулой $a_n = n^6\left(\frac{8n+1}{9n+5}\right)^n$) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^6\left(\frac{8n+1}{9n+5}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{6}{n}}\frac{8n+1}{9n+5}\right)$. Вычислим вспомогательные пределы (см. п. 14.4, ***<u>14</u>***):

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{6}{n}} = \left[\infty^0\right] = A;\ \ln A = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\ln n = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1;$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n+1}{9n+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\dfrac{8}{9}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^6\left(\dfrac{8n+1}{9n+5}\right)^n}=\dfrac{8}{9}<1$ – ряд *сходится*.

○ При анализе рядов на сходимость зачастую используют ***формулу Стирлинга*** $\boxed{n!\approx\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$ при $n\to\infty$, поэтому $\boxed{\sqrt[n]{n!}\approx\dfrac{n}{e}}$ при $n\to\infty$. ○

37. "*Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница*"

37.1. *Признак Лейбница*

Рассмотрим ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки, причём для удобства изучения будем считать, что *первый член ряда всегда имеет положительный знак*.

Ряд вида $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ $(a_n\in R)$ называется ***знакочередующимся рядом***.

Для изучения сходимости таких рядов применяют ***достаточный признак сходимости Лейбница***:

Теорема 1. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда *образуют монотонно убывающую последовательность*

$$\text{а) } |a_1|\ge|a_2|\ge|a_3|\ge\ldots\ge|a_n|\ge\ldots$$

и *общий член последовательности при* $n\to\infty$ *стремится к нулю*

$$\text{б) } \lim_{n\to\infty}|a_n|=0,$$

то *ряд сходится*, а его *сумма ограничена* ($S\le a_1$). При *нарушении хотя бы одного условия теоремы ряд расходится*.

Док-во: Пусть дан *знакочередующийся* ряд и пусть

$$|a_n|>|a_{n+1}|,\quad \lim_{n\to\infty}|a_n|=0.$$

Рассмотрим частичную сумму ряда с чётным числом членов:

$$S_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

Все разности в круглых скобках положительны в силу монотонного убывания последовательности, составленной из абсолютных величин членов *знакочередующегося* ряда, поэтому последовательность сумм с чётным числом членов ряда является возрастающей. Докажем, что она ограничена сверху, для чего представим частичную сумму в виде:

$$S_{2n}=a_1-[(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\ldots+(a_{2n-2}-a_{2n-1})+a_{2n}].$$

Так как величина, которая стоит в квадратных скобках, положительна, то $S_{2n} < a_1$, т.е. для любого n последовательность частичных сумм с чётным числом членов будет ограниченной. Отсюда следует существование конечного предела частичных сумм с чётным числом членов, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Последовательность частичных сумм с нечётным числом членов можно записать в виде $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Перейдём в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S - 0 = S,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ по второму условию теоремы. Таким образом, произвольная последовательность частичных сумм членов *знакочередующегося* ряда S_n сходится к пределу S, что говорит о сходимости *знакочередующегося* ряда.

○ ***Отметим, что в зависимости от того, как группируются члены знакочередующегося ряда можно получить любое число***, например, пусть дан ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$. ***Если сгруппировать его члены следующим образом*** $1-(1-1)-(1-1)-\ldots$, ***то получим, что его сумма равна единице, а если сгруппировать так*** $(1-1)+(1-1)+\ldots$, ***то получим, что его сумма равна нулю***. ○

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

В развёрнутом виде данный ряд имеет вид

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Последовательность, составленная из абсолютных величин членов этого ряда, удовлетворяет обоим условиям ***признака Лейбница***:

а) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$ – *монотонно убывает*;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Отсюда следует, что данный *ряд сходится*.

37.2. *Абсолютная и условная сходимость знакопеременного ряда*

Ряд, члены которого имеют *произвольные знаки*, называется ***знакопеременным*** или ***произвольным***.

Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Пусть дан ряд $(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, члены которого могут быть отрицательными, нулевыми или положительными. Составим из модулей членов ряда $(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ новый ряд $(B)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, т.е. этот ряд состоит только из положительных членов.

<u>Теорема 2.</u> Если *ряд* $(B)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *сходится*, то *сходится* и *ряд* $(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Док-во:</u> Пусть ряд (B) сходится. Обозначим через B_n его n-ую частичную сумму. В силу того, что ряд (B) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=B$. Очевидно, что для любого числа n выполняется неравенство $B_n \le B$, так как члены ряда (B) неотрицательны. Составим из ряда (A) два ряда (A') и (A''), составленные из положительных и отрицательных членов, соответственно. Обозначим частичные суммы этих рядов через $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$. Тогда n-ая частичная сумма ряда (A) будет равна $S_n=S_n^{'}-S_n^{''}$. Ясно, что последовательности частичных сумм $S_n^{'}$ и $S_n^{''}$ не убывают, так как члены рядов (A') и (A'') удовлетворяют неравенствам $a_n^{'}\le b_n$ и $a_n^{''}\le b_n$. Следовательно, по ***<u>признаку сравнения</u>*** из сходимости ряда (B) следует сходимость рядов (A') и (A''), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{'}=S' \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} S_n^{''}=S''.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n^{'}-S_n^{''})=S'-S''$. Из полученного равенства следует, что ряд (A) сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Данная сумма представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $a_1=\frac{1}{2}$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$, которая равна $S=\frac{0{,}5}{1-0{,}5}=1$, т.е. полученный ряд сходится. По ***<u>признаку</u>***

сравнения сходится и исходный ряд.

Если ряд, *составленный из модулей членов произвольного ряда*, *сходится*, то исходный *произвольный* ряд называется ***абсолютно сходящимся***.

Если ряд, *составленный из модулей членов произвольного ряда*, *расходится*, а исходный *переменный ряд сходится*, то *произвольный* ряд называется ***условно сходящимся***.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

При $p>1$ ряд, составленный из модулей членов знакочередующегося ряда, сходится (см. ***43***), следовательно, исходный ряд является абсолютно сходящимся. При $0<p<1$ ряд, составленный из модулей членов знакочередующегося ряда, расходится, но по ***признаку Лейбница*** исходный произвольный ряд будет сходиться, следовательно, исходный произвольный ряд является условно сходящимся.

37.3. *Свойства абсолютно сходящихся рядов*

1. *В абсолютно сходящемся ряде можно произвольно переставлять его члены*, при этом *сумма ряда не изменится*.
2. *В абсолютно сходящемся ряде можно произвольно группировать его члены*, при этом *сумма ряда не изменится*.
3. (***Теорема Мертенса***) Если из *двух сходящихся произвольных рядов хотя бы один является абсолютно сходящимися*, то *их произведение в* ***форме Коши*** *сходится и имеет сумму, равную произведению сумм заданных рядов*.

38. “*Функциональные ряды*”

38.1. *Функциональный ряд. Критерии Коши и Вейерштрассе*

Рассмотрим ряд, членами которого являются функции. Пусть задана последовательность функций $\{U_n(x)\}$, которые имеют общую область определения.

Если в точке x_0 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x_0)=U(x_0)$, то эта точка называется ***точкой сходимости последовательности функций*** $\{U_n(x)\}$ при условии, что $U(x_0)$ отлично от бесконечности.

Совокупность точек сходимости называется ***областью сходимос-***

ти последовательности функций $\{U_n(x)\}$.

Выражение вида $\boxed{U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)}$ называется ***функциональным рядом***.

Если область D является областью сходимости последовательности функций $\{U_n(x)\}$, то она является также областью сходимости функционального ряда, членами которого являются функции последовательности.

Последовательность функций $\{U_n(x)\}$ называется ***равномерно сходящейся*** к ***предельной функции*** $U(x)$ на области D, если $\forall x \in D$ выполняется равенство $\boxed{\lim_{n\to\infty} U_n(x)=U(x)}$.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** на области D, если $\forall x \in D$ равномерно сходится последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$.

Суммой функционального ряда называется предел последовательности частичных сумм при $n\to\infty$, т.е. $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)}$.

Рассмотрим ***<u>критерий Коши</u>***, который устанавливает *признак равномерной сходимости любой последовательности*.

<u>Теорема 1</u>. Для того чтобы последовательность функций $\{U_n(x)\}$ равномерно сходилась на области определения D, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовал бы такой номер $N(\varepsilon;x)$, что $\forall n>N(\varepsilon;x)$, $\forall x\in D$ и любого положительного числа m выполнялось неравенство $\left|U_{n+m}(x)-U_n(x)\right|<\varepsilon$.

<u>Док-во:</u> Необходимость. Пусть последовательность функций $\{U_n(x)\}$ на области D равномерно сходится к функции $U(x)$ ($U_n(x)\underset{\to}{\overset{\to}{}}U(x)$). Это означает, что для любого положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существует такой номер $N(\varepsilon;x)$, что $\forall n>N(\varepsilon;x)$ и $\forall x\in D$ выполняется неравенство

$$\left|U_n(x)-U(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как это неравенство выполняется $\forall n>N(\varepsilon;x)$, то оно справедливо и для всех номеров $n+m>N(\varepsilon;x)$, т.е.

$$\left|U_{n+m}(x)-U(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда можно записать, что

$$\left|U_{n+m}(x)-U_n(x)\right|<\left|U_{n+m}(x)-U(x)+U(x)-U_n(x)\right|\le$$

$$\le\left|U_{n+m}(x)-U(x)\right|+\left|U_n(x)-U(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon .$$

Достаточность. Пусть выполняется неравенство $\left|U_{n+m}(x)-U_n(x)\right|<\varepsilon$. Докажем сходимость последовательности функций $\{U_n(x)\}$ на области D, а затем её равномерную сходимость к функции $U(x)$ $(U_n(x)\underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}}U(x))$.

Так как для любого фиксированного значения $x\in D$ получаем числовую последовательность, то при сходимости числовой последовательности будет сходиться и функциональная последовательность

$$U_n(x)\to U(x),$$

причём $\forall x\in D$. Это говорит о том, что для любого положительного числа ε_1 существует такой номер $N(\varepsilon_1;x)$, что $\forall n>N(\varepsilon_1;x)$ и $\forall x\in D$ выполняется $\left|U_n(x)-U(x)\right|<\varepsilon_1$. Перейдём в исходном неравенстве к пределу при $m\to\infty$, получим $\left|U(x)-U_n(x)\right|<\varepsilon$. Полагая $\varepsilon<\varepsilon_1$, находим, что последовательность функций $\{U_n(x)\}$ на области D равномерно сходится к функции $U(x)$ $(U_n(x)\underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}}U(x))$, что эквивалентно выполнению предельного равенства $\lim\limits_{n\to\infty}U_n(x)=U(x)$.

Рассмотрим *признак сходимости функционального ряда*, согласно ***<u>критерию Вейерштрассе</u>***.

<u>Теорема 2</u>. Пусть в области определения D ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, каждый член которого ограничен, т.е. $\left|U_n(x)\right|\le C_n$ (C_n – некоторые числа, которые мажорируют функции $U_n(x)$ $\forall x\in D$). Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ сходится, то сходится и функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$.

<u>Док-во:</u> Так как $\left|U_n(x)\right|\le C_n$ $\forall x\in D$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ сходится, то по ***<u>признаку сравнения</u>*** функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ тоже сходится.

Если последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ функционального ряда равномерно сходится к функции $S(x)$, то, согласно ***<u>критерию Коши</u>***, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ также будет равномерно сходиться к функции $U(x)$. Если каждый член функционального ряда ограничен, то, согласно ***критерию Вейерштрассе***, из сходимости мажорантного числового ряда следует сходимость функционального ряда.

Сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ может быть установлена по ***признаку Даламбера*** $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = |\psi(x)| < 1}$.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+4)^{n+1}}{5^n}$.

Общий член данного ряда $U_n(x) = \dfrac{(x+4)^{n+1}}{5^n}$, следовательно, последующий член ряда $U_{n+1}(x) = \dfrac{(x+4)^{(n+1)+1}}{5^{n+1}} = \dfrac{(x+4)^{n+2}}{5^{n+1}} = \dfrac{(x+4)^{n+1}(x+4)}{5^n\, 5}$. Предел их отношения равен $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\cancel{(x+4)^{n+1}}(x+4)}{\cancel{5^n}\, 5}\cdot\dfrac{\cancel{5^n}}{\cancel{(x+4)^{n+1}}}\right| = \dfrac{|x+4|}{5} < 1.$

Напомним, что $\boxed{|x \mp a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} x \mp a < b \\ x \mp a > -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < b \pm a \\ x > -b \pm a \end{cases}}$. Таким образом, полученное неравенство $|x+4|<5$ эквивалентно системе $\begin{cases} x+4<5 \\ x+4>-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-9 \end{cases}$.

Функциональный ряд сходится при $\boxed{x\in(-9;1)}$. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала:

а) $\boxed{x=-9}$: $a_n = U_n(-9) = \dfrac{(-9+4)^{n+1}}{5^n} = \dfrac{(-5)^{n+1}}{5^n} = \dfrac{(-1)^{n+1}5^{n+1}}{5^n} = (-1)^{n+1}5$, – это общий член знакочередующегося ряда, сходимость которого исследуется по ***признаку Лейбница***: $\boxed{|a_n| = 5}$, т.е. последовательность не является монотонно убывающей, в этой точке функциональный ряд *расходится*.

б) $\boxed{x=1}$: $b_n = U_n(1) = \dfrac{(1+4)^{n+1}}{5^n} = \dfrac{5^{n+1}}{5^n} = 5$ – это общий член знакоположительного ряда, который *расходится*, так как сумма бесконечного числа пятёрок равна $\boxed{\infty}$.

Проведенное исследование показывает, что ряд сходится при значениях аргумента $\boxed{x\in(-9;1)}$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n^3+1)}{3^n(x-2)^n}$.

Общий член данного ряда $U_n(x) = \dfrac{(-1)^n(n^3+1)}{3^n(x-2)^n}$, следовательно, последующий член ряда $U_{n+1}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}((n+1)^3+1)}{3^{n+1}(x-2)^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n(-1)(n^3+3n^2+3n+2)}{3^n\,3(x-2)^n(x-2)}$.

Предел их отношения равен

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^n}(-1)(n^3+3n^2+3n+2)}{\cancel{3^n}\,3\cancel{(x-2)^n}(x-2)}\cdot\frac{\cancel{3^n}\,\cancel{(x-2)^n}}{\cancel{(-1)^n}(n^3+1)}\right|=\frac{1}{3|x-2|}<1.$$

Напомним, что предел отношения полиномов с одинаковыми старшими степенями равен отношению коэффициентов при старших степенях (см. п. 14.4. <u>***Вычисление пределов и раскрытие неопределённостей***</u>, <u>***14***</u>), кроме того, $\boxed{|x\mp a|>b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\mp a>b\\x\mp a<-b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>b\pm a\\x<-b\pm a\end{array}\right.}$. Таким образом, полученное неравенство $|x-2|>\dfrac{1}{3}$ эквивалентно совокупности $\boxed{\left[\begin{array}{l}x-2>\dfrac{1}{3}\\x-2<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\dfrac{7}{3}\\x<\dfrac{5}{3}\end{array}\right.}$. Следовательно, данный функциональный *ряд сходится* при $\boxed{x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};\infty\right)}$.

Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала:

а) $\boxed{x=\dfrac{5}{3}}$: $a_n=U_n\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{(-1)^n(n^3+1)}{3^n\left(\dfrac{5}{3}-2\right)^n}=\dfrac{(-1)^n(n^3+1)}{3^n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}=n^3+1$, – это общий член знакоположительного ряда, который *расходится*, так как не выполняется <u>***необходимый признак сходимости ряда***</u>

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(n^3+1)=\infty\neq 0}.$$

б) $\boxed{x=\dfrac{7}{3}}$: $b_n=U_n\left(\dfrac{7}{3}\right)=\dfrac{(-1)^n(n^3+1)}{3^n\left(\dfrac{7}{3}-2\right)^n}=\dfrac{(-1)^n(n^3+1)}{3^n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=(-1)^n(n^3+1)$, – это общий член знакочередующегося ряда, сходимость которого исследуется по <u>***признаку Лейбница***</u>: $|a_n|=n^3+1$, т.е. последовательность не является монотонно убывающей (она возрастает: $\boxed{2<9<28<..}$), в этой точке функциональный ряд *расходится*. Проведенное исследование показывает, что ряд сходится во всех точках лучей: $x\in\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{3};\infty\right)$.

38.2. *Свойства суммы функционального ряда*

1. Если все члены функционального ряда непрерывны на области определения D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = S(x)$ равномерно сходится, то *сумма ряда $S(x)$ непрерывна в области определения D*.

2. Если все члены функционального ряда непрерывны на отрезке $[a; b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = S(x)$ равномерно сходится, то *на этом интервале функциональный ряд можно почленно интегрировать*, т.е.

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b U_1(x)\,dx + \int_a^b U_2(x)\,dx + \int_a^b U_3(x)\,dx + \ldots + \int_a^b U_n(x)\,dx .$$

3. Пусть на области определения D все члены функционального ряда $U_n(x)$ имеют непрерывные производные, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = S(x)$ сходится $\forall x \in D$. Если *ряд, составленный из производных* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) = S'(x)$, *равномерно сходится*, то *исходный ряд равномерно сходится*.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Данный функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $U_1(x) = 1$ и со знаменателем $q = x$. Известно, что бесконечная геометрическая прогрессия сходится при $|q| < 1$, т.е. функциональный ряд будет сходиться при $|x| < 1$. Следовательно, функциональный ряд сходится $\forall x \in (-1; 1)$, причем равномерно, так как $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$.

Пример 4. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$. Если ряд равномерно сходится, то проинтегрировать его.

Данный ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом $U_1(x) = 1$ и со знаменателем $q = -x^2$. Известно, что бесконечная геометрическая прогрессия сходится при $|q| < 1$, т.е. функциональный ряд будет сходиться при $|-x^2| < 1$ или $x^2 < 1$. Следовательно, функциональный ряд сходится, так как его сумма

$$S = \frac{1}{1 + x^2} .$$

Данный ряд мажорируется рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ при $0<a<1$, поэтому он сходится равномерно $\forall x \in (-a;\, a)$. Отсюда следует, что его можно почленно проинтегрировать на интервале от 0 до t при $|t| \le a$. Тогда

$$\int\limits_0^t S(x)\,dx = \int\limits_0^t \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ t = \int\limits_0^t dx - \int\limits_0^t x^2\,dx + \int\limits_0^t x^4\,dx - \int\limits_0^t x^6\,dx + \ldots +$$

$$+ \int\limits_0^t (-1)^n x^{2n}\,dx + \ldots = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Это выражение представляет собой *стандартное разложение функции* $arctg\, t$ *в* ***<u>ряд Маклорена</u>*** (см. *п.2* **Лекции № 46**), который равномерно сходится $\forall t \in (-a;\, a)$ при $0 < a < 1$.

<u>39</u>. "Степенные ряды"

39.1. *Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости степенного ряда*

Ряд $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ (или ряд более общего вида $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n}$, где $a_n \in R$) называется ***степенным рядом***.

Степенной ряд являются частным случаем функционального ряда, поэтому он характеризуется областью сходимости, для нахождения которой применяется ***<u>теорема Абеля</u>***.

<u>Теорема 1</u>. Если степенной ряд сходится при $x = x_0$ ($x_0 \ne 0$), то он абсолютно сходится $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x = x_0$ ($x_0 \ne 0$), то он абсолютно расходится $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_0|$.

<u>Док-во:</u> Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то его общий член $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. последовательность $\{a_n\, x_0^n\}$ ограничена. Это означает, что существует такое положительное число M, что $\forall x$ выполняется неравенство $|a_n x_0^n| \le M$. Перепишем степенной ряд в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\dfrac{x}{x_0}\right)^n$ и рассмотрим ряд составленный из модулей членов этого ряда: $|a_0 x_0| + |a_1 x_0| \left|\dfrac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n| \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$. В силу ограниченности каждого члена числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ имеем неравенство:

$$|a_0x_0|+|a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right|+|a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots\le M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+$$

$$+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots=M\left(1+\left|\frac{x}{x_0}\right|+\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\ldots+\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\ldots\right).$$

Ряд, стоящий в круглых скобках, является суммой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q=\left|\frac{x}{x_0}\right|$, которая имеет конечную сумму при $|q|<1$, следовательно, при $|x|<|x_0|$ исходный степенной ряд мажорируется сходящимся рядом. По ***признаку сравнения*** данный ряд сходится. Пусть существует такое число x_0, для которого $|x|>|x_0|$ и при котором исходный *ряд сходится*. Так как бесконечная геометрическая прогрессия имеет бесконечную сумму при $|x|>|x_0|$ ($|q|\ge 1$), то *степенной ряд расходится* при $|x|>|x_0|$.

Согласно ***теореме Абеля***: ***если степенной ряд сходится в точке*** $x=x_0$ $(x_0\ne 0)$, ***то он абсолютно сходится во всех точках интервала*** $\left[-|x_0|;\,|x_0|\right]$ (рис. 2).

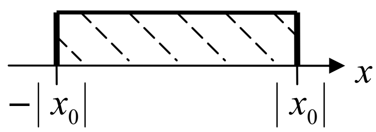


Рис. 2. *Область сходимости степенного ряда.*

Если степенной ряд расходится в точке $x=x_0$ $(x_0\ne 0)$, ***то он абсолютно расходится во всех точках интервала*** $\left(-\infty;\,-|x_0|\right]\cup\left[|x_0|;\,\infty\right)$ (рис. 3).

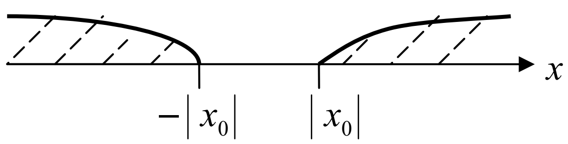


Рис. 3. *Область расходимости степенного ряда.*

Отсюда вытекает теорема о радиусе и интервале сходимости степенного ряда.

Теорема 2. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *сходится* не при всех значениях величины x и не только при $x=0$, то существует число $R>0$ такое, что *степенной ряд абсолютно сходится* при $|x|<R$ и *расходится* при $|x|>R$.

Число R называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда, а интервал $(-R;\,R)$ – ***интервалом сходимости***.

Рассмотрим теорему, которая даёт алгоритм поиска радиуса сходимости R.

Теорема 3. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, то радиус сходимости R степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен $\boxed{R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$.

Док-во: Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$, составленный из модулей членов степенного ряда. По условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$. Обозначим значение этого предела через $\dfrac{1}{R}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|x|}{R}$. При каждом значении $x\in D$ степенной ряд становится числовым. По ***признаку Даламбера*** ряд с фиксированным значением величины x будет сходиться при выполнении неравенства $\dfrac{|x|}{R}<1$, т.е. при $|x|<R$. Следовательно, степенной ряд сходится абсолютно при $|x|<R$ и расходится при $|x|>R$ для всех $x\in D$ по ***признаку Даламбера***.

Если $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0}$, ***то радиус сходимости*** $R=\infty$, ***т.е. степенной ряд сходится на всей числовой оси. Если*** $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty}$, ***то радиус сходимости*** $R = 0$, ***т.е. степенной ряд сходится в единственной точке*** $x=0$.

Пример 1. Найти *радиусы и интервалы сходимости* рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};\qquad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n .$$

а) Коэффициент $a_n = \dfrac{1}{n}$, следовательно, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Отсюда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1,$$

таким образом, *интервал сходимости равен* $(-1;1)$.

б) Коэффициент $a_n = \dfrac{1}{n!}$, следовательно, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$. Отсюда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

таким образом, *степенной ряд сходится на всей числовой оси*.

в) Коэффициент $a_n=n!$, следовательно, $a_{n+1}=(n+1)!$. Отсюда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0,$$

таким образом, *степенной ряд сходится только в точке* $x=0$.

39.2. *Разложение функций в степенные ряды*

Если функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

который сходится на интервале $(-R;\,R)$, то говорят, что на этом интервале *функция* $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* по степеням аргумента x. Так как степенной ряд является частным случаем функционального ряда, то в случае равномерной сходимости этого ряда его можно почленно интегрировать и дифференцировать.

<u>Теорема 4</u>. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R;\,R)$ разлагается в степенной ряд, то это *разложение единственно*.

<u>Док-во:</u> Степенной ряд равномерно сходится на интервале $(-R;R)$ и функция $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ является его суммой, то его можно почленно дифференцировать:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots;$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot2\cdot a_3x+4\cdot3\cdot a_4x^2+\ldots+n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots;$$

$$f'''(x)=3\cdot2a_3+4\cdot3\cdot2\cdot a_4x+5\cdot4\cdot3\cdot a_5x^2+\ldots+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)a_nx^{n-3}+\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$f^{(n)}(x)=n\,!a_n+2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n+1)a_{n+1}x+\ldots.$$

Полагая $x=0$, найдём

$$a_0=f(0),\ a_1=\frac{f'(0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

В силу того, что коэффициенты ряда a_n однозначно определяются значением функции $f(x)$ и её производными в точке $x=0$, то *разложение функции* $f(x)$ *в степенной ряд единственно* и имеет вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Иначе говорят, что функция представлена в виде ***ряда Маклорена***.

Пример 2. Разложить в ***ряд Маклорена*** функцию $f(x)=\sin x$.

Найдём значения функции и её производных вплоть до порядка n в точке $x=0$:

$f(0)=\sin 0=0$;

$f'(x)=\cos x;\quad f'(0)=\cos 0=1$;

$f''(x)=-\sin x;\quad f''(0)=-\sin 0=0$;

$f'''(x)=-\cos x;\quad f'''(0)=-\cos 0=-1$;

$f^{(4)}(x)=\sin x;\quad f^{(4)}(0)=\sin 0=0$;

$f^{(5)}(x)=\cos x;\quad f^{(5)}(0)=\cos 0=1$;

$f^{(6)}(x)=-\sin x;\quad f^{(6)}(0)=-\sin 0=0$;

$f^{(7)}(x)=-\cos x;\quad f^{(7)}(0)=-\cos 0=-1$;

…………………………………………

Таким образом, разложение функции $f(x)=\sin x$ в ***ряд Маклорена*** имеет вид: $\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots}$.

Приведём ***ряды Маклорена*** для некоторых наиболее часто используемых на практике элементарных функций (стандартное разложение):

$$\boxed{e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}};$$

$$\boxed{a^t=1+t\ln a+\frac{t^2}{2!}\ln^2 a+\frac{t^3}{3!}\ln^3 a+\frac{t^4}{4!}\ln^4 a+\ldots+\frac{t^n}{n!}\ln^n a+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\ln^n a};$$

$$\boxed{\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\frac{t^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}};$$

$$\boxed{\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}};$$

$$\boxed{\ln(1\pm t)=\pm t-\frac{t^2}{2}\pm\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\pm\ldots+\begin{Bmatrix}(-1)^n\\ -1\end{Bmatrix}\frac{t^{n+1}}{n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}(-1)^n\\ -1\end{Bmatrix}\frac{t^{n+1}}{n+1}};$$

$$\boxed{\frac{1}{1\mp t}=1\pm t+t^2\pm t^3+\ldots+\begin{Bmatrix}+1\\ (-1)^n\end{Bmatrix}t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}+1\\ (-1)^n\end{Bmatrix}t^n};$$

$$\boxed{arctg\, t=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{t^{2n+1}}{2n+1}}.$$

Если функция раскладывается в точке $x_0 \neq 0$, то она представляется степенным ***<u>рядом Тейлора</u>*** (см. также ***<u>21</u>***):

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n}.$$

Пример 3. Используя *стандартное разложение*, представить в виде ***<u>ряда Маклорена</u>*** функцию $f(x) = \sin(2x)$.

Воспользовавшись разложением в степенной ***<u>ряд Маклорена</u>*** функции $\sin t$, положив $t = 2x$, получим (<u>*суммирование начинается с* 1</u>):

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

39.3. *Применение степенных рядов*

1). <u>*Вычисление логарифмов*</u>. Для вычисления логарифмов применяют ряд

$$\boxed{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots + \frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} + \ldots\right]}.$$

Пример 4. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Полагая $n = 1$, получим

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{3^{2k}} + \ldots\right] \approx \frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81}\right] = 0{,}6930.$$

каждый следующий член ряда меньше ε.

2). <u>*Вычисление корней*</u>. Для вычисления корней с большой точностью используют обобщенный бином Ньютона

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots}.$$

Например, требуется вычислить корень k-ой степени из числа A, приближённое значение целой части которого равна a. Требуется уточнить это значение, для чего поступают следующим образом: полагают $\frac{A}{a^k} = 1 + x$, тогда $\sqrt[k]{A} = a \cdot \sqrt[k]{\frac{A}{a^k}} = a \cdot (1+x)^{\frac{1}{k}}$, следовательно, $m = \frac{1}{k}$.

Пример 5. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

В данном примере A=17, $a = 4$, $k = 2$, $m = \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$x = \frac{A}{a^k} - 1 = \frac{17}{4^2} - 1 = \frac{1}{16} \Rightarrow \sqrt{17} \approx 4\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(16)^2}\right) = 4{,}123.$$

3). *Вычисление неберущихся интегралов*.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^t e^{-x^2}dx$.

Данный интеграл является неберущимся, так как его первообразная не может быть выражена через элементарные функции (***29***). Если положить $t=-x^2$, то функцию $f(t)=e^t$ можно представить в виде степенного ряда $e^t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}$. Если вернуться к старой переменной, то получим $e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{2n}}{n!}$. Этот ряд равномерно сходится, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int\limits_0^t e^{-x^2}dx=\int\limits_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^t x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^t=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=0{,}01$.

Используя результаты предыдущего примера, получим

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}=0{,}74.$$

4). *Решение дифференциальных уравнений*. Решение дифференциальных уравнений осуществляется с использованием ***степенных рядов Тейлора*** $(x_0\neq 0)$ и ***Маклорена*** $(x_0=0)$.

Пример 8. Найти четыре первых ненулевых члена ряда, являющегося решением ***задачи Коши***: $y''+\left(1-x^2\right)y'=2\sin x$ при начальных условиях $y(0)=1;\, y'(0)=2$.

Так как в начальных условиях указано, что $x_0=0$, то представим искомую функцию в виде ***ряда Маклорена***:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Согласно начальным условиям, $y(0)=1;\, y'(0)=2$. Вторую производную функции выразим из самого дифференциального уравнения

$$y''(x)=-\left(1-x^2\right)y'(x)+2\sin x.$$

Подставим в это выражение $x_0=0$ и учтём начальные условия, тогда вторая производная функции в точке $x_0=0$ равна

$$y''(0)=-\left(1-0^2\right)y'(0)+2\sin 0=-2.$$

Продифференцировав выражение для второй производной получим выражение для третьей производной функции

$$y'''(x) = 2x\,y'(x) - \left(1 - x^2\right) y''(x) + 2\cos x\,.$$

Подставим в это выражение $x_0 = 0$, получим

$$y'''(0) = 2\cdot 0\cdot y'(0) - \left(1 - 0^2\right) y''(0) + 2\cos 0 = 4\,.$$

Так как это четвёртый ненулевой член ***ряда Маклорена***, то решение дифференциального уравнения с учётом начальных условий имеет вид:

$$y(x) \approx 1 + 2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3\,.$$

40. “*Тригонометрические ряды. Ряды Фурье*”

40.1. *Тригонометрический ряд*

В науке и технике довольно часто приходится иметь дело с периодическими явлениями. Эти явления через определённый промежуток времени T, называемый ***периодом***, возвращают систему в начальное состояние. Из материала ***12*** известно, что периодической функцией называется функция, удовлетворяющая равенству

$$f(x+T) = f(x)\,.$$

Простейшей периодической функцией является синусоида

$$A\sin(\,\omega t + \alpha\,)\,,$$

где A – амплитуда, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – частота, α – начальная фаза. Очевидно, что сложение синусоид с разными амплитудами, одинаковыми частотами и фазами приводит к той же синусоиде с увеличенной амплитудой. Сложение же синусоид, различающихся амплитудами, частотами и фазами приводит к периодической функции, вид которой отличается от синусоиды.

Ряд вида

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(2\,\omega t + \alpha_2) + A_3\sin(3\,\omega t + \alpha_3) + \\ &+ \ldots + A_n\sin(n\omega t + \alpha_n) + \ldots \end{aligned}}$$

называется ***тригонометрическим рядом***.

Из определения тригонометрического ряда видно, что периодическая функция $f(t)$ может быть представлена в виде суммы синусоид с различающимися амплитудами, частотами и фазами, т.е. может быть разложена на простые гармонические колебания.

Отдельные составляющие функции $f(t)$ называются ***гармоническими составляющими*** или ***гармониками***, а процесс разложения периодической функции на гармоники называется ***гармоническим ана-***

лизом.

Если в качестве аргумента выбрать величину $x = \omega t$, то функция $g(x) = f\left(\dfrac{x}{\omega}\right)$ также будет периодической функцией, но уже со стандартным периодом $T = 2\pi$. Разложение этой функции в тригонометрический ряд имеет вид

$$g(x) = A_0 + A_1 \sin(x+\alpha_1) + A_2 \sin(2x+\alpha_2) + A_3 \sin(3x+\alpha_3) + \\ + \ldots + A_n \sin(nx+\alpha_n) + \ldots .$$

Используя формулу $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ и вводя обозначения $\dfrac{a_0}{2} = A_0$, $a_n = A_n \sin\alpha_n$ и $b_n = A_n \cos\alpha_n$, приведём тригонометрический ряд к виду $\boxed{g(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)}$.

40.2. *Ряд Фурье*

<u>Теорема 1</u>. Если функция $g(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд

$$\boxed{g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)},$$

который равномерно сходится, то *это разложение единственно*.

<u>Док-во:</u> Интегрируя почленно тригонометрический ряд (это можно делать в силу его равномерной сходимости (см. ***<u>45</u>***)), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right] = \frac{a_0}{2}\,x\,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - b_n \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{a_0}{2}2\pi + 0 = \pi a_0 .$$

Откуда находим, что $\boxed{a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx}$. Рассмотрим интегралы вида:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx$; в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)\,dx$.

В случае $k \neq n$:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx =$(*как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования*, ***<u>31</u>***)

$$= 2\int_0^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx = \int_0^{\pi}\cos(k+n)x\,dx + \int_0^{\pi}\cos(k-n)x\,dx =$$

$$= \left.\frac{\sin(k+n)x}{k+n}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right|_0^{\pi} = 0\,.$$

б) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx = 0$ (*как интеграл от нечётной функции по симметричному интервалу интегрирования*, ***31***. *Этот интеграл равен нулю и в случае* $\boxed{k=n}$ *по той же причине*).

в) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)\,dx =$(*как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования*, ***31***)

$$= 2\int_0^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)\,dx = \int_0^{\pi}\cos(k-n)x\,dx - \int_0^{\pi}\cos(k+n)x\,dx =$$

$$= \left.\frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{\sin(k+n)x}{k+n}\right|_0^{\pi} = 0\,.$$

В случае $k=n$:

а) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx =$(*как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования*)$= 2\int_0^{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \int_0^{\pi}dx + \int_0^{\pi}\cos(2nx)\,dx = x\big|_0^{\pi} +$

$$+\left.\frac{\sin(2nx)}{2n}\right|_0^{\pi} = \pi\,.$$

в) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx =$(*как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования*) $= 2\int_0^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \int_0^{\pi}dx - \int_0^{\pi}\cos(2nx)\,dx = x\big|_0^{\pi} -$

$$-\left.\frac{\sin(2nx)}{2n}\right|_0^{\pi} = \pi\,.$$

Умножим тригонометрический ряд на $\cos(kx)$, и проинтегрируем его на отрезке $[-\pi;\,\pi]$, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos(kx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(nx)\,dx\right] =$$

(с учётом полученных результатов)

$$=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+a_k\pi=\frac{a_0}{2}\cdot 0+a_k\pi=\pi\,a_k\,.$$

Отсюда находим, что $\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos(n\,x)dx}$.

Умножим тригонометрический ряд на $\sin(kx)$ и проинтегрируем его на отрезке $[-\pi;\,\pi]$, получим:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\sin(kx)dx=\frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,\cos(nx)dx+b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx\right]=$$

(с учётом полученных результатов)

$$=-\frac{a_0}{2}\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+b_k\,\pi=\frac{a_0}{2}0+b_k\,\pi=\pi\,b_k\,.$$

Отсюда находим, что $\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin(n\,x)dx}$.

Итак, коэффициенты тригонометрического ряда однозначно определяются формулами:

$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx}$; $\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos(n\,x)dx}$; $\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin(n\,x)dx}$,

т.е. разложение функции в тригонометрический ряд единственно.

Тригонометрический ряд с коэффициентами, которые *вычисляются по формулам*:

$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx}$; $\boxed{a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos(n\,x)dx}$; $\boxed{b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin(n\,x)dx}$,

называется ***рядом Фурье***.

Пример 1. Разложить в ***ряд Фурье*** функцию $f(x)=e^{ax}\,(a=const\neq 0)$ на отрезке $[-\pi;\,\pi]$.

Для того чтобы разложить в ***ряд Фурье*** функцию

$$f(x)=e^{a\,x}\ \ (a=const\neq 0)$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$, необходимо и достаточно вычислить коэффициенты этого ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{a\,x}\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{a\,x}}{a}\bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{\pi\,x}-e^{-\pi\,x}}{\pi\,a}=\frac{2\,sh(\pi\,x)}{\pi\,a};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(n\,x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{a\,x}\cos(n\,x)dx=$$

$$=\frac{e^{a\,x}}{\pi(a^2+n^2)}\left[a\cos(n\,x)+n\sin(n\,x)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^n\,2a\,sh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(n\,x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{a\,x}\sin(n\,x)dx=$$

$$=\frac{e^{a\,x}}{\pi(a^2+n^2)}\left[a\sin(n\,x)+n\cos(n\,x)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}\,2n\,sh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}.$$

Следовательно, разложение в ***<u>ряд Фурье</u>*** функции $f(x)=e^{ax}$ имеет вид:

$$e^{a\,x}=\frac{2sh(a\pi)}{\pi}\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\left[a\cos(n\,x)-n\sin(n\,x)\right]\right\}.$$

Если ***функция*** $f(x)$ ***периодическая с периодом*** $T=2\pi$ ***и разлагается в ряд Фурье***, ***то её можно разложить на любом интервале длиной*** 2π, например, $[0;2\pi]$, $[\pi;3\pi]$ или $[-4\pi;-2\pi]$.

Пример 2. Разложить в ***<u>ряд Фурье</u>*** функцию $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ на отрезке $[0;2\pi]$.

Вычислим коэффициенты ***<u>ряда Фурье</u>***

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\pi\,x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\cos(n\,x)dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(\pi-x)\cos(n\,x)dx=\frac{(\pi-x)}{2\pi}\frac{\sin(n\,x)}{n}\Bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}f(x)\sin(n\,x)dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(\pi-x)\,\sin(n\,x)dx=\frac{(\pi-x)}{2\pi}\frac{\cos(n\,x)}{n}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n\,x)}{n}$.

<u>41.</u> “*Ряд Фурье для чётных и нечётных функций*”

41.1. *Сходимость ряда Фурье*

Функция $F(x)$, *определённая на всей числовой оси и периодическая с периодом* $T=2\pi$, называется ***периодическим продолжением функции*** $f(x)$, если на отрезке $[-\pi;\pi]$ $F(x)=f(x)$.

Очевидно, что если на отрезке $[-\pi;\pi]$ ***<u>ряд Фурье</u>*** сходится к функции $f(x)$, то он сходится на всей числовой оси к функции $F(x)$. В связи с этим рассмотрим теорему о сумме ***<u>ряда Фурье</u>*** на всей числовой оси.

<u>Теорема 2.</u> Пусть функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[-\pi;\pi]$ или имеют на этом интервале конечное число точек разрыва первого рода. Тогда ***<u>ряд Фурье</u>*** функции $f(x)$ сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$, причём в каждой точке $x \in [-\pi;\pi]$, в которой функция $f(x)$ непрерывна сумма ряда равна $f(x)$; в каждой точке разрыва первого рода x_0 функции $f(x)$ сумма ряда будет равна

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right],$$

где $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$; на концах отрезка $[-\pi;\pi]$ сумма ряда будет равна

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi)+f(+\pi)\right].$$

Если функция $F(x)$ является периодическим продолжением функции $f(x)$, то аналогичные утверждения имеют место и для функции $F(x)$ на всей числовой оси.

<u>Пример 1.</u> Разложить в ***<u>ряд Фурье</u>*** периодическое продолжение функции $f(x)=x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Так как $f(x)=x$, то её периодическое продолжение $F(x)$ имеет вид (рис. 4).

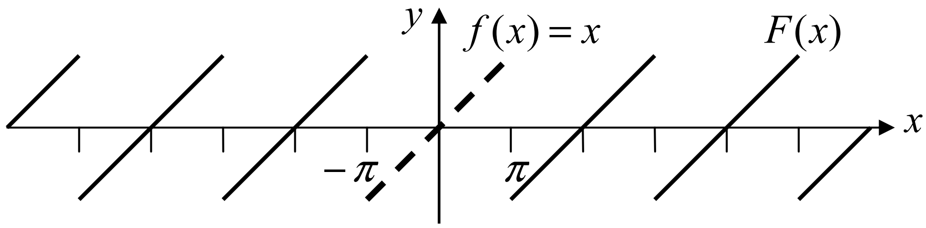


Рис. 4. *Периодическое продолжение $F(x)$ функции $f(x)=x$, заданной на интервале $[-\pi;\pi]$.*

$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} xdx=0$ (*как интеграл от нечётной функции по симметричному интервалу интегрирования*, ***<u>31</u>***).

$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx=0$ (*как интеграл от нечётной функции по симметричному интервалу интегрирования*).

$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx=$ (*как интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования*)

$$= -\frac{2}{\pi}\left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_0^\pi = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Таким образом, ***<u>ряд Фурье</u>*** имеет вид $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}$.

41.2. *Ряд Фурье для чётных и нечётных функций*

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и является ***чётной*** функцией, т.е. $f(-x)=f(x)$, тогда в её ***<u>ряде Фурье</u>*** все коэффициенты $b_n = 0$. Действительно $\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0}$ (*как интеграл от нечётной функции по симметричному интервалу интегрирования*, ***<u>31</u>***). С учётом чётности функции $f(x)$ остальные коэффициенты вычисляются по формулам

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi f(x)\,dx} \quad\text{и}\quad \boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx},$$

где был использован факт, что *определённый интеграл от чётной функции по симметричному интервалу интегрирования равен*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_0^\pi f(x)\,dx.$$

Для ***нечётной*** на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции ($f(-x)=-f(x)$) коэффициенты ***<u>ряда Фурье</u>*** определяются формулами

$$\boxed{a_0 = a_n = 0} \quad\text{и}\quad \boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx}.$$

○ Если *функция* $f(x)$ *чётная, то в её* ***<u>ряде Фурье</u>*** *содержатся только* ***косинусы***; в этом случае говорят, что *функция разложена в* ***<u>ряд Фурье</u> по косинусам*** или *чётным образом*. Если *функция* $f(x)$ *нечётная*, то в её ***<u>ряде Фурье</u>*** содержатся только ***синусы***; в этом случае говорят, что *функция разложена в* ***<u>ряд Фурье</u> по синусам*** или *нечётным образом*. ○

○ Если *функция* $f(x)$ задана на полуинтервале, например $[0;\pi]$, и её необходимо разложить ***по синусам*** (т.е. нечётным образом), то график функции продлевается на полуинтервал $[-\pi;0]$ ***нечётным образом***, т.е. симметрично относительно начала координат (рис. 5а). Если разложение функции происходит по косинусам, то график функции продлевается на оставшийся полуинтервал ***чётным образом*** (симметрично относительно оси ординат, рис. 5б):

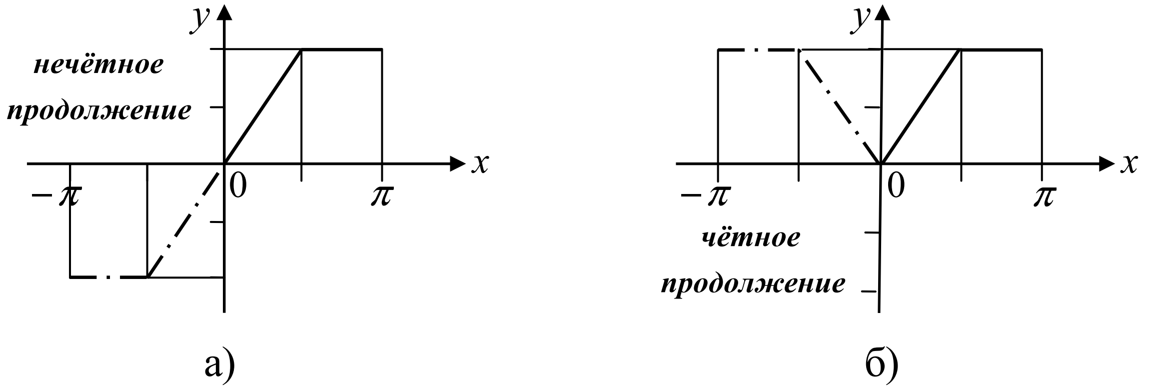


Рис. 5. *Продолжение функции* $f(x)$, *заданной на полуинтервале* $[0;\pi]$, *на весь интервал* $[-\pi;\pi]$ *нечётным* (а) *и чётным* (б) *образом.* ○

Пример 2. Разложить в ***ряд Фурье*** $f(x)=x^2$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.
Так как функция $f(x)=x^2$ чётная, то в её ***ряде Фурье*** все коэффициенты $b_n=0$. Найдём оставшиеся коэффициенты ***ряда Фурье***:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi x^2\,dx=\left.\frac{2\,x^3}{3\pi}\right|_0^\pi=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi f(x)\cos(n\,x)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi x^2\cos(n\,x)dx=\frac{(-1)^n 4}{n^2}$$ (вычислить *самостоятельно*).

Итак, ряд Фурье имеет вид: $x^2=\dfrac{2\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos(n\,x)}{n^2}$.

41.3. *Ряд Фурье для функций с периодом* $2l$ *и* $b-a$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l;l]$ и удовлетворяет всем требованиям ***теоремы Фурье***, тогда её можно разложить в ***ряд Фурье***. Если ввести новую переменную $x=\dfrac{l\xi}{\pi}$ и рассмотреть функцию $\varphi(\xi)=f\left(\dfrac{l\xi}{\pi}\right)=f(x)$. Очевидно, что функция $\varphi(\xi)$ определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и её разложение в ***ряд Фурье*** имеет вид:

$$f(x)=\varphi(\xi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\xi)+b_n\sin(n\xi)\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{l}\right)\right)},$$

где коэффициенты ряда определяются формулами

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\cdot\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,dx};\ \boxed{a_n=\frac{1}{l}\cdot\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx};\ \boxed{b_n=\frac{1}{l}\cdot\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx}.$$

Если функция $f(x)$ определена на произвольном отрезке $[a;b]$, периодическая с периодом $T=b-a$ и удовлетворяет условиям ***теоремы Фурье***, то её можно разложить в ***ряд Фурье***, имеющий вид:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)\right)},$$

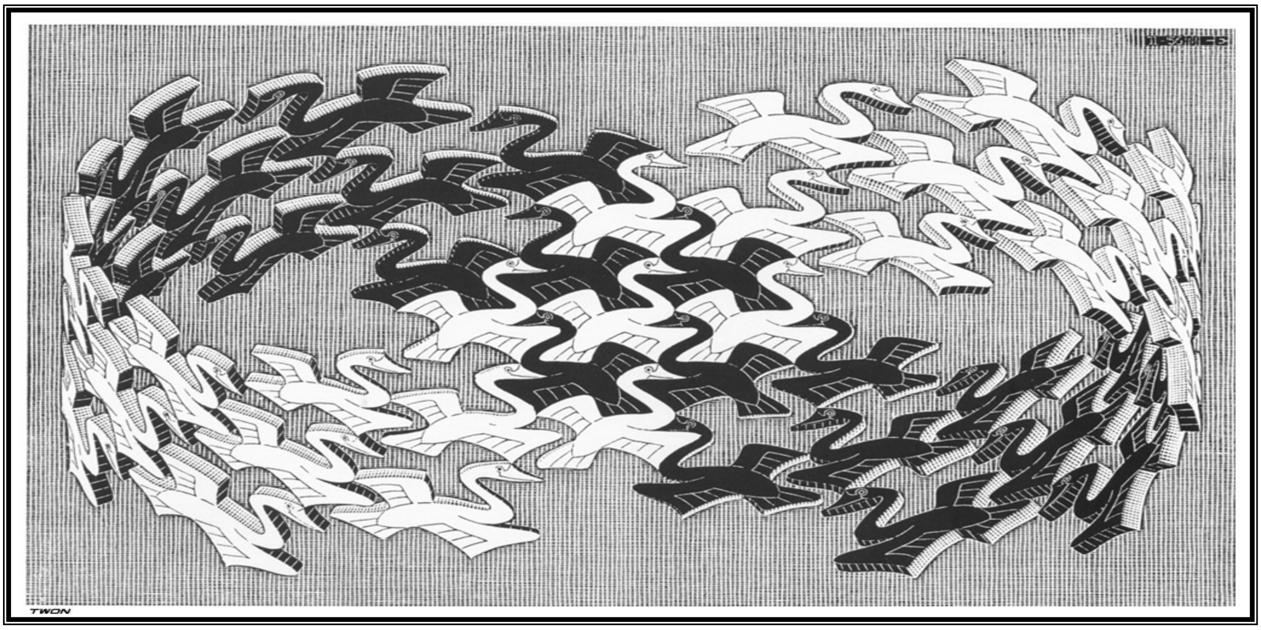
где коэффициенты ряда определяются формулами

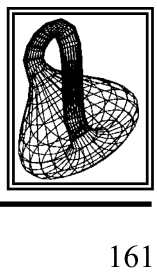
$$\boxed{a_0=\frac{2}{b-a}\cdot\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx};\ \boxed{a_n=\frac{2}{b-a}\cdot\int\limits_{a}^{b}f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)dx};$$

$$\boxed{b_n=\frac{2}{b-a}\cdot\int\limits_{a}^{b}f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{b-a}\right)dx}.$$

Пример 3. Представить в виде ряда Фурье функцию $f(x)=1$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Воспользуемся разложением в ряд Фурье функции $g(x)=x$. Так как $(x)'=1$, то дифференцируя ряд Фурье для функции $g(x)=x$ (см. ***Пример 1*** этой ***Лекции***): $x=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n x)}{n}\ \Rightarrow\ 1=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos(n x)$.





IV

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант 1

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n+3)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^4+1}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{5n-6}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=x^2\cos x$; $x_0=0$; б) $f(x)=\ln(3x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y'' = xy^2 - y';\ y(0)=2;\ y'(0)=1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=x^2$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=x+1$; $x\in(-\pi;\pi)$ (по синусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases} -1, & -2<x\le 0 \\ x, & 0<x\le 2 \end{cases}$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант <u>2</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+3)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n!}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8n+3}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{7n-11}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=e^{\sin x}$; $x_0=0$; б) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*: $y' = x^2 + y^3$; $y(1)=1$.

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=2x+1$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=x+\pi$; $x\in(0;\pi)$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=e^x$; $x\in(-1;1]$; б) $f(x)=\begin{cases} 2, & 0<x\le 1 \\ x, & 1<x\le 2 \end{cases}$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант **<u>3</u>**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+2}{\ln n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{-2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{9n^2+12n-5}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+2\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^{n+1}}{n+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{3^n(n+2)}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)!\,x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-3)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\sin(2x)$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(x)=\ln(4x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y'=-xy^2+2\cos x;\ y(0)=1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=x+1$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\pi/2\\ x, & \pi/2<x\le\pi\end{cases}$; (по косинусам).

11. а) $f(x)=|x|$; $x\in(-2;2]$; б) $f(x)=3x$; $x\in(0;1)$; (по синусам).

Задания для самостоятельного решения
Ряды
Вариант **4**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n+2}{n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{9^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{9n^2+6n-8}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)!}{n+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\dfrac{\pi}{3^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(n^3+1)}{(n+1)!}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $x^2+x^4+x^6+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x+3)^n}{5^n(n+1)}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\ln\left(e^x+x\right)$; $x_0=0$; б) $f(x)=\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* <u>*ненулевых*</u> *члена этого ряда*: $y'=2y+x-1$; $y(1)=0$.

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=x$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x\le 1\\ 2x, & 1<x\le\pi\end{cases}$ (по синусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -1<x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\end{cases}$; б) $f(x)=5x$; $x\in(0;\pi)$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант <u>5</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{3^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+1}{\ln n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 7^{-n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{9n^2+8n+3}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{2n+3}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+2)!}{(3n+5)\,2^n}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt[5]{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctg\, n}{n^2+1}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{9}+\dfrac{9}{27}-\dfrac{16}{81}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{8n+3}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!x^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)9^n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$; $x_0=0$; б) $f(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{x}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*: $y' = x\,e^y + y$; $y(0)=1$.

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases} 2, & -\pi < x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=1-x$; $x\in(0;\,\pi)$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=2x$; $x\in(-1;\,1]$; б) $f(x)=x+3$; $x\in(0;\,3]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант <u>6</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{5^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{(3n-1)(2n+1)}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2+3n-2}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+4}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctg\left(\dfrac{5}{n}\right)}{n!}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)\sqrt{n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $-\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}-\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{\sin x}{3}+\dfrac{\sin(2x)}{9}+\dfrac{\sin(3x)}{27}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{x^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x+4)^n}{(n+2)5^n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\arccos x$; $x_0=0$; б) $f(x)=\ln\left(x^2+3x+2\right)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y''=xy+\left(y'\right)^2;\ y(0)=4;\ y'(0)=-2.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi < x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=x^2$; $x\in(0;\ \pi)$ (по синусам).

11. а) $f(x)=x+1$; $x\in(-1;\ 1]$; б) $f(x)=2x$; $x\in(0;\ 2]$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант 7

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{3n^2 - n + 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{\ln n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 8^{-n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n-2}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+5)\ 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\dfrac{\pi}{3n}\right)$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,tg\left(3^{-n}\right)$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\left(1+\ln n\right)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $-\dfrac{12}{5}+\dfrac{13}{6}-\dfrac{14}{7}+\dfrac{15}{8}-\dfrac{16}{9}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(-1\right)^n}{(n+1)\,3^n}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}+\dfrac{x^3}{\sqrt{4}}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\,x^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,(x-1)^{2n}}{n\,8^n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x) = \sec x$; $x_0 = 0$; б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4+x}}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y'' = y\,y' - x^2;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \le 0 \\ x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x) = 1 + x$; $x \in \left(0;\ \pi\right)$ (по косинусам).

11. а) $f(x) = 2x + 1$; $x \in \left(-1;\ 1\right]$; б) $f(x) = x^2$; $x \in \left(0;\ 1\right]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант 8

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{\ln n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{24}{9n^2-12n-5}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\,(n+1)!}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)\sqrt{n+3}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $1-\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}-\dfrac{1}{4^4}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $(x-2)+\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{(x-2)^3}{3}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+3)}{(n+1)^5x^{2n}}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\sqrt{9+x^2}$; $x_0=0$; б) $f(x)=x\sin(2x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* <u>*ненулевых*</u> *члена этого ряда*:

$$y''=-xy;\; y(0)=1;\; y'(0)=0.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases}1-x, & -\pi<x\le 0\\ 2, & 0<x\le\pi\end{cases}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{2}$; $x\in(0;\pi)$ (по синусам).

11. а) $f(x)=x$; $x\in(-3;3]$; б) $f(x)=x^2$; $x\in(0;1]$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант 9

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{-n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{9n^2+21n-8}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{3n+1}}{5^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)!}$;

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt[5]{n+1}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{17}-\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $1-4x+16x^2-64x^3+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{4n-3}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\sin x$; $x_0=\dfrac{\pi}{3}$; б) $f(x)=1-\cos(3x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* <u>*ненулевых*</u> *члена этого ряда*:

$$(1+x^2)\,y''+x\,y'=y;\; y(0)=1;\; y'(0)=1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=3x-1$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=x^2+1$; $x\in(0;\pi)$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=5x$; $x\in(-3;3]$; б) $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 1, & 1<x\le 2 \end{cases}$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

***Вариант* <u>10</u>**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\, 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{1-2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{n^2+5n-6}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\, 2^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+\ln n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{(2n+1)!}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^4}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}-\dfrac{4}{2^4}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(2n-1)}{3n}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{3x^3}{4}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2nx)}{(2n)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x-4)^{2n}}{2n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; $x_0=4$; б) $f(x)=1-e^{3x}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y' = 2x+\cos y;\ y(0)=0.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi < x \le 0 \\ x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=5x+1$; $x\in(0;\pi]$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases} 2x, & -2 < x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le 2 \end{cases}$; б) $f(x)=x^2$; $x\in(0;2)$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения
Ряды
Вариант **<u>11</u>**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-1}{5n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{4n^2-9}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\dfrac{\pi}{3(n+1)}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+5}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+7}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+5)\sqrt[4]{n+5}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $1-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{64}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{x+1}{1\cdot2}+\dfrac{(x+1)^2}{2\cdot3}+\dfrac{(x+1)^3}{3\cdot4}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\, tg\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=-\dfrac{1}{x}$; $x_0=-2$; б) $f(x)=(1-3x)^{-3}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y''=x^2y;\ y(0)=1;\ y'(0)=1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x\le0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$; б) $f(x)=e^x$; $x\in(0;\pi]$ (по синусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x\le0\\ 0, & 0<x\le1\end{cases}$; б) $f(x)=x+2$; $x\in(0;\,2)$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант <u>12</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{6^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n+3}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+3^n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n+5}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(2n-1)}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n+3)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(4n-3)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^3 n}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{11}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^4}{9}+\dfrac{x^5}{16}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\, 9^n (x-1)^{2n}}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x) = \arcsin x$; $x_0 = 0$; б) $f(x) = \dfrac{1-\cos(3x)}{5x}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y'' = x\,y;\; y(0) = 1;\; y'(0) = 0.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x) = x+3$; $x \in (-\pi;\, \pi\,]$; б) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ (по косинусам).

11. а) $f(x) = |x|$; $x \in (-1;\, 1\,]$; б) $f(x) = 2x+1$; $x \in (0;\, 2\,]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения
Ряды
Вариант **<u>13</u>**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{2\pi}{3n}\right)$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n-1)2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\cdot 11\cdot 16\cdot\ldots\cdot(5n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{arctg(5n)}{25n^2+1}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{6}{7}-\frac{8}{9}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3(n+1)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\frac{3(x+2)}{1}+\frac{3^2(x+2)^2}{1\cdot 2}+\frac{3^3(x+2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\ln x$; $x_0=1$; б) $f(x)=x\sin(3x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* <u>*ненулевых*</u> *члена этого ряда*:

$$(1+x^2)y''=2y;\ y(0)=1;\ y'(0)=0.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=x^2+x$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=1-\frac{2x}{\pi}$; $x\in(0;\pi)$ (по синусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0\\ x, & 0<x\le 2\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}2, & 0<x\le\frac{\pi}{4}\\ 1, & \frac{\pi}{4}<x\le\pi\end{cases}$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант 14

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg(\pi n)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{2^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{25n^2-5n-6}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{-n}}{n+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{8\cdot 11\cdot 14\cdot\ldots\cdot(3n+5)}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^4+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+8)\ \ln(n+8)}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{102}-\dfrac{2}{104}+\dfrac{3}{106}-\dfrac{4}{108}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n\,7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2(x+2)^n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\cos x$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{5-x^2}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре ненулевых члена этого ряда*: $y' + y^2 = e^x$; $y(0)=0$.

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi < x \le 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=4x$; $x\in(0;\ \pi)$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=e^x$; $x\in(-2;\ 2]$; б) $f(x)=2x-1$; $x\in(0;\ 1]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант <u>15</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{9^n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя определение сходимости:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n - 2^n}{6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2 + 7n - 12}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)\,5^n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{(n+1)!\;4^n}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^3 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n+2}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{6} - \dfrac{8}{9} + \dfrac{16}{12} - \ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2\,(n+3)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $1 + x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{4n-3}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x) = e^{-x^2}$; $x_0 = 0$; б) $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* <u>*ненулевых*</u> *члена этого ряда*: $y' - y^3 = -x$; $y(0) = 1$.

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x) = x^2 - 1$; $x \in (0; \pi\,]$ (по косинусам).

11. а) $f(x) = 1 - x$; $x \in (-2;\, 2\,]$; б) $f(x) = 3x$; $x \in (\,0;\, 1\,]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант **16**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n \sin\left(\pi/2^n\right)}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{5^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2-56n-33}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\dfrac{\pi}{7n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^5+5}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+4}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{3n+1}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^9 n}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $-1+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{x}{4}+\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{x}{4}\right)^3+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\cos x$; $x_0=\dfrac{\pi}{3}$; б) $f(x)=e^{-3x}-\cos(3x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* *<u>ненулевых</u>* *члена этого ряда*:

$$y''=(2x-1)y-1;\; y(0)=0;\; y'(0)=1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0 \\ x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=\dfrac{\pi - x}{2}$; $x\in(0;\pi]$ (по синусам).

11. а) $f(x)=4-2x$; $x\in(-3;3]$; б) $f(x)=e^x$; $x\in(0;1]$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения
Ряды
Вариант **<u>17</u>**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2-1}{n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+21n-10}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{2\pi}{5n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^6+2}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n\; n!}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2^2}\frac{x^4}{4}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n!\,(x+3)^n$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\frac{x}{x+4}$; $x_0=0$; б) $f(x)=\sin(2x)-\cos(2x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y''-y\cos x=x;\; y(0)=1;\; y'(0)=0.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=3x-4$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=1-2x$; $x\in(0;\pi)$ (по синусам).

11. а) $f(x)=e^{-x}$; $x\in(-1;1]$; б) $f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le0\\ x, & 0<x\le1\end{cases}$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения
Ряды
Вариант **<u>18</u>**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{5(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n+1}{n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{-n}}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n+1}}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^n}{3n+2}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^5 n}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{13}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!\,2^n}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\sin x+\dfrac{\sin(2x)}{2^3}+\dfrac{\sin(3x)}{3^3}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{5n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^3+1)}{3^n(x-2)^n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=tg\,x$; $x_0=0$; б) $f(x)=\sin x-x\cos x$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y''+xy'+y=x^2;\ y(0)=0;\ y'(0)=0.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0\\ 0, & 0<x\le\pi\end{cases}$; б) $f(x)=1+x$; $x\in(0;\pi]$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases}-1, & -4<x\le 0\\ x, & 0<x\le 4\end{cases}$; б) $f(x)=e^x$; $x\in(0;1]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант 19

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n}}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{3^2}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\ln x$; $x_0=2$; б) $f(x)=e^x-\cos x$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* *<u>ненулевых</u>* *члена этого ряда*:

$$y'=x+y;\ y(0)=1;\ y'(0)=1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=2x-1$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=x+5$; $x\in(0;\pi)$ (по синусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\end{cases}$; б) $f(x)=2-x$; $x\in(0;2]$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения
Ряды
Вариант <u>**20**</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+11}{n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+2^n}{6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{5^n}\right)$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n (n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1}}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2+3}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}-\dfrac{4}{9}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3 (n+1)}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^8}{8}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x+1)^{2n} 4^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; б) $f(x)=e^{2x}-\cos(2x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y''+y\cos x=0;\ y(0)=3;\ y'(0)=0.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=x+7$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=e^x$; $x\in(0;\pi]$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=\begin{cases} -1, & -1<x\le 0 \\ 1+3x, & 0<x\le 1 \end{cases}$; б) $f(x)=2-x$; $x\in(0;2]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

***Вариант* 21**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\ln n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{3^n+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n(2n+1)}{3n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n+1)}{n!}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{arctg(2n)}{4n^2+1}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{17}-...$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2n}{2n-1}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{x^2}{1\cdot 2}+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dfrac{x^4}{3\cdot 4}+\dfrac{x^5}{4\cdot 5}+...$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n^2+1)}{5^n(x+4)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,(x+3)^n$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\sqrt{x}$; $x_0=4$; б) $f(x)=x\ln(10+x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*: $y'=y^2-x$; $y(0)=1$.

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases} \pi, & -\pi<x\le 0 \\ \pi-x, & 0<x\le\pi \end{cases}$; б) $f(x)=x+\pi$; $x\in(0;\pi]$ (по синусам).

11. а) $f(x)=x+2$; $x\in(-2;2]$; б) $f(x)=x$; $x\in(0;1]$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант <u>22</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости ряда*: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{\ln n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+4)(n+5)}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3\cdot 2^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n+5}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n+2)!}{10n+1}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{n^4+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $2-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{5}{16}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3+2}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n(2n-1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n!}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0 \neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0 = 0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=e^x$; $x_0=-2$; б) $f(x)=e^{3x}-2+\cos(3x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y''=x\sin y';\ y(1)=0;\ y'(1)=\pi.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$; б) $f(x)=\pi-x$; $x\in(0;\pi]$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=1-x$; $x\in(-1;1]$; б) $f(x)=2x$; $x\in(0;2]$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения
Ряды
Вариант **23**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{2\pi}{7n}\right)$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n+5}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{17}}-...$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $(2x+1)+\frac{(2x+1)^2}{3}+\frac{(2x+1)^3}{5}+...$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{x^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq 0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\cos x$; $x_0=-\frac{\pi}{3}$; б) $f(x)=\sqrt{1+x^7}$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре* ненулевых *члена этого ряда*:

$$y''=xy'+y^2;\ y(0)=1;\ y'(0)=2.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$; б) $f(x)=x-\pi$; $x\in(0;\pi]$ (по синусам).

11. а) $f(x)=e^x$; $x\in(-3;3]$; б) $f(x)=2x$; $x\in(0;1)$ (по косинусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант **24**

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n}{3n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+4}{7n}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^{2n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-5n+6}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\,5^n}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(n+5)^3}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $3x^2+6x^5+9x^8+12x^{11}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{x^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; $x_0=2$; б) $f(x)=e^x-x\sin x$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*:

$$y''-xy=0;\ y(0)=0;\ y'(0)=1.$$

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

а) $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$; б) $f(x)=x-2\pi$; $x\in(0;\pi]$ (по косинусам).

11. а) $f(x)=5x$; $x\in(-1;1]$; б) $f(x)=3-2x$; $x\in(0;2)$ (по синусам).

Задания для самостоятельного решения

Ряды

Вариант <u>25</u>

1. Написать *первые пять членов* данных рядов. Проверить выполнение *необходимого признака сходимости* ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n+1}$.

2. Исследовать ряды на сходимость, используя *определение сходимости*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{-2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{9n^2+6n-8}$.

3. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак сравнения*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{2}{n}\right)}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+4}$.

4. Исследовать ряды на сходимость, используя *признак Даламбера*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{5^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\,(n+1)!}$.

5. Исследовать ряды на сходимость, используя *интегральный признак Коши*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^4}}$.

6. Записать *общий член ряда* в случае а) и исследовать ряды на сходимость, используя *признак Лейбница* (в случаях а) и б)):

а) $1-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{64}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

7. Найти *область сходимости* функциональных рядов:

а) $\dfrac{3(x+2)}{1}+\dfrac{3^2(x+2)^2}{1\cdot2}+\dfrac{3^3(x+2)^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{4n-3}$.

8. а) Разложить функцию $f(x)$ в *ряд Тейлора* (при $x_0\neq0$) или в *ряд Маклорена* (при $x_0=0$); б) разложить данную функцию $f(x)$ в *ряд Маклорена*, используя *стандартные разложения*: а) $f(x)=\cos x$; $x_0=\dfrac{\pi}{3}$; б) $f(x)=\sin(2x)-\cos(2x)$.

9. Найти решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда, *указав первые четыре <u>ненулевых</u> члена этого ряда*: $y'+y^2=e^x$; $y(0)=0$.

10, 11. а) Разложить в *ряд Фурье* заданные функции $f(x)$ в указанных интервалах; б) разложить в *ряд Фурье* данные функции в указанных интервалах либо *по косинусам*, либо *по синусам* (указано в скобках).

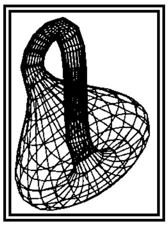
а) $f(x)=x+7$; $x\in(-\pi;\pi]$; б) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le0\\ x, & 0<x\le\pi\end{cases}$; (по косинусам).

11. а) $f(x)=1-x$; $x\in(-2;2]$; б) $f(x)=2x-1$; $x\in(0;1]$ (по синусам).

Список использованных источников

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – Москва: Наука. – 1979. – 408 с.
2. Виленкин Н.Я., Цукерман В.В., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. Ряды. – Москва: Просвещение. – 1982. – 159 с.
3. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – Москва: Наука. – 1965. – 607 с.
4. Власова Е.А. Ряды. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана.–2006.– 616 с.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – Москва: Айрис-пресс. – 2009. – 608 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1.– Москва: Наука.– 1974. – 480 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2.– Москва: Наука.– 1974. – 656 с.
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1. – Москва: Мир. – 1965. – 616 с.
9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. – Москва: Мир. – 1965. – 538 с.
10. Харди Г. Расходящиеся ряды. – Москва: Иностранная литература. – 1951. – 504 с.
11. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. – Москва-Ленинград: Гл. ред. техн.-теор. лит-ры. – 1951. – 550 с.
12. Снедон И. Преобразование Фурье. – Москва: Иностранная литература. – 1955. – 667 с.
13. Бугров Я.С. Высшая математика. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.
14. Бугров Я.С. Высшая математика. Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.
15. Кожевников Н.И., Краснощекова Т.И., Шишкин Н.Е. Ряды и интеграл Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – Москва: Наука.– 1964. – 184 с.
16. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – Москва: Наука.– 1960. – 390 с.
17. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – Москва: Гл. изд-во. физ.-мат. лит-ры. – 1961. – 936 с.
18. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 592 с.
19. Шипачев В.С. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1998. – 479 с.

20. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. – Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры. – 1980. – 496 с.
21. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч.2. Основы математического анализа и элементы дифференциальных уравнений. – Минск: Амалфея. – 2003. – 352 с.
22. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1972. – 640 с.
23. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. – Москва: ООО «Изд-во Астрель», ООО «Изд-во АСТ». – 2001. – 656 с.
24. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1964. – 684 с.
25. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 672 с.
26. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – Москва: Наука. – 1973. – 640 с.
27. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – Москва: Высшая школа. – 1999. – 695 с.
28. Гурова З.И., Каролинская С.Н., Осипова А.П. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 352 с.
29. Ивашев-Мусатов О.С. Начала математического анализа. – Москва: Наука. – 1988. – 288 с.
30. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – Москва: Наука. – 1967. –736 с.
31. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.2. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 464 с.
32. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Основы математического анализа. Ч.2. – Москва: МГУ. – 1987. – 358 с.
33. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. Т.2. Задачи.– Донецк: Цифровая типография.– 2011.– 511 с.



IV. *Ряды. Дифференциальные уравнения I и II порядков.*

Тема: *Обыкновенные дифференциальные уравнения I и II порядков*

<u>42</u>. "*Дифференциальные уравнения I порядка*"

42.1. *Основные определения*

Соотношение вида $\boxed{F(x,\, y,\, y',\, y'',...,y^{(n)})=0}$ (x – независимая переменная, $y(x)$ – неизвестная функция, подлежащая отысканию, y', y'', ..., $y^{(n)}$ – её производные вплоть до порядка n) называется ***дифференциальным уравнением порядка*** n (*ДУn*).

Порядок наивысшей производной, которая входит в дифференциальное уравнение, называется ***порядком дифференциального уравнения***.

Дифференциальным уравнением I порядка (*ДУI*) называется *соотношение вида* $\boxed{F(x,y,y')=0}$.

Если удаётся выразить производную y' *из заданного соотношения*, определяющего дифференциальное уравнение I порядка (*ДУI*), то говорят, что уравнение $\boxed{y'=f(x,\, y)}$ ***разрешено относительно первой производной*** (***каноническое*** *ДУI*).

Используя определение производной через отношение дифференциалов функции и аргумента, можно *ДУI* записать в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ \left(\text{или}\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}\right)\Rightarrow dy-f(x,y)\,dx=0,$$

которое в общем виде можно записать так $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$.

При $N(x,y)\neq 0$ функция $f(x,y)=\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ называется ***правой частью*** *ДУI, разрешённого относительно производной.*

Дифференциальное уравнение $\boxed{M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0}$ называется ***ДУI***, ***записанным в дифференциалах*** (или в ***симметричном*** виде: $\boxed{\dfrac{dx}{N(x,y)}=-\dfrac{dy}{M(x,y)}}$).

Если уравнение $M\,(x,y)\,dx+N\,(x,y)\,dy=0$ не является уравнением в полных дифференциалах, то найдётся такая функция $\mu(x,y)\neq 0$, произведение которой с исходным уравнением переводит его в уравнение в полных дифференциалах $\mu(x,y)[M\,(x,y)\,dx+N\,(x,y)\,dy]=d\varphi(x,y)=0$.

Именно поэтому функцию $\mu(x,y)\neq 0$ называют ***интегрирующим множителем*** уравнения. ○

○ Для однородного уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ***интегрирующим множителем*** уравнения является $\boxed{\mu(x,y)=(M(x,y)x+N(x,y)y)^{-1}\neq 0}$. ○

Процесс решения ДУ называется ***интегрированием***, а *график функции*, определяющей решение *ДУ*, называется ***интегральной кривой***.

Точка с координатами x_0 и y_0, через которую *проходит* *более одной* *интегральной кривой или не проходит* *ни одна* *интегральная кривая*, называется ***особой точкой ДУ***.

Пример 1. Найти *интегральные кривые ДУI* $y'=3x^2$.

Так как первообразной для заданного уравнения является функция $y=x^3+C$, где C – постоянная интегрирования, то линия $y=x^3$ определяет *интегральную кривую*, а функция $y=x^3+C$ – *интегральные кривые*.

Общим решением ДУI называется *функция* $\boxed{y=\varphi(x,\,C)}$ такая, что:
– при любом значении постоянной $C\in R$ эта функция удовлетворяет заданному уравнению;
– каковы бы ни были x_0 и y_0, принадлежащие области определения функции y, существует одно значение C такое, что $y_0=\varphi(x_0,\,C)$.

Частным решением ДУI называется функция, которая получается из общего решения при конкретном значении постоянной интегрирования C_0.

○ Решение *ДУ* может быть получено в явном, неявном или параметрическом виде. ○

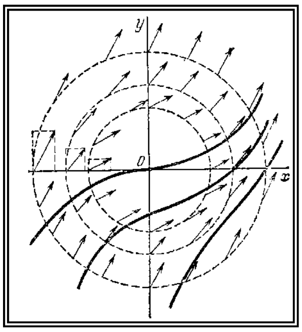
Для нахождения *частного решения* *ДУI* задаётся начальное условие в виде $y(x=x_0)=y_0$ или $y\big|_{x=x_0}=y_0$. Нахождение *частного решения ДУ* называется ***задачей Коши***.

Решение ДУ называется ***особым***, если оно описывается кривой, в каждой точке которой нарушается единственность решения задачи Коши.

Геометрический смысл *ДУ* состоит в следующем: правая часть *ДУ* задаёт в каждой точке производную, т.е. она определяет тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой. Совокупность отрезков, определяющих касательные к интегральной кривой, дают *поле направлений* для интегральной кривой.

Изоклиной называется геометрическое место точек, в которых *касательные к интегральным кривым имеют одно и то же значение*.

Пример 2. Найти поле направлений и изоклины для *ДУI* $y'=\sqrt{x^2+y^2}$.



Правая часть данного уравнения определяет концентрические окружности с центром в начале координат, следовательно, поле направлений, изоклины и интегральные кривые имеют вид (рис. 1):

Рис. 1. *Поле изоклин для дифференциального уравнения первого порядка* $y'=\sqrt{x^2+y^2}$.

<u>Теорема 1</u> (***о существовании и единственности решения ДУI***). Если функция $f(x,y)$, стоящая в *<u>правой</u>* части *ДУI*, *непрерывна в области* $D(x,y)$, то для любых точек из области $(x_0,y_0)\in D(x,y)$ существует решение *ДУI* такое, что $y_0=\varphi(x_0,C)$. *Если функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет* ***<u>условию Липшица</u>*** *по переменной* y: $\boxed{\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le k\left|y_1-y_2\right|}$ (здесь k – постоянный множитель, который не зависит от переменных x и y), то это решение *<u>единственное</u>*.

Точка, в которой нарушаются условия теоремы, называется ***особой***.

○ Если в области $D(x,y)$ через каждую точку проходит только одна интегральная кривая, то через особую точку проходит несколько интегральных кривых. ○

42.2. ***ДУI с разделяющимися переменными***

Дифференциальное уравнение вида $\boxed{y'=f(x,\ y)=q(x)\,g(\,y)}$ называется ***ДУI с разделяющимися переменными***.

ДУI с разделяющимися переменными решают по ***схеме***:

– обе части уравнения умножают на dx, при этом уравнение принимает вид $dy=q(x)\,g(\,y)\,dx$;

– обе части уравнения делят на функцию $g(\,y)\ne 0$, т.е. приводят уравнение к виду $\dfrac{dy}{g(y)}=q(x)\,dx$ (точки, в которых $g(y)=0$ определяют особые точки, при этом получаемые решения являются особыми);

Дифференциальное уравнение вида $\boxed{M(x)\,dx+N(\,y)\,dy=0}$ называется ***ДУI с разделёнными переменными***.

– *ДУI с разделёнными переменными* интегрируется, т.е.

$$\int\frac{dy}{g(\,y)}=\int q(x)\,dx+C\,.$$

В общем случае *ДУI с разделяющимися переменными* имеет вид:

$$\boxed{M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0}.$$

Деля *ДУI* на произведение $N_1(y)\,M_2(x)$, получаем дифференциальное уравнение с разделёнными переменными $\boxed{\dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0}$.

Особые решения ДУI получают из решения уравнений

$$N_1(y) = 0 \text{ и } M_2(x) = 0.$$

ДУI с разделёнными переменными интегрируют

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Пример 3. Решить *ДУI* $(1+x)\,y\,dx + (1-y)\,x\,dy = 0$.

Разделим всё уравнение на произведение функций $y\,x$ (особой точкой является точка $O(0;0)$), получим $\dfrac{1+x}{x}dx + \dfrac{1-y}{y}dy = 0$. Полученное *ДУI* с разделёнными переменными интегрируем $\int\left(\dfrac{1}{x}+1\right)dx + \int\left(\dfrac{1}{y}-1\right)dy = C$.

Вычислим неопределённые интегралы и найдём общее решение данного *ДУI* $\ln|x| + x + \ln|y| - y = C$.

Пример 4. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400\ м/сек$ перпендикулярно к поверхности стены с толщиной $h = 20\ см = 0{,}2\ м$, пробивает её и вылетает из неё со скоростью $v_1 = 100\ м/сек$. Полагая силу сопротивления материала стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время T движения пули в стене.

Воспользуемся вторым законом Ньютона $ma = F$, где m − масса пули, $a = \dfrac{dv}{dt}$ − ускорение, t − время, $F = -k\,v^2$ − сила сопротивления материала стены (знак «−» указывает на то, что сила антинаправлена скорости движения пули), k − коэффициент пропорциональности. Дифференциальное уравнение движения пули имеет вид $m\dfrac{dv}{dt} = -k\,v^2$ и является *дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными*. Разделим переменные и введя обозначение $k_1 = \dfrac{k}{m}$, получим уравнение $\dfrac{dv}{v^2} = -k_1\,dt$. Проинтегрировав это равенство, получим ***общее решение*** *ДУI с разделёнными переменными* $-\dfrac{1}{v} = -k_1 t - C$ (см. замечание относительно выбора постоянной интегрирования в п. 43.1, ***43***). В начальный момент времени $t = 0$ скорость пули $v = v_0$. Подставив эти величины в общее решение ***общее решение*** *ДУI*, получим $C = \dfrac{1}{v_0}$, поэтому ***частное решение*** имеет вид $\dfrac{1}{v} = k_1 t + \dfrac{1}{v_0}$. Если положить $t = T$, то скорость пули $v = v_1$, т.е. время T движения пули в стене удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{v_1} = k_1 T + \dfrac{1}{v_0}$. Откуда найдём время пролёта $T = \dfrac{1}{k_1}\left(\dfrac{1}{v_1} - \dfrac{1}{v_0}\right)$. Для нахождения неизвестного коэффициента k_1 выберем декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс (Ox) была перпендикулярна к поверхности стены, а начало координат находилось на самой поверхности, т.е. при $t = 0$ пуля находится в точке $x = 0$, а по истечении промежутка времени $t = T$ − в точке $x = h$. Выразим из общего решения скорость v: $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{v_0}{1 + v_0 k_1 t}$ (*). Разделив переменные $dx = \dfrac{v_0\, dt}{1 + v_0 k_1 t}$ и проинтегрировав полученное выражение, находим $x = \dfrac{1}{k_1}\ln\left|1 + v_0 k_1 t\right| + C_1$. Из начального условия $(t = 0,\ x = 0)$ получим, что константа $C_1 = 0$, а из второго условия $(t = T,\ x = h)$ –

$$h = \frac{1}{k_1}\ln\left|1 + v_0 k_1 T\right| \ (**).$$

Из соотношения (*) из условия $t = T$ скорость $v = v_1$ найдём, что

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + v_0 k_1 T} \Rightarrow 1 + v_0 k_1 T = \frac{v_0}{v_1}.$$

Подставим полученное выражение в равенство (**), следовательно,

$$h = \frac{1}{k_1}\ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$k_1 = \frac{1}{h}\ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right) = \frac{1}{0{,}2}\ln\left(\frac{400}{100}\right) = 5\ln 4\,(м^{-1}).$$

Таким образом, время пролёта пули в стене равно

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{5\ln 4}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{400}\right) = 1{,}082\cdot 10^{-3}\ (сек).$$

Пример 5. Вывести дифференциальное уравнение движения тела с переменной массой (***уравнение Мещерского***).

Пусть в момент времени t тело с массой m двигалось со скоростью $\boldsymbol{v}$, а к нему присоединилось (отсоединилось) тело с массой Δm, которое перемещалось со скоростью $\boldsymbol{u}$. Тогда количество движения (импульс системы) $\boldsymbol{Q}(t)$ в момент времени t равен $\boldsymbol{Q}(t) = m\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}\Delta m$. В момент времени $t+\Delta t$ оно равно

$$\boldsymbol{Q}(t+\Delta t) = \boldsymbol{Q}(t) + \Delta\boldsymbol{Q} = (m(t)+\Delta m)(\boldsymbol{v}(t)+\Delta\boldsymbol{v})$$

Следовательно, изменение импульса системы определяется равенством

$$\Delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(t+\Delta t) - \boldsymbol{Q}(t) = (m+\Delta m)(\boldsymbol{v}(t)+\Delta\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{u}\Delta m =$$
$$= m\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\Delta m + \Delta m\Delta\boldsymbol{v}\ .$$

С учётом того факта, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta m\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = 0$ (см. *п.5* **Лекции № 17**), получим ***уравнение Мещерского*** $\boxed{\dfrac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{F} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} + (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\dfrac{dm}{dt}}$.

Пример 6. Вывести и решить дифференциальное уравнение ***радиоактивного распада***. Определить связь между коэффициентом пропорциональности и *периодом полураспада* радиоактивного изотопа.

Радиоактивным распадом называются самопроизвольные превращения ядер некоторых элементов в другие ядра, которые сопровождаются α-, β- и γ-излучением. Отметим, что ядра атомов распадаются не одновременно все сразу, а в течение времени существования радиоактивного изотопа. Экспериментально установлено, что число атомов, распадающихся в единицу времени ($\dfrac{dN\ (t)}{dt}$), пропорционально (λ – коэффициент пропорциональности) числу нераспавшихся атомов $N(t)$, т.е. $\dfrac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ (знак «–» указывает на уменьшение числа $N(t)$ с течением времени). После разделения переменных *ДУI с разделяющимися переменными* принимает вид $\boxed{\dfrac{dN}{N} = -\lambda\, dt}$, интегрирование которого приводит к выражению $\ln N = -\lambda t + \ln C$ (см. замечание относительно выбора постоянной интегрирования в п. 43.1, ***43***). Потенцируя найденное решение, получим

$$\boxed{N(t) = N_0\exp(-\lambda t)}\ (^{\circ}),$$

где величина $N_0 = N(0) = C$ определяет число радиоактивных атомов в начальный момент времени $t = 0$. ***Периодом полураспада*** T данного изотопа называется время, в течение которого распадается половина ядер от изначального числа изотопов. В качестве примера приведём периоды полураспада некоторых изотопов: радий – T=1590 лет; уран – T=4,6 млрд. лет; кобальт – T =5,3 года; радон – T=3,82 суток. Для нахождения связи между периодом полураспада T и коэффициентом пропорциональности λ воспользуемся уравнением (º). При $t=T$ число изотопов $N(T)=\dfrac{N_0}{2}$, следовательно, $\dfrac{N_0}{2}=N_0\exp(-\lambda T)$, т.е. $\dfrac{1}{2}=\exp(-\lambda T)$.

Прологорифмировав это выражение, получим $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\lambda T$ или $\ln 2=\lambda T$.

Отсюда находим, что $\lambda=\dfrac{\ln 2}{T}\approx\dfrac{0{,}693}{T}$, а уравнение распада (º) принимает вид: $\boxed{N(t)=N_0\exp\left(-\dfrac{t}{T}\ln 2\right)}$.

<u>43</u>. "*Однородные и линейные ДУГ*"

43.1. *Однородные ДУI*

Функция $f(x;y)$ называется ***однородной функцией*** n***-го измерения*** относительно переменных x и y, если $\forall\lambda\in R$ имеет место равенство

$$\boxed{f(\lambda x;\lambda y)=\lambda^n f(x;y)}.$$

Пример 1. Однородны ли функции $f(x;y)=x^2+y^2$ и $f(x;y)=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$?

Используя определение *однородной функции*, получаем

$$f(\lambda x;\ \lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2=\lambda^2(x^2+y^2)=\lambda^2 f(x;\ y)$$

– *однородная функция второго измерения*;

$$f(\lambda x;\ \lambda y)=\frac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}=\frac{\lambda^2\, 2xy}{\lambda^2(x^2-y^2)}=\lambda^0 f(x;\ y)$$

– *однородная функция нулевого измерения*.

Рассмотрим *ДУI* $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, где $f(x;y)$ – однородная функция.

Выберем $\lambda=\dfrac{1}{x}$, тогда дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{1}{x}\cdot x;\ \frac{1}{x}\cdot y\right)=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Если правая часть *ДУI* $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ зависит только от отношения $\dfrac{y}{x}$

(или $\dfrac{x}{y}$), то это ***однородное ДУI***. ○

Решение *однородного ДУI* проводится по *схеме*:

– вводят новую функцию $\boxed{u=\dfrac{y}{x} \Rightarrow y=u\,x}$;

– находят производную $\boxed{\dfrac{dy}{dx}=u'x+u}$;

– найденные величины подставляют в *однородное ДУI*

$$\boxed{u'x+u=F(u)};$$

○ В результате указанной замены *однородное ДУI* сводится к *ДУI с разделяющимися переменными*. ○

– решают *ДУI с разделяющимися переменными*:

$$\frac{du}{dx}x+u=F(u)\,;\ \frac{du}{dx}x=F(u)-u\,;\ \frac{du}{F(u)-u}=\frac{dx}{x}\,;\ \int\frac{du}{F(u)-u}=\int\frac{dx}{x};\ \boxed{\int\frac{du}{F(u)-u}=\ln|x|+C};$$

– находят искомую функцию $y=u\,x$.

Пример 2. Решить ДУI $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

В правой части разделим числитель и знаменатель дроби на x^2, получим уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\dfrac{y}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$, следовательно, данное *ДУI* является *однородным*. Будем действовать в соответствии со схемой решения:

$$u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=u\,x;\quad \frac{dy}{dx}=u'x+u;\quad u'x+u=\frac{2u}{1+u^2};\quad \frac{du}{dx}x=\frac{2u}{1+u^2}-u\,;$$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{2u-u-u^3}{1+u^2}\,;\ \frac{du}{dx}x=\frac{u-u^3}{1+u^2}\,;\ \frac{(1+u^2)\,du}{u(1-u^2)}=\frac{dx}{x}\,;$$

$$\int\frac{(1+u^2)\,du}{u\,(1-u^2)}=\ln|x|+C\,.$$

Для вычисления интеграла применим метод тождественных преобразований подынтегральной функции (см. п. 25.1, ***25***)

$$\int\frac{(1+u^2)\,du}{u\,(1-u^2)}=\int\frac{(1-u^2+2u^2)\,du}{u\,(1-u^2)}=\int\frac{du}{u}+2\int\frac{u\,du}{1-u^2}=\ln|u|+2\left|\begin{array}{l} t=1-u^2 \\ dt=-2u\,du \\ 2u\,du=-dt \end{array}\right|=$$

$$=\ln|u|-\int\frac{dt}{t}=\ln|u|-\ln|t|+C=\ln\left|\frac{u}{1-u^2}\right|+C\,.$$

○ Если искомая функция и её аргумент входят в полученное общее решение дифференциального уравнения *под знаком логарифма*, то постоянную интегрирования рекомендуется выбирать в виде $\boxed{\ln|C|}$. В общем случае постоянная интегрирования выбирается из соображений упрощения формы записи общего решения дифференциального уравнения. ○

С учётом замечания и определения функции u получаем

$$\ln\left|\frac{u}{1-u^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|; \quad \ln\left|\frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| = \ln|Cx|; \quad \ln\left|\frac{yx}{x^2-y^2}\right| = \ln|Cx|.$$

Потенцируя полученное равенство и сокращая обе части равенства на $x \neq 0$, получим общее решение заданного однородного дифференциального уравнения $\dfrac{y}{x^2-y^2} = C$.

○ Если *однородное ДУI* задано в дифференциалах

$$M(x;\, y)\,dx + N(x;\, y)dy = 0,$$

то его преобразуют к виду $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x;\, y)}{N(x;\, y)} = f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ и решают по вышеприведенной схеме. ○

Пример 3. Решить *ДУI* $\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx - x\,dy = 0$.

Приведём заданное уравнение к обычному виду $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$. В правой части разделим числитель и знаменатель дроби на x, получим уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} + \dfrac{y}{x} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$, следовательно, данное дифференциальное уравнение первого порядка является ***однородным***. Будем действовать в соответствии со ***схемой*** решения:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u\,x; \quad \frac{dy}{dx} = u'x + u; \quad u'x + u = \sqrt{1+u^2} + u;$$

$$\frac{du}{dx}x = \sqrt{1+u^2}; \quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln|x| + C;$$

$$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|; \quad \ln\left|\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| = \ln|C\,x|.$$

Потенцируя полученное равенство и умножая обе части равенства на

x, получим общее решение заданного однородного дифференциального уравнения $y+\sqrt{x^2+y^2}=C\,x^2$.

Пример 4. Решить *ДУІ* $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

Правая часть заданного *ДУІ* $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\cancel{x}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\dfrac{y}{x}\right)}=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ зависит только от отношения $\dfrac{y}{x}$, следовательно, *ДУІ* является ***однородным***. Замена $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\ y=u\,x$ приводит *ДУІ* к виду

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u};\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}-u;\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав обе части равенства, получим общее решение

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{1+u^2}+\int\frac{udu}{1+u^2}=\int\frac{dx}{x};$$

$$arctgu+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|-\ln|C|;\quad Ce^{arctgu}=x\sqrt{1+u^2};\quad Ce^{arctg\left(\frac{y}{x}\right)}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

В полярной системе координат (п. 9.2, ***9***) это равенство имеет вид $Ce^{\varphi}=r$. Это равенство описывает семейство логарифмических спиралей, которые образуют бесчисленное множество оборотов вокруг полюса полярной системы координат (рис. 2). В этом случае полюс полярной системы координат называется ***фокусом***.

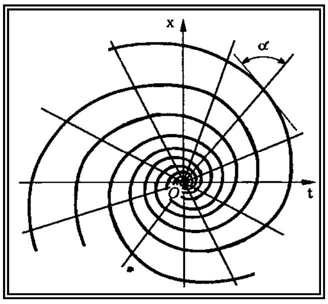


Рис. 2. *Семейство логарифмических спиралей, закручивающихся вокруг фокуса.*

43.2. *Линейные ДУІ*

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\boxed{y'+P(x)\,y=Q(x)}$$

называется ***линейным ДУІ***.

Решение линейного *ДУІ* проводят по ***схеме***:

– искомую функцию представляют в виде произведения двух функций, одну из которых можно выбрать произвольным образом, т.е.

$$\boxed{y=u(x)\,v(x)};$$

– находят её производную $\boxed{y' = u'v + uv'}$;

– найденные величины подставляют в *линейное ДУI*

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x);$$

– группируют, например, второе и третье слагаемые уравнения

$$\underline{\underline{u'v}} + u(\underline{v'} + \underline{P(x)\,v}) = \underline{\underline{Q(x)}};$$

– так как одну из функций u или v можно выбрать произвольным образом, то выберем функцию v так, чтобы выражение, записанное в круглых скобках, обратилось в нуль, тогда уравнение будет эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными, т.е.

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0 & (1) \\ u'v = Q(x) & (2) \end{cases};$$

– решают первое уравнение системы (при этом постоянную интегрирования выбирают равной нулю в силу произвольности отыскиваемой функции);

$$(1):\ \frac{dv}{dx} = -P(x)v;\ \frac{dv}{v} = -P(x)\,dx;\ \ln|v| = -\int P(x)\,dx;\ v = \exp\left(-\int P(x)\,dx\right).$$

В силу произвольности функции v постоянная интегрирования выбрана равной нулю ($C = 0$).

– найденную функцию v подставляют во второе уравнение системы и решают его (при этом постоянная интегрирования будет произвольной и не равной нулю ($C \neq 0$));

$$(2):\ \frac{du}{dx}\exp\left(-\int P(x)\,dx\right) = Q(x);\ \frac{du}{dx} = Q(x)\exp\left(\int P(x)\,dx\right);$$

$$du = Q(x)\exp\left(\int P(x)\,dx\right)dx;\ \ u = \int Q(x)\exp\left(\int P(x)\,dx\right)dx + C;$$

– находят искомую функцию $\boxed{y = u(x)v(x)}$.

Пример 5. Решить *ДУI* $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

По форме записи определяем, что заданное *ДУI* является *линейным* (сравните с теоретической формой записи: $P(x) = -\dfrac{2}{x+1}$; $Q(x) = (x+1)^3$).

Применим вышеприведенную методику:

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + u(v' - \frac{2}{x+1}v) = (x+1)^3.$$

Полученное уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2}{x+1} v = 0 \quad (1) \\ u'v = (x+1)^3 \quad (2) \end{cases}.$$

Решим первое уравнение системы

$$(1): \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x+1} v; \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x+1}; \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x+1| \ (C=0).$$

Потенцируя полученное равенство, находим, что функция $v = (x+1)^2$. Подставим эту функцию во второе уравнение системы и решим его

$$(2): \frac{du}{dx}(x+1)^2 = (x+1)^3.$$

Сокращая обе части равенства на $(x+1)^2$ и разделяя переменные, получим $du = (x+1)\,dx$. Проинтегрируем это равенство

$$\int du = \int (x+1)\,dx,$$

вычислим интегралы и находим, что функция $u = \dfrac{x^2}{2} + x + C \ (C \neq 0)$. Неизвестная функция заданного *ДУI*

$$y = u(x)\,v(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2.$$

Пример 6. Составить дифференциальное уравнение и найти зависимость тока $i(t)$ от времени t для электрической цепи, состоящей из последовательно соединённых источника постоянного напряжения u_0, активного сопротивления R и индуктивности L при начальном токе в цепи $i_0 = i(0)$.

Наличие в электрической цепи индуктивности L порождает появление электродвижущей силы (э.д.с.) самоиндукции $e_L = -L\dfrac{di}{dt}$ (знак «–» указывает на то, что э.д.с. противодействует нарастанию тока в индуктивности). Согласно ***закону Кирхгофа***, падение напряжения в цепи Ri равно сумме напряжения источника и э.д.с. самоиндукции, т.е.

$$Ri = u_0 - L\frac{di}{dt} \text{ или } L\frac{di}{dt} + Ri = u_0 \ (\bullet).$$

Разделим уравнение на параметр L, введём обозначения $\dfrac{R}{L} = \omega$ и $\dfrac{u_0}{L} = u_1$, запишем уравнение ($\bullet$) в виде $\dfrac{di}{dt} + \omega i = u_1$. Полученное уравнение является *линейным ДУI* ($P(t)=\omega$; $Q(t)=u_1$. ○ Отметим, что при *постоянных* функциях $P(t)$ и $Q(t)$ полученное уравнение представляет собой *ДУI с разделяющимися переменными* ○), которое решим по вышеприведенной методике:

$$i=uv;\quad i'=u'v+uv';\quad u'v+u(v'+\omega v)=u_1.$$

$$\begin{cases} v'+\omega v=0 & (1)\\ u'v=u_1 & (2)\end{cases}.$$

$$(1):\ \frac{dv}{dt}=-\omega v;\ \frac{dv}{v}=-\omega dt;\ \int\frac{dv}{v}=-\int\omega dt\Rightarrow \ln|v|=-\omega t\ (C=0);\ v=\exp(-\omega t).$$

$$(2):\ \frac{du}{dt}\exp(-\omega t)=u_1;\quad du=u_1\exp(\omega t)dt\ \Rightarrow u=\int u_1\exp(\omega t)\,dt\ ;$$

$$u=\frac{u_1}{\omega}\exp(\omega t)+C\text{, т.е. } i=uv=\frac{u_1}{\omega}+C\exp(-\omega t).$$

Для начального условия $i_0=i(0)$ частное решение имеет вид

$$i(t)=\frac{u_1}{\omega}+\left(i_0-\frac{u_1}{\omega}\right)\exp(-\omega t)=i_0\exp(-\omega t)+\frac{u_1}{\omega}\big(1-\exp(-\omega t)\big)\ (*).$$

Из полученного решения видно, что при достаточно больших временах ($t>>\tau=\frac{1}{\omega}$ − *постоянная времени* цепи) функция $\exp(-\omega t)$ становится бесконечно малой величиной ($\exp(-\omega t)<<1$ или $\exp(-\omega t)\approx 0$) ток в цепи *устанавливается* и *определяется* ***<u>законом Ома</u>*** $i(t)=\frac{u_1}{\omega}=\frac{u_0}{R}$. При значении начального тока $i_0=0$ ток при *<u>замыкании</u>* цепи описывается функцией $i(t)=\frac{u_1}{\omega}\big(1-\exp(-\omega t)\big)$. Эта формула показывает, что после *<u>включения</u>* батареи *экстраток замыкания*

$$i=\frac{u_1}{\omega}\exp(-\omega t)=\frac{u_0}{R}\exp(-\omega t)\to 0,$$

а общий ток в цепи будет определяться ***<u>законом Ома</u>***. При *<u>выключении</u>* батареи ($u_0=0$) *экстраток размыкания* $i(t)=i_0\exp(-\omega t)\to 0$.

43.3. *Уравнение Бернулли*

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\boxed{y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n}\ \boxed{(n\neq 0;\ n\neq 1)}$$

называется ***<u>уравнением Бернулли</u>***.

○ При $n=0$ ***<u>уравнение Бернулли</u>*** переходит в линейное *ДУI*, а при $n=1$ – в *ДУI* с разделяющимися переменными. ○

Разделим всё уравнение на y^n, получим $y^{-n}y'+P(x)\,y^{1-n}=Q(x)$. Введём в рассмотрение новую функцию $z = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)\, y^{-n}\, y'$. Откуда находим, что величина $y^{-n}\, y' = \dfrac{z'}{1-n}$ $(n \neq 1)$. Подставим найденные величины в ***уравнение Бернулли*** $\dfrac{z'}{1-n} + P(x)\, z = Q(x)$, которое приводится к виду линейного дифференциального уравнения первого порядка $z' + (1-n) P(x)\, z = (1-n) Q(x)$. Следовательно, ***уравнение Бернулли можно решать непосредственно по схеме решения линейного ДУI***.

Пример 7. Решить *ДУI* $y' + xy = x^3 y^3$.

По форме записи определяем, что данное *ДУI* является ***уравнением Бернулли*** (по теоретической форме записи: $P(x) = x$; $Q(x) = x^3$). Применим вышеприведенную методику:

$$y = u\,v;\ y' = u'\,v + u\,v';\ u'v + u(v' + x\,v) = x^3 u^3 v^3.$$

Полученное уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

$$\begin{cases} v' + xv = 0 & (1) \\ u'v = x^3 u^3 v^3 & (2) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v' + x\,v = 0 & (1) \\ u' = x^3 u^3 v^2 & (2) \end{cases}.$$

Решим первое уравнение системы

$$(1): \frac{dv}{dx} = -x\,v;\ \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}.$$

Откуда получаем $\ln|v| = -\ln|x|\,(C=0)$. Потенцируя полученное равенство, находим, что функция $v = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$. Подставим эту функцию во второе уравнение системы и решим его

$$(2): \frac{du}{dx} = x^3 u^3 \frac{1}{x^2}.$$

Сокращая в правой части равенства на x^2 и разделяя переменные, получим $\dfrac{du}{u^3} = x\,dx$. Проинтегрировав равенство

$$\int\frac{du}{u^3} = \int x\,dx,$$

находим, что $-\dfrac{1}{2u^2} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{C}{2}$ $(C \neq 0)$. Откуда функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{C - x^2}}$. Искомая функция заданного *ДУI* $y = u(x)\, v(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{C - x^2}}$.

<u>44</u>. "*Дифференциальные уравнения второго порядка*"

44.1. *Дифференциальные уравнения II порядка, сводящиеся к ДУI*

Соотношение вида $\boxed{F(x,y,y',y'')=0}$ называется ***дифференциальным уравнением II порядка***.

Рассмотрим частные случаи *ДУII*, когда путём соответствующих замен удаётся свести это уравнение к *ДУI*:

<u>1</u>**.** Простейшее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\boxed{y''=f(x)}\ (\textbf{\textit{нет}}\ \ y,\ y')$$

путём замены $\boxed{y'=u(x)}$ с учётом того факта, что $y''=u'(x)$, сводится к *ДУI с разделяющимися переменными*:

$$u'=f(x);\ \ \frac{du}{dx}=f(x);\ \ du=f(x)\,dx;\ \ \int du=\int f(x)\,dx\,.$$

Откуда находим $u=\int f(x)dx+C_1=F(x)+C_1$. С учётом определения функции $u(x)$ вновь получаем *ДУI* с разделяющимися переменными:

$$u=\frac{dy}{dx}=F(x)+C_1\,.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим $y=\int F(x)\,dx+C_1\,x+C_2$.

○ Отметим тот факт, что общее решение *ДУII* содержит две постоянные интегрирования C_1 и C_2. ○

<u>2</u>**.** *ДУII*, явным образом разрешённое относительно второй производной, ***не содержит неизвестной функции***:

$$\boxed{y''=f(x;\,y')\ \ (\textbf{\textit{нет}}\ \ y)}.$$

В этом случае производят замену $\boxed{y'=z(x)}$ и с учётом того факта, что $y''=z'(x)$, *ДУII* сводится к *ДУI*, решение которых было изучено в предыдущих лекциях: $z'=f(x;\,z)$.

Пример 1. Решить ДУII $(1+x^2)\,y''-2\,x\,y'=0$.

В данном дифференциальном уравнении второго порядка в явном виде отсутствует неизвестная функция y, поэтому проведём замену $y'=$ $=z(x)$ и с учетом того, что $y''=z'(x)$, *ДУII* сводится к *ДУI*

$$(1+x^2)\,z'-2\,x\,z=0,$$

в котором переменные разделяются $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{2\,x\,dx}{1+x^2}$. Интегрируя это равенство, получим $\ln|\,z\,|=\ln\left|1+x^2\right|+\ln|\,C_1\,|\ \ \Rightarrow\ z=C_1(1+x^2)$. Вновь разделим переменные $\frac{dy}{dx}=C_1\left(1+x^2\right)$; $dy=C_1\left(1+x^2\right)dx$ и проинтегрируем полученное равенство $y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$.

3. *ДУII*, явным образом разрешённое относительно второй производной, ***не содержит аргумента:*** $\boxed{y''=f(y;y')(\textbf{\textit{нет}}\ x)}$. В этом случае производят замену $\boxed{y'=p(y)}$ и с учётом того факта, что

$$\boxed{y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p_y'\,y'=p_y'\,p},$$

ДУII сводится к *ДУI*: $\boxed{p\,\frac{dp}{dy}=f(y;\,p)}$.

Пример 2. Решить задачу Коши: $-y\,y''+(y')^2=1$; $y(0)=1$; $y'(0)=0{,}6$. Данное уравнение не содержит в явном виде аргумента, поэтому воспользуемся заменой $y'=p(y)$. С учётом того, что $y''=\frac{dp}{dy}p$, *ДУII* сведём к *ДУI*: $-yp\frac{dp}{dy}+p^2=1$. Разделим переменные $\frac{p\,dp}{1-p^2}=\frac{dy}{y}$, после чего проинтегрируем это равенство $\frac{1}{2}\ln\left|1-p^2\right|=\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|C_1|$. Потенцируя полученное выражение, находим, что $1-p^2=C_1y^2$. Откуда $p=y'=\sqrt{1-C_1y^2}$. Для нахождения численного значения постоянной интегрирования C_1 воспользуемся начальными условиями, т.е. подставим в найденное равенство $y(0)=1$; $y'(0)=0{,}6$, получим $C_1=0{,}64$. Вновь разделяя переменные, найдём, что $\frac{dy}{\sqrt{1-0{,}64\,y^2}}=dx$. Интегрируя это равенство, получим выражение для искомой функции $\frac{1}{0{,}8}\arcsin\left(\frac{y}{0{,}8}\right)=x+C_2$. Для нахождения численного значения постоянной интегрирования C_2 воспользуемся начальными условиями, т.е. подставим в найденное равенство $y(0)=1$; $x=0$, получим $C_2=\frac{1}{0{,}8}\arcsin\left(\frac{1}{0{,}8}\right)$. Таким образом, решение ***задачи Коши*** после взятия функции синус от обеих частей равенства имеет вид

$$\arcsin\left(\frac{y}{0{,}8}\right)=0{,}8\,x+\arcsin\left(\frac{1}{0{,}8}\right);\Rightarrow y=0{,}8\sin\left(0{,}8\,x+\arcsin\left(\frac{1}{0{,}8}\right)\right).$$

Пример 3. Составить и решить уравнение теплопроводности в радиальном направлении толстой цилиндрической трубы с внутренним радиусом r, внешним − R и длиной l. Процесс передачи тепла считать установившимся и стационарным.

Так как процесс передачи тепла от трубы к внешней среде является установившимся и стационарным, то температура T не зависит от времени и изменяется только в радиальном направлении, т.е. зависит от одной переменной ρ, которая изменяется в пределах от r до R (рис. 3). Количество тепла dq, проходящее через бесконечно малую площадку dF за промежуток времени dt, определяется формулой

$$\boxed{dq = -\lambda \frac{dT}{d\rho} dF\, dt},$$

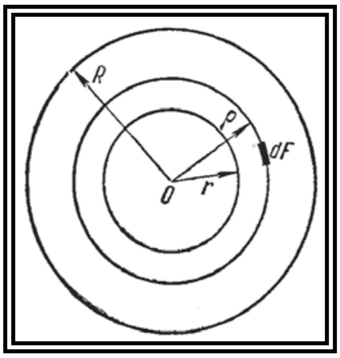


Рис. 3. *Поперечный разрез цилиндрической трубы*.

где λ − коэффициент теплопроводности материала трубы, $\frac{dT}{d\rho}$ − изменение температуры в направлении, перпендикулярном к площадке dF. Знак «−» указывает на то, что перенос тепла происходит в сторону уменьшения температуры. В силу того, что скорость передачи тепла (количество прошедшего тепла за единицу времени) постоянна, то после суммирования по поверхности трубы находим $Q = \dot{q} = \frac{dq}{dt} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} F = -\lambda \frac{dT}{d\rho} 2\pi l \rho = -k\rho \frac{dT}{d\rho}$.

Дифференцируя это равенство по переменной ρ и сокращая полученное выражение на множитель k, получим уравнение установившегося и стационарного процесса передачи тепла от цилиндрической трубы к внешней среде $\boxed{\frac{d^2T}{d\rho^2}\rho + \frac{dT}{d\rho} = 0}$. Это уравнение не содержит в явном виде неизвестной функции $T(\rho)$, т.е. допускает понижение порядка. Кроме того, оно является следствием постоянства скорости теплоотдачи, т.е. уравнение сводится к *ДУІ*: $\frac{dT}{d\rho}\rho = C_1$. Разделение переменных с последующим интегрированием полученного равенства приводит к выражению $T(\rho) = C_1 \ln\rho + C_2$. Независимость функции от времени не позволяет задать начальные условия, поэтому вместо этих ограничений задают *граничные значения* температуры: $T(r) = T_1$ и $T(R) = T_2$. Использование этих равенств позволяет найти постоянные интегрирования $C_1=\frac{T_2-T_1}{\ln R-\ln r}$ и $C_2=\frac{T_1\ln R-T_2\ln r}{\ln R-\ln r}$, после чего можно вычислить температуру в любой точке $\rho\in[r;R]$.

44.2. *Линейные ДУII*

Линейным *ДУII* называется дифференциальное уравнение второго порядка вида $\boxed{y''+P(x)y'+Q(x)y=G(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ и $G(x)$ – заданные непрерывные функции или постоянные величины.

Функция $G(x)$ называется ***правой частью*** *линейного ДУII*. Если $\boxed{G(x)=0}$, дифференциальное уравнение второго порядка называется ***однородным***, в противном случае, когда $\boxed{G(x)\neq 0}$ – ***неоднородным***.

Рассмотрим *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка* (*ЛОДУII*) $\boxed{y''+P(x)y'+Q(x)y=0}$ и выясним структуру его общего решения.

Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются ***линейно-зависимыми***, если выполняется равенство $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=const$, в противном случае эти функции называются ***линейно-независимыми***.

<u>Теорема 1.</u> Если *две линейно-независимые функции* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *являются частными решениями линейного однородного ДУII*, то функция $\boxed{y=C_1y_1+C_2y_2}$ *также является решением этого уравнения*.

Определитель, составленный из частных решений *ЛОДУII* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и их первых производных, называется ***определителем Вронского*** или ***вронскианом*** $\boxed{W(y_1;\ y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'}$.

<u>Теорема 2.</u> Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *линейно-зависимы на сегменте* $[a;b]$, то *на этом отрезке вронскиан тождественно равен нулю*.

<u>Док-во:</u> Пусть $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=const=\lambda$, тогда $y_1=\lambda y_2$ и $y_1'=\lambda y_2'$. Следовательно, ***<u>определитель Вронского</u>*** $W(y_1;\ y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_2 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{vmatrix}=0$ в соответствии со свойствами определителей (см. ***<u>1</u>***).

Теорема 3. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два частных решений *ЛОДУII* и их ***определитель Вронского*** тождественно равен нулю на сегменте $[a;b]$, то *на этом отрезке функции* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *линейно-зависимы*.

Док-во: Пусть точка $x_0 \in [a;b]$, для которой $y_1(x_0) \neq 0$ и $y_2(x_0) \neq 0$. Обозначим отношение $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = \lambda$, тогда имеет место равенство $y_2 - \lambda y_1 = 0$. По условию теоремы ***определитель Вронского*** $W(y_1; y_2) = 0$, следовательно,

$$W(y_1;\ y_2)\big|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \lambda y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)\left(y_2'(x_0) - \lambda y_1'(x_0)\right) = 0.$$

Так как $y_1(x_0) \neq 0$, то $y_2'(x_0) - \lambda y_1'(x_0) = 0$. Рассмотрим функцию

$$y(x) = y_2(x) - \lambda y_1(x).$$

Эта функция является решением *ЛОДУII*, так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два частных решений *ЛОДУII*, а функция $y(x) = y_2(x) - \lambda y_1(x)$ – их линейная комбинация. Функция $y(x)$ и её первая производная удовлетворяют нулевым начальным условиям, так как

$$y(x_0) = y_2(x_0) - \lambda y_1(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad y'(x_0) = y_2'(x_0) - \lambda y_1'(x_0) = 0.$$

Отсюда следует, что $y(x) \equiv 0$, так как решение $y(x) = 0$ является единственным решением *ЛОДУII*, удовлетворяющим нулевым начальным условиям. Отсюда следует, что $y_2(x) \equiv \lambda y_1(x)$, т.е. функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно-зависимы.

Теорема 4. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два частных линейно-независимых решения *ЛОДУII* на интервале $[a; b]$, то на этом отрезке вронскиан отличен от нулю на всем сегменте $[a;b]$.

Док-во: Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два частных линейно-независимых решения *ЛОДУII* на отрезке $[a; b]$, тогда

$$\begin{array}{rl} & y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \;\big|\cdot(-y_2) \\ + & \underline{y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \;\big|\cdot y_1} \\ & y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + P(x)\,(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0. \end{array}$$

Так как вронскиан

$$W(y_1;\ y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

то

$$W'(y_1;\ y_2) = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

(убедиться *самостоятельно*). Следовательно,

$$\boxed{W' + P(x)W = 0}.$$

Решая это *ДУI* с *разделяющимися переменными*, получим, что

$$\boxed{W = W_0 \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx\right)}$$

(это ***формула Остроградского-Лиувилля***). Из полученной формулы видно, что вронскиан равен нулю только тогда, когда

$$\boxed{W_0 = W(x_0) = 0}$$

при $x_0 \in [a;b]$, либо не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a;b]$. В первом случае функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *линейно-зависимы*, а во втором – *линейно-независимы*.

● ***Формула Остроградского-Лиувилля*** позволяет по одному известному частному решению, например $y_1(x)$, найти второе частное решение *ЛОДУII*

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,dt\right)}{y_1^2}\,dx}.$$ ●

45. "*Линейные однородные ДУII* (*ЛОДУII*) *с постоянными коэффициентами*"

45.1. *Характеристическое уравнение для ЛОДУII*

Рассмотрим *ЛОДУII с постоянными коэффициентами*

$$\boxed{y'' + p\,y' + q\,y = 0},$$

где p и q – постоянные действительные числа. Для того чтобы решить *ЛОДУII с постоянными коэффициентами*, достаточно найти 2 частных линейно-независимых решения $y_{01}(x)$ и $y_{02}(x)$. Эти решения будем искать в виде $\boxed{y_0 = e^{kx}}$, где действительное число k подбирается так, чтобы приведенная функция была бы решением исходного уравнения. Подстановка функции $y_0 = e^{kx}$ в *ЛОДУII с постоянными коэффициентами* даёт

$$\begin{array}{r|l} q\cdot & y_0=e^{kx} \\ p\cdot & y_0'=k\,e^{kx} \\ 1\cdot & y_0''=k^2e^{kx} \\ \hline \end{array}$$

$$(k^2+p\,k+q)\,e^{kx}=0\,.$$

В силу того, что $e^{kx}>0\ \ \forall x\in R$, то $k^2+p\,k+q=0$. Отсюда видно, что функция $y_0=e^{kx}$ является решением *ЛОДУII* с постоянными коэффициентами, если k определяется как корень уравнения $k^2+pk+q=0$.

Уравнение $\boxed{k^2+pk+q=0}$ называется ***характеристическим уравнением*** для *ЛОДУII с постоянными коэффициентами*.

Решим характеристическое уравнение, которое является квадратным уравнением. Возможны следующие варианты:

1. Дискриминант $\boxed{D=p^2-4q<0}$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня

$$\boxed{k_{1,2}=\frac{-p\mp i\sqrt{|D|}}{2}}.$$

Вводя обозначения $\boxed{\alpha=-\dfrac{p}{2}}$ и $\boxed{\beta=\dfrac{\sqrt{|D|}}{2}}$, можно записать 2 частных линейно-независимых решения

$$\boxed{y_{01}(x)=e^{\alpha x}\cos(\beta x)} \quad \text{и} \quad \boxed{y_{02}(x)=e^{\alpha x}\sin(\beta x)}.$$

Тогда по ***Теореме 1 45 общее решение ЛОДУII с постоянными коэффициентами в данном случае будет иметь вид***:

$$\boxed{y_0=e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x)\right)}.$$

Пример 1. Решить *ДУII* $y''-6y'+13y=0$.

Согласно изложенной методике, ищем решение в виде $y_0=e^{kx}$, тогда

$$\begin{array}{r|l} 13\cdot & y_0=e^{kx} \\ -6\cdot & y_0'=k\,e^{kx} \\ 1\cdot & y_0''=k^2e^{kx} \\ \hline \end{array}$$

$$(k^2-6\,k+13)\,e^{kx}=0\,.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2-6\,k+13=0\,.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D=36-52=-16<0$. Корни уравнения являются комплексно-сопряжёнными величинами

$$k_{1,2} = \frac{-p \mp i\sqrt{|D|}}{2} = 3 \mp i\,2,$$

т.е. коэффициенты $\alpha = -\frac{p}{2} = 3$ и $\beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2} = 2$. Таким образом, два частных линейно-независимых решения $y_{01}(x) = e^{3x}\cos(2x)$ и $y_{02}(x) = e^{3x}\sin(2x)$. Тогда по <u>***Теореме 1***</u> <u>**45**</u> общее решение будет иметь вид:

$$y_0 = e^{3x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right).$$

<u>**2**</u>**.** Дискриминант $\boxed{D=0}$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня $\boxed{k_{1,2} = -\frac{p}{2}}$. Допустим, что найденные корни отличаются друг от друга на бесконечно малую величину Δk, т.е. $k_2 = k_1 + \Delta k$, тогда 2 частных линейно-независимых решения имеют вид $y_{01} = e^{k_1 x}$ и $y_{02} = e^{(k_1+\Delta k)x}$. Следовательно, функция $\frac{y_{02} - y_{01}}{\Delta k}$ также является решением *ЛОДУII с постоянными коэффициентами*, т.е.

$$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{y_{02} - y_{01}}{\Delta k} = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{e^{k_1 x} - e^{(k_1+\Delta k)x}}{\Delta k} = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{x\,e^{k_1 x}(1 - e^{\Delta k x})}{x\Delta k} = xe^{k_1 x}.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае два частных линейно-независимых решения можно выбрать в виде

$$\boxed{y_{01} = e^{k_1 x}} \quad \text{и} \quad \boxed{y_{02} = x\,e^{k_1 x}}.$$

Тогда ***общее решение ЛОДУII с постоянными коэффициентами в данном случае будет иметь вид***:

$$\boxed{y_0 = e^{k_1 x}(C_1 + C_2\,x)}.$$

Пример 2. Решить *ДУII* $y'' - 2y' + y = 0$.

Согласно изложенной методике, ищем решение в виде $y_0 = e^{kx}$, тогда

$$\begin{array}{r|l} 1\cdot & y_0 = e^{kx} \\ -2\cdot & y_0' = k\,e^{kx} \\ 1\cdot & y_0'' = k^2 e^{kx} \\ \hline & (k^2 - 2k + 1)\,e^{kx} = 0. \end{array}$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 4 - 4 = 0$. Корни уравнения в этом случае действительны и совпадают $k_{1,2} = -\frac{p}{2} = 1$, следовательно, два частных линейно-независимых решения можно выбрать в виде $y_{01} = e^x$ и $y_{02} = xe^x$. Тогда общее решение *ЛОДУII с постоянными коэффициентами* в данном случае будет иметь вид:

$$y_0 = e^x (C_1 + C_2 x).$$

<u>3</u>. Дискриминант $\boxed{D > 0}$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $\boxed{k_{1,2} = \frac{-p \mp \sqrt{D}}{2}}$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае два частных линейно-независимых решения *ЛОДУII* с постоянными коэффициентами имеют вид

$$\boxed{y_{01} = e^{k_1 x}} \quad \text{и} \quad \boxed{y_{02} = e^{k_2 x}}.$$

Тогда ***общее решение ЛОДУII с постоянными коэффициентами в данном случае записывается в виде***:

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}.$$

Пример 3. Решить *ДУII* $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Согласно изложенной методике, ищем решение в виде $y_0 = e^{kx}$, тогда

$$\begin{array}{r|l} 1 \cdot & y_0 = e^{kx} \\ -5 \cdot & y_0' = k e^{kx} \\ 6 \cdot & y_0'' = k^2 e^{kx} \\ \hline & (k^2 - 5k + 6) e^{kx} = 0. \end{array}$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 5k + 6 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D = 25 - 24 = 1$. Корни уравнения в этом случае вещественны и различны

$$k_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = 2 \text{ и } k_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = 3.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае два частных линейно-независимых решения *ЛОДУII* с постоянными коэффициентами имеют вид $y_{01} = e^{2x}$ и $y_{02} = e^{3x}$. Тогда общее решение *ЛОДУII с постоянными коэффициентами* записывается в виде:

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

45.2. *Линейные неоднородные ДУII с постоянными коэффициентами*

Уравнение вида $\boxed{y'' + py' + qy = f(x)\ \ (f(x) \neq 0)}$ называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка*** (*Л НДУII*).

<u>Теорема 1</u> (***о структуре общего решения ЛНДУII***). Общее решение *ЛНДУII* можно представить в виде суммы общего решения соответствующего ему *ЛОДУII* $y_0 : y''_0 + py'_0 + qy_0 = 0$ и любого частного решения $\bar{y}$ исходного *ЛНДУII*, т.е.

$$\boxed{y = y_0 + \bar{y}}.$$

<u>Док-во:</u> Так как общее решение *ЛОДУII* $y_0 = C_1 y_{01} + C_2 y_{02}$, то общее решение ЛНДУII будет иметь вид $y = C_1 y_{01} + C_2 y_{02} + \bar{y}$. Докажем, при любых действительных числах C_1 и C_2 данная функция является решением *ЛНДУII*. Подставляя в *ЛНДУII* функцию y, получим

$$(y_0 + \bar{y})'' + p(y_0 + \bar{y})' + q(y_0 + \bar{y}) = y''_0 + py'_0 + qy_0 + \bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0 + f(x) = f(x).$$

Докажем, что за счёт выбора постоянных C_1 и C_2 можно удовлетворить любым допустимым ненулевым начальным условиям

$$y(x = x_0) = y(x_0) \text{ и } y'(x = x_0) = y'(x_0).$$

Так как функция $y = C_1 y_{01} + C_2 y_{02} + \bar{y}$, то $y' = C_1 y'_{01} + C_2 y'_{02} + \bar{y}'$, следовательно, $\begin{cases} C_1 y_{01}(x_0) + C_2 y_{02}(x_0) + \bar{y}(x_0) = y(x_0) \\ C_1 y'_{01}(x_0) + C_2 y'_{02}(x_0) + \bar{y}'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$. Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно констант C_1 и C_2: $\begin{cases} C_1 y_{01}(x_0) + C_2 y_{02}(x_0) = y(x_0) - \bar{y}(x_0) \\ C_1 y'_{01}(x_0) + C_2 y'_{02}(x_0) = y'(x_0) - \bar{y}'(x_0) \end{cases}$. Главным определителем этой системы является вронскиан $W(y_1;\ y_2)\big|_{x=x_0} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}$, который в точке x_0 отличен от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение (см. также ***метод Крамера***, ***<u>3</u>***) относительно постоянных C_1 и C_2.

45.3. *Метод вариации постоянных*

Для отыскания решения *ЛНДУII с постоянными коэффициентами* Лагранж предложил ***метод вариации постоянных***, который состоит в следующем:

– находят решение *ЛОДУII с постоянными коэффициентами*

$$y_0(x) = C_1\, y_{01}(x) + C_2\, y_{02}(x);$$

– предполагают, что коэффициенты C_1 и C_2 также являются функциями аргумента, т.е. общее решение *ЛНДУII с постоянными коэффициентами* ищут в виде $y(x) = C_1(x)\, y_{01}(x) + C_2(x)\, y_{02}(x)$;

– находят первую производную общего решения

$$y'(x) = C_1'(x)\, y_{01}(x) + C_2'(x)\, y_{02}(x) + C_1(x)\, y_{01}'(x) + C_2(x)\, y_{02}'(x);$$

– в силу произвольности функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ выбирают их так, чтобы выполнялось равенство $C_1'(x)\, y_{01}(x) + C_2'(x)\, y_{02}(x) = 0$;

– находят вторую производную общего решения

$$y''(x) = C_1'(x)\, y_{01}'(x) + C_2'(x)\, y_{02}'(x) + C_1(x)\, y_{01}''(x) + C_2(x)\, y_{02}''(x);$$

– все полученные величины подставляют в заданное *ЛНДУII* с постоянными коэффициентами

$$\underline{C_1\, y_{01}''} + \underline{\underline{C_2\, y_{02}''}} + C_1' y_{01}' + C_2'\, y_{02}' + \underline{p\, C_1\, y_{01}'} + \underline{\underline{p\, C_2\, y_{02}'}} + \underline{q\, C_1\, y_{01}} + \underline{\underline{q\, C_2\, y_{02}}} = f(x),$$

одинаково подчёркнутые величины равны нулю, так как образуют *ЛО ДУII* с постоянными коэффициентами, поэтому уравнение преобразовывается к виду $C_1'(x) y_{01}'(x) + C_2'(x)\, y_{02}'(x) = f(x)$;

– составляют систему линейных алгебраических уравнений относительно функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ из полученных выше соотношений

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)\, y_{01}(x) + C_2'(x)\, y_{02}(x) = 0 \\ C_1'(x)\, y_{01}'(x) + C_2'(x)\, y_{02}'(x) = f(x) \end{cases}};$$

– решают систему и находят функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$;

– интегрируют полученные выражения и находят функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$;

– записывают общее решение *ЛНДУII* с постоянными коэффициентами

$$\boxed{y(x) = C_1(x)\, y_{01}(x) + C_2(x)\, y_{02}(x)}.$$

○ ***Метод вариации постоянных*** применим и в том случае, когда *в качестве коэффициентов выступают функции*. ○

Пример 4. Решить *ДУII* $y'' + tgx\, y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решим однородное *ДУII* $y_0'' + tgx\, y_0' = 0$. В этом уравнении в явном виде отсутствует функция y, следовательно (см. ***37***), проведём замену $y_0' = z(x)$ и с учётом того, что $y_0'' = z'(x)$, *ДУII* сводится к *ДУI с разделя-*

ющимися переменными

$$z'+z\,tgx=0;\quad \frac{dz}{z}=-tgx\,dx;\quad \int\frac{dz}{z}=-\int tgx\,dx;\quad \ln|z|=\ln|\cos x|+\ln|C_1|.$$

Потенцируя полученное равенство находим, что $z=\frac{dy_0}{dx}=C_1\cos x$. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$dy_0=C_1\cos x\,dx;\ \int dy_0=C_1\int\cos x\,dx;\ \ y_0=C_1\sin x+C_2.$$

Из этого выражения видно, что два частных линейно-независимых решения однородного уравнения имеют вид $y_{01}=\sin x$ и $y_{02}=1$. Решение неоднородного *ДУII* будем искать в виде $y=C_1(x)\sin x+C_2(x)$. Запишем систему линейных алгебраических уравнений относительно функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)\cdot\sin x+C_2'(x)\cdot 1=0\\ C_1'(x)\cdot\cos x+C_2'(x)\cdot 0=\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}$. Из второго уравнения системы находим, что $C_1'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, тогда из первого уравнения системы $C_2'(x)=-C_1'(x)\cdot\sin x=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Интегрируя полученные выражения, находим $C_1(x)=\int\frac{d\,x}{\cos^2 x}=tgx+A$ и $C_2(x)=-\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}=-\frac{1}{\cos x}+B$. Таким образом, общее решение неоднородного *ДУII* равно

$$y=(tgx+A)\sin x-\frac{1}{\cos x}+B.$$

<u>46</u>. “*Линейные неоднородные ДУII* (*ЛНДУII*) *с постоянными коэффициентами со специальной правой частью*”

46.1. *ЛНДУII со специальной правой частью*

Рассмотрим *ЛНДУII с постоянными коэффициентами*

$$\boxed{y''+py'+qy=f(x)}$$

в случаях ***специальной правой части***.

○ В случае специальной правой части можно найти частное решение *ЛНДУII* с постоянными коэффициентами по виду правой части. ○

<u>***I специальный вид правой части***</u>: $\boxed{f(x)=e^{ax}P_n(x)}$, где $P_n(x)$ – полином порядка n. В этом случае частное решение *ЛНДУII* с постоянными коэффициентами ищут в виде $\bar{y}=e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – полином порядка n с неизвестными коэффициентами, подлежащими отысканию.

Найдём первую и вторую производные от частного решения:

$$\bar{y}' = a\,e^{ax}Q_n(x) + e^{ax}Q_n'(x);$$

$$\bar{y}'' = a^2\,e^{ax}Q_n(x) + 2\,a\,e^{ax}Q_n'(x) + e^{ax}Q_n''(x).$$

Подставляя все найденные величины в дифференциальное уравнение, после группировки и сокращения обеих частей уравнения на e^{ax}, получим

$$Q_n''(x) + (2\,a + p)\,Q_n'(x) + \left(a^2 + p\,a + q\right)Q_n(x) = P_n(x).$$

Отметим, что $Q_n'(x)$ − это полином порядка $(n-1)$, а $Q_n''(x)$ – полином порядка $(n-2)$. Рассмотрим возможные случаи:

1) $\boxed{a^2 + p\,a + q \neq 0}$, т.е. число a не является корнем характеристического уравнения $k^2 + p\,k + q = 0$. Это означает, что в левой и правой частях уравнения стоят полиномы одинакового порядка. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента, получают систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов полинома $Q_n(x)$.

2) $\boxed{a^2 + p\,a + q = 0}$ и $\boxed{2a + p \neq 0}$, т.е. число a совпадает с одним из корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Это означает, что в левой части уравнения стоит полином порядка $(n-1)$, поэтому частное решение надо искать в виде $\bar{y} = x\,e^{ax}Q_n(x)$.

3) $\boxed{a^2 + p\,a + q = 0}$ и $\boxed{2a + p = 0}$, т.е. число a совпадает с обоими корнями характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Это означает, что в левой части уравнения стоит полином порядка $(n-2)$, поэтому частное решение надо искать в виде $\bar{y} = x^2\,e^{ax}Q_n(x)$.

Обобщая рассмотренные случаи, можно записать частное решение для ***<u>I случая специальной правой части</u>*** в виде:

$$\boxed{\bar{y} = x^r\,e^{ax}Q_n(x) = \begin{cases} r = 0\boldsymbol{,\ при}\ \ a \neq k_1,\, a \neq k_2 \\ r = 1\boldsymbol{,\ при}\ \ a = k_1\ \boldsymbol{или}\ a = k_2 \\ r = 2\boldsymbol{,\ при}\ \ a = k_1 = k_2 \end{cases}}.$$

○ ***К <u>I случаю специальной правой части</u> относятся также случаи***, ***когда*** $\boxed{f(x) = P_n(x)\ \ (a = 0)}$, $\boxed{f(x) = B\,e^{ax}\ \ (n = 0)}$. ○

Пример 1. Решить *ДУН* $y'' + 2\,y' + y = x^2$.

Согласно изложенной методике, найдём решение однородного уравнения, которое ищем в виде $y_0 = e^{kx}$, тогда

$$\begin{array}{r|l} 1\cdot & y_0 = e^{kx} \\ 2\cdot & y_0' = k\,e^{kx} \\ 1\cdot & y_0'' = k^2 e^{kx} \\ \hline \end{array}$$

$$(k^2 + 2k + 1)\,e^{kx} = 0\,.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 2k + 1 = 0\,.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения $D=4-4=0$. Корни уравнения в этом случае вещественны и совпадают $k_{1,2} = -\dfrac{p}{2} = -1$, следовательно, два частных линейно-независимых решения можно выбрать в виде $y_{01} = e^{-x}$ и $y_{02} = xe^{-x}$. Тогда общее решение *ЛОДУII с постоянными коэффициентами* в данном случае будет иметь вид:

$$y_0 = e^{-x}\left(C_1 + C_2\,x\right).$$

Проанализируем правую часть данного *ЛНДУII*, приведя её к теоретическому виду: $f(x) = x^2 = e^{0x}P_2(x)$. Следовательно, $a = 0 \neq k_{1,2}$, поэтому частное решение *ЛНДУII* ищем в виде

$$\bar{y} = e^{0x}Q_2(x) = A\,x^2 + B\,x + C\,.$$

Найдём первую и вторую производные этой функции и подставим эти выражения в исходное уравнение

$$\begin{array}{r|l} 1\cdot & \bar{y} = A\,x^2 + B\,x + C \\ 2\cdot & \bar{y}\,' = 2\,A\,x + B \\ 1\cdot & \bar{y}\,'' = 2\,A \\ \hline \end{array}$$

$$2\,A + 4\,A\,x + 2\,B + A\,x^2 + B\,x + C = x^2\,.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента находим

$$\begin{cases} x^2 :\ A=1 \\ x\ :\ 4A+B=0 \\ x^0 :\ 2A+2B+C=0 \end{cases}.$$

Решаем эту систему и определяем неизвестные коэффициенты:

$$B = -4A = -4\text{, следовательно, } C = -2\,(A + B) = 6\,.$$

Таким образом, частное решение *ЛНДУII* имеет вид:

$$\bar{y} = e^{0x}Q_2(x) = x^2 - 4\,x + 6\,.$$

Общее решение *ЛНДУII* тогда равно

$$y = \left(C_1 + C_2\,x\right)e^{-x} + \ x^2 - 4\,x + 6\,.$$

<u>II специальный вид правой части</u>: $\boxed{f(x)=e^{px}\left(M\cos(qx)+N\sin(qx)\right)}$.
В этом случае частное решение *ЛНДУII с постоянными коэффициентами* ищут в виде

$$\boxed{\overline{y}=x^m e^{px}\left(A\cos(qx)+B\sin(qx)\right)},$$

где $\boxed{m=0}$, если *комплексное число* $p\mp iq$ *не является корнем характеристического уравнения*, и $\boxed{m=1}$, если *комплексное число* $p\mp iq$ *является корнем характеристического уравнения*.

○ К частным случаям относятся виды правой части, когда $p=0$, или $M=0$, или $N=0$, или комбинация из пар $\begin{cases} p=0 \\ M=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} p=0 \\ N=0 \end{cases}$. Случай, когда ***одновременно*** $\boxed{M=0}$ ***и*** $\boxed{N=0}$, ***относится к <u>I специальному виду</u> <u>правой части</u>***. ○

○ Сравнивать комплексное число $p\mp iq$ с корнями характеристического уравнения надо только тогда, когда это уравнение имеет отрицательный дискриминант. ○

Пример 2. Решить *ДУII* $y''+y=10\sin x$.

Согласно изложенной методике, найдём решение однородного уравнения, которое ищем в виде $y_0=e^{kx}$, тогда

$$\begin{array}{r|l} 1\cdot & y_0=e^{kx} \\ 0\cdot & y_0'=k e^{kx} \\ 1\cdot & y_0''=k^2e^{kx} \\ \hline \end{array}$$
$$(k^2+1)e^{kx}=0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $k^2+1=0$. Корни уравнения в этом случае комплексные и равны $k_{1,2}=\mp i$, следовательно, величины $\alpha=0$ и $\beta=1$. Два частных линейно-независимых решения однородного *ДУII* имеют вид $y_{01}=\cos x$ и $y_{02}=\sin x$. Тогда общее решение *ЛОДУII* с постоянными коэффициентами в данном случае будет иметь вид: $y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$. Проанализируем правую часть данного *ЛНДУII*, приведя её к теоретическому виду:

$$f(x)=10\sin x=e^{0x}\left(0\cdot\cos x+10\cdot\sin x\right),$$

т.е. $p=0$, а $q=1$. Комплексное число $p\mp iq=0\mp i\cdot 1=\mp i=k_{1,2}$, поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $\overline{y}=x^1e^{0x}\left(A\cos x+B\sin x\right)=x\left(A\cos x+B\sin x\right)$. Найдём первую и вторую производные этой функции и подставим найденные функции в исходное уравнение

$$\begin{array}{r|l} 1\cdot & \bar{y}=x(A\cos x+B\sin x) \\ 0\cdot & \bar{y}\,'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x) \\ 1\cdot & \underline{\bar{y}\,''=-2A\sin x+2B\cos x-x(A\cos x+B\sin x)} \end{array}$$

$$-2A\sin x+2B\cos x-x(A\cos x+B\sin x)+x(A\cos x+B\sin x)=10\sin x$$

или $-2A\sin x+2B\cos x=10\sin x$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях находим $\begin{cases}\sin x: -2A=10\\ \cos x: 2B=0\end{cases}$. Решаем эту систему и вычисляем неизвестные коэффициенты: $A=-5$, а коэффициент $B=0$. Таким образом, частное решение *ЛНДУII* имеет вид:

$$\bar{y}=x^1 e^{0x}\left(A\cos x+B\sin x\right)=-5x\,\cos x.$$

Общее решение *ЛНДУII* тогда равно $y=C_1\cos x+C_2\sin x-5x\cos x$.

46.2. *Принцип суперпозиции частных решений*

При решении *ЛНДУII* с постоянными коэффициентами полезной может оказаться теорема, определяющая принцип суперпозиции частных решений.

Теорема 1. Частное решение *ЛНДУII* с постоянными коэффициентами вида $\boxed{y''+py'+qy=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)}$ ищется в виде суперпозиции частных решений $\boxed{\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i=\bar{y}_1+\bar{y}_2+\ldots+\bar{y}_n}$, которые являются частными решениями уравнений

$$\boxed{\bar{y}_i''+p\bar{y}_i'+q\bar{y}_i=f_i(x)\ \ (i=1\div n)}.$$

Пример 3. Решить *ДУII* $y''-y=2\sin x+x-3$.

Согласно изложенной методике, найдём решение однородного уравнения, которое ищем в виде $y_0=e^{kx}$, тогда

$$\begin{array}{r|l} -1\cdot & y_0=e^{kx} \\ 0\cdot & y_0'=k\,e^{kx} \\ 1\cdot & \underline{y_0''=k^2e^{kx}} \end{array}$$

$$(k^2-1)\,e^{kx}=0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $k^2-1=0$. Корни уравнения в этом случае действительные и равны $k_{1,2}=\mp1$, следовательно, два частных линейно-независимых решения однородного *ДУII* имеют вид $y_{01}=e^{-x}$ и $y_{02}=e^{x}$. Тогда общее решение *ЛОДУII с постоянными коэффициентами* в данном случае будет иметь вид:

$$y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{x}.$$

Проанализируем правую часть данного *ЛНДУII*, которая состоит из суммы двух функций, первая из которых равна $f_1(x)=2\sin x$, а вторая $f_2(x)=x-3$. Согласно принципу суперпозиции частных решений, частное решение данного *ЛНДУII* будем искать в виде $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2$, причём первое частное решение удовлетворяет уравнению

$$\bar{y}_1:\ \bar{y}_1''-\bar{y}_1=2\sin x,$$

а второе частное решение – уравнению $\bar{y}_2$: $\bar{y}_2''-\bar{y}_2=x-3$. Решим первое уравнение приведя её правую часть к теоретическому виду:

$$f_1(x)=2\sin x=e^{0x}(0\cdot\cos x+2\cdot\sin x),\ \text{т.е. } p=0,\ \text{а } q=1.$$

Следовательно, комплексное число

$$p\mp iq=0\mp i\cdot 1=\mp i\neq k_{1,2},$$

поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $\bar{y}=x^0e^{0x}(A\cos x+B\sin x)=A\cos x+B\sin x$. Найдём первую и вторую производные этой функции и подставим полученные функции в исходное уравнение

$$\begin{array}{r|l} -1\cdot & \bar{y}=A\cos x+B\sin x \\ 0\cdot & \bar{y}\,'=-A\sin x+B\cos x \\ 1\cdot & \underline{\bar{y}\,''=-(A\cos x+B\sin x)} \end{array}$$
$$-A\cos x-B\sin x-A\cos x-B\sin x=2\sin x$$

или $-2A\cos x-2B\sin x=2\sin x$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях находим $\begin{cases}\sin x\ :-2A=10\\ \cos x:\ 2B=0\end{cases}$. Решаем эту систему и определяем неизвестные коэффициенты: $A=-5$, а коэффициент $B=-1$. Частное решение *ЛНДУII* имеет вид

$$\bar{y}=x^0e^{0x}(A\cos x+B\sin x)=-\sin x.$$

Решим второе уравнение, приведя правую часть данного *ЛНДУII* к теоретическому виду:

$$f(x)=x-3=e^{0x}P_1(x).$$

Следовательно, $a=0\neq k_{1,2}$, поэтому частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде

$$\bar{y}=e^{0x}Q_1(x)=Ax+B.$$

Найдём первую и вторую производные этой функции и подставим полученные функции в исходное уравнение

$$\begin{array}{r|l} -1\cdot & \bar{y} = Ax + B \\ 0\cdot & \bar{y}' = A \\ 1\cdot & \bar{y}'' = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$0 - Ax - B = x - 3.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x находим

$$\begin{cases} x: -A = 1 \\ x^0: -B = -3 \end{cases}.$$

Решаем эту систему и определяем неизвестные коэффициенты:

$$A = -1 \quad \text{и} \quad B = 3.$$

Таким образом, частное решение неоднородного *ДУП* имеет вид:

$$\bar{y} = e^{0x} Q_1(x) = -x + 3.$$

Общее решение *ЛНДУП* есть сумма всех найденных функций

$$y = y_0 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \sin x - x + 3.$$

47. "*Применение ДУП к изучению механических и электрических колебаний*"

47.1. *Колебания тела на пружине*

Пусть тело массой m прикреплено к пружине с коэффициентом упругости k, коэффициент трения о горизонтальную плоскость равен μ. Выведем тело из положения равновесия и отпустим. На тело действуют следующие ***силы***:

– ***сила упругости*** $F_{упр.} = -kx$,

– ***сила трения*** $F_{тр.} = -\mu v = -\mu \dfrac{dx}{dt} = -\mu x'$,

– ***внешняя вынуждающая сила*** $F(t)$,

которая является равнодействующей всех внешних сил, действующих на тело (рис. 4):

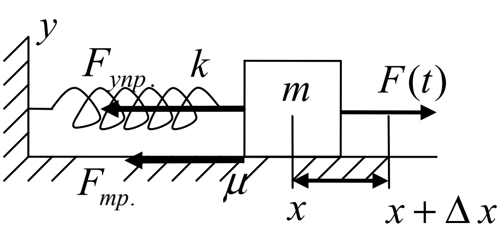


Рис. 4. *Колебание тела на пружине.*

По второму закону Ньютона $ma = F_{упр.} + F_{тр.} + F(t)$, где $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = x''$ – ускорение, следовательно, уравнение движения имеет вид

$$mx'' = -\mu x' - kx + F(t).$$

Вводя обозначения $\frac{\mu}{m}=2\lambda$, $\frac{k}{m}=\omega_0^2$ и $\frac{F(t)}{m}=f(t)$, перепишем полученное уравнение в виде

$$x''+2\lambda x'+\omega_0^2 x = f(t).$$

Это уравнение описывает колебания с трением под действием внешней силы. Рассмотрим частные случаи этого уравнения:

1. Пусть отсутствуют ***внешняя сила*** ($f(t)=0$) ***и сила трения*** ($\mu = 0$), тогда уравнение принимает вид

$$\boxed{x''+\omega_0^2 x = 0}$$

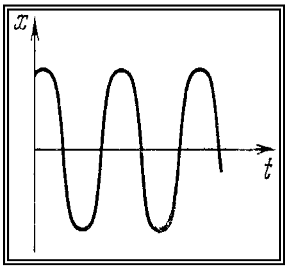
и описывает ***свободные колебания***. С математической точки зрения это уравнение является *ЛОДУII*, поэтому ищем его решение в виде $x=e^{kt}$. В этом случае характеристическое уравнение определяется квадратным уравнением вида $\boxed{k^2+\omega_0^2=0}$, корнями которого будут величины $k_{1,2}=\mp i\,\omega_0$. Следовательно, общее решение

$$x=C_1\cos\left(\omega_0 t\right)+C_2\sin\left(\omega_0 t\right).$$

Преобразуем это равенство следующим образом

$$x=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos\left(\omega_0 t\right)+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin\left(\omega_0 t\right)\right).$$

Вводя обозначения $\sin\varphi=\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$, $\cos\varphi=\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ и $A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$,



получим формулу, описывающую свободные колебания

$$x=A\left(\sin\varphi\,\cos\left(\omega_0 t\right)+\cos\varphi\,\sin\left(\omega_0 t\right)\right)=A\sin\left(\omega_0 t+\varphi\right),$$

где A – ***амплитуда*** колебаний, $\omega_0 t+\varphi$ – ***фаза*** колебаний, φ – ***начальная фаза*** колебаний.

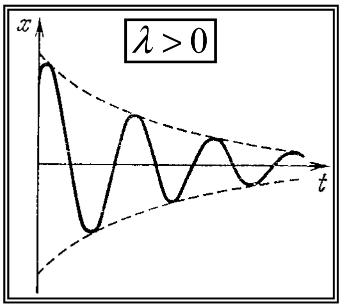
2. Пусть ***отсутствуют внешние силы*** ($f(t)=0$), т.е. ***колебания осуществляются с трением*** (***диссипативная система*** $\mu>0$, т.е $\lambda>0$). В этом случае уравнение колебаний имеет вид

$$\boxed{x''+2\lambda x'+\omega_0^2 x=0},$$

а характеристическое уравнение дается квадратным уравнением

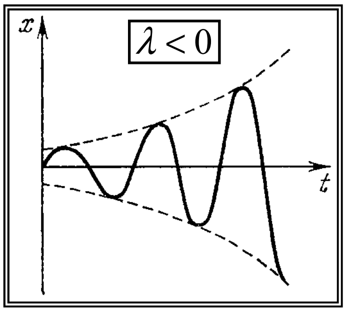
$$k^2+2\lambda k+\omega_0^2=0.$$

С практической точки зрения наибольший интерес представляет случай, когда $\lambda<\omega_0$. В этом случае корни характеристического уравнения



равны $k_{1,2} = -\lambda \mp i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Проводя преобразования аналогичные тем, которые были проведены для случая **1**, запишем формулу, описывающую *затухающие* колебания ($\lambda > 0$)

$$\boxed{x = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t + \varphi)}.$$



Из формулы видно, что при наличии силы трения колебания происходят с уменьшающейся амплитудой при увеличении времени t. Если параметр $\lambda < 0$, то с увеличением времени амплитуда колебаний будет нарастать. Следовательно, полученная формула будет описывать *нарастающие* колебания.

3. Пусть ***отсутствует сила трения*** ($\mu = 0$), т.е. ***колебания происходят под действием внешних сил***, тогда уравнение движения имеет вид $\boxed{x'' + \omega_0^2 x = f(t)}$.

Если внешняя сила описывается периодической функцией

$$f(t) = f_0 \sin(\nu t),$$

то решение *ЛНДУII* представляется в виде суммы решения однородного *ДУII* (см. случай **1**) $x_0 = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и частного решения неоднородного *ДУII*, которое будем искать в виде

$$\bar{x} = t^n\left(A\cos(\nu t) + B\sin(\nu t)\right).$$

а) пусть $\nu \neq \omega_0$ ($n = 0$), тогда $\bar{x} = A\cos(\nu t) + B\sin(\nu t)$. Подставляя эту функцию и её вторую производную в уравнение, сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях и решая систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B, получаем, что $A = 0$, а $B = \dfrac{f_0}{\omega_0^2 - \nu^2}$, следовательно, общее решение имеет вид $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi) + \dfrac{f_0 \sin(\nu t)}{\omega_0^2 - \nu^2}$;

α) пусть $\nu \neq \omega_0$, но $\nu \approx \omega_0$ (явление ***резонанса***) и $\varphi = 0$, тогда решение принимает вид $\boxed{x \approx \dfrac{f_0 \sin(\nu t)}{\omega_0^2 - \nu^2}}$;

β) пусть $\nu >> \omega_0$ и $\varphi = 0$, тогда $\boxed{x \approx A\sin(\omega_0 t)}$.

б) пусть $\nu = \omega_0$ $(n=1)$, тогда $\bar{x} = t\left(A\cos(\nu t) + B\sin(\nu t)\right)$. Подставляя эту функцию и её вторую производную в уравнение, сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях и решая систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B, получаем, что $B=0$ и $A = -\dfrac{f_0}{2\nu}$, следовательно, общее решение имеет вид: $\boxed{x = A\sin(\nu t+\varphi) - \dfrac{f_0 t\cos(\nu t)}{2\nu}}$ (решение дифференциальных уравнений в случаях **а**) и **б**) провести *самостоятельно*).

47.2. *Колебания в электрическом контуре*

Рассмотрим следующую электрическую цепь (рис. 5):

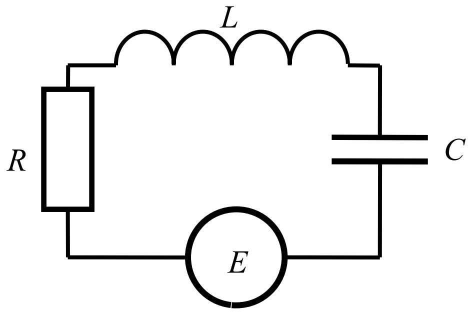


Рис. 5. *Электрический колебательный контур*.

Напряжение в цепи

$$E = U(t) = U_R + U_L + U_C = IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = q'R + Lq'' + \frac{q}{C}.$$

Следовательно, уравнение, описывающее колебания в контуре, после введения обозначений $\dfrac{R}{L} = 2\lambda$, $\dfrac{1}{LC} = \omega_0^2$ и $\dfrac{U(t)}{L} = f_0\sin(\nu t)$, принимает вид: $\boxed{q'' + 2\lambda q' + \omega_0^2 q = f_0\sin(\nu t)}$. Это уравнение анализируется так же, как и в случае механических колебаний (исследовать уравнение *самостоятельно*).

48. "*Системы дифференциальных уравнений*"

48.1. *Нормальные системы ДУ*

Существует ряд процессов и явлений, для описания которых привлекают не одну, а несколько функций. Эти функции могут быть решениями различных дифференциальных уравнений, связанных между собой. Однако возможна ситуация, когда система дифференциальных уравнений возникает при рассмотрении дифференциального уравнения порядка n (такие системы в обратном порядке сводятся к дифференциальному уравнению порядка n).

Пусть дано дифференциальное уравнение порядка n, которое разрешено относительно старшей производной $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$. Это уравнение можно записать в виде системы *ДУI*, если ввести следующие обозначения:

$$y = y_1;$$
$$y' = y_2 = y'_1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = y_{n+1} = y'_n.$$

В результате указанных действий получим ***<u>нормальную</u> систему дифференциальных уравнений первого порядка***

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y'_2 = y_3 = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n = y_{n+1} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}, \tag{1}$$

в которой *число неизвестных совпадает с числом уравнений*.

Общим решением приведенной системы будет система функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases},$$

из которого *при задании начальных условий* получают ***частное решение***.

Пример 1. Решить систему *ДУI* $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z} \\ \dfrac{dz}{dx} = y \end{cases}$.

Продифференцируем обе части второго уравнения системы по аргументу x ($\dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{dy}{dx}$), воспользуемся первым уравнением системы для замены первой производной от функции y ($\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}$) и вторым уравнением системы для исключения неизвестной функции y, тогда получим $\dfrac{d^2z}{dx^2} = \dfrac{y^2}{z} = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2$. Это дифференциальное уравнение второго порядка, которое в явном виде не содержит аргумента x, которое можно записать в виде: $z''=\frac{1}{z}(z')^2$; $z\,z''-(z')^2=0$; (т.к. $z\neq 0$, то можно разделить уравнение на z^2) $\frac{z\,z''-(z')^2}{z^2}=0$; $\left(\frac{z'}{z}\right)'=0$, т.е. $\frac{z'}{z}=C_1$ или $\frac{dz}{z}=C_1\,dx$. Интегрируя это равенство, получим: $\ln|z|=C_1x+\ln|C_2|$ или $z=C_2\exp(C_1x)$. Т.к. $y=\frac{dz}{dx}$, то неизвестная функция $y=C_1C_2\exp(C_1x)$. Следовательно, общее решение *системы ДУI* имеет вид $\begin{cases} y=C_1C_2\exp(C_1x) \\ z=C_2\exp(C_1x) \end{cases}$.

○ После нахождения одной из неизвестных функций другие функции системы находятся дифференцированием найденной функции и исключением других функций с помощью системы уравнений. ○

Пример 2. Решить систему *ДУI* $\begin{cases} \dot{x}=y-z \\ \dot{y}=z-x \\ \dot{z}=x-y \end{cases}$.

○ Напомним обозначения $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$ и $\dot{z}=\frac{dz}{dt}$. ○

Конечные соотношения между неизвестными функциями и аргументом называют ***первыми интегралами*** системы *ДУI*.

Для их нахождения можно выбирать линейные комбинации правых частей уравнений системы, как с постоянными, так и переменными коэффициентами. Просуммируем, например, уравнения заданной системы *ДУI*, получим

$$\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=0;\quad \frac{d}{dt}(x+y+z)=0;\quad x+y+z=C_1\ (*).$$

Умножим первое уравнение системы на x, второе уравнение – на y, третье – на z, сложим получившиеся в левой и правой частях равенства, получим

$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0;\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)=0;\quad x^2+y^2+z^2=C_2.$$

Полученные *первые интегралы* системы не решают полностью задачу, так ***три*** неизвестных функции связаны между собой только ***двумя*** соотношениями. Для нахождения решения исходной системы продифференцируем третье уравнение системы по параметру t, найдём, что $\ddot{z}=\dot{x}-\dot{y}$. Воспользуемся первыми двумя уравнениями системы, получим $\ddot{z}=x+y-2z$. С учётом соотношения (*) это уравнение переходит в равенство $\ddot{z} = C_1 - 3z$. Решим полученное уравнение как *ЛНДУII с постоянными коэффициентами* $\ddot{z} + 3z = C_1$. Согласно вышеизложенной методике, найдём решение однородного уравнения в виде $z_0 = e^{kt}$, тогда

$$\begin{array}{r|l} 3\cdot & z_0 = e^{kt} \\ 0\cdot & \dot{z}_0 = k\,e^{kt} \\ 1\cdot & \ddot{z}_0 = k^2 e^{kt} \\ \hline & (k^2+3)e^{kt} = 0\,. \end{array}$$

Корни характеристического уравнения равны

$$k^2 + 3 = 0; \quad k^2 = -3; \quad k_{1,2} = \mp\sqrt{-3} = \mp i\sqrt{3}\,.$$

Следовательно, решение *ЛОДУII с постоянными коэффициентами* задаётся функцией $z_0 = A_1\cos(\sqrt{3}t) + A_2\sin(\sqrt{3}t)$. Частное решение *ЛНДУII* будем искать по виду правой части, которая равна

$$f(t) = C_1 = e^{0\,x}P_0(t)\,.$$

Так как параметр $a = 0 \neq k_{1,2}$, поэтому частное решение *ЛНДУII* ищем в виде $\bar{z} = e^{0\,t}Q_0(t) = A_3$. Найдём первую и вторую производные этой функции и подставим полученные функции в исходное уравнение

$$\begin{array}{r|l} 3\cdot & \bar{z} = A_3 \\ 0\cdot & \dot{\bar{z}} = 0 \\ 1\cdot & \ddot{\bar{z}} = 0 \\ \hline & 0 + 3\,A_3 = C_1\,. \end{array}$$

Таким образом, $\bar{z} = A_3 = \dfrac{C_1}{3}$. Суммируя полученные решения, находим общее решение для функции

$$z = z_0 + \bar{z} = A_1\cos(\sqrt{3}t) + A_2\sin(\sqrt{3}t) + \frac{C_1}{3}\,.$$

Так как справедливы соотношения

$$\begin{cases} \dot{z} = x - y \\ \ddot{z} + 2z = x + y \end{cases},$$

то функции x и y равны

$$x = \frac{1}{2}(\ddot{z} + \dot{z} + 2z) = \frac{-A_1 + \sqrt{3}A_2}{2}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}A_1 + A_2}{2}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{C_1}{3}\,;$$

$$y = \frac{1}{2}(\ddot{z} - \dot{z} + 2z) = \frac{-A_1 - \sqrt{3}A_2}{2}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}A_1 - A_2}{2}\sin(\sqrt{3}t) + \frac{C_1}{3}\,.$$

48.2. *Линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами*

Нормальная система ДУI называется ***линейной***, если все функции, которые находятся в правых частях уравнений системы, имеют вид $\boxed{f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + ... + a_{in}(x)y_n + b_i(x)}$ $(i = 1, 2, ..., n)$. ***Линейной системой ДУI с постоянными коэффициентами*** называют *нормальную систему ДУI*, для которой выполняются соотношения: $\boxed{a_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}_{ij}}$ и $\boxed{b_i(x) \equiv 0}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$. Такая система имеет вид $\boxed{\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{cases}}$. Приведение этого уравнения к одному дифференциальному уравнению даёт однородное линейное дифференциальное уравнение порядка n.

Пусть задана *линейная система ДУI с постоянными коэффициентами*, которая состоит из трёх уравнений с тремя неизвестными функциями $\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases}$. Решение этой системы будем искать в виде $y_i = k_i e^{rx}$ $(i = 1, 2, 3)$. Подстановка выбранных функций в систему после несложных преобразований приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно параметров k_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\begin{cases} (a_{11} - r)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r)k_2 + a_{23}k_3 = 0 \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r)k_3 = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Для того чтобы эта система имела нетривиальное (ненулевое) решение её главный определитель должен равняться нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - r \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) называют ***характеристическим уравнением*** исходной системы. Каждому корню характеристического уравнения r_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ соответствуют *частные решения* системы (2) $k_{i\alpha}$ и функции

$$y_{i(\alpha)} = k_{i(\alpha)} e^{r_{(\alpha)} x} \quad (i, \alpha = 1, 2, 3).$$

Линейная комбинация частных решений задаёт *общее решение* системы

$$\boxed{y_i = \sum_{\alpha=1}^{3} C_\alpha k_{i(\alpha)} e^{r_{(\alpha)}x} = C_1 k_{i(1)} e^{r_{(1)}x} + C_2 k_{i(2)} e^{r_{(2)}x} + C_3 k_{i(3)} e^{r_{(3)}x}} \; (i = 1,2,3).$$

Пример 3. Решить систему *ДУІ* $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$.

Решение системы будем искать в виде $x = k_1 e^{rt}$ и $y = k_2 e^{rt}$, тогда производные $\dot{x} = k_1 r e^{rt}$ и $\dot{y} = k_1 r e^{rt}$. Подставим найденные величины в исходную систему и выполним простейшие преобразования, получим

$$\begin{cases} k_1 r\, e^{rt} = k_2 e^{rt} - 2k_1 e^{rt} \\ k_2 r\, e^{rt} = k_1 e^{rt} + 4k_2 e^{rt} \end{cases}.$$

После сокращения на e^{rt} и простейших преобразований найдём, что корни характеристического уравнения удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} -2-r & 1 \\ 1 & 4-r \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель второго порядка (см. п. 1.1, ***1***)

$$r^2 - 2r - 9 = 0.$$

Найдём корни квадратного уравнения $r_{1,2} = 1 \mp \sqrt{10}$. Отыщем частные решения для каждого из корней характеристического уравнения

$r_1 = 1 - \sqrt{10}$: $\begin{cases} (-3+\sqrt{10})k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + (3+\sqrt{10})k_2 = 0 \end{cases}$;	$r_2 = 1 + \sqrt{10}$: $\begin{cases} (-3-\sqrt{10})k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + (3-\sqrt{10})k_2 = 0 \end{cases}$;
Если домножить первое уравнение системы на число $(3+\sqrt{10})$, то получим второе уравнение системы. Поэтому из второго уравнения системы находим, что $k_{1(1)} = -(3+\sqrt{10})k_{2(1)}$.	Если домножить первое уравнение системы на число $(3-\sqrt{10})$, то получим второе уравнение системы. Поэтому из второго уравнения системы находим, что $k_{1(2)} = -(3-\sqrt{10})k_{2(2)}$.

Положив $k_{2(\alpha)} = 1$ $(\alpha = 1,2)$, найдём *общее решение* системы

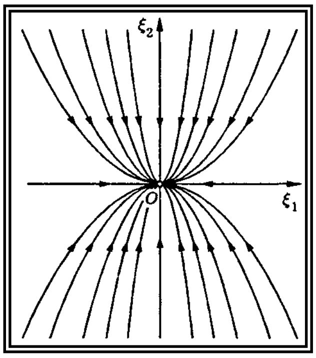
$$\begin{cases} x = -((3+\sqrt{10})C_1 e^{(1-\sqrt{10})t} + C_2(3-\sqrt{10})e^{(1+\sqrt{10})t}) \\ y = C_1 e^{(1-\sqrt{10})t} + C_2 e^{(1+\sqrt{10})t} \end{cases}.$$

Пример 4. Преобразовать систему *ДУІ* $\begin{cases} \dot{x} = y + 5x \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$ к дифференциальному уравнению второго порядка.

Выразим функцию x из второго уравнения системы: $x = \dot{y} + 3y$ и вычислим её производную $\dot{x} = \ddot{y} + 3\dot{y}$. Найденные выражения подставим в первое уравнение системы, получим

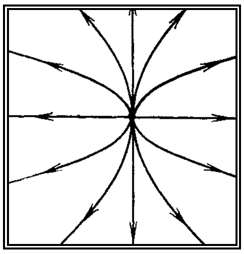
$$\ddot{y} + 3\dot{y} = y + 5(\dot{y} + 3y)\,; \quad \ddot{y} - 2\dot{y} - 16y = 0\,.$$

Полученное уравнение является *линейным однородным ДУII с постоянными коэффициентами*, методы решения которого рассмотрены в ***46***.

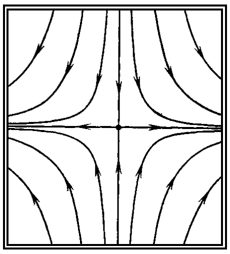


Координатная плоскость с осями $x = \xi_1$ и $\dot{x} = \xi_2$ называется ***фазовой плоскостью***. Интегральные кривые на фазовой плоскости называют ***фазовыми траекториями***. Например, если корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенствам $r_2 < r_1 < 0$ (***устойчивый узел***), то ***фазовый портрет*** системы имеет вид, показанный на рисунке.

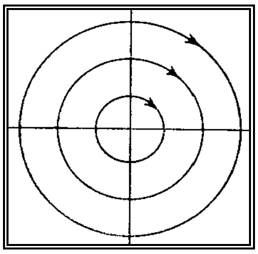
Помимо устойчивого узла на фазовой плоскости могут присутствовать и другие особые точки, которые показаны на рисунках:



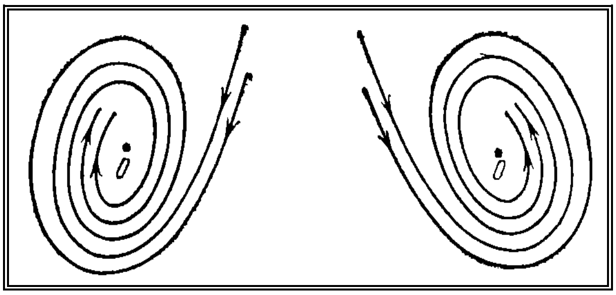
Неустойчивый узел



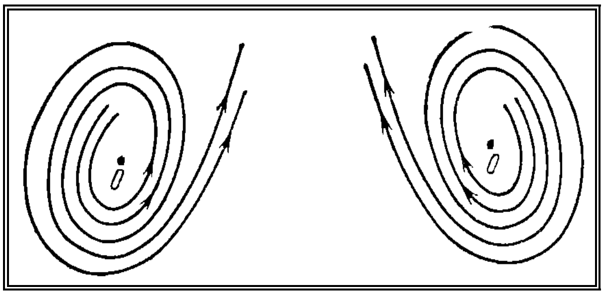
Седло



Центр

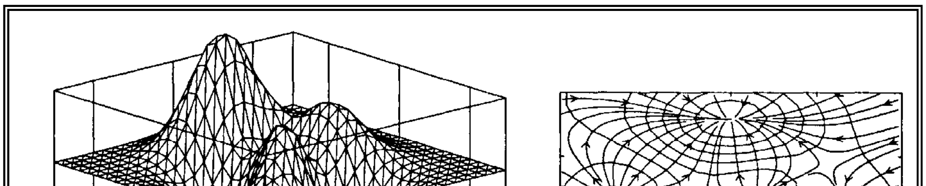


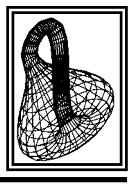
Устойчивый фокус



Неустойчивый фокус

Например, в трёхмерном фазовом пространстве *фазовый портрет* (*а*) условной динамической системы и его *топографическая карта* (*б*) могут иметь вид:





IV

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 1

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $2x\sqrt{1-y^2}\,dx - y\,d\,y = 0$;

б) $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2 dx$;

в) $x\,y' - y^2 = 0$, $y(1) = 1$;

– однородные

а) $\dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{dy}{y-x}$; б) $x\,y' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

в) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $y(1) = 1$;

– линейные

а) $y' - y\sin x = \sin x\cos x$; б) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$;

в) $\dfrac{ds}{d\,t} + \dfrac{3s}{t} = \dfrac{2}{t^3}$, $s(1) = 1$;

– уравнение Бернулли: $y' + x\,y = (1+x)\,e^{-x}\,y^2$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $2x\,y'\,y'' = (y')^2 + 1$; б) $2y\,y'' - 3(y')^2 = 4y^2$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– со специальной правой частью

а) $y'' + 9y = \sin(3x) + 2e^x$;

б) $y'' - 4y' + 5y = (16 - 2x)e^x + x^2$;

в) $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$, $y(0) = \dfrac{4}{3}$, $y(0) = \dfrac{1}{27}$;

г) $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; б) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 2

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $(x^2-1)\,dy+(1-y^2)\,dx=0$;

б) $\sqrt{4+y^2}\,dx-y\,dy=x^2\,y\,dy$;

в) $(1+y^2)\,dx=x\,y\,dy$, $y(2)=1$;

– однородные

а) $x\,y'+y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$; б) $x\,y'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$;

в) $(x\,y'-y)\,arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)=x$;

– линейные

а) $y'=e^{-x}-\dfrac{y}{1+x}$; б) $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin(2x)$;

в) $\dfrac{ds}{dt}\cos^2 t-s=tg\,t$, $s(0)=-1$;

– уравнение Бернулли: $x\,y'+y=2\,y^2\ln x$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y\,y''=2(y')^2$; б) $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$, $y(2)=1$, $y'(2)=-1$;

– со специальной правой частью

а) $y''+5\,y'+4\,y=3\sin x+e^{-x}$;

б) $y''+4\,y=x\,e^{2x}+5$;

в) $y''-6\,y'+9\,y=x^2-x+3$; $y(0)=\dfrac{4}{3}$, $y'(0)=\dfrac{1}{27}$;

г) $y''+9\,y=\cos x$, $y(0)=y'(0)=1$;

– методом вариации постоянных

а) $y''+y=\sec x$; б) $y''-3\,y'+2\,y=\dfrac{1}{3+e^{-x}}$, $y(0)=1+8\ln 2$, $y'(0)=14\ln 2$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=x-y\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=y-2x\\ \dot{y}=x+5y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 3

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– *с разделяющимися переменными*

а) $x^2\,dy+(y-5)\,dx=0$;

б) $x^2\,y^2\,y'+1=y$;

в) $y'=(2\,y+1)\,ctg\,x\,,\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$;

– *однородные*

а) $x\,y'=2\sqrt{3\,x^2+y^2}+y$;

б) $x\,y'\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)=y\,\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)-.x$;

в) $x\,y'=y\left(1+\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right),\quad y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$;

– *линейные*

а) $y'-y\,ctg\,x=2x\sin x$;

б) $(x\,y+e^x)\,dx-x\,dy=0$; в) $t\dfrac{d\,s}{d\,t}-s=t^2,\ s(0)=0$;

– *уравнение Бернулли*: $x^2\,y'=y^2+x\,y$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– *допускающие понижение порядка*

а) $y''\,x\,\ln x=y'$; б) $y''=y'\,e^y,\ \ y(0)=0\,,\ y'(0)=1$;

– *со специальной правой частью*

а) $y''-4\,y=8\,x^3+e^{2x}$;

б) $y''+2\,y'+5\,y=10\,\cos x+x\,e^{-x}$;

в) $y''-4y'+3y=e^{5x},\ y(0)=3,\ y'(0)=9$;

г) $y''+4y=\sin(2x),\ y(0)=y'(0)=1$;

– *методом вариации постоянных*

а) $y''-2\,y'+y=\dfrac{e^x}{x}$; б) $y''+9y=9\sec(3x),\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=x+8y\\ \dot{y}=y-2x\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=3x+5y\\ \dot{y}=x+4y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант <u>4</u>

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $(x^2+x)\,dy=(2y+1)\,dx$;

б) $(e^{2x}+5)\,dy+y\,e^{2x}\,dx=0$;

в) $(1+x^2)\,y'+y\sqrt{1+x^2}=x\,y,\quad y(0)=1$;

– однородные

а) $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$; б) $x\,y'=\dfrac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}$;

в) $y'=4+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2,\ y(1)=2$;

– линейные

а) $y'+y\sin x=\cos^2 x$;

б) $(9+x^2)\,y'+x\,y=1$;

в) $(1-t^2)\dfrac{ds}{dt}-t\,s=(1-t^2)^{3/2},\quad s(0)=0$;

– уравнение Бернулли: $x\,y'-y=-y^2(\ln x+2)\ln x$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y''\,tgx=y'+1$; б) $y''y-(y')^2=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$;

– со специальной правой частью

а) $y''-5y'+6y=13\sin(3x)+e^{2x}$;

б) $y''-4y'+4y=2x^2+xe^x$;

в) $2y''-y'=1,\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$;

г) $y''+y=2\cos(7x),\ y(0)=y'(0)=1$;

– методом вариации постоянных

а) $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$; б) $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}},\ y(0)=4\ln 4,\ y'(0)=3(3\ln 4-1)$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=y-4x\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=7x+y\\ \dot{y}=3x-y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 5

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $y' = e^{x-2y}$;

б) $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$;

в) $dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;

– однородные

а) $y' = \dfrac{x+2y}{x}$; б) $x\,y' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$;

в) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - x\,dy = 0$, $y(1) = 0$;

– линейные

а) $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$; б) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2\cos x$;

в) $\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{s}{t} = 3t$ $(t > 0)$, $s(1) = 1$;

– уравнение Бернулли: $2(y' + xy) = (1+x)\,e^{-x}\,y^2$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y'' - 2y'\,ctg\,x = \sin^3 x$; б) $4y^3 y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

– со специальной правой частью

а) $y'' - 4y' + 4y = 2\sin(2x) + 2x$;

б) $y'' - 4y' + 8y = e^x + (x^2+1)$;

в) $y'' - 3y = x + \cos(2x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -\dfrac{1}{9}$;

г) $y'' + 2y' + 6y = 20\cos x\sin x + 3$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$; б) $y'' + 4y = 4\,ctg(2x)$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = 4x - 7y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 6

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $x + x\,y = -(\,y + x\,y\,)\,y'$;

б) $x\sqrt{6+y^2}\,dx + y\sqrt{5+x^2}\,dy = 0$;

в) $2\,y'\sqrt{x} = y,\quad y(4) = 1$;

– однородные

а) $x^2 + y^2 = 2\,x\,y\,y'$; б) $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 2\,y\,x^2}{2y^2 + x^2}$;

в) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - x\,y' = 0,\ y(1) = 0$;

– линейные

а) $y'\cos x - y\sin x = \sin(2x)$;

б) $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}\,y = 5$;

в) $t^2\,\dfrac{ds}{dt} = 2\,t\,s - 3,\quad s(-1) = 1$;

– уравнение Бернулли: $3(\,x\,y' + y\,) = y^2\ln x$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $2\,y\,y'' = (\,y'\,)^2$; б) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ y\!\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2},\ y'\!\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

– со специальной правой частью

а) $y'' - 2y = x\,e^{-x} + \sin(2x)$;

б) $y'' + 2y' = 4\,e^{x} + (x^2 + 1)$;

в) $y'' + 4y = \sin(2x) + 1,\ y(0) = \dfrac{1}{4},\quad y'(0) = 0$;

г) $y'' + y' = x^3 - x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + y = ctgx$; б) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin(3x)},\ y\!\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4,\ y'\!\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = x + 9y \\ \dot{y} = 3y - x \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 7

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $tg\, x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x\, ctg\, y\, dy = 0$;

б) $y'\, y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;

в) $(1+e^x)\, y\, y' = e^x, \quad y(0) = 1$;

– однородные

а) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$; б) $y' = 2 + 4\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$;

в) $(x^2 - 3y^2)\, dx + 2\, x\, dy = 0, \; y(2) = 4$;

– линейные

а) $y' - \dfrac{y}{x} = x$; б) $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x (x+1)$;

в) $t\dfrac{ds}{dt} + s - e^t = 0, \quad s(0) = 0$;

– уравнение Бернулли: $2\, y' + y\cos x = \dfrac{(1+\sin x)\cos x}{y}$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $x\, y'' + y' = 0$; б) $y''\, y^3 = 1, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$;

– со специальной правой частью

а) $y'' + y' - 6y = x\, e^{2x} + x^2$;

б) $y'' - y' = 2ch(2x)$;

в) $y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

г) $y'' + 4y' + 4y = \cos(2x) + x, \; y(0) = y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + y = tg\, x$; б) $y'' + y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}, \; y(0) = \ln 27, \; y'(0) = \ln 9 - 1$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y \\ \dot{y} = x + 5y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = x - 8y \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 8

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $2xy' + y^2 = 1$;

б) $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0$;

в) $(1-x)\,dy - y\,dx = 0$, $y(0) = 1$;

– однородные

а) $xy' = y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + y$; б) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

в) $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$, $y(2) = 4$;

– линейные

а) $xy' + y = x\sin x$;

б) $y'\,ctgx - y = 2\cos^2 x\ ctg\,x$;

в) $t\dfrac{ds}{dt} - s - e^{\frac{1}{t}} = 0$, $s(1) = 0$;

– уравнение Бернулли: $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{x^4}(1 - x^3)$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $xy'' - y' = x^2 e^x$; б) $y'' y^5 + 2 = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– со специальной правой частью

а) $4y'' - y = (x^3 - 24x) + e^x$;

б) $y'' - 5y' = 2ch(5x)$ $\left(\boxed{ch\alpha = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}}\right)$;

в) $y'' - 3y' = x + \cos x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = -\dfrac{1}{9}$;

г) $xy'' - y' = xy^2 e^x$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + y = \operatorname{cosec} x$; б) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\pi$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = x + 6y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 9

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}+\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=0$;

б) $2x\,dx-2y\,dy=x^2y\,dy-2xy^2dx$;

в) $y'=y\cos x$, $y(0)=1$;

– однородные

а) $y'=-\dfrac{x+y}{x}$; б) $2y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+6\dfrac{y}{x}+3$;

в) $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$, $y(1)=0$;

– линейные

а) $(x^2-1)y'-xy=x^3-x$;

б) $y'+\dfrac{2}{x}y=x^3$;

в) $\dfrac{ds}{dt}-\dfrac{2s}{1-t^2}-1-t=0$, $s(0)=0$;

– уравнение Бернулли: $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2}$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y''(1+y)=5(y')^2$; б) $y'''(x-1)-y''=0$, $y(2)=2$, $y'(2)=1$, $y''(2)=1$;

– со специальной правой частью

а) $y''-4y'+4y=e^{3x}+x^2$;

б) $y''+9y=-36\sin(3x)-18e^x$;

в) $y''+4y=8\cos(2x)$, $y(0)=y'(0)=0$;

г) $y''-y'=x^2+1$, $y(0)=y'(0)=1$;

– методом вариации постоянных

а) $y''-2y'=4x^2e^{2x}$; б) $y''+\pi^2y=\dfrac{\pi^2}{\sin(\pi x)}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{2}$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=3x-5y\\ \dot{y}=2x-3y\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=x+2y\\ \dot{y}=2x-y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 10

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$;

б) $(e^x + 2)\,dy - y^2\, e^x\, dx = 0$;

в) $x\,dy - y\,dx = 0$, $y(1) = 1$;

– однородные

а) $x\,y' = y\cos\left(\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$; б) $x\,y' = \sqrt{4\,x^2 + y^2} + y$;

в) $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2\,x\,y\,dx = 0$, $y(1) = 2$;

– линейные

а) $y' + y = \dfrac{1}{e^x}$; б) $y' - \dfrac{2\,x\,y}{1+x^2} = 1 + x^2$;

в) $\dfrac{d\,s}{d\,t} + s\;tg\,t = \dfrac{1}{\cos t}$, $s(0) = 1$;

– уравнение Бернулли: $2\,x\,y' - 3y = -(\,5\,x^2 + 3\,)\,y^3$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y'' + \dfrac{2}{1-y}(\,y'\,)^2 = 0$; б) $y'' - \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)\right) = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = e$;

– со специальной правой частью

а) $y'' + 4\,y' + 4\,y = 25\sin x + e^{-2x}$;

б) $y'' - 4\,y' = 16\,sh(4x)$ $\left(\boxed{sh\alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}}\right)$;

в) $y'' - y = 9\,x\,e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$;

г) $y'' + 9y = \sin(3x)$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$; б) $y'' + 4y = 8\,ctg(2x)$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 5$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 7y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант <u>11</u>

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $(xy^2+x)\,dx+(y^2-x^2y^2)\,dy=0$;

б) $(4+e^{2x})\,y\,y'=e^{2x}$;

в) $(1+y^2)\,dx-xy\,dy=0$, $y(2)=1$;

– однородные

а) $y'=\dfrac{y}{x}+tg\left(\dfrac{y}{x}\right)$; б) $y'=\dfrac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$;

в) $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$, $y(4)=0$;

– линейные

а) $y'-y\,ctg\,x=2x\sin x$;

б) $y'-\dfrac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2$;

в) $t\dfrac{ds}{dt}-t^2=2s$, $s(1)=0$;

– уравнение Бернулли: $3xy'+5y=(4x-5)\,y^4$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y''=(y')^2$; б) $y''(1+\ln x)+\dfrac{y'}{x}=2+\ln x$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$, $y'(1)=1$;

– со специальной правой частью

а) $y''-7y'+10y=e^{2x}+x^2$;

б) $y''+2y'+5y=2\sin x+xe^x$;

в) $y''+y=2\sin x-6\cos x$, $y(0)=y'(0)=1$;

г) $y''-2y'=e^{2x}-1$, $y(0)=\dfrac{1}{8}$, $y'(0)=1$;

– методом вариации постоянных

а) $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $y''+y=4\,ctg\,x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=4y-5x\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=y-3x\\ \dot{y}=9x-y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 12

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)dy + y\,dx = 0$;

б) $\sqrt{4 - x^2}\;y' + x\,y^2 + x = 0$;

в) $2\sqrt{xy}\,dx = dy$, $y(1) = 1$;

– однородные

а) $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$; б) $x\,y' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

в) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 2$;

– линейные

а) $y' + y = x\,y^3$;

б) $y' = 3x - \dfrac{y}{x}$;

в) $\dfrac{ds}{dt} = t + 2s$, $s(0) = 1$;

– уравнение Бернулли: $2y' + 2y = x\,y^2$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $(y')^2 + 1 = y\,y''$; б) $2\,y'\,y'' + y^2(y')^2 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$;

– со специальной правой частью

а) $y'' - 8y' + 7y = 14 + x e^x$;

б) $y'' - 5y' = \sin x + x^2$;

в) $y'' + 9y = -18\sin(3x) - 18e^{3x}$, $y(0) = y'(0) = 1$;

г) $y'' + 4y' + 4y = \sin(2x) + 2$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' - y' = ch(2x)$ ($\boxed{ch\alpha = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}}$); б) $y'' + 6\,y' + 8\,y = \dfrac{4\,e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = x + 6y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант <u>13</u>

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $y\,y' + x + 1 = 0$;

б) $y'\,x\,\ln x = y$;

в) $y'\sin x - y\ln y = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$;

– однородные

а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$; б) $2\,y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\,\dfrac{y}{x} + 8$;

в) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$, $y(2) = 0$;

– линейные

а) $2\,x\,y' - 3y = -20\,x^2$; б) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$;

в) $\dfrac{d\,s}{d\,t} - s = e^t$, $s(0) = 1$;

– уравнение Бернулли: $y' + y = x\sqrt{y}$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y\,y'' = y^2 y' + (\,y'\,)^2$; б) $(1 + x^2\,)\,y'' - 2\,x\,y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$;

– со специальной правой частью

а) $y'' - y' + y = x^3 + 6$;

б) $y'' + y' = 2\;shx + 3$ $\left(\boxed{sh\alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}}\right)$;

в) $y'' + y = 2\,\cos(7x) - 3\sin x$;

г) $y'' - 4y' + 4y = \cos(2x) + e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' - 4y' = 2\,sh(2x)$ $\left(\boxed{sh\alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}}\right)$; б) $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 9x + 3y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y \\ \dot{y} = 2x + 4y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 14

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $tg\, y\, dx + tg\, x\, dy = 0$;

б) $(1+e^{2x})\, y\, y' = e^{2x}$;

в) $y(1+x^2)\, y' = x(1+y^2)$, $y(1)=1$;

– однородные

а) $(6x+y)\,dx + (4y+x)\,dy = 0$;

б) $y' = \dfrac{x^2+3yx-y^2}{3x^2-2xy}$; в) $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$, $y(1)=1$;

– линейные

а) $y' = a\sin x + by$;

б) $y' + xy = 3x^3$;

в) $\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{s}{1+t} + x^2 = 0$, $s(0)=0$;

– уравнение Бернулли: $xy' + y = xy^2$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $yy'' + (y')^2 = 0$; б) $xy'' = y'$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$;

– со специальной правой частью

а) $y'' - 7y' + 12y = e^{3x} + 4$;

б) $y'' - 6y' + 9y = 3xe^{2x} + e^{3x}$;

в) $y'' + 4y' = -8\sin(2x) + 32\cos(2x)$;

г) $y'' + y = \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' - y = 2\, sh x$ $\left(\boxed{sh\alpha = \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}}\right)$;

б) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2+e^{-2x}}$, $y(0) = 1+3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y \\ \dot{y} = x - 7y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 15

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $e^{y}\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right)=1$;

б) $x\,dx-y\,dy=y\,x^{2}\,dy-x\,y^{2}\,dx$;

в) $(2x+1)dy+y^{2}\,dx=0$, $y(0)=1$;

– однородные

а) $\left(\sqrt{x\,y}-y\right)dx+x\,dy=0$;

б) $y'=\dfrac{y^{2}}{x^{2}}+8\,\dfrac{y}{x}+12$;

в) $\left(y^{2}-9x^{2}\right)dx+2\,x\,y\,dy=0$, $y(1)=1$;

– линейные

а) $y'+2\,x\,y=-2\,x^{3}$; б) $y'-y\cos x=-\sin(2x)$;

в) $\dfrac{d\,s}{d\,t}-\dfrac{2\,s\,t}{1+t^{2}}=1$, $s(0)=2$;

– уравнение Бернулли: $y'+\dfrac{2y}{x}=2\sqrt{y}$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка:*

– допускающие понижение порядка

а) $y''=-\dfrac{x}{y'}$; б) $y\,y''+(y')^{2}=2$, $y(0)=y'(0)=1$;

– со специальной правой часть

а) $y''+y'=\left(x^{2}+4\right)+e^{x}$;

б) $y''-4\,y'+8\,y=5\sin x-3\cos x$;

в) $y''+y=2e^{x}+\cos x$;

г) $y''-4\,y'+4\,y=\sin x+e^{2x}$, $y(0)=y'(0)=1$;

– методом вариации постоянных

а) $y''+y=x\cos^{2}x$; б) $y''+\dfrac{y}{\pi^{2}}=\dfrac{1}{\pi^{2}\cos\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=5y-2x\\ \dot{y}=y-10x\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=x+7y\\ \dot{y}=6x+y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант <u>16</u>

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $(1-5x)\,dy = 3y\,dx$;

б) $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\;y' = 0$;

в) $\left(1+e^x\right)y\,y' = e^x,\; y(0)=1$;

– однородные

а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

б) $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\,\dfrac{y}{x} + 5$;

в) $\left(x^2 + 3y^2\right)dx = 2xy\,dy,\; y(2)=0$;

– линейные

а) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$; б) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}$;

в) $\dfrac{1}{t}\dfrac{ds}{dt} - s = e^{\frac{t^2}{2}},\; s(0)=1$;

– уравнение Бернулли: $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $xy'' + y' = 0$; б) $y''y^2 = (y')^3,\; y(1)=1,\; y'(1)=2$;

– со специальной правой часть

а) $y'' + 4y = 8\sin(2x) + x^2$;

б) $y'' + 2y' = xe^x + 3$;

в) $y'' - 9y' + 8y = xe^x + \sin x$;

г) $y'' - 9y = (2-x) + \cos x,\; y(0)=1,\; y'(0)=2$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' - y = 2\,sh x$ $\left(\boxed{sh\alpha = \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}}\right)$; б) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin(\pi x)},\; y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,\; y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{2}$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 7x + y \\ \dot{y} = x + 7y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 3x \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 17

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{dy}{\sqrt{y}+1}=0$;

б) $y\ln y+x\,y'=0$;

в) $y'\,ctg\,x+y=2,\ y(0)=1$;

– однородные

а) $y'=\dfrac{x^2+x\,y-5\,y^2}{x^2-6\,x\,y}$; б) $x\,y\,y'=x^2+y^2$;

в) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-x\,dy=0,\ y(0)=1$;

– линейные

а) $y'+3\,y\,tg(3x)=\sin(6x)$;

б) $y'+2\,x\,y=x\,e^{-x^2}$;

в) $\dfrac{d\,s}{d\,t}-s\,tg\,t=\sec t,\ s(0)=0$;

– уравнение Бернулли: $x\,y'+y=y^2\ln x$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $1+(y')^2=y\,y''$; б) $y''(1+\ln x)+\dfrac{y'}{x}=2+\ln x,\ y(1)=\dfrac{1}{2},\ y'(1)=1$;

– со специальной правой часть

а) $y''+y'-2y=8\sin(2x)+5$;

б) $y''+16y=sh(4x)$;

в) $y''+4y'+4y=-2\,e^{-2\,x}+x$;

г) $y''+y'=e^{-x}(x-1)+\cos x,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$;

– методом вариации постоянных

а) $y''-2\,y=2\,sh(2x)$ $\left(\boxed{sh\alpha=\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}}\right)$; б) $y''+\pi^2 y=\dfrac{\pi^2}{\cos(\pi x)},\ y(0)=3,\ y'(0)=0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=5x-8y\\ \dot{y}=2x+3y\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=x-3y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 18

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $2x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\,dy = 0$;

б) $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{4-x^2} = 0$; в) $e^y\left(y'+1\right) = 2,\quad y(0)=0$;

– однородные

а) $x\,y' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$;

б) $x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)y' + x = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

в) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right),\ y(1)=1$;

– линейные

а) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{12}{x^4}$; б) $y' = \dfrac{y}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}$;

в) $\dfrac{ds}{dt} - \dfrac{2s}{t} = \dfrac{1}{t^3},\ s(1)=1$;

– уравнение Бернулли: $2y' + 3y\cos x = (8+12\cos x)e^{-3\sin x}y^{-1}$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $(1+x^2)y'' - xy' = 2$; б) $y''y^3 = 1,\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$;

– со специальной правой часть

а) $y'' - 6y' + 8y = \left(2x+1\right) + \sin\left(2x\right)$;

б) $y'' - y' = e^x + x^2$;

в) $y'' - 6y' + 9y = \cos x + 2\sin\left(2x\right)$;

г) $y'' + y = -\sin\left(2x\right) + 3,\ y\left(\pi\right) = y'\left(\pi\right) = 1$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' - y' = ch\left(2x\right)$ ($\boxed{ch\,\alpha = \dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}}$); б) $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$,

$y(0) = y'(0) = 0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x} = 3y - x\\ \dot{y} = y - 5x\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x} = 7x - y\\ \dot{y} = 5x + 2y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 19

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $(x^3+2)\,y'=3y+1$;

б) $\sqrt{4+y^2}+\sqrt{2-x^2}\,y\,y'=0$;

в) $(1+y^2)\,dx=x\,y\,dy$, $y\left(\sqrt{2}\right)=1$;

– однородные

а) $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$; б) $y'=\dfrac{x^2+x\,y-3y^2}{2x^2-6x\,y}$;

в) $(x\,y'-y)\,arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)=x$, $y(1)=0$;

– линейные

а) $y'=e^{-x}-\dfrac{y}{1+x}$;

б) $y'+4x\,y=-\,4x^3$;

в) $(1+t^2)\dfrac{d\,s}{d\,t}-t\,s=t^2$, $s(0)=\dfrac{1}{2}$;

– уравнение Бернулли: $4y'+x^3\,y=(x^3+8)\,e^{-2x}\,y^2$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y''\,tg\,x=y'+1$; б) $y''e^{y}=y'$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

– со специальной правой часть

а) $y''-5y'+6y=2\sin(2x)+4$;

б) $y''-4y=e^{2x}+\left(x^2-1\right)$;

в) $y''+9y=\cos(3x)+e^{3x}$;

г) $y''-4y'+3y=e^{x}+\left(x-3\right)$, $y(0)=3$, $y'(0)=9$;

– методом вариации постоянных

а) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$; б) $y''+4y=4\,ctg\,(2x)$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=y-2x\\ \dot{y}=x+2y\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=x+4y\\ \dot{y}=x-6y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 20

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $2xy' + y^2 = 1$;

б) $2x + 2xy^2 + \sqrt{1-x}\,y' = 0$;

в) $y' = y\cos x$, $y(0) = 1$;

– однородные

а) $xy' - y = x\,tg\left(\dfrac{y}{x}\right)$; б) $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$;

в) $(x^2 + 2y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$, $y(1) = 1$;

– линейные

а) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$;

б) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$;

в) $ctg\,t\dfrac{ds}{dt} + s = 2$, $s(0) = 4$;

– уравнение Бернулли: $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$; б) $y''(2x-1) = y'$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;

– со специальной правой часть

а) $y'' - y = (5x+2)e^x + 4$;

б) $y'' - 6y' + 5y = \cos x + e^{2x}$;

в) $y'' + 25y = \sin(5x) + (x+5)$;

г) $y'' - y' = 2\sin(2x) + 3\cos(3x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + 4y = 2\,tg\,x$; б) $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y \\ \dot{y} = 3y - x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = 5y - x \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант <u>21</u>

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $e^{x-y}\, y' = 1$;

б) $6x\,dx - y\,dy = y x^2\,dy - 2x y^2\,dx$;

в) $y' = \dfrac{y+1}{x^2},\; y(1) = 0$;

– однородные

а) $(x^2 + y^2)\,dx - x y\,dy = 0$;

б) $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\,\dfrac{y}{x} + 6$;

в) $(x^2 + 5y^2)\,dx - 2x y\,dy = 0,\; y(1) = 1$;

– линейные

а) $y' + 2x y = x e^{-x^2}$; б) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+5}{x}\, e^x$;

в) $t\dfrac{ds}{dt} - s = t^2,\; s(0) = 0$;

– уравнение Бернулли: $y' + x y = (x-1)\, e^x\, y^2$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y''\, y \ln y + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$; б) $y'' - \dfrac{y'}{x+1} = x^2 (x-1),\; y(0) = y'(0) = 1$;

– со специальной правой часть

а) $y'' + 9y' - 10y = (6x + 1) + \sin x$;

б) $y'' - 9y' + 8y = x e^x + \cos(2x)$

в) $y'' + 4y = \sin(2x) + 5$;

г) $y'' + y' = 2\sin x + e^{2x}$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$; б) $4y'' + y = ctg\left(\dfrac{x}{2}\right),\; y(\pi) = 2,\; y'(\pi) = \dfrac{1}{2}$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = x - 9y \\ \dot{y} = 9x + y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x \\ \dot{y} = x + 6y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 22

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $(x\,y^2 + x)\,dx + (\,y - x^2\,y\,)\,dy = 0$;

б) $3x + 3\,x\,y^2 + \sqrt{3 - x^2}\;y' = 0$;

в) $(1 + y^2)\,dx + x\,y\,dy = 0$, $\;y(2) = 1$;

– однородные

а) $y' = 4 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x}$; б) $x\,y' = 6\sqrt{\,2\,x^2 + y^2} + y$;

в) $(\,y^2 - 3x^2\,)\,dy + 2\,x\,y\,dx = 0$, $\;y(1) = 2$;

– линейные

а) $y' + 2\,x\,y = -\,4\,x^5$;

б) $y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$;

в) $\dfrac{d\,s}{d\,t} + s = t\,e^{-t}$, $\;s(0) = 1$;

– уравнение Бернулли: $4\,x\,y' + 3\,y = -e^x\,x^4\,y^5$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $x\,y'' = y'$; б) $2\,y\,y'' - 3\left(\,y'\,\right)^2 = 4\,y^2$, $\;y(0) = 1$, $\;y'(0) = 0$;

– со специальной правой часть

а) $y'' + 4\,y = \cos(2x) + x$;

б) $y'' - 5y' = x^2 + x\,e^{-2x}$;

в) $y'' + 5y' + 4y = \sin x + 5\,x$;

г) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x} + 3$, $\;y(0) = 3$, $\;y'(0) = 9$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2x)}}$; б) $y'' + y' = \dfrac{e^x}{2 + e^x}$, $\;y(0) = \ln 27$, $\;y'(0) = 1 - \ln 9$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 3x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y \\ \dot{y} = 6x - y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант <u>23</u>

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $y\,y' = 1 + 2x$;

б) $\sqrt{9 - x^2}\; y' + x^2\,(y+1) = 0$;

в) $y'\sin x = y\,\ln^2 y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$;

– однородные

а) $x\,y' = xe^{\frac{y}{x}} + y$;

б) $x\,y' = \sqrt{4x^2 + y^2} + y$;

в) $\left(x^2 + 3y^2\right)dx + 2\,x\,y\,dy = 0$, $y(1) = 1$;

– линейные

а) $y' - y\cos x = -\sin(2x)$; б) $y' - \dfrac{y}{x} = 3x^4$;

в) $t\dfrac{ds}{dt} - s = t^2 e^t$, $s(1) = 2$;

– уравнение Бернулли: $y' + \dfrac{y}{x} = x^2\,y^4$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $(y'')^2 = (y')^2 + 1$; б) $(1 + x^2)\,y'' + 2\,x\,y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

– со специальной правой часть

а) $y'' - 7y' + 12y = x\,e^{3x} + 4$;

б) $y'' + 5y' = \sin(5x) + 3\,x^3$;

в) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2$;

г) $y'' + y' = 4\cos x + (3\,x + 2)$, $y(\pi) = y'(\pi) = 0$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + 4y' = ctg(2x)$; б) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 8x - 3y \\ \dot{y} = x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = 5y - 2x \\ \dot{y} = 4x + y \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 24

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy+y\,dx=0$;

б) $(1-e^{x})\,y\,y'=e^{x}$;

в) $2\sqrt{y}\ dx=(x+1)dy,\quad y(1)=0$;

– однородные

а) $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; б) $x\,y'=\dfrac{2y^3+4yx^2}{3y^2+x^2}$;

в) $y'=\dfrac{2x}{y}-\dfrac{y}{2x}$, $y(-1)=0$;

– линейные

а) $x\,y'-y=x^2\cos x$; б) $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{2}{x^2}$;

в) $\dfrac{ds}{dt}-2s=-t^2$, $s(0)=1$;

– уравнение Бернулли: $y'-ytgx=-\dfrac{2}{3}y^4\sin x$;.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$;; б) $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$;

– со специальной правой часть

а) $y''+4y'=2\sin(2x)+x^2$;

б) $y''+2y'-3y=xe^{x}+\cos x$;

в) $y''+4y'+4y=3+\cos x$;

г) $y''-y'=e^{x}+(x-1)$, $y(0)=y'(0)=1$;

– методом вариации постоянных

а) $y''+5y'+6y=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$; б) $y''+y=\cos ec\,x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases}\dot{x}=2y\\ \dot{y}=5x+y\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dot{x}=3x+7y\\ \dot{y}=2x-y\end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения

Вариант 25

I. Решить *дифференциальные уравнения I порядка*:

– с разделяющимися переменными

а) $2x\sqrt{1-y^2}dx - y\,d\,y = 0$;

б) $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2\,y\,dy$;

в) $y + \sqrt{x^2+y^2} - x\,y' = 0,\ y(1) = 0$;

– однородные

а) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$; б) $x\,y' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$;

в) $y' = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y}{2x}$, $y(-1) = 0$;

– линейные

а) $y' - \dfrac{y}{x} = x$;

б) $y'\,ctgx - y = 2\cos^2 x\ ctg\,x$;

в) $\dfrac{ds}{dt} - \dfrac{2s}{1-t^2} - 1 - t = 0$, $s(0) = 0$;

– уравнение Бернулли: $2\,x\,y' - 3y = -(5x^2+3)\,y^3$.

II. Решить *дифференциальные уравнения II порядка*:

– допускающие понижение порядка

а) $y'' = (y')^2$; б) $2\,y'\,y'' + y^2(y')^2 = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$;

– со специальной правой часть

а) $y'' - y' + y = x^3 + 6$;

б) $y'' - 6y' + 9y = 3\,x\,e^{2x} + e^{3x}$;

в) $y''+y = 2e^x + \cos x$;

г) $y''-9\,y = (2-x) + \cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

– методом вариации постоянных

а) $y'' + 2y' + y = 3\,e^{-x}\sqrt{x+1}$; б) $y'' - 9\,y' + 18\,y = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$,

$y(0) = y'(0) = 0$.

III. Решить *системы дифференциальных уравнений*

а) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + y \\ \dot{y} = 3y - x \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x \\ \dot{y} = x + 6y \end{cases}$.

Список использованных источников

1. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. – Москва: ФИЗМАТГИЗ. – 1962. – 247 с.

2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2004. – 352 с.

3. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: Гос. науч.- техн. изд-во Украины. – 1939. – 719 с.

4. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – Москва: Наука. – 1987. – 160 с.

5. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Высшая школа. – 1991. – 303 с.

6. Босс В. Лекции по математике: дифференциальные уравнения. – Москва: Едиториал УРСС. – 2004. – 208 с.

7. Боярчук А.К, Головач Г.П. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах /Справочное пособие по высшей математике. Т.5. – Москва: Едиториал УРСС. – 2001. – 384 с.

8. Гогейзель Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва-Ленинград: Гл. ред. техн.-теор. лит-ры. – 1937. – 128 с.

9. Горт В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва-Ленинград: Гл. ред. техн.-теор. лит-ры. – 1933. – 480 с.

10. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения. – Минск: Вышэйшая школа. – 1968. – 348 с.

11. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. –256 с.

12. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – Москва: Иностранная литература. – 1962. – 351 с.

13. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – Москва: Наука. – 1989. – 464 с.

14. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – Москва: Наука. – 1979. – 288 с.

15. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – Москва: Лаборатория Базовых Знаний.– 2001. – 344 с.

16. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: МГУ. – 1984. – 296 с.

17. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука. – 1985. – 448 с.

18. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные урав-

нения. Качественная теория с приложениями. – Москва: Мир. – 1986. – 243 с.
19. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.1. – Москва: Иностранная литература. – 1953. – 346 с.
20. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.2. – Москва: Иностранная литература. – 1954. – 415 с.
21. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – Москва: Мир. – 1990. – 512 с.
22. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.– Москва: Мир. – 1999. – 685 с.
23. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа. – 1973. – 560 с.
24. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва-Ленинград: Гл. ред. техн.-теор. лит-ры. – 1950. – 436 с.
25. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– Москва: Иностранная литература.– 1958.– 470 с.
26. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2003. – 432 с.
27. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – Москва: Высшая школа. – 1989. – 383 с.
28. Филиппов А.Ф. Сборник задачам по дифференциальным уравнениям. – Москва: Интеграл-Пресс. – 1998. – 208 с.
29. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. – Москва: Едиториал УРСС. – 2002. – 256 с.
30. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – Москва: МАИ. – 2000. – 380 с.
31. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Минск: Вышэйшая школа. – 1987. – 319 с.
33. Романко В.К., Агаханов Н.Х., Власов В.В., Коваленко Л.И. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. – Москва: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ. – 2002. – 256 с.

34. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 648 с.
35. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения в задачах и примерах / Учебно-методическое пособие. – Москва: МГИУ. – 2007. – 158 с.
36. Кузнецова С.Н., Панкратова Т.Ф., Петрас С.В., Янкельзон З.М. Методические указания к решению задач по теме «Дифференциальные уравнения» для студентов вечернего отделения / Учебное пособие. – Санкт-Петербург: ГУ ИТМО. – 2005. – 47 с.
37. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.

Терехов С.В.

Варюхин В.Н.

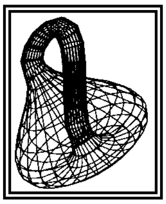
Математическая библиотечка студента-физика

Том 2

(*часть* V)

Решение задач

<u>по теории вероятностей, математической статистике</u>



V. *Теория вероятностей*. *Элементы* ***математической статистики***

Тема: *Теория вероятностей*

49. "***Основные понятия теории вероятностей***"

49.1. *Предмет теории вероятностей*

Теория вероятностей – это математическая дисциплина, которая устанавливает взаимозависимость между случайными величинами в случайных массовых процессах. Одним из основных понятий в теории вероятностей является понятие случайного события.

Случайным событием называется событие, которое в результате проведения эксперимента *может произойти*, или *не произойти*.

Например, при подбрасывании монеты нельзя угадать заранее, что выпадет: "решка" (*аверс*), или "орёл" (*реверс*). Каждое из этих событий является *элементарным* и не может быть выражено через более простые события.

Элементарным событием называется событие, которое в результате проведения эксперимента *может произойти*, или *не произойти*, а *также не может быть представлено посредством более простых событий*.

Сложным случайным событием называется событие, которое *состоит из осуществления двух или более элементарных событий*.

В теории вероятностей случайные *элементарные события* принято обозначать заглавными начальными буквами латинского алфавита $\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, … *Элементарные события* образуют более сложные события, которые выражаются посредством этих событий. В обоих определениях случайных событий присутствует понятие "*эксперимент*" ("опыт").

Эксперимент – это *создание заранее заданного комплекса условий*.

Например, при подбрасывании монеты создают следующие условия: стол, на который падает монета, должен быть ровным, гладким, достаточно большим по площади, чтобы монета не могла скатиться.

Достоверным событием называется такое *событие*, *которое обязательно произойдёт в рамках данного опыта*.

Достоверное событие обозначается $\boxed{\Omega}$.

Невозможным событием называется такое *событие*, *которое ни при каких условиях не может произойти*.

Невозможное событие обозначается Ø ($\boxed{\Theta}$).

○ Совокупность выигрыша, проигрыша и ничьи в шахматной партии образуют *достоверное совокупное событие*, т.е. одно из этих событий обязательно произойдёт при игре в шахматы. При бросании кубика *выпадение грани с 7 очками* является *невозможным событием*. ○

Совместными событиями называются *события*, *появление одного из которых не изменяет возможности появления другого в этом же эксперименте*, все другие события называются ***несовместными***.

○ При бросании кубика выпадение грани с 4 очками (событие A) и выпадение чётной грани (событие B) являются *совместными событиями*, а выпадение грани с 3 очками (событие A) и выпадение чётной грани (событие B) являются *несовместными событиями*. ○

Полной группой случайных событий называется совокупность таких *несовместных событий*, *что в результате проведения эксперимента хотя бы одно из них обязательно произойдёт*.

Противоположными событиями называются такие *несовместные события*, *которые образуют полную группу* (обозначаются $\boxed{\overline{A}}$, $\boxed{\overline{B}}$, $\boxed{\overline{C}}$, …).

○ Если событие A состоит в *попадании* снаряда в цель, то событие $\overline{A}$ состоит в том, что снаряд *не попадёт* в цель. ○

○ Если в словесном описании случайного события присутствуют слова "***хотя бы один***", то такое событие противоположно событию, содержащему в своём словесном описании слова "***ни один***". ○

Равновозможными событиями называются такие случайные события, *которые в условиях эксперимента имеют объективно равные шансы произойти*, или *не произойти*.

○ Однородность материала игральной кости и несмещённость центра тяжести кубика являются теми условиями, при которых объективно возможно выпадение любой грани кубика. ○

49.2. *Способы определения вероятности событий*

49.2.1. *Классическое определение вероятности*

Вероятностью случайного события называется *численная мера степени объективной возможности случайного события*.

Классическое определение вероятности применяется для нахождения вероятности ***конечного числа несовместных*** и ***равновозможных*** *событий,* ***образующих полную группу***.

Пример 1. Пусть в урне находится 6 шаров: 1 белый, 2 красных и 3 синих. Опыт состоит в том, что из урны наудачу извлекают один шар. Определить *полную группу* случайных событий и *наиболее вероятное событие*.
Для данного опыта полная группа событий состоит из 6 равновозможных исходов. Обозначим через A событие, состоящее в том, что из урны извлекают белый шар; B – красный шар; C – синий шар. Очевидно, событие C является более объективно возможным событием, чем события A и B, так как синих шаров в урне больше, чем белых и красных.

Классическое определение вероятности состоит в следующем:

Вероятностью случайного элементарного события называется отношение числа элементарных исходов $m(A)$, ***благоприятствующих появлению этого события***, к ***общему числу*** n всех равновозможных, несовместных, элементарных исходов, образующих полную группу:

$$\boxed{p(A)=\frac{m(A)}{n}}.$$

В ***Примере 1*** число исходов, *благоприятствующих* извлечению белого шара, равно $m(A)=1$, красного шара – $m(B)=2$ и синего шара – $m(C)=3$. Общее число всех *равновозможных*, *несовместных*, *элементарных исходов*, *образующих полную группу*, равно числу шаров в урне, т.е. $n = 6$. Таким образом, вероятности извлечь из урны тот или иной шар равны *отношению числа элементарных исходов*, *благоприятствующих появлению этого события*, *к общему числу всех равновозможных*, *несовместных*, *элементарных исходов*, *образующих полную группу*:

$$\boxed{P(A)=\frac{m(A)}{n}=\frac{1}{6}};\quad \boxed{P(B)=\frac{m(B)}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}\quad\text{и}\quad \boxed{P(C)=\frac{m(C)}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}}.$$

В силу того, что события A, B и C образуют достоверное совокупное событие, то $m(\Omega)=n=6$, следовательно, ***вероятность достоверного события*** равна:

$$\boxed{P(\Omega)=\frac{m(\Omega)}{n}=\frac{6}{6}=1}.$$

Если в рассматриваемом ***Примере 1*** обозначить через Θ событие, состоящее в том, что из урны извлекают чёрный шар, то этому событию благоприятствует нуль исходов ($m(\Theta)=0$), так как в урне нет чёрных шаров. Следовательно, событие Θ является ***невозможным событием***, а ***его вероятность*** равна:

$$\boxed{P(\Theta)=\frac{m(\Theta)}{n}=\frac{0}{6}=0}.$$

Из рассмотренного ***Примера 1*** видно, что *вероятности всех событий есть положительные величины*, *которые принимают значения между вероятностью невозможного* (**0**) *и вероятностью достоверного* (**1**) *событий*, т.е.

$$\boxed{0\le P(X)\le 1}.$$

Вероятность любого случайного события есть *безразмерная и положительная величина*, *принимающая значения из промежутка от* **0** *до* **1**. Чем ближе вероятность события к нулю, тем меньше его возможность появления в данном опыте. Чем ближе вероятность события к единице, тем выше его возможность появления в данном эксперименте.

Пример 2. Определить вероятность выпадения любой грани кубика (*самостоятельно*, ответ: $P(A)=\frac{1}{6}$).

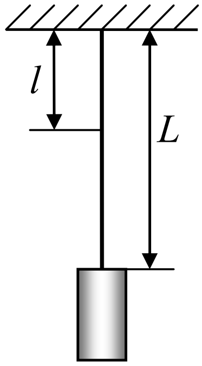
49.2.2. *Геометрический способ определения вероятности*

Геометрическое определение вероятности применяется для вычисления вероятности ***бесконечного*** ***числа несовместных*** и ***равновозможных событий***, ***образующих полную группу***.

Пусть имеется некоторая область G, которая может быть представлена в виде линии, площади или объёма. Внутри области G находится другая область g, внутрь которой должна попасть точка, наудачу брошенная в область G. Пусть событие A состоит в том, что при попадании в область g включается лампочка, а при попадании в область $G-g$ лампочка не загорается. Обозначим размеры областей g и G через $\mathrm{reg}(g)$ и $\mathrm{reg}(G)$, соответственно. Появлению события A благоприятствует размер области g, а размер области G определяет общее число возможных исходов, следовательно, вероятность появления события A равна

$$\boxed{P(A)=\frac{\mathrm{reg}(g)}{\mathrm{reg}(G)}}.$$

Пример 3. Пусть на нити длиной L подвешен груз. Определить вероятность разрыва нити в любой точке, отстоящей от точки подвеса не более чем на расстоянии l (см. рис.) и события противоположного указанному.



Пусть событие A состоит в том, что нить разорвётся в любой точке, отстоящей от точки подвеса не более чем на расстоянии l. Появлению этого события благоприятствуют все точки нити длиной, l т.е.

$$m(A) \propto \operatorname{reg}(g) = l,$$

а длина всей нити равна L, т.е.

$$n \propto \operatorname{reg}(G) = L.$$

Согласно геометрической дефиниции вероятности, вероятность появления события A равна $p(A) = \dfrac{\operatorname{reg}(g)}{\operatorname{reg}(G)} = \dfrac{l}{L}$. Вычислим вероятность противоположного события $\overline{A} = \Omega - A$: появлению события благоприятствуют все точки нити длиной $L-l$, т.е.

$$m(\overline{A}) \propto \operatorname{reg}(g) = L - l.$$

Следовательно, $P(\overline{A}) = \dfrac{\operatorname{reg}(g)}{\operatorname{reg}(G)} = \dfrac{L-l}{L} = 1 - \dfrac{l}{L} = 1 - P(A)$.

○ Из ***Примера 3*** следует важный ***вывод***: ***вероятность противоположного события*** вычисляется по формуле

$$\boxed{P(\overline{A}) = Q(A) = 1 - P(A)}. \ ○$$

Пример 4. Вычислить вероятность выпадения на верхней грани кубика любой цифры, кроме 5.

Обозначим через A – событие, состоящее в том, что на верхней грани кубика выпадает цифра 5. Для этого события $m(A) = 1$, а $n = 6$, следовательно, по классическому определению вероятность события A равна $P(A) = \dfrac{m(A)}{n} = \dfrac{1}{6}$. Противоположным событием к события A является событие $\overline{A}$ состоящее в том, что на верхней грани кубика выпадает любая цифра, кроме 5. Таким образом, вероятность события

$$P(\overline{A}) = Q(A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

49.2.3. *Статистический способ определения вероятности*

Данный способ определения вероятности событий применяется тогда, когда неприменимы два вышеприведенных способа. В основу данного способа положена устойчивость частоты появления изучаемого события при достаточно большом числе проводимых опытов, т.е. $\boxed{P(A) = \nu^*(A)}$. При небольшом числе испытаний частота носит случайный характер, но при $n \to \infty$ она стабилизируется возле некоторого положения $\nu^*(A)$, определяющего связь между комплексом условий и наблюдаемым событием (рис. 1).

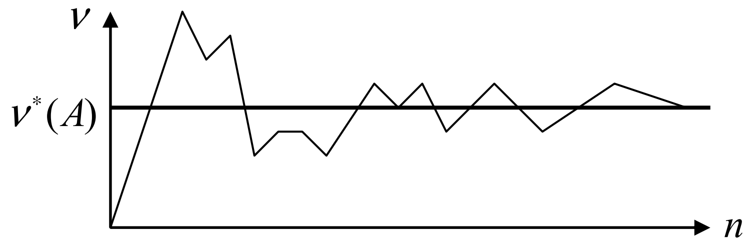


Рис. 1. *Стабилизация частоты появления случайного события при* $n \to \infty$.

49.2.4. *Косвенный способ определения вероятности событий*

Данный способ определения вероятности событий применяется тогда, когда неприменимы три вышеприведенных способа. Он основан на теоремах теории вероятностей, которые рассматриваются ниже.

50. "*Элементы комбинаторики. Арифметика случайных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей*"

50.1. *Элементы комбинаторики*

Решение многих задач теории вероятностей требует знания элементов комбинаторики: *перестановок*, *размещений* и *сочетаний*.

Перестановки – это комбинации из одних и тех же элементов, *отличающиеся только порядком следования элементов*.

Пример 1. Даны три числа 1, 2, 3. Определить количество комбинаций из этих элементов, *отличающиеся только порядком следования элементов*.

Комбинации из данных элементов, *отличающиеся только порядком следования элементов*: 123; 132; 213; 231; 321; 312. Всего таких комбинаций $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Для n элементов число перестановок P_n равно

$$\boxed{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Размещения – это комбинации, составленные из n *различных элементов по* m *элементов*, *которые отличаются либо составом элементов*, *либо их расположением*.

Пример 2. Даны три числа 1, 2, 3. Определить количество размещений из этих элементов по *два*, отличающиеся составом или порядком элементов.

Комбинации из данных элементов по два, отличающиеся составом или порядком элементов: 12; 21; 23; 32; 13; 31. Всего таких комбинаций 6.

Если дано n элементов, то число размещений A_n^m по m элементов, которые отличаются друг от друга, либо составом элементов, либо их расположением:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}.$$

○ Выборки *по m элементов из n различных элементов*, *которые возвращаются обратно и упорядочиваются*, называют ***размещениями с повторениями***. ○

○ Размещения с повторениями представляют собой комбинации, *отличающиеся друг от друга элементами*, *их порядком и количеством повторений*. Их количество вычисляется по формуле: $\boxed{\overline{A}_n^m = n^m}$. ○

Сочетания – это комбинации, составленные *из n различных элементов по m элементов*, *которые отличаются друг от друга*, *хотя бы одним элементом*.

Пример 3. Даны три числа 1, 2, 3. Определить количество размещений из этих элементов по *два*, отличающиеся хотя бы одним элементом.

Комбинации из данных элементов по два, отличающиеся хотя бы одним элементом: 12; 23; 13. Всего таких комбинаций 3.

Если дано n элементов, то число сочетаний C_n^m по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m}}.$$

Пример 4. Пусть в урне находится n прономерованных шаров. Определить количество способов, которыми можно извлечь из урны эти шары один за другим.

Число способов равно числу различных комбинаций из n элементов, отличающихся только порядком следования элементов, т.е. числу перестановок: $N = P_n = n!$.

Пример 5. Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что среди выбранных карт окажется один туз.

Событие A состоит в том, что среди выбранных карт окажется один туз. Это сложное событие состоит из двух событий: выбирается один туз из четырёх, а две другие карты выбираются из оставшихся 32 карт. Следовательно, число случаев, благоприятствующих появлению события A, равно

$$m(A) = C_4^1\, C_{32}^2 \,.$$

Всего *возможных равновероятных исходов*, *образующих полную группу* определяется числом сочетаний из 36 карт по 3 карты, т.е. $n = C_{36}^{3}$. Таким образом, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{C_4^1\, C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{496}{1785} \approx 0{,}28\,.$$

50.2. *Арифметика случайных событий*

Будем считать, что все события, которые могут произойти в рамках данного эксперимента, располагаются внутри квадрата Ω, тогда невозможные события Θ располагаются вне квадрата Ω (рис. 2):

Θ ***Область невозможного события***

Рис. 2. *Множество возможных событий.*

Таким образом, достоверное событие определяется внутренней частью квадрата, а невозможное – областью вне квадрата.

Суммой двух случайных событий A и B называется третье случайное событие C, которое состоит в том, что произойдёт (или не произойдёт) ***или*** *событие* A, ***или*** *событие* B: $C = A + B$ (рис. 3).

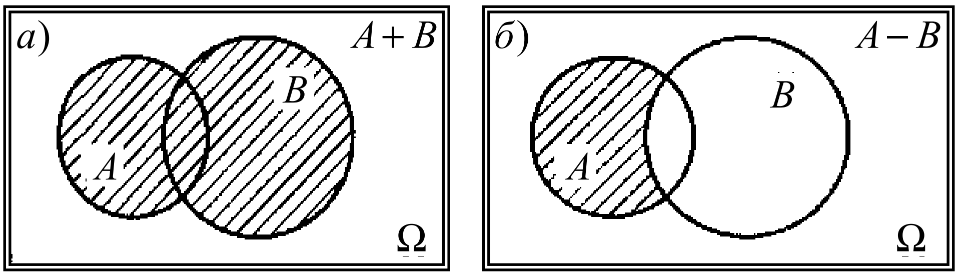
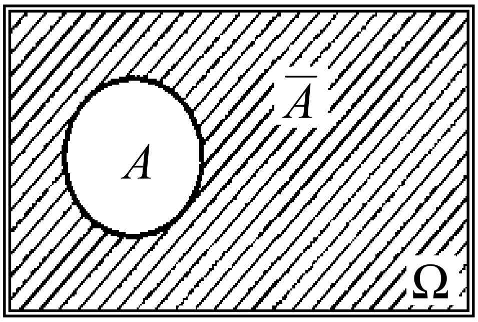


Рис. 3. *Сумма* (*а*) *и разность* (*б*) *случайных событий.*

Суммой n ***случайных событий*** A_i называется случайное событие C, которое реализуется в данном опыте, если произойдёт (или не произойдёт) ***или*** *одно из событий* A_i, ***или*** *любая их совокупность*:

$$C = \sum_{i=1}^{k \le n} A_i \,.$$

○ Если в словесном описании сложного события присутствует разделительный союз "***или***" между элементарными событиями, то *речь идёт о* ***сумме*** *этих элементарных событий.* ○



○ *Суммой события* A *и ему противоположного события* $\overline{A}$ является достоверное событие Ω, т.е. $\boxed{A+\overline{A}=\Omega}$. Следовательно, противоположное событие можно записать в виде

$$\boxed{\overline{A}=\Omega-A}.$$ ○

Произведением двух случайных событий A и B называется третье случайное событие C, которое состоит в том, что произойдёт (или не произойдёт) ***и*** *событие* A, ***и*** *событие* B: $\boxed{C=A\cdot B}$ (рис. 4).

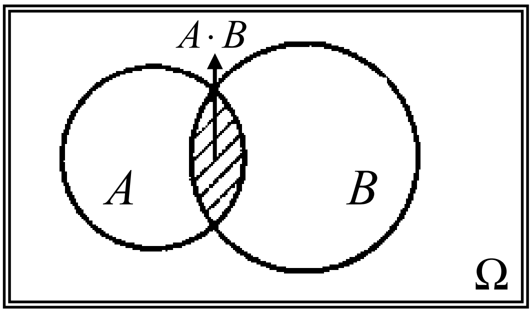


Рис. 4. *Произведение случайных событий.*

Произведением n ***случайных событий*** A_i называется случайное событие C, которое реализуется в данном опыте, если произойдёт совместная реализация событий A_i: $C=\prod\limits_{i=1}^{k\le n} A_i$.

○ Если в словесном описании сложного события присутствует соединительный союз "***и***" между элементарными событиями, то *речь идёт о* ***произведении*** *этих элементарных событий.* ○

Пример 6. Пусть имеются передатчик и приёмник. Приёмник удалён от передатчика на достаточно большое расстояние, при котором он может при определённых условиях не принять один из сигналов, переданных передатчиком. Пусть передатчик послал три сигнала. Определить следующие сложные события:

а) приёмник принял *только первый* сигнал (событие A);
б) приёмник принял *только один* сигнал (событие B);
в) приёмник принял *не менее двух* сигналов (2 или 3 сигнала – событие C);
г) приёмник не принял *ни одного* сигнала (событие D);
д) приёмник принял *хотя бы один* сигнал (событие E).

Обозначим через F_i элементарное событие, состоящее в том, что приёмник принял сигнал i. Сложное событие A состоит в том, что приёмник принял первый сигнал ***и*** не принял второй сигнал, ***и*** не принял третий сигнал. Так как между элементарными событиями стоит *сое-*

динительный союз “***и***”, то *речь идёт об их* ***произведении***, т.е.
$$A = F_1 \cdot \overline{F_2} \cdot \overline{F_3}.$$
Сложное событие B состоит в том, что приёмник принял ***или*** первый сигнал, ***или*** принял второй сигнал, ***или*** принял третий сигнал. Так как между элементарными событиями стоит разделительный союз “***или***”, то *речь идёт о* ***сумме*** *сложных событий*, т.е.
$$B = F_1 \cdot \overline{F_2} \cdot \overline{F_3} + \overline{F_1} \cdot F_2 \cdot \overline{F_3} + \overline{F_1} \cdot \overline{F_2} \cdot F_3.$$
Рассуждая аналогично, получим выражения для остальных событий:
$$C = F_1 \cdot F_2 \cdot \overline{F_3} + F_1 \cdot \overline{F_2} \cdot F_3 + \overline{F_1} \cdot F_2 \cdot F_3 + F_1 \cdot F_2 \cdot F_3;$$
$$D = \overline{F_1} \cdot \overline{F_2} \cdot \overline{F_3}.$$
Сложное событие E содержит в своём словесном описании слова “***хотя бы один***”, следовательно, оно противоположно событию, содержащему в своём словесном описании слова “***ни один***”, т.е. событию D:
$$\boxed{E = \Omega - D = \Omega - \overline{F_1} \cdot \overline{F_2} \cdot \overline{F_3}}.$$

50.3. *Теорема сложения вероятностей несовместных событий*

Теорема 1. Если случайные события A и B ***несовместные***, то вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий, т.е.
$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)}.$$
Док-во: Пусть в данном опыте имеется n равновозможных, элементарных, *несовместных* событий и пусть в m случаях наступает событие A, а в l случаях – событие B. Тогда появлению события $A+B$ благоприятствует $m+l$ исходов. Поэтому
$$P(A+B) = \frac{m+l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{l}{n} = P(A) + P(B).$$
Следствие 1. Если имеется N несовместных событий, то
$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)}.$$
Следствие 2. Если несовместные события A_i ($i = 1...N$) образуют *полную группу*, то
$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) = P(\Omega) = 1}.$$
Док-во: Так как несовместные события A_i ($i = 1...N$) образуют полную группу равновозможных, элементарных, несовместных событий, то их сумма есть достоверное событие Ω, а вероятность достоверного события равна 1.

Следствие 3. Вероятность суммы противоположных событий равна 1.

<u>Док-во:</u> В силу того, что события A и ему противоположное событие $\overline{A}$ образуют *полную группу* несовместных событий, то по ***Следствию 2*** вероятность их суммы равна <u>1</u>.

○ Если *сложное событие состоит из суммы элементарных событий*, то перед применением ***<u>Теоремы 1</u>*** надо определить ***совместные*** или ***несовместные*** элементарные события. ○

Пример 7. Пусть в урне находится 5 белых шаров, 3 – красных и 4 – зелёных. Из урны наудачу вынули шар. Какова вероятность того, что данный шар цветной?

Событие, состоящее в том, что из урны извлечён красный шар, обозначим через A. Событие, состоящее в том, что из урны извлечён зелёный шар, обозначим через B. Тогда извлечение цветного шара есть событие C. Так как события A и B несовместные, т.е. событие C состоит в том, что происходит ***<u>или</u>*** событие A, ***<u>или</u>*** событие B, то событие C определяется их суммой: $C=A+B$. Используя ***<u>теорему о сложении вероятностей несовместных событий</u>***, получим:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}.$$

50.4. *Зависимые и независимые события. Условная и безусловная вероятности*

Случайные события A и B называются ***независимыми***, если *<u>появление одного из них не влияет на возможность появления другого события</u>*, в противном случае события называются ***зависимыми***.

○ В этом определении речь идёт не о причинно-следственной связи между событиями, а о вероятностной (*появление одного из них не влияет на вероятность появления другого события*), которая является более общей зависимостью между событиями. ○

Пример 8. В хранилище находится 10 исправных и 5 неисправных приборов, причём неизвестно, какие из них исправные, а какие – нет. Событие A – из хранилища взят исправный прибор, а B – взят неисправный прибор. Пусть вначале взят неисправный прибор. Определить вероятности указанных событий с возвращением неисправного прибора на склад и без возвращения неисправного прибора в хранилище.

Если неисправный прибор возвращается в хранилище, то события A и B *независимы* и их вероятности равны $P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ и $P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. Во втором случае, когда неисправный прибор не возвращается на склад, общее количество приборов в хранилище изменилось и стало равным 14, причём неисправных приборов будет храниться 4. Следовательно, произошедшее событие B изменило вероятности случайных событий A и B: $P(A)=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$ и $P(B)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$, т.е. при такой организации эксперимента события A и B являются *зависимыми*.

Вероятность случайного события называется ***безусловной***, если при её вычислении на комплекс условий, в которых рассматривается это случайное событие, не накладывается никаких дополнительных ограничений.

Безусловная вероятность обозначается $\boxed{P(A)}$, $\boxed{P(B)}$, …

Вероятность случайного события называется ***условной***, если она вычисляется при условии, что произошло другое случайное событие.

Условная вероятность обозначается $\boxed{P(A/C)}$, $\boxed{P(B/H)}$, …

50.5. *Теорема умножения вероятностей*

<u>Теорема 2</u>. Вероятность *совместного* появления двух случайных событий A и B равна *произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого события*, вычисленную при условии, что первое событие имело место:

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)}.$$

<u>Док-во:</u> Пусть событие A состоит в том, что наудачу брошенная точка в квадрат G попадает в область A, которая имеет площадь S_A. Событие B состоит в том, что наудачу брошенная точка в квадрат G точка попадает в область B с площадью S_B. Пусть весь квадрат имеет площадь S, а область *совместного* наступления событий A **<u>и</u>** B ($A\cdot B$) имеет площадь S_{AB} (рис. 5).

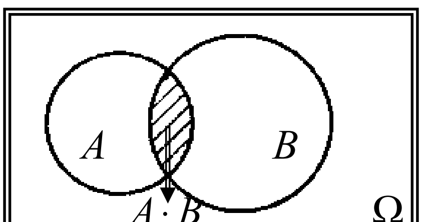


Рис. 5. *Совместное наступление зависимых и независимых случайных событий.*

Тогда вероятность события A равна $P(A)=\frac{S_A}{S}$, а события B – $P(B)=\frac{S_B}{S}$.

Вероятность совместного наступления событий A и B ($A\cdot B$) равна $P(A\cdot B)=\frac{S_{AB}}{S}$. Условные вероятности того, что произойдут указанные события, определяются по формулам:

$$P(A/B)=\frac{S_{AB}}{S_B} \text{ и } P(B/A)=\frac{S_{AB}}{S_A}.$$

Таким образом, можно записать, что вероятность совместного наступления событий A и B ($A\cdot B$) равна:

$$P(A\cdot B)=\frac{S_{AB}}{S}=\frac{S_A}{S}\cdot\frac{S_{AB}}{S_A}=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{S_B}{S}\cdot\frac{S_{AB}}{S_B}=P(B)\cdot P(A/B).$$

○ Если события A и B *независимые*, то $P(A)=P(A/B)$ и $P(B)=P(B/A)$, т.е. *безусловная* и *условная вероятности равны между собой*. ○

В связи с вышеприведенным замечанием ***теорема об умножении вероятностей независимых случайных событий*** имеет вид:

Теорема 3. Вероятность совместного наступления ***независимых*** событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)}.$$

○ *Независимость случайных событий всегда взаимная*. Если

$$P(A)=P(A/B)=P(A/\overline{B}),$$

то по ***Теореме 2*** $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A)$, откуда следует, что $P(B)=P(B/A)$. ○

Следствие. Методом математической индукции ***Теорема 2*** легко обобщается на произведение N *зависимых* событий:

$$\boxed{P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_N)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_N/A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{N-1})},$$

а ***Теорема 3*** – для *независимых* событий: $\boxed{P\left(\prod_{i=1}^{N}A_i\right)=\prod_{i=1}^{N}P(A_i)}$.

○ Если *сложное событие представляется в виде произведения элементарных событий*, то при вычислении вероятности такого события необходимо вначале определить, ***зависимые*** или ***независимые*** элементарные события. ○

51. "*Формула полной вероятности. Формула вероятностей гипотез. Формула Бернулли и её частные случаи*"

51.1. *Случайные события, независимые в совокупности*

Следует различать *попарно независимые случайные события* и *случайные события независимые в совокупности*.

События называются ***попарно независимыми событиями***, если *любые два из них независимы*.

События A_i $(i=1..N)$ называются ***независимыми в совокупности***, если *они попарно независимы и каждое из них независимо от произведения любого количества остальных событий*.

○ Из определений видно, что из попарной независимости ещё не следует, что эти события независимы в совокупности. Это означает, что *условие независимости в совокупности является более сильным*, *чем условие попарной независимости* случайных событий. ○

Теорема 1. Вероятность наступления <u>*хотя бы одного*</u> из событий A_i $(i=1..N)$ независимых в совокупности выражается формулой:

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{N}\left(1 - P\left(A_i\right)\right)}.$$

Док-во: Обозначим через A событие, состоящее в том, что наступит хотя бы одно из событий A_i **(**$i=1..N$**)**. Очевидно, что противоположные события $\overline{A_i}$ к событиям A_i также будут независимы в совокупности. При этом событие $\overline{A}$ состоит в том, что в результате эксперимента не наступает ни одно из случайных событий A_i **(**$i=1..N$**)**, следовательно, $\overline{A} = \prod_{i=1}^{N} \overline{A_i}$. Так как события $\overline{A_i}$ *независимы в совокупности*, то

$$P\left(\overline{A}\right) = P\left(\prod_{i=1}^{N} \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{N} P\left(\overline{A_i}\right).$$

В силу того, что

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) \text{ и } P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - P\left(A_i\right),$$

то

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{N} P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{N}\left(1 - P\left(A_i\right)\right).$$

Пример 1. Пусть прибор содержит N последовательно соединённых блоков. Определить вероятность того, что цепь будет разорвана, если вероятность работы каждого блока равна p и она не зависит от работы других блоков.

Пусть A – событие, которое состоит в том, что данная цепь разорвана. Это событие происходит, если выходит из строя *хотя бы один* из блоков, *так как блоки включены последовательно*. Противоположное событие состоит в том, что все блоки работают, т.е. $\overline{A} = \prod_{i=1}^{N} A_i$, где A_i – событие, заключающееся в работе блока i. По условию задачи $P\left(A_i\right) = p$, следовательно, $P\left(\overline{A}\right) = p^N$. Таким образом, вероятность того, что цепь будет разорвана, равна $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - p^N$.

51.2. *Теорема сложения вероятностей для совместных событий*

Если случайные события совместно появляются в условиях эксперимента, то имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u> Вероятность суммы двух ***совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)}.$$

<u>Док-во:</u> Пусть в результате эксперимента возможно n равновозможных, несовместных, элементарных исходов. При этом в n_1 случаях наступает событие A, в n_2 случаях – событие B, а в m случаях наступает ***<u>и</u>*** событие A, ***<u>и</u>*** событие B, т.е. событие $A\cdot B$. Таким образом, число исходов, в которых наступает ***<u>или</u>*** событие *A*, ***<u>или</u>*** событие *B* (т.е. событие $A+B$), равно n_1+n_2-m. Согласно классическому определению вероятности, вероятность суммы случайных, *совместных* событий A и B равна

$$P(A+B)=\frac{n_1+n_2-m}{n}=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}-\frac{m}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

○ Методом математической индукции вышеприведенная теорема может быть обобщена на любое число совместных событий, например, в случае 3 совместных событий A, B и C теорема принимает вид:

$$\boxed{P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C)}.$$ ○

Пример 2. Найти вероятность того, что наудачу взятое число из чисел от 10 до 20 делится или на 2, или на 3.

Всего равновозможных, элементарных исходов 11 (все числа от 10 включительно до 20 включительно). В 6 случаях (10, 12, 14, 16, 18, 20) число кратно 2; в 3 случаях (12, 15, 18) число кратно 3; в 2 случаях (12, 18) число кратно ***<u>и</u>*** 2, ***<u>и</u>*** 3. Пусть событие A состоит в том, что наудачу взятое число кратно 2, а событие B состоит в том, что наудачу взятое число кратно 3. Сложное событие C состоит в том, что наудачу взятое число делится ***<u>или</u>*** на 2, ***<u>или</u>*** на 3, т.е. $C=A+B$. Следовательно, вероятность этого события равна:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=\frac{6}{11}+\frac{3}{11}-\frac{2}{11}=\frac{7}{11}.$$

○ Все вышерассмотренные теоремы объединяются в теории вероятностей общим названием "***<u>основные теоремы теории вероятностей</u>***". ○

51.3. *Формула полной вероятности*

Формула полной вероятности является следствием основных теорем теории вероятностей: теорем сложения и умножения вероятностей событий. Пусть некоторое случайное событие A наступает с одним и только с одним из несовместных событий H_i $(i=1..N)$.

События $\boxed{H_i}$ ($i=1...N$) называются ***гипотезами***, *так как заранее неизвестно*, *какое из этих событий произойдёт*.

Теорема 3. Формула полной вероятности определяет вероятность случайного события A, как сумму произведений вероятности каждой гипотезы H_i на условную вероятность события A при условии реализации гипотезы H_i, т.е. $\boxed{P(A)=\sum\limits_{i=1}^{N}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}$.

Док-во: Событие A наступает с одним и только с одним из несовместных событий H_i ($i=1...N$), т.е. $A=\sum\limits_{i=1}^{N}A\cdot H_i$. В силу того, что события $A\cdot H_i$ несовместные, то по ***теореме сложения вероятностей для несовместных событий*** имеем: $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{N}P(A\cdot H_i)$. Используя ***теорему об умножении вероятностей зависимых событий***, получаем искомую формулу: $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{N}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$.

Пример 3. Пусть на сборку поступают детали с двух автоматических станков. Первый станок даёт в среднем 0,3 % брака, а второй – 0,15 % брака. Производительность второго станка в два раза выше, чем первого станка. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется бракованной.

Пусть событие A состоит в том, что наудачу взятая деталь окажется бракованной. Тогда гипотеза H_1 заключается в том, что эта деталь изготовлена на первом станке, а гипотеза H_2 заключается в том, что эта деталь изготовлена на втором станке. Очевидно, что эти гипотезы являются несовместными событиями. В виду различной производительности станков обозначим через x количество деталей, изготовленных на первом станке, тогда на втором станке изготавливается $2x$ деталей. Общее число деталей, которые были изготовлены на обоих станках равна $3x$. Следовательно, вероятности гипотез равны: $P(H_1)=\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$ – для первой гипотезы и $P(H_2)=\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$ – для второй гипотезы. Вероятности события A при условии реализации первой и второй гипотез равны: $P(A/H_1)=\dfrac{0{,}3\%}{100\%}=0{,}003$ и $P(A/H_2)=\dfrac{0{,}15\%}{100\%}=0{,}0015$, соответственно. Согласно ***формуле полной вероятности***, вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется бракованной, равна:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}003+\frac{2}{3}\cdot 0{,}0015=0{,}002\ .$$

51.4. *Формула вероятностей гипотез* (*формула Байеса*)

Ниже будет получена формула, которая является следствием ***основных теорем теории вероятностей*** и ***формулы полной вероятности***. Эта формула применяется для решения задач следующего типа. Пусть проводится эксперимент, в результате которого может появиться, или не появиться событие A, которое наступает с одним и только с одним из несовместных событий H_i ($i=1...N$). Предположим, что события H_i ($i=1...N$) образуют полную группу и вероятности их появления $P(H_i)$ известны до проведения опыта. В результате эксперимента событие A произошло. Используя этот факт, необходимо определить, какая из гипотез была ближе к истине, т.е. определить вероятность каждой гипотезы при условии реализации события A. Ответ на поставленный вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 4. Вероятность гипотезы H_i ($i=1..N$) при условии реализации события A равна отношению произведения вероятности гипотезы H_i на условную вероятность события A к полной вероятности события A: $\boxed{P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{N}P(H_k)\cdot P(A/H_k)}}$.

Док-во: Событие A наступает с одним и только с одним из несовместных событий H_i ($i=1...N$), т.е. в каждом эксперименте происходит событие $A\cdot H_i$. По теореме умножения вероятностей для зависимых событий: $P(A\cdot H_i)=P(A)\cdot P(H_i/A)=P(H_i)\cdot P(A/H_i)$. Следовательно, $P(H_i/A)=$ $=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}$. Воспользовавшись формулой полной вероятности, получим ***формулу Байеса***: $P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{N}P(H_k)\cdot P(A/H_k)}$.

Пример 4. Однотипные пластмассовые детали изготавливаются на 3 прессах. Первый пресс выпускает 50 % всех деталей, второй – 40 %, третий – 10 % . При этом вероятность брака на первом прессе 0,025, на втором – 0,02 и на третьем – 0,015. Все детали поступают на сборку. Взятая наудачу деталь оказалась нестандартной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом прессе.

Событие A состоит в том, что наудачу взятая деталь оказалась нестандартной. Гипотеза H_1 заключается в том, что любая деталь изготовлена на первом прессе, гипотеза H_2 – на втором прессе, а гипотеза H_3 – на третьем прессе. По условию задачи

$$P(H_1)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\ \text{– для } \textit{первой} \text{ гипотезы,}$$

$$P(H_2)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}\ \text{– для } \textit{второй} \text{ гипотезы,}$$

$$P(H_3)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}\ \text{– для } \textit{третьей} \text{ гипотезы.}$$

Вероятности события A при условии реализации первой, второй и третьей гипотез, соответственно, равны:

$$P(A/H_1)=0{,}025\ ,\ P(A/H_2)=0{,}02 \text{ и } P(A/H_3)=0{,}015\ .$$

Согласно ***<u>формуле полной вероятности</u>***, вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется нестандартной, равна:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}025+\frac{2}{5}\cdot 0{,}02+\frac{1}{10}\cdot 0{,}015=0{,}022\,.$$

Используя ***<u>формулу Байеса</u>***, получим

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}0125}{0{,}022}\approx 0{,}568\,.$$

51.5. *Независимые испытания и формула Бернулли*

Пусть испытания повторяются n раз, причём событие A появляется в каждом опыте с одной и той же вероятностью p или не появляется с одной и той же вероятностью $q=1-p$.

Испытания называются ***независимыми***, если *вероятность события A не зависит от того, какие события появились в предыдущих опытах, или появятся в последующих экспериментах*.

Пример 5. Независимы ли следующие испытания: а) многократное бросание кубика; б) извлечение карты из колоды без её возвращения в колоду (выяснить *самостоятельно*).

51.5.1. *Формула Бернулли*

<u>Теорема 5</u>. Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с постоянной вероятностью $\boxed{p}$, или не появляется с постоянной вероятностью $\boxed{q=1-p}$. Тогда вероятность появления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний равна:

$$\boxed{P_n(m)=C_n^m\,p^m\,q^{n-m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,p^m\,q^{n-m}}.$$

<u>Док-во:</u> Пусть B_m событие, состоящее в том, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно m раз. Пусть A_i событие, описывающее появление события A в опыте i, а ему противоположное событие обозначим через $\overline{A_i}$. Так как вероятность появления события A в опыте i равна $P(A_i)=p$, то вероятность появления противоположного события $P(\overline{A_i})=1-p=q$. Для наступления события B_m безразлично, в каких опытах произойдёт событие A, а в каких – событие $\overline{A}$; важно, чтобы число появлений события A в данной серии равнялось числу m. В качестве одного из вариантов чередования событий A и $\overline{A}$, благоприятствующих появлению события B_m, рассмотрим такое событие B_{m1}, для которого событие A появится в m первых опытах и не появится в $(n-m)$ последующих экспериментах, т.е.

$$B_{m1}=A_1\,A_2\ldots A_m\,\overline{A_{m+1}}\,\overline{A_{m+2}}\ldots\overline{A_n}\,.$$

Воспользуемся ***<u>теоремой умножения вероятностей для независимых событий</u>***, получим:

$$P(B_{m1})=\prod_{i=1}^{m}P(A_i)\prod_{i=m+1}^{n}P(\overline{A_i})=p^m\,q^{n-m}.$$

Аналогичные к B_{m1} события отличаются от него только чередованием событий A и $\overline{A}$. Все эти события равновероятны и их число равно количеству сочетаний из n элементов по m элементов, т.е.

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Таким образом, интересующее нас событие можно записать в виде

$$B_m=\sum_{k=1}^{C_n^m}B_{mk}\,,$$

причём события B_{mk} несовместные. По ***<u>теореме сложения вероятнос-</u>***

тей несовместных событий вероятность события равна

$$P(B_m) = P_n(m) = \sum_{k=1}^{C_n^m} P(B_{mk}).$$

В правой части равенства суммируется C_n^m одинаковых слагаемых, следовательно, $P_n(m) = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}$.

Формула

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m\, p^m\, q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m\, q^{n-m}}$$

называется ***биномиальной*** или ***формулой Бернулли***.

Пример 6. Монета подбрасывается 6 раз. Определить вероятность того, что герб выпадет а) 5 раз; б) от 2 до 4 раз.

Вероятность выпадения герба не изменяется от опыта к опыту и равна $p = \frac{1}{2}$, а, следовательно, вероятность выпадения решки равна

$$1 - p = q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Для определения вероятности выпадения герба 5 раз в серии из 6 испытаний воспользуемся ***формулой Бернулли***:

$$P_6(5) = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} = \frac{6!}{5!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{32}.$$

Событие, состоящее в том, что герб выпадет от 2 до 4 раз, соответствует события, которое состоит в том, что герб выпадет ***или*** 2 раза, ***или*** 3 раза, ***или*** 4 раза. Следовательно, вероятность

$$P_6(2;\,4) = P_6(2+3+4) = P_6(2) + P_6(3) + P_6(4).$$

Вычислим соответствующие вероятности:

$$P_6(2) = \frac{6!}{2!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64};\; P_6(3) = \frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64};\; P_6(4) = \frac{6!}{4!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}.$$

Таким образом, искомая вероятность равна $P_6(2;\,4) = \frac{50}{64} = \frac{25}{32}$.

При ***больших значениях чисел*** $\boxed{m}$ *и* $\boxed{n}$ *применение формулы Бернулли затруднительно, так как вычисление коэффициентов* C_n^m *становится достаточно сложным*. Поэтому при фиксированном значении m и в случае, когда вероятность появления события $\boxed{p < 0{,}1}$, применяется ***формула Пуассона***, а при $\boxed{p > 0{,}1}$ – ***дифференциальная формула Муавра-Лапласа***. Если $\boxed{m \in [m_1;\, m_2]}$, то применяют ***интегральную формулу Муавра-Лапласа***.

51.5.2. *Формула Пуассона*

Если при проведении серии испытаний по ***схеме Бернулли*** вероятность появления события A мала ($p<0{,}1$), то при больших значениях чисел m и n применяют приближённую ***формулу Пуассона***:

$$\boxed{P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}},\ \text{где}\ \boxed{\lambda=np}.$$

51.5.3. *Формулы Муавра-Лапласа*

Если при проведении серии испытаний по ***схеме Бернулли*** вероятность появления события A составляет $p>0{,}1$, то при больших значениях чисел m и n применяют ***дифференциальную формулу Муавра-Лапласа***: $\boxed{P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)}$, где ***дифференциальная функция Муавра-Лапласа*** $\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$ (см. ***Приложение Б***) и $\boxed{x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}}$.

В общем случае ***дифференциальная формула Муавра-Лапласа*** применяется при выполнении неравенств $\begin{cases} npq>9 \\ \frac{1}{n+1}<p<\frac{n}{n+1} \end{cases}$.

Если при проведении серии испытаний по ***схеме Бернулли*** числа m и n принимают большие значения, причём число m принимает значения от m_1 до m_2, то применяют ***интегральную формулу Муавра-Лапласа***:

$$\boxed{P_n(m_1;\, m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)},$$

где $\boxed{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz}$ – ***интегральная функция Муавра-Лапласа*** (см. ***Приложение В***), аргумент которой $\boxed{x_i=\frac{m_i-np}{\sqrt{npq}}}$.

Дифференциальная и *интегральная функции Муавра-Лапласа* приведены в виде таблиц в конце любой книги по теории вероятностей (см., например, *Гнеденко В.В. Курс теории вероятностей*. – М. – 1969 или *Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика*. – М. – 1977).

52. "*Случайные величины и их законы распределения*"

52.1. *Понятие случайной величины. Функция распределения*

Случайной величиной называется такая переменная величина, которая *в результате проведения опыта может принять то или иное значение*, *неизвестное до проведения эксперимента*.

Случайные величины принято обозначать *заглавными*, *последними буквами латинского алфавита* $\boxed{X}$, $\boxed{Y}$, $\boxed{Z}$, …, а значения, которые они могут принять, обозначают аналогичными, но *прописными* буквами $\boxed{x}$, $\boxed{y}$, $\boxed{z}$, …

Пример 1. Являются ли случайными величинами такие переменные величины, как: а) число вызовов, поступивших от абонентов на телефонную станцию в течение заданного промежутка времени; б) число электронов, вылетевших из нагретого катода за определённый промежуток времени; в) длина некоторой детали при массовом производстве (*самостоятельно*).

Все случайные величины делятся на 3 группы: ***дискретные***, ***смешанные*** и ***непрерывные***. В ***Примере 1*** случаи а) и б) указывают на случайные *дискретные* величины, а случай в) – на случайную *непрерывную* величину.

Законом распределения случайной величины произвольного типа называется любое соотношение, с помощью которого *устанавливается соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями некоторых событий*, связанных определённым образом с этими возможными значениями.

Закон распределения случайной величины может быть представлен аналитической формулой $F(x)$; графиком, связывающим значения вероятности со значениями случайной величины; таблицей, которая устанавливает соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями.

○ В определение закона распределения случайной величины входят слова "*любое соотношение*" – это означает, что таких соотношений довольно много. К числу универсальных форм закона распределения случайной величины относится его задание в виде функции распределения $F(x)$. ○

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется *вероятность события* $X < x$, *которое состоит в том*, что *случай-*

ная величина X *обязательно примет значение заведомо меньшее, чем заданное значение* x, т.е.

$$\boxed{F(x) = P(X < x)}.$$

Пример 2. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, которая представляет собой значение определённой грани кубика. Рассмотрим события, определяющие *дискретную* случайную величину X, и вероятности этих событий:

1) $X < 1$: $P(X < 1) = P(\Theta) = 0$ – данное событие является ***невозможным***, так как на гранях кубика нет числа, которое было бы меньше единицы, а вероятность невозможного события равна нулю (см. ***49***); отметим, что для кубика любое событие $X < B$ при $B \le 1$ является невозможным событием, поэтому вероятность такого события равна нулю;

2) $X < 2$:

$$P(X < 2) = P(X = 1) = \frac{1}{6};$$

3) $X < 3$:

$$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

4) $X < 4$:

$$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

5) $X < 5$:

$$P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

6) $X < 6$:

$$P(X < 6) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{5}{6};$$

7) $X < 7$:

$P(X < 7) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$ – данное событие является *достоверным*, так как в этом случае обязательно выпадет одно из чисел от **1** до **6**, а вероятность достоверного события равна 1 (см. ***49***);

8) для любого другого числа A (при $A \ge 7$) событие $X < A$ будет *достоверным* событием, следовательно, вероятность такого события будет равна единице.

Итак, *функция распределения* $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} X<1, & P(X<1)=0 \\ X<2, & P(X<2)=\dfrac{1}{6} \\ X<3, & P(X<3)=\dfrac{1}{3} \\ X<4, & P(X<4)=\dfrac{1}{2} \\ X<5, & P(X<5)=\dfrac{2}{3} \\ X<6, & P(X<6)=\dfrac{5}{6} \\ X\ge 7, & P(X\ge 7)=1 \end{cases}$$

Построим график функции распределения (рис. 6):

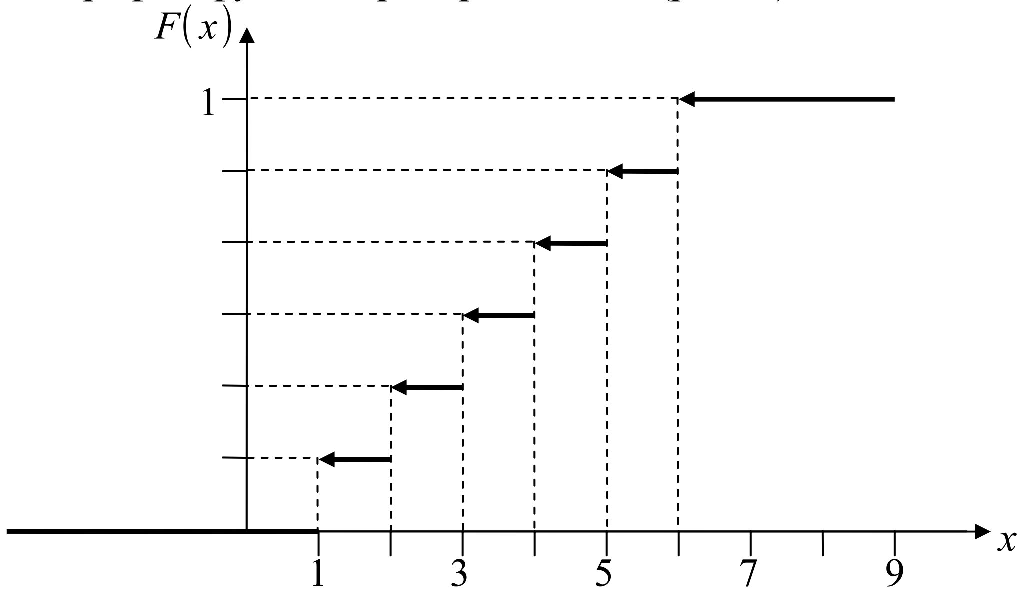


Рис. 6. *График функции распределения для дискретной случайной величины* X .

Случайная *дискретная* величина характеризуется функцией распределения, график которой имеет “*ступенчатый*” вид. Случайная *непрерывная* величина характеризуется функцией распределения, график которой имеет “*непрерывный*” вид.

52.2. *Свойства функции распределения*

Пример 2 иллюстрирует основные ***свойства функции распределения*** случайной величины произвольной природы:

1. $\boxed{0 \le F(x) \le 1}$ – это свойство вытекает из определения *функции распределения* $F(x)$.

2. $\boxed{F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\Theta) = 0}$, так как событие $X < -\infty$ является *невозможным* событием.

3. $\boxed{F(+\infty) = P(X < \infty) = P(\Omega) = 1}$, так как событие $X < \infty$ является *достоверным* событием.

4. Функция $F(x)$ является *неубывающей* функцией своего аргумента.

Док-во: Действительно, если $x_1 < x_2$, то событие $X < x_2$ включает в себя как событие $X < x_1$, так и событие $x_1 \le X \le x_2$ (рис. 7).

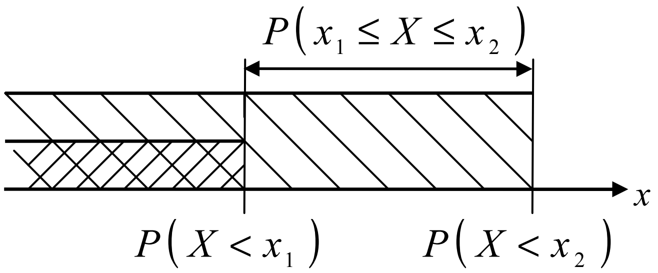


Рис. 7. *Неубывание функции распределения* $F(x)$.

Поэтому по теореме сложения вероятностей событий получаем:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X \le x_2)$$

или

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X \le x_2).$$

В силу *положительности* всех слагаемых находим, что

$$\boxed{F(x_2) \ge F(x_1)},$$

причём знак равенства имеет место только в том случае, когда

$$P(x_1 \le X \le x_2) = 0.$$

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет конкретное значение x_1 равно нулю.

Док-во: Из предыдущего доказательства следует, что

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Переходя к пределу при $x_2 \to x_1$, получаем при наличии в точке x_1 конечного скачка Δ: $\lim\limits_{x_2 \to x_1} P(x_1 \le X \le x_2) = \lim\limits_{x_2 \to x_1} (F(x_2) - F(x_1)) = \Delta$. Если функция $F(x)$ *непрерывна в точке* x_1 (скачок $\Delta = 0$), то $P(X = x_1) = 0$.

6. Вероятность того, что случайная величина X попадает в интервал $(a;b)$, определяется формулой $\boxed{P(a < X < b) = F(b) - F(a)}$.

○ В практических приложениях используется также ***функция надёжности***, которая определяется формулой $\boxed{Q(x) = 1 - F(x)}$. ○

52.3. *Дифференциальная функция распределения и её свойства*

Для *непрерывных* случайных величин помимо функции распределения используется *дифференциальная функция распределения*.

Дифференциальной функцией распределения (или ***плотностью вероятности***) <u>*непрерывной*</u> случайной величины X называется первая производная от функции распределения, т.е. $\boxed{f(x) = F'(x)}$.

○ Из определения плотности вероятности следует, что функция распределения $F(x)$ является *первообразной* для дифференциальной функции распределения $f(x)$. ○

Рассмотрим <u>***свойства плотности вероятности***</u>:

<u>**1**</u>. Вероятность того, что случайная величина X попадает в интервал $(a;b)$, определяется формулой $\boxed{P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$.

<u>**2**</u>. $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(x)}$.

<u>**3**</u>. $f(x) \ge 0$, так как функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией своего аргумента.

<u>**4**</u>. $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$, т.е. <u>*площадь под любой кривой дифференциальной функции распределения равна единице*</u>.

Пример 3. Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид $f(x) = \dfrac{A}{1+x^2}$. Найти коэффициент A и вероятность того, что случайная величина X попадает в интервал $(-1;1)$.

Для нахождения параметра A воспользуемся свойством <u>**4**</u> для *плотности вероятности*:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = A\lim_{B\to\infty}\int\limits_{-B}^{B} \frac{dx}{1+x^2} = A\lim_{B\to\infty}\left(arctg\,x\,\Big|_{-B}^{B}\right) = A\pi.$$

Отсюда находим, что $A = \dfrac{1}{\pi}$. Воспользовавшись свойством <u>**2**</u>, найдём *интегральную функцию распределения*:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{-B}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{B\to\infty}\left(arctgt\,\Big|_{-B}^{x}\right) = \frac{1}{\pi}arctgx + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, вероятность того, что случайная величина X попадает в интервал $(-1;1)$, по свойству <u>**6**</u> для *интегральной функции распределения*, равна:

$$P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{\pi}arctg\,1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}arctg(-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.$$

52.4. *Законы распределения случайных величин*

Для задания *закона распределения* непрерывной случайной величины определяют плотность вероятности:

1. *Нормальный закон распределения* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, где σ и m – параметры распределения.

2. *Закон Рэлея* $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\end{cases}$, где σ – параметр распределения.

3. *Закон Максвелла* $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x^2}{\sigma^3}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0\end{cases}$, где σ – параметр распределения.

4. *Закон Коши* $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-m)^2}$, где σ и m – параметры распределения.

5. *Экспоненциальный закон распределения* $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sigma e^{-\sigma x}, & x>0\end{cases}$, где σ – параметр распределения.

6. *Распределение* "*хи-квадрат* (χ^2)" $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\end{cases}$, где k – параметр распределения, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

7. *Закон Стьюдента* $f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\;\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$, где k – параметр распределения.

8. *Закон равномерной плотности* $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b \\ 0, & x>b \end{cases}.$

В заключение этого пункта приведём некоторые законы распределения для <u>*дискретной*</u> случайной величины:

1. *Гипергеометрическое распределение* возникает тогда, когда из некоторого множества, содержащего N элементов, из которых m благоприятствуют появлению дискретной случайной величины, извлекают наудачу n элементов *без возвращения их в множество*. В этом случае вероятность того, что *дискретная* величина появится x раз, определяется по формуле $\boxed{P(x,m,n,N)=\dfrac{C_m^x\ C_{N-m}^{n-x}}{C_N^n}}$ (см., например, ***Пример 5, 50***).

2. *Закон Бернулли* $P_n(m)=C_n^m\ p^m\ q^{n-m}$.

3. *Закон Пуассона* $P_n(m)\approx\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, где $\lambda=n\cdot p$.

4. *Дифференциальный*

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\ \left(\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

и ***интегральный***

$$P_n(m_1;m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\ \left(\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz,\ x_i=\frac{m_i-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

законы распределения Муавра-Лапласа.

53. “***Числовые характеристики случайной величины***”

Полную характеристику случайной величины даёт её *закон распределения* (или *функция распределения*). Однако на практике зачастую требуется знать лишь некоторые её параметры, которые определяют характер поведения изучаемой случайной величины. Такими числовыми характеристиками являются, например, *математическое ожидание* (параметр расположения центра тяжести распределения или наиболее вероятное значение случайной величины), *дисперсия* и *среднеквадратическое отклонение* (*параметры рассеивания* случайной величины произвольной природы относительно математического ожидания).

53.1. *Математическое ожидание или среднее значение случайной величины*

Термин “*математическое ожидание*” применяется в теории вероятностей, а термин “*среднее значение случайной величины*” – в практических приложениях математической статистики.

Математическим ожиданием случайной величины называется центр тяжести распределения, который определяется по формуле:

$\boxed{M[X] = \sum_{i=1}^{N(\infty)} x_i p_i}$ – для <u>*дискретной*</u> случайной величины;

$\boxed{M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}$ – для <u>*непрерывной*</u> случайной величины.

Пример 1. Пусть в беспроигрышной лотереи участвует 100 билетов. Из них 40 дают выигрыш по 1 руб., 30 – по 2 руб., 20 – по 5 руб. и 10 – по 10 руб. Стоимость одного билета 5 руб. Определить математическое ожидание случайной дискретной величины X, которая определяет выигрыш на 1 билет.

Составим таблицу распределения дискретной случайной величины X, которая определяет выигрыш на один билет.

x_i	1	2	5	10
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

По определению математическое ожидание будет равно:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}2 + 10\cdot 0{,}1 = 3 \text{ (руб.)}$$

Лотерея выпущена на сумму $5\cdot 100 = 500$ руб., выплаты на выигрыш составляют $3\cdot 100 = 300$ руб., следовательно, чистая прибыль равна $500 - 300 = 200$ руб.

53.2. *Свойства математического ожидания*

Рассмотрим <u>***свойства математического ожидания***</u>:

<u>**1**</u>. Математическое ожидание постоянной величины равно самой константе, т.е. $\boxed{M[C] = C}$.

<u>***Док-во:***</u> Для <u>*непрерывной*</u> случайной величины

$$M[C] = \int_{-\infty}^{\infty} C f(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = C.$$

<u>**2**</u>. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $\boxed{M[CX] = C\,M[X]}$.

Док-во: Для случайной *дискретной* величины:

$$M[C\,X]=\sum_{i=1}^{N(\infty)} C\,x_i p_i = C\sum_{i=1}^{N(\infty)} x_i p_i = C\,M[X].$$

3. Математическое ожидание от суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий, т.е.

$$\boxed{M[X+Y]=M[X]+M[Y]}.$$

4. Объединяя свойства **2** и **3** математического ожидания, получаем

$$\boxed{M\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\,X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} C_i\,M\left[X_i\right]}.$$

5. Математическое ожидание от произведения двух *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е. $\boxed{M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]}$.

Центрированной случайной величиной X_0 называется разность между случайной величиной X и её математическим ожиданием:

$$\boxed{X_0 = X - M[X]}.$$

6. Математическое ожидание центрированной случайной величины X_0 равно нулю, т.е. $\boxed{M[X_0]=0}$.

Док-во: Используя свойства математического ожидания, получим:

$$M[X_0]=M[X-M[X]]=M[X]-M[M[X]]=M[X]-M[X]=0.$$

Пример 2. Вычислить математическое ожидание от *непрерывной* случайной величины X, распределённой по экспоненциальному закону.

Согласно определению математического ожидания, имеем:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} x\,0\,dx+\int_{0}^{\infty} x\,\sigma\,e^{-\sigma x}dx=\sigma\lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B} x\,e^{-\sigma x}dx=$$

$$=\sigma\lim_{B\to\infty}\left|\begin{matrix} U=x & dV=e^{-\sigma x}\,dx \\ dU=dx & V=-\dfrac{e^{-\sigma x}}{\sigma}\end{matrix}\right| = -\lim_{B\to\infty}\left(x\,e^{-\sigma x}\Big|_0^B-\int_0^B e^{-\sigma x}dx\right)=$$ (первое выражение равно нулю, поэтому имеем) $=-\lim\limits_{B\to\infty}\left(\dfrac{e^{-\sigma x}}{\sigma}\Bigg|_0^B\right)=\dfrac{1}{\sigma}.$

53.3. *Дисперсия или рассеивание случайной величины*

Рассеивание случайной величины относительно математического ожидания определяется *дисперсией* и *средне-квадратическим отклонением*.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины X_0:

$$\boxed{D[X] = M[X_0^2] = M[(X - M[X])^2]}.$$

Дисперсия случайной величины X является неотрицательной величиной ($\boxed{D[X] \geq 0}$).

Средне-квадратическим отклонением случайной величины X называется положительное число

$$\boxed{\sigma[X] = \sqrt{D[X]}}.$$

53.4. *Основные свойства дисперсии*

1. *Дисперсия* постоянной (неслучайной) величины равна 0, т.е.

$$\boxed{D[C] = 0}.$$

Док-во: В силу того, что $M[C] = C$, $D[C] = M[(C - C)^2] = M[0] = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя этот множитель в квадрат, т.е. $\boxed{D[C\,X] = C^2\,D[X]}$.

Док-во: По определению *дисперсии* имеем:

$$D[C\,X] = M[(C\,X - M[C\,X])^2] = M[(C\,X - C\,M[X])^2] =$$
$$= M[C^2 X_0^2] = C^2 M[X_0^2] = C^2 D[X].$$

3. *Дисперсия* суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их дисперсий, т.е. $\boxed{D[X + Y] = D[X] + D[Y]}$.

4. Объединяя свойства **2** и **3** *дисперсии*, получаем

$$\boxed{D\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\,X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 D\left[X_i\right]}.$$

5. *Дисперсия* случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата этой величины и квадратом её математического ожидания, т.е. $\boxed{D[X] = M[X^2] - M^2[X]}$.

Док-во: Используя определение дисперсии и свойства математического ожидания, получим:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2 - 2\,X\,M[X] + M^2[X]] =$$
$$= M[X^2] - 2\,M[X]M[X] + M^2[X] = M[X^2] - M^2[X]\ .$$

Пример 3. Распределение непрерывной случайной величины X определяется плотностью вероятности $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ax^2, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$. Найти коэффициент a, математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и средне-квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством **4** для *плотности вероятности* (см. **52**):

$$\underline{1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\int_{0}^{2} x^2\,dx = \left.\frac{a\,x^3}{3}\right|_0^2 = \underline{\frac{8\,a}{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = \dfrac{3}{8}$. Остальные параметры найдём, согласно их определению:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{3}{8}\int_{0}^{2} x\,x^2\,dx = \left.\frac{3}{8}\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{3}{2};$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx = \frac{3}{8}\int_{0}^{2} x^2\,x^2\,dx = \left.\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{12}{5};$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20};\quad \sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{3}{20}}.$$

53.5. *Другие характеристики случайной величины*

Иногда для практических расчётов требуется вычисление других числовых характеристик случайной величины. Определим эти параметры.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени этой величины, т.е.

$$\boxed{\alpha_k = M[X^k]}.$$

○ Из определения начального момента порядка k видно, что математическое ожидание случайной величины X является её первым начальным моментом. ○

Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени центрированной случайной величины X_0, т.е. $\boxed{\mu_k = M[X_0^k]}$.

○ Из определения начального момента порядка k видно, что первый центральный момент любой случайной величины равен нулю, второй центральный момент равен дисперсии. Отметим также, что третий центральный момент используется в теории вероятностей для характеристики *симметричности кривой плотности вероятности*. Если $\mu_3 = 0$, то кривая плотности распределения симметрична относительно математического ожидания. Четвёртый центральный момент используется для определения *эксцесса*, который характеризует остроту пика распределения. ○

Центральные и начальные моменты случайной величины X связаны между собой определёнными соотношениями. В качестве примера рассмотрим случай, когда $k = 2$:

$$\mu_2 = M[X_0^2] = M[X^2] - M^2[X] = \alpha_2 - M^2[X] = D[X].$$

Отсюда получаем, что $\mu_2 = D[X]$ и $\alpha_2 = \mu_2 + M^2[X]$.

<u>54</u>. "*Нормальный и показательный законы распределения*"

54.1. *Нормальный закон распределения*

Нормальный закон распределения случайных величин, который иногда называют ***законом Гаусса*** или ***законом ошибок***, занимает особое положение в теории вероятностей, так как 95 % изученных случайных величин подчиняются этому закону. Природа этих случайных величин такова, что их значение в проводимом эксперименте связано с проявлением огромного числа взаимно независимых случайных факторов, действие каждого из которых составляет малую долю их совокупного действия. Например, длина детали, изготавливаемой на станке с программным управлением, зависит от случайных колебаний резца в момент отрезания, от веса и толщины детали, её формы и температуры, а также от других случайных факторов. По нормальному закону распределения изменяются рост и вес мужчин и женщин, дальность выстрела из орудия, ошибки различных измерений и другие случайные величины.

Случайная величина X называется ***нормальной***, если она подчиняется *нормальному закону распределения*, т.е. её плотность распределения задаётся формулой $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$, где $\sigma = \sigma[X]$ – среднеквадратическое отклонение, а $m = M[X]$ – математическое ожидание.

Приведенная *дифференциальная функция распределения* удовлетворяет всем свойствам плотности вероятности, проверим, например, свойство **<u>4</u>** (***<u>52</u>***):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \dfrac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} & x = \sigma\sqrt{2}t + m \\ dx = \sigma\sqrt{2}dt & \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1.$$

Выясним геометрический смысл параметров σ и m. Зафиксируем параметр σ и будем изменять параметр m. Построим графики соответствующих кривых (рис. 8).

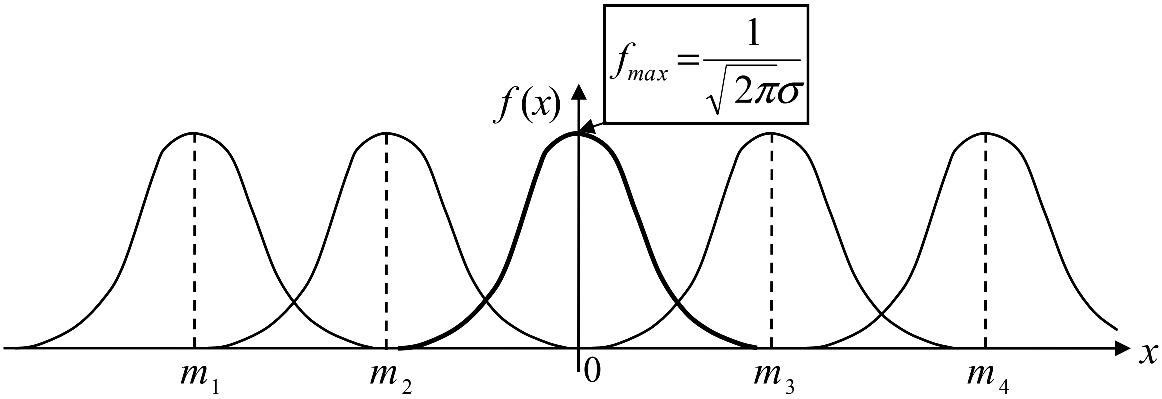


Рис. 8. *Изменение графика плотности вероятности в зависимости от изменения математического ожидания при фиксированном значении средне-квадратического отклонения.*

Из рис. 8 видно: кривая получается путём смещения графика функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ вдоль оси абсцисс на величину m, поэтому параметр m определяет центр тяжести данного распределения. Кроме того, из рис. 8 видно, что функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ достигает своего максимального значения в точке $x_{\max}=m$ и оно равно $f_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$.

Из этой формулы видно, что при уменьшении параметра σ значение максимума возрастает. Так как площадь под кривой плотности распределения всегда равна 1, то с уменьшением параметра σ кривая вытягивается вдоль оси ординат, а с увеличением параметра σ кривая прижимается к оси абсцисс. Построим график нормальной плотности распределения при $m=0$ и разных значениях параметра σ (рис. 9). Интегральная функция нормального распределения имеет вид:

$$\boxed{F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}}.$$

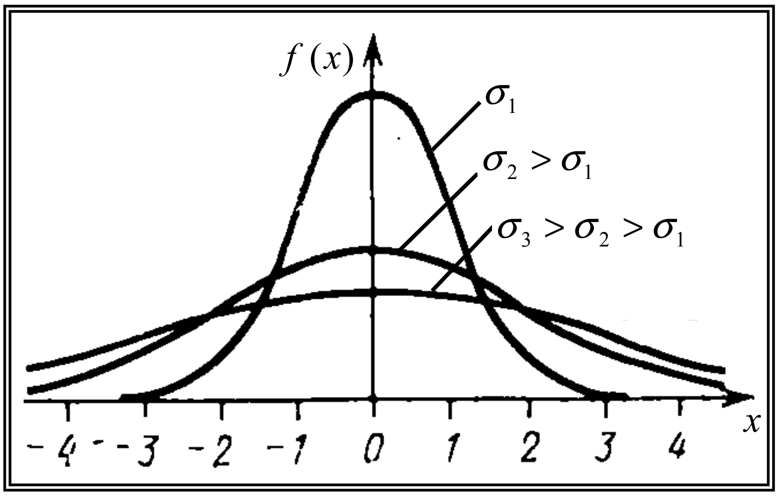


Рис. 9. *Изменение графика плотности вероятности в зависимости от изменения средне-квадратического отклонения при фиксированном значении математического ожидания.*

График функции распределения имеет вид (рис. 10):

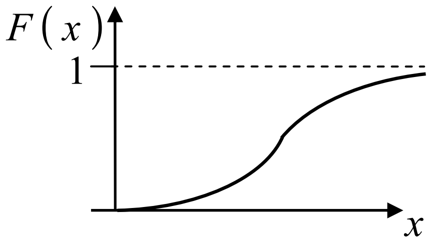


Рис. 10. *График интегральной функции распределения нормальной случайной величины.*

54.1.1. *Вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал*

Пусть требуется определить вероятность того, что нормальная случайная величина попадает в интервал $(\alpha;\beta)$. Согласно определению,

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x-m}{\sigma} \\ x = \sigma t + m \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| =$$

(пересчитаем пределы интегрирования)

x	α	β
t	$\dfrac{\alpha-m}{\sigma}$	$\dfrac{\beta-m}{\sigma}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

Следовательно,

$$\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)}.$$

Рассмотрим основные **_свойства функции Лапласа_** $\Phi(x)$:

1. $\boxed{\Phi(0)=0}$ – график **_функции Лапласа_** проходит через начало координат.

2. $\boxed{\Phi(-x)=-\Phi(x)}$ – **_функция Лапласа_** является нечётной функцией, поэтому *таблицы для функции Лапласа приведены только для неотрицательных значений аргумента.*

3. $\Phi(\mp\infty)=\mp\ 0{,}5$ – график **_функции Лапласа_** имеет горизонтальные асимптоты $\Phi(x)=\mp 0{,}5$.

Следовательно, график **_функции Лапласа_** имеет вид (рис. 11).

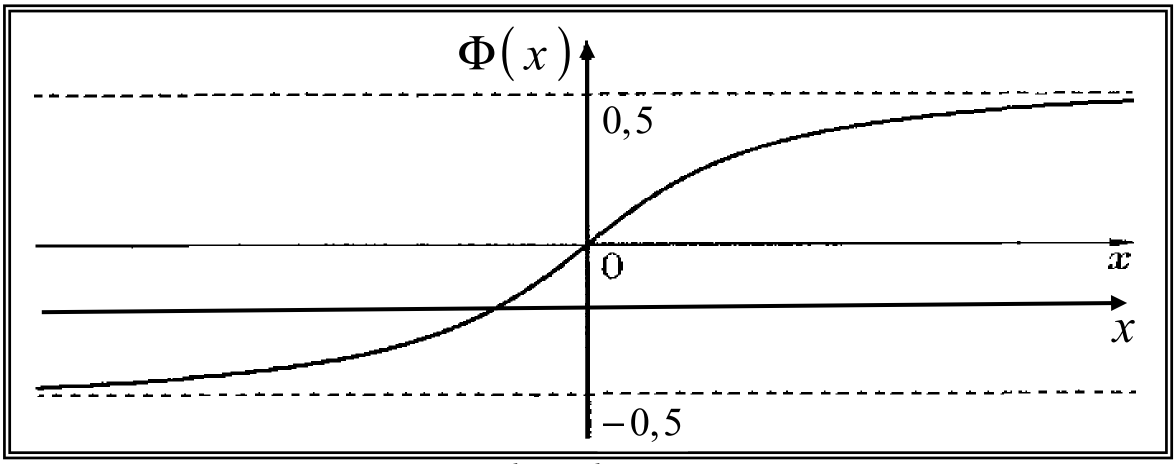


Рис. 11. *График функции Лапласа.*

Пример 1. Закон распределения *нормальной* случайной величины X имеет вид: $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$. Определить вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-1;\ 8)$.

Согласно условиям задачи, $\sigma=3$, m=2, $\alpha=-1$ и $\beta=8$. Поэтому искомая вероятность равна:

$$P(-1<X<8)=\Phi\left(\frac{8-2}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-1-2}{3}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)=$$
$$=0{,}4772+0{,}3413=0{,}8185.$$

54.1.2. *Вычисление вероятности заданного отклонения. Правило “трёх сигм”*

Если интервал, в который попадает *нормальная* случайная величина X, симметричен относительно математического ожидания ($\alpha=m-l$ и $\beta=m+l$), то, используя свойство нечётности функции Лапласа, получим $\boxed{P(m-l<X<m+l)=P(|X-m|<l)=2\Phi\left(\dfrac{l}{\sigma}\right)}$. Данная формула показывает, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания на заданную величину l равна удвоенному значению функции Лапласа от отношения l к средне-квадратическому отклонению. Если положить $l=\sigma$, то

$$P(|X-m|<\sigma)=2\Phi(1)=0{,}6826,$$

т.е. в 68,26 % случаев *нормальная* случайная величина X отличается от своего математического ожидания на величину, равную средне-квадратическому отклонению. Если $l=2\sigma$, то вероятность отклонения равна $P(|X-m|<2\sigma)=2\Phi(2)=0{,}9544$. Наконец, в случае $l=3\sigma$, то вероятность отклонения равна

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}4987=0{,}9974.$$

Из последнего равенства видно, что только приблизительно в 0,3 % случаев отклонение *нормальной* случайной величины X от своего математического ожидания превышает 3σ. Это свойство *нормальной* случайной величины X называется ***правилом "трёх сигм"***. На практике это правило применяется следующим образом: *если отклонение случайной величины X от своего математического ожидания не превышает* 3σ, то эта *случайная величина распределена по нормальному закону*.

54.2. *Показательный закон распределения*

Закон распределения, определяемый функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\end{cases},$$

называется ***экспоненциальным*** или ***показательным***.

График экспоненциального закона распределения имеет вид (рис. 12):

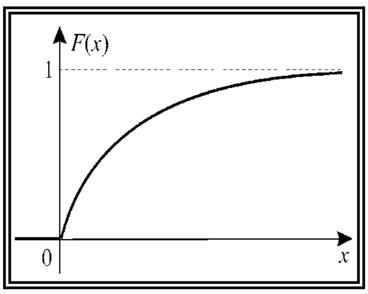


Рис. 12. *График функции распределения для случая экспоненциального закона.*

Дифференциальная функция распределения (***плотность вероятности***) имеет вид: $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$, а её график показан на рис. 13.

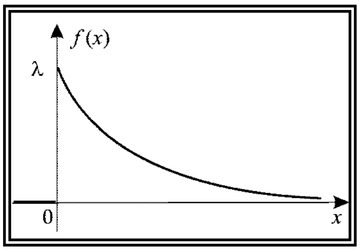


Рис. 13. *График плотности вероятности для случая экспоненциального закона.*

Пример 2. Случайная величина X подчиняется дифференциальной функции распределения $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 5e^{-5x}, & x\ge 0 \end{cases}$. Найти вероятность того, что случайная величина X попадёт в интервал $(2;4)$, математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и средне-квадратическое отклонение $\sigma[X]$. Проверить выполнение *правила* "***трёх сигм***" для показательного распределения.

Интегральная функция распределения $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-5x}, & x\ge 0 \end{cases}$, следовательно, вероятность того, что случайная величина X попадёт в интервал $(2;4)$, равна $P(a<X<b)=F(4)-F(2)=1-e^{-20}-1+e^{-10}\approx 4.5\cdot 10^{-5}$. Математическое ожидание $M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=5\int\limits_{0}^{\infty} x\,e^{-5x}\,dx=\dfrac{1}{5}$. Вычислим значение величины $M[X^2]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=5\int\limits_{0}^{2} x^2 e^{-5x}\,dx=\dfrac{2}{25}$, тогда дисперсия случайной величины X равна

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\frac{2}{25}-\frac{1}{25}=\frac{1}{25},$$

а средне-квадратическое отклонение $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{\dfrac{1}{25}}=\dfrac{1}{5}$. Для проверки *правила* "***трёх сигм***" вычислим вероятность заданного отклонения:

$$P\left(|X-m|<3\sigma\right)=P\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}<X<\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)=P\left(-\frac{2}{5}<X<\frac{4}{5}\right)=$$

$$=P\left(\underline{\underline{0}}<X<\underline{\frac{4}{5}}\right)=F\left(\underline{\frac{4}{5}}\right)-F\left(\underline{\underline{0}}\right)=1-e^{-\frac{4}{5}}-(1-e^{0})\approx 0{,}9817.$$

***55*. “Предельные теоремы теории вероятностей”**

55.1. *Сходимость по вероятности*

Согласно молекулярно-кинетической теории, все газы состоят из большого числа атомов и молекул, которые движутся хаотически в разных направлениях и с разными скоростями. Заранее нельзя указать, где в определённый момент времени, и с какой скоростью будет двигаться та или иная частица. Однако при измерении давления газа измерительный прибор показывает постоянную величину при неизменных внешних условиях. Это показание прибора зависит от числа ударяющихся частиц, от направления их движения и величины скорости частицы. Однако ввиду огромного числа частиц их суммарное действие оказывается постоянным. Этот опыт долгое время использовался как аргумент против молекулярно-кинетической теории. Но когда был поставлен опыт с “небольшим” числом частиц, то давление при неизменных внешних условиях стало колеблющейся величиной. Этот эксперимент является иллюстрацией “***закона больших чисел***”, который будет рассмотрен ниже.

Пусть дана последовательность случайных величин

$$\{X_n\}: X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots,\ X_n, \ldots$$

и некоторое постоянное число C.

Сходимостью по вероятности последовательности случайных величин $\{X_n\}$ к постоянному числу C называется тот факт, когда для любого сколь угодно малого положительного числа ε имеет место предельное соотношение:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} P\left(|X_n - C| < \varepsilon\right) = 1}.$$

В дальнейшем рассмотрим теоремы, которые устанавливают сходимость некоторых последовательностей случайных величин к постоянному числу. Этими теоремами являются ***предельные теоремы теории вероятностей***. Они разделяются на 2 группы. Первая группа объединяется под общим названием “***закон больших чисел***”. Эти теоремы доказывают устойчивость средних значений случайных величин и выявляют общие условия, выполнение которых приводит к устойчивости случайных процессов и явлений. Вторая группа теорем получила общее название “***центральной предельной теоремы***”, которая рассматривает предельные законы распределения. Примером этой группы теорем могут служить ***дифференциальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа***, которые были приведены в ***50***. Поэтому в этом разделе остановимся на ***теореме Чебышёва***, которая даёт изящную и наиболее общую формулировку “***закона больших чисел***”.

55.2. *Неравенство и теорема Чебышёва*

Прежде, чем рассматривать теорему Чебышёва, сформулируем его важное неравенство, которое справедливо как для *дискретных*, так и для *непрерывных* случайных величин.

Теорема 1. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше любого заранее заданного положительного числа ε, не меньше, чем $1-\frac{D[X]}{\varepsilon^2}$.

Док-во: Пусть X – *дискретная* случайная величина, для которой дисперсия равна $D[X]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M[X])^2 p_i$. В этой сумме отбросим все те слагаемые, для которых выполняется неравенство $|x_i-M[X]|<\varepsilon$, и оставим только те слагаемые, для которых выполняется неравенство $|x_i-M[X]|\ge\varepsilon$. В результате этих действий сумма может только уменьшиться, т.е. $D[X]\ge\sum_{i=1}^{m}(x_i-M[X])^2 p_i$, где $m\le n$. Эта сумма ещё больше уменьшится, если в ней заменить выражения $(x_i-M[X])^2$ на малое число ε^2, т.е. $D[X]\ge\varepsilon^2\sum_{i=1}^{m}p_i$. В этом неравенстве под знаком суммы стоят вероятности тех значений случайной величины X, для которых выполняется неравенство $|x_i-M[X]|\ge\varepsilon$. Тогда сумма $\sum_{i=1}^{m}p_i$ по ***теореме сложения вероятностей*** случайных величин есть вероятность того, что случайная величина X принимает значения, при которых выполняется неравенство $|x_i-M[X]|\ge\varepsilon$. Следовательно, выполняется равенство: $\sum_{i=1}^{m}p_i=P(|x_i-M[X]|\ge\varepsilon)$. Вероятность противоположного события равна $P(|x_i-M[X]|<\varepsilon)=1-P(|x_i-M[X]|\ge\varepsilon)$. Подставив полученное равенство в неравенство для дисперсии, получим

$$\frac{D[X]}{\varepsilon^2}\ge 1-P(|x_i-M[X]|<\varepsilon).$$

Отсюда и следует ***неравенство Чебышёва***. Аналогично теорема доказывается для *непрерывной* случайной величины.

Используя полученное неравенство, докажем ***теорему Чебышёва***:

Теорема 2. Пусть случайные величины X_1, X_2, X_3, …, X_n, … *попарно независимы*, а их дисперсии ограничены ($D[X_i] \le C$). Тогда для любого заранее заданного положительного числа ε имеет место неравенство $P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - M[X_i]\right) \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$, что иначе можно записать в виде $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - M[X_i]\right) \right| < \varepsilon \right) = 1$.

Док-во: Рассмотрим случайную величину $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Так как по условию теоремы случайные величины X_1, X_2, X_3, …, X_n, … попарно независимы, то математическое ожидание случайной величины X равно $M[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i]$. Аналогично для дисперсии имеет место равенство $D[X] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i]$. Так как по условию теоремы $D[X_i] \le C$, то $D[X] \le \frac{1}{n^2} C\, n = \frac{C}{n^2}$. Воспользуемся ***неравенством Чебышёва*** для случайной величины X, т.е. $P\left(\left| X - M[X]\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$ или с учётом ограниченности дисперсии $P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - M[X_i]\right) \right| < \varepsilon \right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$.

Отсюда следует, что при неограниченном росте n ($n \to \infty$) вероятность события, указанного в круглых скобках, будет стремиться к **1**, т.е. при $n \to \infty$ указанное событие будет становиться всё более достоверным.

55.3. *Оценка точности и надежности измерений с помощью теоремы Чебышёва*

Пусть X_1, X_2, X_3,…, X_n,… результаты n измерений случайной величины X. Очевидно, что $M[X_1] = M[X_2] = M[X_3] = ... = M[X_n] = m$, где m – истинное значение случайной величины X. Примем за приближённое значение измеряемой величины среднее арифметическое измеренных значений $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Измерение имеет точность ε, если выполняется неравенство $\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m \right| < \varepsilon$. Измерение имеет точность ε с надёжностью γ, если выполняется вероятностное неравенство

$$\boxed{P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right) \geq \gamma}.$$

Согласно ***теореме Чебышёва***,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Для выполнения предыдущего неравенство должно выполняться соотношение: $\gamma \leq 1 - \dfrac{C}{n\varepsilon^2}$. Отсюда найдём, какое количество опытов надо провести, чтобы получить заданную точность измерений ε с заданной надёжностью γ: $n \geq \dfrac{C}{\varepsilon^2(1-\gamma)}$.

Пример 1. Сколько измерений надо провести, чтобы их среднее арифметическое значение дало измеряемую величину с точностью $\varepsilon = 0{,}05$ и надёжностью $\gamma = 0{,}9$, если дисперсия измеряемой величины меньше 2.

Необходимое число измерений равно

$$n \geq \frac{C}{\varepsilon^2(1-\gamma)} = \frac{2}{(0{,}05)^2(1-0{,}9)} = 800.$$

55.4. *Теорема Ляпунова*

В качестве “***центральной предельной теоремы***” рассмотрим ***теорему Ляпунова*** (*без доказательства*), которая объясняет особое место нормального закона распределения.

Теорема 3. Если случайные величины X_1, X_2, X_3, …, X_n, … *попарно независимы* и удовлетворяют условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} M^3\left(\left| X_i - M[X_i]\right|\right)}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} D[X_i]\right)^3}} = 0,$$

то

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P\left(\alpha < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - M[X_i])}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} D[X_i]\right)}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}.$$

Смысл этой теоремы состоит в том, что при достаточно больших значениях n случайная величина $Y=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-M[X_i])}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}D[X_i]\right)}}$ распределена почти по *нормальному* закону распределения с математическим ожиданием $M[Y]=0$ и средне-квадратическим отклонением $\sigma[Y]=1$. "*Закон больших чисел*" проявляется в следующем: несмотря на то, что о слагаемых случайных величинах X_i почти ничего неизвестно, но об их сумме известно всё, так как определён закон распределения.

Применим эту теорему для оценки точности и надёжности измерений. Пусть $M[X_1]=M[X_2]=M[X_3]=...=M[X_n]=m$, где m – истинное значение случайной величины X, а $D[X]=\sigma^2$. Тогда, согласно ***теореме Ляпунова***, случайная величина $Y=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-nm}{\sigma\sqrt{n}}$ распределена почти по *нормальному* закону. Так как величины m, σ и n не являются случайными, то случайная величина $Z=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ распределена также по *нормальному* закону. Вычислим её математическое ожидание и дисперсию

$$M[Z]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[X_i]=m\,,\ D[Z]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[X_i]=\frac{\sigma^2 n}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Тогда средне-квадратическое отклонение равно $\sigma[Z]=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Используя формулу вероятности отклонения нормальной случайной величины от её математического ожидания, получим

$$P(|Z-M[Z]|<\varepsilon)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma[Z]}\right),\ \text{т.е. } P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-m\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Следовательно, чтобы получить заданную точность измерений ε с заданной надёжностью γ, надо потребовать выполнение неравенства

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-m\right|<\varepsilon\right)\geq\gamma.$$

Поэтому $2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\geq\gamma$ или $\boxed{\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\geq\dfrac{\gamma}{2}}$. Это неравенство и есть условие достижения заданной точности измерений ε с заданной надёжностью γ.

Пример 2. Решить ***Пример 1*** с использованием ***теоремы Ляпунова***. По условию задачи точность $\varepsilon = 0.05$, надёжность $\gamma = 0.9$ и дисперсия измеряемой величины меньше 2. Следовательно, $\sigma \le \sqrt{2}$. Таким образом, согласно ***теореме Ляпунова***, должно выполняться неравенство $\Phi\left(\dfrac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\right) \ge \dfrac{0{,}9}{2} = 0{,}45$. Из таблицы для ***функции Лапласа*** находим, что, если $\Phi(x) = 0{,}45$, то $x = 1{,}64$, следовательно, $\dfrac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \ge 1{,}64$. Отсюда находим, что $n \ge 2152$.

55.5. *Теорема Бернулли*

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых *вероятность появления события A постоянна и равна p*.

Теорема 4. Вероятность отклонения частоты $\dfrac{m}{n}$ от вероятности p в ***схеме Бернулли*** на сколь угодно малую положительную величину ε стремится к единице при достаточно большом числе испытаний, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Док-во: Обозначим через X_i число появлений события A в испытании i. Закон распределения для каждого испытания одинаков и имеет вид:

x_i	0	1
p_i	q	p

Поэтому математическое ожидание и дисперсия равны:

$$M[X_i] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p; \quad M[X_i^2] = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p;$$

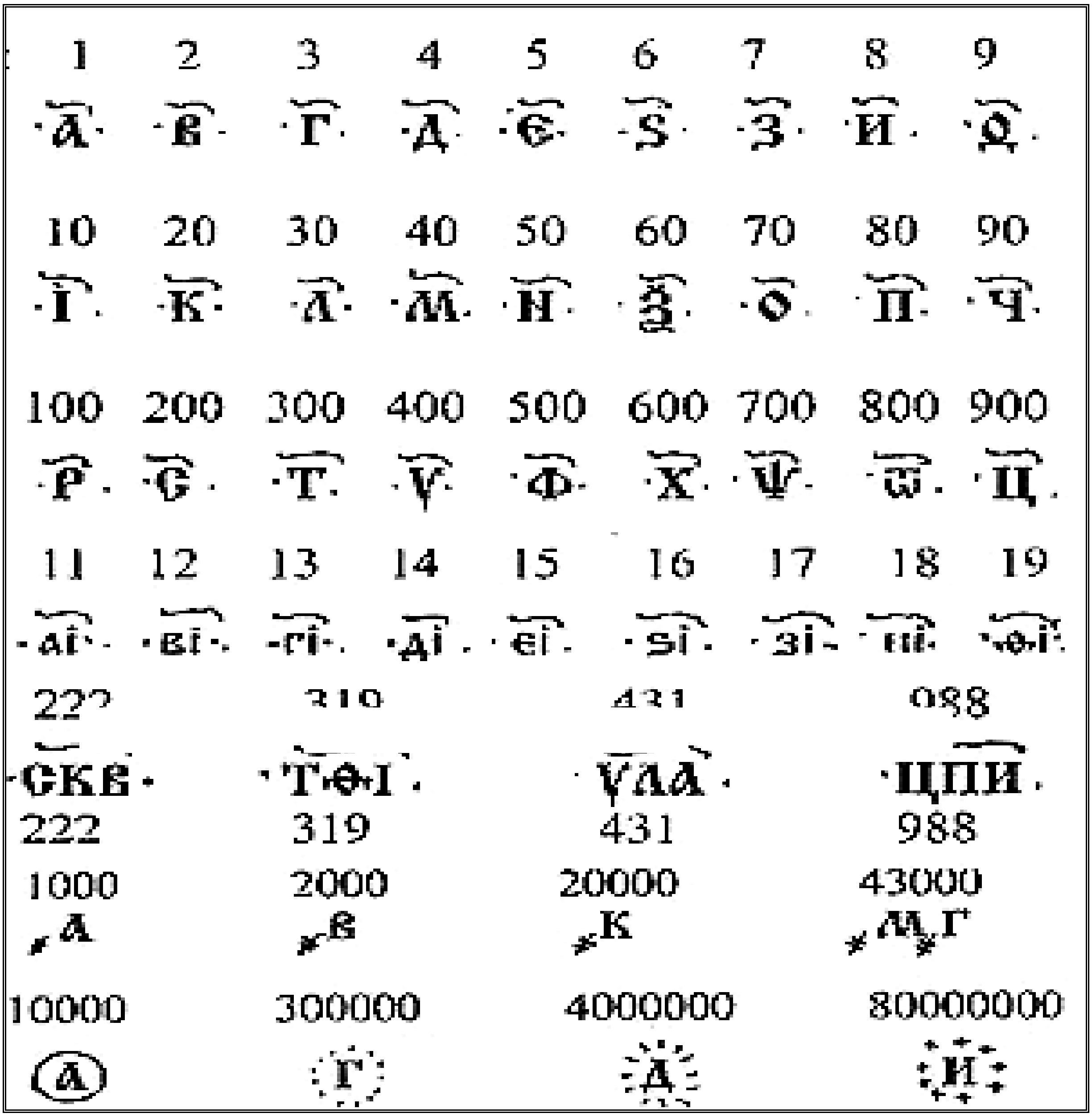
$$D[X_i] = M[X_i^2] - M^2[X_i] = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

В силу того, что $p + q = 1$, то дисперсия $D[X_i] = pq$ ограничена. Так как испытания независимы, то случайные величины X_i также независимы и к ним применима ***теорема Чебышёва***, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1$.

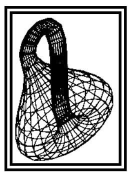
Величина $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ даёт число случаев, благоприятствующих появлению события A, т.е. равно m, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$.

○ Из последней формулы не следует, что $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{m}{n}\right) = p$. Теорема утверждает только тот факт, что вероятность этого события с ростом n стремится к единице. ○

○ ***<u>Теорема Бернулли</u>*** является частным случаем ***<u>теоремы Чебышёва</u>*** и обосновывает возможность приближённой замены вероятности события A относительной частотой его появления, что находит своё применение в математической статистике. ○



Старорусские обозначения чисел.



V

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 1

1. Производится два выстрела по мишени. Опишите для этого опыта структуру пространства элементарных исходов (событий). Каким является событие, равное *сумме* приведенных Вами событий? Какими являются события, равные *пересечению* любых двух событий из приведенных Вами.

2. Каждая из букв **А**, **Г**, **Н**, **О**, **Р**, **Ы** написана на одной из шести карточек, из которых наудачу выбирают четыре. Какова вероятность того, что в результате последовательного выбора наугад карточек получится слово "*горы*"?

3. Наугад указывается месяц и число некоторого невисокосного года. Какова вероятность того, что это будет *воскресенье*, если всего в этом году 53 воскресенья, а соответствие чисел дням недели неизвестно?

4. Пусть вероятность того, что стрелок при стрельбе по мишени выбьет 10 очков, равна 0,4; 9 – 0,2; 8 – 0,2; 7 – 0,1; 6 или меньше – 0,1. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет *не менее девяти очков*.

5. Участковый врач обслуживает на дому троих больных. Вероятность того, что в течение суток врач потребуется первому больному, равна 0,1; второму – 0,5; третьему – 0,3. Найти вероятность того, что в течение некоторых суток: а) *ни один* больной не вызовет врача; б) *хотя бы один* вызовет врача; в) *только один* больной вызовет врача?

6. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени, вероятности попадания в которую равны для первого стрелка – 0,6; для второго – 0,7; для третьего – 0,8. Найти вероятность *двух попаданий* в мишень.

7. Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и две коробки деталей, изготовленный заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а для завода № 2 – 0,9. Сборщик наудачу извлёк деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена *бракованная деталь*.

8. Известно, что соответствуют требуемому стандарту 98 % электроламп, изготовленных заводом № 1, 96 % – заводом № 2, заводом № 3 и 95 % – заводом № 4. В магазин поступило 150 ламп, изготовленных заводом № 1, 60 – заводом № 2, 40 – заводом № 3 и 50 – заводом № 4. Здесь они оказались расположенными в случайно образовавшемся порядке. Лампа, приобретенная покупателем, оказалась нестандартной. Определить вероятность того, что она изготовлена: а) *на заводе* № 1; б) *на заводе* № 2; в) *на заводе* № 3; г) *на заводе* № 4.

9. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести телевизоров *не более одного* потребует ремонта.

10. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян *не взойдёт* 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,73.

11. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 100 *попаданий* при 320 выстрелах.

12. Составить ряд распределения числа попаданий в мишень при четырёх выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Построить *график функции распределения*, вычислить *математическое ожидание* и *дисперсию* числа попаданий.

13. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ A(4x-x^3), & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}.$$

При каком значение коэффициента A функция $f(x)$ принимается за *плотность вероятности* случайной величины X? При этом значении A найти *интегральную функцию*, *математическое ожидание* и *дисперсию* случайной величины X, вычислить $P(1\le X\le 3)$.

14. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ имеет *функцию распределения*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Задания: а) построить *график* функции $F(x)$; б) найти *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; в) построить её *график*; г) вычислить вероятность $P(0{,}5\le x\le 2{,}5)$.

15. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ распределена по *нормальному* закону со средне-квадратическим отклонением σ = 0,8. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания по абсолютной величине *будет меньше* 0,3.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 2

1. Рабочий изготовил 5 деталей. Пусть событие $A_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ заключается в том, что *i*-ая изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что: а) *ни одна* из деталей не имеет дефектов; б) *не более одной* детали имеет дефект.

2. Подлежит контролю 260 деталей, из которых 5 нестандартных. Какова вероятность того, что из 2-х наудачу взятых деталей *одна* окажется нестандартной?

3. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) *сумма* выпавших очков равна 8; б) *произведение* выпавших очков равно 8.

4. В лотерее 100 билетов: среди них один выигрыш в 50 рублей, 3 – по 25 рублей, 6 – по 10 рублей, 15 – по 3 рубля. Некто покупает один билет. Найти вероятность какого-нибудь *выигрыша*.

5. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка стана, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырёх дней подряд не произойдёт *ни одной* поломки?

6. Два стрелка А и В по очереди стреляют в одну мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Каждый стрелок имеет право произвести два выстрела, однако стрельба прекращается, когда кто-нибудь из них попадёт в мишень. Определить вероятность поражения мишени *первым* и *вторым стрелком в отдельности*.

7. На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причём 20 % пряжи составляет продукция цеха № 2, а остальная продукция – цеха № 1. Продукция цеха № 1 содержит 90 %, а цеха № 2 – 70 % пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Определить вероятность того, что этот моток является: а) продукцией *цеха* № 1; б) продукцией *цеха* № 2.

8. Стрельба производится по пяти мишеням типа А, трём – типа В, двум – типа С. Вероятность попадания в мишень типа А равна 0,4; типа В – 0,1; типа С – 0,15. Найти вероятность попадания в мишень *при одном* выстреле, если неизвестно, *в мишень какого типа он будет произведён*.

9. В урне 30 шаров: 20 белых, 10 чёрных. Вынули подряд четыре шара, причём каждый вынутый шар возвращался в урну перед извлечением следующего. Какова вероятность того, что среди вынутых четырёх шаров будет *два белых*?

10. Найти вероятность того, что среди 200 человек окажется *четверо* левшей, если в среднем левши составляют 1 %.

11. В некоторой стране 5 % жителей болеют туберкулёзом. Определить, чему равна вероятность того, что из 1000 человек окажутся больными *не менее* 50 и *не более* 200 человек.

12. Случайная величина ***X*** характеризуется рядом распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	?

Найти: а) *функцию распределения* этой случайной величины; б) построить её *график*; в) вычислить *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

13. *Функция распределения* случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right), & -3\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения*; б) вычислить *вероятность попадания в заданный интервал* $P(0\le X\le 1)$.

14. *Плотность вероятности* случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ae^{-x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

15. Результаты измерения расстояния между двумя населёнными пунктами подчиняются *нормальному* закону распределения с параметрами $M[X]=16\ \kappa м$ и $\sigma[X]=100\ м$. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами *не менее* 17,75 км и *не более* 16,3 км.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 3

1. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Событие A: “мужу *больше* 30 лет”, событие B: “муж *старше* жены”, событие C: “жене *больше* 30 лет”. Выяснить *смысл* событий $A+C$, AC, ABC, $A\overline{B}C$.

2. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый им билет, содержащий 5 *вопросов*, будет состоять из подготовленных им вопросов?
3. В кармане имеется несколько монет достоинством 2 коп. и 10 коп. (при их касании они неразличимы). Известно, что двухкопеечных монет втрое больше, чем гривенников. Наугад вынимается *одна* монета. Какова вероятность того, что это будет *гривенник*?
4. Из колоды в 52 карты выбираются наугад 4 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется *хотя бы один* туз.
5. В первом ящике 6 шаров: один белый, два красных, три синих. Во втором – 12: 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика выбирается по одному шару. Какова вероятность, что среди них *нет синих*?
6. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,7; второй – 0,4; третий – 0,4; четвёртый – 0,3. Найти вероятность того, что в течение часа: а) *ни один* станок не потребует внимания рабочего; б) *хотя бы один* станок потребует внимания рабочего; в) *только один* станок потребует внимания рабочего.
7. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30, из них 24 стандартных, в третьем – 10, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что *наудачу выбранная деталь* из наудачу взятого ящика *окажется стандартной*.
8. На конвейер поступают однотипные изделия, изготавливаемые двумя рабочими. При этом первый поставляет 60 %, второй – 40 % общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим, окажется нестандартным, равна 0,002; вторым – 0,01. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено: а) *первым* рабочим; б) *вторым* рабочим.
9. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 5 первых покупате-

лей обувь этого размера будет необходима *двум*.

10. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 500 деталей бракованных будет *не менее* 5, но *не более* 10 штук.

11. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 100 *попаданий* при 320 выстрелах.

12. Закон распределения количества очков, которые выбивает первый стрелок при одном выстреле, даётся табл. 1, такого же типа закон для 2-го стрелка задаётся табл. 2:

Табл. 1

x_i	0	2	3
p_i	0	0,2	0,8

Табл. 2

y_i	1	2	3
g_i	0,2	0,5	0,3

Найти *закон распределения* и *математическое ожидание* суммы очков, которую выбили 2 стрелка при одновременном выстреле.

13. *Функция распределения* случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A(1-\cos(2x)), & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *дифференциальную функцию распределения*; в) $P\left(0 \le X \le \dfrac{\pi}{4}\right)$; г) *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

14. Случайная величина X подчинена *показательному закону распределения* с параметром μ:

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Требуется: а) построить *кривую распределения*; б) найти *функцию распределения*; в) найти *вероятность* того, что случайная величина X примет значение меньше, чем её математическое ожидание.

15. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ распределена *нормально*, $\sigma(x) = 0{,}4$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 4

1. Два шахматиста играют одну партию. Опишите структуру пространства элементарных событий этого опыта. Каким событием является *сумма* названных Вами событий?

2. На каждые 100 деталей приходится 3 % бракованных. Наугад выбирается три детали. Определить: вероятность того, что среди них будет *одна* бракованная.

3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь окрашенных граней: а) *одну*; б) *две*; в) *три*.

4. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,6; вторым – 0,7. Найти вероятность того, что *хотя бы один* из них попал в мишень.

5. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в неё в начале стрельбы равна 0,3, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: а) попадет *хотя бы раз*; б) промахнётся все *три* раза; в) попадёт *два* раза.

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается наудачу одна, а из остальных – вторая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечётная цифра: а) *первый* раз; б) *второй* раз; в) *оба* раза.

7. В телеателье имеется 4 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы для каждого из них, соответственно, равна 0,8; 0,85; 0,9; 0,96. Найти вероятность того, что *взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы*.

8. Известно, что 96 % выпускаемой продукции стандартны. Упрощённая схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,96, а бракованную с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что *изделие*, прошедшее контроль, *удовлетворяет стандарту*.

9. Ожидается прибытие трёх судов с бананами. В 1 % случаев груз (бананы) портится в дороге. Найти вероятность того, что придут с испорченным грузом *два* судна.

10. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов точных окажется *от* 110 *до* 430 (включительно).

<u>11</u>. Рыболовный траулер сдаёт на плавбазу 5000 банок солёной сельди. Вероятность того, что при сдаче банка сельди повреждена равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу будет сдано 5 *повреждённых банок*.

<u>12</u>. Дана таблица распределения случайной величины X:

x_i	2	4	5	6	8	9
p_i	0,2	0,25	0,3	0,1	0,1	?

Найти *функцию распределения*, построить её *график*, вычислить *математическое ожидание* и *дисперсию*.

<u>13</u>. Дана *дифференциальная функция распределения*

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ A\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x\ge\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

случайной величины X. Найти *коэффициент* A, *функцию распределения*, *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

<u>14</u>. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ задана *функцией распределения*

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{36}, & 0<x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}.$$

Найти *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$. Построить *графики* функции $f(x)$ и $F(x)$. *Вычислить* $P(0\le x\le 4)$; $P(4\le x\le 6)$.

<u>15</u>. Случайная величина X распределена *нормально* $M[X]=6$; $\sigma[X]=2$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величине X примет значение, заключённое в промежутке $(4;8)$.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 5

1. События: А – *хотя бы один* из трёх проверяемых приборов бракованный; В – *все* приборы доброкачественные. Что *означают* события А+В и АВ.

2. Каждая из букв **М**, **Е**, **Р**, **О** написана на одной из четырёх карточек. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад. Какова вероятность того, что в результате получится слово “*море*”?

3. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) выпадет *одинаковое число очков* на *обеих костях*; б) выпадет *разное число очков*.

4. Вероятность покупки лотерейного билета, у которого равны суммы первых и последних трёх цифр номера, равна $0{,}05525$. Какова вероятность иметь такой билет среди двух купленных наудачу, если два билета; а) имеют *последовательные номера*; б) *куплены независимо один от другого*?

5. Пусть вероятность того, что покупателю женской обуви понадобится 37-й размер, равна 0,25. Найти вероятность того, что из четырёх первых покупателей обувь этого размера: а) *никому* не потребуется; б) потребуется *хотя бы одному*.

6. В семье трое детей. Принимают события, состоящие в рождении мальчика и девочки, равновероятными событиями. Найти вероятность того, что в этой семье: а) *все мальчики*; б) *дети одного пола*.

7. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 12 ламп, из них одна нестандартная, во втором – 10 ламп, из них две нестандартные. Из 1-го ящика наудачу взятая 1 радиолампа переложена во 2-ой ящик. Найти вероятность того, что лампа, *наудачу извлечённая после этого из* 2-го *ящика*, будет *нестандартная*.

8. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролёров. Вероятность того, что деталь попадёт к первому контролёру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролёром, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Какова вероятность того, что эту деталь проверил *первый контролёр*?

9. Пусть всхожесть семян некоторого растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из четырёх посеянных семян взойдут *не менее* *трёх*.

10. Пусть вероятность оплаты в кассе выписанного у продавца чека равна 0,99. Найти вероятность того, что из 100 выписанных чеков *хотя бы один* окажется неоплаченным.

11. Радиотелеграфная станция принимает цифровой текст. В силу наличия помех вероятность ошибочного приёма любой цифры не изменяется в течение всего приёма и равна 0,01. Считая приём отдельных цифр независимым, найти вероятность того, что в тексте, содержащем 1100 цифр, будет ровно 7 *ошибок*.

12. Случайная дискретная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	2	3
p_i	?	0,1	0,7

Найти *закон распределения* случайной величины $Y = X^2$, её *математическое ожидание* и *дисперсию*.

13. Дана *интегральная функция распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 - \sin x, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

случайной величины X. Требуется: а) найти *плотность распределения*; б) найти *математическое ожидание* и *дисперсию*; в) построить *графики* интегральной и дифференциальной функций распределения.

14. Случайная величина X имеет *плотность вероятности* $f(x) = \dfrac{A}{1+x^2}$.

Найти *коэффициент* A, *интегральную функцию распределения*, *вероятность* $P(-1 < x < 1)$.

15. Валики, изготавливаемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 2 *мм*. Случайные отклонения диаметра подчиняются *нормальному* закону со средне-квадратическим отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько *процентов стандартной продукции* изготавливает *автомат*?

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 6

1. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие А – выбранное число делится на 5; событие В – данное число оканчивается нулём. Что *означают* $A-B$, $A\overline{B}$? *Справедливы ли* для событий *соотношения* $A+B=B$ и $A+B=A$?

2. Группа из 10 мужчин и 10 женщин делится случайно на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части мужчин и женщин *поровну*.

3. При записи фамилий 360 членов собрания оказалось, что начальной буквой у 7 была **А**, у 5 – **Е**, у 8 – **И**, у 9 – **О**, у 4 – **У**, у 2 – **Ю**, а у всех остальных фамилия начиналась с согласной буквы. Найти вероятность того, что фамилия члена данного собрания начинается с *гласной*.

4. Вероятность того, что на билет денежно-вещевой лотереи выпадет денежный выигрыш, равна 0,01, а вещевой выигрыш – 0,008. Найти вероятность того, что на один купленный билет выпадет *какой-либо выигрыш*.

5. В электрическую цепь последовательно включены три прибора, не взаимодействующие друг с другом. Вероятность выхода из строя одного из них равна 0,1; второго – 0,2; третьего – 0,15. Определить надёжность работы электрической цепи (т.е. вероятность невыхода её из строя), если цепь выключается, как только испортится *хотя бы один* прибор.

6. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует внимания рабочего равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего какие-либо 2 *станка*.

7. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложили взятые наугад 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 4 чёрных шара. Найти вероятность того, что после этого из второй урны можно вынуть *белый шар*.

8. Первое орудие четырёхорудийной батареи пристрелено так, что вероятность попадания равна 0,3; остальным трём орудиям соответствует вероятность попадания 0,2. Для поражения цели достаточно одного попадания. Два орудия произвели одновременно по выстрелу, в результате чего цель была поражена. Найти вероятность того, что *первое орудие стреляло*.

9. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, имея *шесть* билетов выиграть по *трём* билетам?
10. В цехе 9 моторов, для каждого мотора вероятность того, что в данный момент он включён, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено *не менее* трёх и *не более* семи моторов.
11. Школа принимает в первые классы 200 детей. Найти вероятность того, что среди них окажется 100 *девочек*, если вероятность рождения мальчика 0,515.
12. Независимые случайные величины X и Y заданы нижеприведенными таблицами. Составить *ряд распределения* произведения $Z=XY$ этих случайных величин и на этом примере *проверить справедливость свойства математического ожидания произведения независимых случайных величин*.

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	?

y_i	0	1	2	3
g_i	?	0,2	0,3	0,4

13. Случайная величина задана *функцией распределения*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1-\cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения*; б) *вероятность попадания в заданный интервал* $P\left(0<x\le\dfrac{\pi}{4}\right)$.

14. *Плотность вероятности* случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2, & 0\le x\le 4 \\ 0, & x<0, x>4 \end{cases}.$$

Требуется: а) *найти коэффициент* A; б) найти *функцию распределения* $F(x)$; в) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$; г) найти *математическое ожидание* и *дисперсию* случайной величины X.
15. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределённой по *нормальному* закону. Пусть её математическое ожидание равно 170 см, а дисперсия – 36 см². Вычислить вероятность того, что *хотя бы один* из наугад выбранных *четырёх* мужчин будет иметь рост от 168 см до 172 см.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 7

1. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие A – исправна машина, событие B_k $(k=1,2)$ исправен k-ый котёл, событие C – работоспособность машинно-котельной установки, что будет в том случае, если исправны машина и *хотя бы один* котёл. Выразить *события* C и $\overline{C}$ *через* A и B_1, B_2.

2. Четырёхтомное сочинение расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома расположены в должном порядке, *справа налево* или *слева направо*.

3. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: А – *все* пассажиры *выйдут на четвёртом этаже*; В – *все* пассажиры *выйдут одновременно*.

4. Процесс изготовления детали состоит из нескольких операций. После первой и второй операций производится контроль качества и при обнаружении брака деталь отбрасывается, вероятность брака детали после первой операции равна 0,02, а после второй – 0,1. Определить вероятность того, что деталь окажется отбракованной *до третьей* операции.

5. Два стрелка производят в мишень по одному выстрелу. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7; для второго – 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель: а) *оба* стрелка; б) *только один* стрелок; в) *ни один* стрелок.

6. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3; второй – 0,4; третий – 0,7; четвёртый – 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа: а) *ни один* из станков не потребует внимания рабочего; б) *хотя бы один* потребует внимания рабочего.

7. На сборку поступило 3000 деталей с первого автомата и 2000 – со второго. Первый автомат даёт 0,2 % брака; второй – 0,3 %. Найти *вероятность попадания на сборку бракованной детали*.

8. В трёх ящиках находятся соответственно: 1) 2 белых и 3 чёрных; 2) 4 белых и 3 чёрных; в) 6 белых и 2 чёрных шара. Предполагая, что извлечение шара из любого ящика равновероятно, найти вероятность того, что извлечение было произведено из *первого* ящика, если вынутый шар оказался белым.

9. Вероятность того, что март будет снежным, равна 0,45. Какова вероятность того, что в течение *пяти* лет *ровно три* года март будет снежный.

10. Вероятность допущения дефекта при производстве механизма равна 0,4. Случайным образом отбираются 600 механизмов. Найти вероятность того, что среди них с дефектом *не менее* 30 и *не более* 40.

11. Вероятность изготовления консервной банки с недостаточной герметизацией равна 0,002. *Среди скольких банок*, отобранных случайным образом, можно с вероятностью 0,9 ожидать *отсутствия бракованных*?

12. Найти закон распределения случайной величины X, которая выражает число мальчиков в семье, в которой пять детей. Вероятность наличия мальчика p =0,515. Пользуясь этим законом распределения вычислить *математическое ожидание* и *дисперсию* случайной величины X.

13. Найти *математическое ожидание* и *дисперсию* случайной величины X, если её *плотность вероятности*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\\ 0, & |x|\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

14. Дана *интегральная функция распределения* случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq\dfrac{3\pi}{2}\\ A\cos x, & \dfrac{3\pi}{2}<x<2\pi\\ 1, & x>2\pi\end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; в) *вероятность* $P\left(\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{7\pi}{4}\right)$; г) построить *график* $F(x)$ и $f(x)$.

15. Величина X распределена по *нормальному* закону: $M[X]=40$, $\sigma[X]=$ $=10$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее промежутку [20; 60].

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант **8**

1. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C: а) произошло только событие A; б) *ни одно* событие не произошло; в) произошло *не более двух* событий.

2. Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 16 волейбольных команд разбили на две подгруппы (по 8 команд в каждой), найти вероятность того, что *две* наиболее сильные команды *окажутся в разных подгруппах*.

3. Общество из n человек садится за круглый стол. Найти вероятность того, что *два* определённых лица окажутся *рядом*.

4. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что *произведение выпавших очков будет чётным*.

5. При штамповке пластмассовых тарелок брак составляет в среднем 2 % общего числа изделий, 95 % годных изделий составляет продукция первого сорта. Найти вероятность того, что взятая наудачу тарелка окажется 1-го сорта.

6. Из трёх орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудий эти вероятности, соответственно, равны числам 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) *только один* снаряд попадёт в цель; б) *все три* снаряда попадут в цель.

7. Две перфораторщицы набили по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05; для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась *первая* перфораторщица; *вторая* перфораторщица.

8. На распределительной базе находятся электрические лампочки, произведенные двумя заводами, из них 70 % – первым заводом и 30 % – вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных 1-ым заводом, 90 удовлетворяют стандарту, а из 100 штук, произведенных 2-ым заводом, 80 удовлетворяют стандарту. Определить вероятность того, что *взятая наудачу с базы лампочка удовлетворяет стандарту*.

9. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 0,1. Какова вероятность, имея 4 билета, выиграть: а) *по одному* билету; б) *ни по одному* билету; в) *хотя бы по одному* билету.

10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 *раз* в 100 *испытаниях*.

11. Установлено, что в среднем 0,5 % шариков, изготовляемых для подшипников, оказывается бракованными. Определить вероятность того, что из поступивших на калибровку 1000 шариков бракованных будет *не менее* 40 и *не более* 50 штук.

12. Случайная дискретная величина X задана законом распределения:

x_i	2	6	10
p_i	0,5	?	0,1

Построить *график* функции распределения этой случайной величины, вычислить её *математическое ожидание* и *дисперсию*.

13. *Плотность вероятности* случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} Ax, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x<0, x>2 \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *интегральную функцию распределения*; в) вычислить *вероятность* того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания будет *не более* 0,5.

14. Величина X задана *функцией распределения*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\ge 2\pi \\ \sin x, & 2\pi < x \le \dfrac{5\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{5\pi}{2} \end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; б) *вероятность* $P\left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{9\pi}{4}\right)$; в) построить *графики* функций $f(x)$ и $F(x)$.

15. Рост взрослой женщины является случайной величиной распределённой по *нормальному* закону. Её математическое ожидание равно 164 см, а средне-квадратическое отклонение – 5,5 см. Найти плотность вероятности этой случайной величины и вычислить вероятность того, что *хотя бы одна* из *пяти* взятых наудачу женщин имеет рост в пределах 163-165 см.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 9

1. Игральная кость брошена один раз. Событие А – появление на верхней грани *не менее* трёх очков, событие В – появление *не более* четырёх очков. *Образуют ли* события А и В *пространство элементарных событий*? *Описать* событие АВ.

2. Для дежурства на агитпункте из отдела, в котором работает 10 инженеров, 5 техников и 3 лаборанта, надо выделить 5 человек. Чему равна вероятность того, что будут выделены 2 *инженера*, 2 *техника*, 1 *лаборант*?

3. Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число N даст число, которое оканчивается единицей при: а) *возведении в квадрат*; б) *возведении в* 4 *степень*.

4. В электрическую цепь последовательно включены приборы A_1 и A_2, не взаимодействующие друг с другом. Вероятность выхода из строя прибора A_1 равна 0,1, а прибора A_2 – 0,2. Цепь выключается, если выйдет из строя *хотя бы один* прибор. Определить *вероятность выхода из строя цепи*.

5. Производится бомбардирование военного объекта. Вероятность попадания в цель при сбрасывании бомбы равна 0,7, а вероятность того, что бомба не взорвётся – 0,08. Найти вероятность того, что объект *будет разрушен*, если будет сброшена *одна* бомба.

6. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии 1-ый сигнализатор сработает, равна 0,95; для 2-го сигнализатора эта вероятность равна 0,5. Найти вероятность того, что при аварии сработает *только один* сигнализатор.

7. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из которых 18 стандартных, во второй – 10 радиоламп, из которых 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлечённая затем из *первой* коробки, будет *стандартной*.

8. Сборщик получает в среднем 50 % деталей завода № 1, 30 % – завода № 2, 20 % – завода № 3. Вероятность того, что деталь первого завода отличного качества, равна 0,7; для детали второго и третьего заводов эти вероятности, соответственно, равны 0,8 и 0,9. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена *заводом* № 1.

9. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна $\frac{1}{6}$. Какова вероятность *не выиграть* по *двум* билетам из *пяти*?

10. На некотором предприятии доля брака составляет в среднем 1,5 %. Какова вероятность того, что в партии, состоящей из 400 изделий, окажется *два* бракованных изделия.

11. Прядильщица обслуживает 200 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение минуты равна 0,02. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдёт в 3 *веретенах*.

12. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события А в трёх независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6. Найти *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

13. Случайная величина подчинена закону распределения с *плотностью вероятности*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| < A \\ 0, & |x| \geq A \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *интегральную функцию распределения* $F(x)$; в) *вероятность попадания* случайной величины *на интервал* $\left(\frac{A}{2}; A\right)$.

14. Дана *интегральная функция распределения* случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \dfrac{3\ (x+1)}{4}, & -1 < x \leq \dfrac{1}{3} \\ 1, & x > \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Найти: а) *плотность вероятности* $f(x)$; б) *математическое ожидание* и *дисперсию*; в) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Случайная величина X подчинена *нормальному* закону с $M[X] = 0$. Вероятность попадания её на участок $(-2; 2)$ равна 0,5. Найти *дисперсию* этой случайной величины и записать её *дифференциальную функцию распределения*.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 10

1. Производится наблюдение за группой, состоящей из 4 однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен, или не обнаружен. Рассматриваются события: А – обнаружен *только один* из четырёх объектов; В – обнаружен *хотя бы один* объект; С – обнаружено *не менее двух* объектов; Д – обнаружено *ровно два* объекта; Е – обнаружено *ровно три* объекта; F – обнаружены *все* 4 объекта. Указать, *в чём состоят* события А+В, АВ, Д+Е+F. *Совпадают ли* события ВС и Д?

2. В пруду находится 800 осетров и 500 стерлядей. Какова вероятность того, что *две* подряд выловленные рыбы окажутся разных видов?

3. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Вычислить вероятность того, что *вторую*, также взятую наудачу кость домино *можно приставить к первой*.

4. Бросается две монеты. Рассматриваются события: А – выпадение герба на первой монете; В – выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события С=А+В. *В чём состоит* событие С?

5. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 11. Чему равна вероятность того, что первые *два дня* августа *будут дождливыми*?

6. Из трёх орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудий эти вероятности равны, соответственно, 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) *только один* снаряд попадёт в цель; б) *хотя бы один* снаряд попадёт в цель.

7. На сборочный конвейер поступают детали с трёх станков. Производительность станков неодинаковая. Первый станок даёт 50 % деталей, второй – 30 %, третий – 20 %. Если в сборку попадёт деталь, сделанная на первом станке, то вероятность получения годного узла – 0,98. Для продукции 2 и 3 станков соответствующие вероятности равны 0,98 и 0,8. Определить вероятность того, что *узел*, сошедший с конвейера, *годный*.

8. В группе спортсменов 10 лыжников, 12 велосипедистов и 13 бегунов. Вероятность выполнения квалификационной нормы такова: для лыжника $p_1 = 0,9$; для велосипедиста $p_2 = 0,8$; для бегуна $p_3 = 0,75$. Выбранный наудачу спортсмен выполнил норму. *К какой из групп* вероятнее всего *он принадлежал*?

9. Вероятность *хотя бы одного* попадания при *двух* выстрелах равна 0,96. Найти вероятность *трёх* попаданий при *четырёх* выстрелах.

10. На некотором предприятии доля брака составляет в среднем 1 %. Чему равна вероятность того, что в партии, состоящей из 300 *изделий*, окажется 4 *бракованных изделия*?

11. Вероятность того, что покупателю необходим костюм 56-го размера, равна 0,1. Найти вероятность того, что из 100 *покупателей* 30 *потребуют костюмы этого размера*.

12. Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, …, n с равной вероятностью, а все прочие значения – с вероятностью, равной нулю. Найти: а) *функцию распределения* этой случайной величины; б) построить её *график*; в) вычислить *математическое ожидание* и *дисперсию*.

13. О случайной величине X говорят, что она распределена *по закону Рэлея*, если *плотность вероятности* её распределения равна

$$f(x)=\begin{cases} Axe^{-\frac{x^2}{262}}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}.$$

Найти: а) *константу* A; б) *функцию распределения* $F(x)$; в) построить её *график* и *найти точку*, в которой *плотность вероятности* $f(x)$ *достигает максимума*.

14. Случайная величина X задана *функцией распределения*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{36}, & 0<x\le 6 \\ 1, & x>6 \end{cases}.$$

Найти: а) *вероятность* $P(1\le x\le 7)$; б) *дифференциальную функцию* $f(x)$; в) *математическое ожидание* и *дисперсию*; г) построить *графики* функций $F(x)$, $f(x)$.

15. Известно, что в некоторой местности средний рост взрослых мужчин распределён по *нормальному* закону и равен a =170 см, а σ=10 см. Какова *вероятность* того, что рост наудачу выбранного мужчины этой местности попадёт в промежуток между 165 см и 180 см?

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 11

1. Игральная кость бросается один раз. Рассматриваются события: A – появление на верхней грани *не менее* трёх очков; B – появление на верхней грани *не более* четырёх очков. *Равновозможные ли* эти события? *Совместны ли* они? *Описать* события, *равные* A+B и AB.

2. В мастерскую для ремонта поступило 10 часов марки “Заря”. Известно, что шесть штук из них нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берёт первые попавшиеся 5 часов. Определить вероятность того, что *двое из них* нуждаются в общей чистке механизма.

3. В колоде 36 карт четырёх мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что *обе* извлечённые карты одной масти.

4. Покупатель приобрёл пылесос и полотёр. Вероятность того, что пылесос не выйдет из строя в течение гарантийного срока, равна 0,95; для полотёра такая вероятность равна 0,94. Найти вероятность того, что *хотя бы один* из приборов выдержит гарантийный срок.

5. Производится стрельба по некоторой цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Стрельба прекращается при первом попадании. Найти вероятность того, что будет произведено *ровно* 6 *выстрелов*.

6. Экспедиция издательства отправила газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое отделение почты равна 0,9. Найти вероятность того, что: а) *оба* почтовых отделения получат газеты вовремя; б) *хотя бы одно* почтовое отделение получит газеты вовремя.

7. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюёт с вероятностью p_1; на втором месте – с вероятностью p_2; на третьем – с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на *первом месте*.

8. В трёх урнах имеются белые и чёрные шары. В 1-ой урне – 3 белых и 1 чёрный шар, во 2-ой – 6 белых и 4 чёрных, в 3-ей – 9 белых и 1 чёрный. Из наугад выбранной урны выбирается случайным образом шар. Найти вероятность того, что *он белый*.

9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие наступит 120 *раз* в 144 *испытаниях*.

10. Принимая вероятность изготовления нестандартной детали 0,05, найти вероятность того, что из взятых 5 *деталей* 4 *окажутся стандартными*.

11. Вероятность того, что пара обуви, взятая наугад из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,4. Чему равна вероятность того, что среди 600 пар, поступивших на контроль, окажется *от* 228 *до* 252 *пары обуви высшего сорта*.

12. Случайные величины X и Y заданы таблицами распределения:

x_i	1	3	4	5
p_i	0,25	?	0,15	0,4

y_i	0	2	3
g_i	0,35	0,25	0,4

Составить *закон распределения* случайной величины $Z=X+Y$ и *проверить свойство математического ожидания суммы случайных величин*.

13. Случайная величина $\boldsymbol{X}$ задана *интегральной функцией распределения*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{16}, & 0<x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}.$$

Найти: а) *плотность распределения вероятности* $f(x)$; б) *математическое ожидание* и *дисперсию*; в) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

14. Дана *плотность вероятности* случайной величины

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ A\sin x, & 0\le x\le \pi \\ 0, & x>\pi \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *функцию распределения* $F(x)$; в) *вероятность* $P\left(|x|\le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. Установлено, что диаметр изготовляемых поршней является случайной величиной, распределенной *по нормальному закону* со средним значением, равным 4 дюймам, и дисперсией, равной $0{,}0009$. Поршни с диаметром *более* 4,006 и *менее* 3,994 дюйма являются браком. Каков при этих условиях *процент брака* в изготовляемых партиях?

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 12

1. Рассматриваются события: A_i – попадание при i-ом выстреле (i =1, 2, 3). Выразить через A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: А – *все три* попадания; В – *хотя бы один* промах; С – *не менее двух* попаданий.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что *набраны нужные цифры*.
3. Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета z рублей. Ценные выигрыши попадают на m билетов. Определить *вероятность ценного выигрыша на один билет*.
4. Из колоды в 36 карт наудачу выбираются 3 карты. Какова вероятность того, что среди них *не более* одного туза?
5. В урне находится a белых и b чёрных шаров. Из неё в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящееся в урне шары. Найти вероятность того, что *вторым* по порядку был вынут *белый шар*.
6. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) *оба* стрелка промахнутся; в) *только один* стрелок поразит мишень; г) *хотя бы один* стрелок поразит мишень.
7. В цехе три типа автоматических станков. Известно, что станок первого типа производит 90 % деталей отличного качества, станок второго типа – 85 %, третьего – 80 %. Все произведенные детали сданы на склад. Определить *вероятность* того, что *взятая наудачу со склада деталь окажется отличного качества*, если станков первого типа 10 штук, второго – 8, третьего – 2, а производительность всех станков одинакова.
8. Сборщик получил две коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом № 1, и три коробки таких же деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,9; завода № 2 – 0,7. Из наудачу взятой, коробки наудачу извлечённая сборщиком деталь оказалась стандартной. Что вероятнее: эта деталь изготовлена *заводом* № 1 или *заводом* № 2?
9. Среди вырабатываемых рабочим деталей в среднем 4 % брака. Какова вероятность того, что среди взятых для испытания *пяти* деталей *одна бракованная*?

<u>10</u>. По данным ОТК в среднем 2 % изготавливаемых на заводе часов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 300 *изготовленных часов* 290 *штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке*?

<u>11</u>. Вероятность того, что пара обуви, взятая наугад из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,3. Чему равна вероятность того, что среди 300 пар, поступивших на контроль, окажется *от* 280 *до* 292 *пар обуви высшего сорта*.

<u>12</u>. Дан закон распределения случайной величины X:

x_i	-2	0	1	3
p_i	0,1	?	0,3	0,1

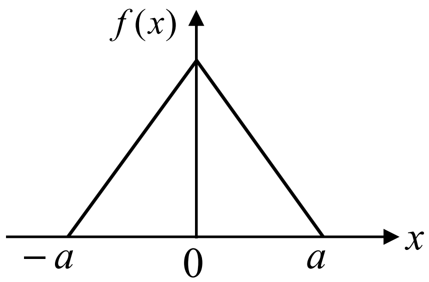
Составить *закон распределения* случайной величины $Z = X^2$ и построить *график* функции распределения случайной величины Z.

<u>13</u>. Случайная величина X задана *функцией распределения*

$$F(x) = A + B\,arctg\left(\frac{x}{2}\right).$$

Найти *коэффициенты* $A, B; P\left(|x| \le \frac{\pi}{2}\right)$; *дифференциальную функцию распределения*.

<u>14</u>. Случайная величина X подчинена *закону Симпсона* ("*закону равнобедренного треугольника*") на участке от $-a$ до a (см. рис.).



Требуется: а) написать выражение для *плотности распределения* $f(x)$; б) найти *функцию распределения* $F(x)$ и построить её *график*; в) найти *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

<u>15</u>. Результаты измерения расстояния между двумя населёнными пунктами подчинены *нормальному* закону с параметрами: $M[X] = 16$ км, $\sigma[X] = 1$ км. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами *не менее* 15,65 км и *не более* 16,3 км.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 13

1. Пусть A_1, A_2, A_3 некоторые события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A_1, A_2, A_3: а) *ни одно* событие не произошло; б) произошло *только* событие A_3; в) произошло *только одно* событие; г) произошло *не менее двух* событий.

2. Ребёнок играет с десятью буквами разрезной азбуки: **А**, **А**, **А**, **Е**, **И**, **К**, **М**, **М**, **Т**, **Т**. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "*математика*"?

3. Десять друзей садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что *два* фиксированных лица *А* и *В* сядут рядом, причём *В слева* от *А*.

4. Чему равна вероятность того, что дни рождения *трёх* человек придутся на разные месяцы: *июнь*, *июль*, *август*? Вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

5. Для повышения надёжности работы электрической цепи на участке АВ параллельно подсоединены два дублирующих узла С и Д, не взаимодействующие друг с другом. Узлы присоединены так, что в цепи работает один из них и, как только он выходит из строя, автоматически включается другой. Определить *надёжность* (вероятность невыхода из строя) участка АВ, если вероятность выхода из строя узла С равна 0,1; узла Д – 0,2.

6. В телестудии имеются три телекамеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена: а) *одна* камера; в) *хотя бы одна* камера.

7. Имеется 2 набора деталей. Вероятность того, что деталь 1-го набора стандартна, равна 0,6; 2-го – 0,9. Найти вероятность того, что *наудачу взятая деталь из наудачу выбранного набора стандартна*.

8. На двух автоматических станках изготавливаются одинаковые валики. Вероятность изготовления валика высшего сорта на первом станке равна 0,92, а на втором – 0,80. Изготовленные на обоих станках нерассортированные валики находятся на складе в случайно образовавшемся порядке. Среди них валиков, изготовленных на первом станке, в 3 раза больше, чем на втором. Взятый наудачу со склада валик оказался высшего сорта. Определить вероятность того, что он произведён на *первом* станке.

9. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока 10 %. Вычислить вероятность того, что *из* 10 *наблюдаемых телевизоров* 8 *выдержат гарантийный срок*.

10. Вероятность того, что абонент правильно наберёт телефонный номер, равна 0,999. Определить вероятность того, что среди 500 *произведенных независимо один от другого вызовов* окажется *менее двух* ошибочных.

11. В хлопке 70 % длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 20 *волокон не более* 10 *длинных*?

12. Случайная величина X имеет распределение вероятности вида:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	?	0,2	0,4	0,1

Найти *функцию распределения* этой случайной величины, построить её *график*, вычислить *математическое ожидание*, *дисперсию* и *вероятность* $P\left(|\,x\,|\le 1\right)$.

13. О случайной величине X говорят, что она распределена *по закону арксинуса*, если *плотность вероятности* её распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{A}\right)^2}}, & |x|<A\\ 0, & |x|\ge A\end{cases}.$$

Найти *константу* A, *функцию распределения*, *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

14. Случайная величина задана *функцией распределения*

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения*; б) *вероятность* $P(1\le x\le 2{,}5)$; в) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Процент содержания золы в каменном угле является *нормально* распределённой случайной величиной с математическим ожиданием $M\left[X\right]=16$ % и средне-квадратическим отклонением, равным 4 %. Определить вероятность того, что в наудачу взятой пробе угля будет *от* 12 *до* 24 % *золы*.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант **14**

1. Рабочий изготовил 3 детали. Пусть событие $A_i (i=1,2,3)$ заключается в том, что *i*-ая изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, состоящее в том, что: а) *хотя бы одна* деталь имеет дефект; б) *все* детали дефектные; в) *только одна* деталь имеет дефект.

2. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются на две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что 4 *наиболее сильных шахматиста* попадут *по два в разные группы*.

3. На десяти одинаковых карточках написаны различные цифры от нуля до 9. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек *двузначное число делится на* 18.

4. При конвейерной сборке точного механизма рабочий должен установить в него определённую деталь. Деталь эту в некоторых случаях приходится подгонять путём дополнительной обработки и пробных установок её в механизм. Всего таких установок производится не более пяти. Вероятность того, что деталь будет установлена без подгонки с первой пробы, равна 0,38, а подгонкой при второй пробе – 0,26; при третьей пробе – 0,20; при четвёртой – 0,14; при пятой – 0,02. Какова вероятность того, что для подгонки этой детали потребуется: а) *более двух* проб; б) *нечётное число* проб.

5. Многолетними наблюдениями в данном районе установлено, что статистическая вероятность сентябрьскому дню оказаться дождливым, равна $\frac{1}{3}$. Совхоз должен в течение трёх дней сентября выполнить определённую работу. Чему равна вероятность того, что *ни один* из этих дней *не будет дождливым*?

6. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определённой последовательности: следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель каждым из охотников равны по 0,8. Найти вероятность того, что будет произведено: а) *один* выстрел; б) *два* выстрела; в) *три* выстрела; г) *четыре* выстрела.

7. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что *выбранный наудачу спортсмен выполнит норму*.

8. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 3 чёрных и 3 белых шара, а в оставшейся – 5 белых и 1 чёрный. Из урны, взятой наудачу, извлечён белый шар. Какова вероятность того, что *шар извлечён из урны*, содержащей 5 *белых шаров*?

9. На факультете 730 студентов. Вероятность рождения каждого студента в любой день года $\frac{1}{365}$. Найти вероятность того, что найдётся *три* студента *с одним и тем же днем рождения*.

10. Вероятность выиграть по одному билету лотереи $\frac{1}{12}$. Какова вероятность, имея 5 билетов лотереи, выиграть: а) *хотя бы по двум* билетам; б) *по одному* билету?

11. В хлопке 60 % длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 40 *волокон не более* 5 *длинных*?

12. Найти *закон распределения* дискретной случайной величины X, которая может принимать только 2 значения: x_1 с вероятностью $p_1 = 0{,}6$ и x_2, причём $x_1 < x_2$, если $M[X] = 4$, а $D[X] = 6$.

13. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda(4x - x^3), & 0 \le x < 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}.$$

При *каком значении* λ функция $f(x)$ может быть принята за *плотность вероятности* случайной величины *X*. Определить при этом значении λ *интегральную функцию распределения*, вычислить *математическое ожидание* и *дисперсию*.

14. *Функция распределения* случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ a + b\arcsin x, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Найти: а) *постоянные* a и b; б) *вероятность* $P\left(-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\right)$; в) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; г) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Случайная величина *X* распределена по *нормальному* закону с математическим ожиданием $M[X] = 40$ и дисперсией $D[X] = 100$. Вычислить *вероятность попадания* случайной величины *X на промежуток* $[-30; 80]$.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 15

1. Прибор состоит из 2 блоков первого типа и 3 блоков второго типа. События: A_k $(k=1,2)$ – исправен k-ый блок первого типа, $B_n(n=1,2)$ – исправен n-ый блок второго типа. Прибор работает, если исправны *хотя бы один* блок первого типа и *не менее двух* блоков второго типа. *Выразить* событие С, означающее работу прибора, через A_k и B_n.

2. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из букв **О**, **Т**, **М**, **Р**, **О**, **С**. Карточки тщательно перемешивают. Найти вероятность того, что на четырёх вынутых по одной (наугад) и расположенных в одну линии карточках можно прочесть слово “*трос*”.

3. В колоде 36 карт четырёх мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что *обе извлечённые карты одной масти*.

4. Три охотника попадают в летящую утку с вероятностями $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что *утка будет подбита*?

5. В цехе n моторов, включающихся и выключающихся независимо друг от друга. Вероятность того, что в данный момент мотор окажется выключенным, для всех моторов одинакова и равна 0,1. Определить: а) вероятность того, что в данный момент окажется выключенным *хотя бы один* мотор (n=10); б) при *каком количестве* (n) *моторов* в цехе вероятность того, что в данный момент окажется выключенным *хотя бы один* мотор, будет *не более* 0,5.

6. Вероятность того, что данный спортсмен улучшит свой предыдущий результат с одной попытки, равна p. Определить вероятность того, что на соревнованиях он улучшит свой результат, если разрешается делать 2 *попытки*.

7. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составляет 6 %, причём в продукции, забракованной по признаку А в 4 % случаев встречается дефект – B, а в продукции, свободной от дефекта А, дефект B встречается в 1 % случаев. Найти вероятность встречи *дефекта B* во всей продукции.

8. Телеграфное сообщение состоит из сигналов “точка” и “тире”. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $\frac{2}{5}$ сообщений “точка” и $\frac{1}{3}$ сообщений “тире”. Известно, что среди передаваемых сигналов “точка” и “тире” встречаются в отношении $5:3$. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал “*точка*”.

9. В отдел технического контроля поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что *из* 100 *проверенных изделий* окажется стандартных *не менее* 64.

10. Найти вероятность того, что в *четырёх* независимых испытаниях событие А появится ровно *три* раза, зная, что в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,7.

11. Вероятность изготовления подшипникового шарика ниже третьего класса, равна 0,0002. Определить вероятность того, что в партии *из* 500 таких *шариков* содержится *хотя бы один ниже третьего класса*.

12. Независимые случайные величины X и Y заданы такими рядами распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,3	0,2	?

y_i	0	1	2	3
g_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Составить *ряд распределения* случайной величины $Z = X \cdot Y$ и *проверить* на этих случайных величинах *свойство математического ожидания произведения независимых случайных величин*.

13. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + \pi^2}$ является *плотностью вероятности* некоторой случайной величины и вычислить *вероятность попадания* этой случайной величины *на промежуток* $(\pi;\infty)$.

14. Случайная величина задана *функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ Ax^2, & 0 < x \le 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *плотность вероятности*; в) *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины; г) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Считается, что отклонение длины изготовленных деталей от стандарта является случайной величиной, распределённой по *нормальному закону*. Если стандартная длина $m = 40$ см, а средне-квадратическое отклонение равно $\sigma = 0{,}4$ см, то какую *точность длины детали* можно гарантировать с вероятностью 0,95?

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 16

1. Пусть A_n – событие, заключающееся в том, что при n-ом повторении эксперимента U осуществилось событие A, $B_{n,m}$ – событие, состоящее в том, что при n первых повторениях эксперимента событие A осуществлялось m раз. *Выразить* $B_{4,2}$ *через* A_i ($i = 1,\ 2,\ 3\ 4$).

2. Колода карт (52 карты) произвольным образом делится пополам. Найти вероятность того, что *в каждой половине* будет *по* 2 *туза*.

3. В кошельке лежат 3 монеты по 50 коп. и 7 монет по 5 коп. Наудачу берётся монета, а затем извлекается 2-ая монета, оказавшаяся монетой в 50 коп. Определить вероятность того, что и первая извлечённая монета имеет достоинство *в* 50 *коп*.

4. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. Найти вероятность того, что *хотя бы один* из стрелков попал в мишень.

5. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: *А – появится герб*; *В – появилось шесть очков*.

6. Рабочий обслуживает четыре станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9; для второго – 0,6; для третьего – 0,7; для четвёртого – 0,9. Вычислить вероятность того, что в течение часа: а) *по крайней мера один* из станков не потребует внимания рабочего; б) *только один* станок потребует внимания рабочего.

7. На двух станках обрабатываются однотипные детали; вероятность брака для первого станка равна 0,03; для второго – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причём деталей с первого станка складывается в 2 раза больше, чем со второго. Вычислить вероятность того, что *взятая наудачу деталь не будет бракованной*.

8. Для участия в спортивных студенческих отборочных соревнованиях выделено от первого курса 4, от второго – 6, от третьего – 5 студентов. Вероятности того, что студент первого, второго, третьего курса попадёт в сборную института, соответственно, равны – 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. *К какой из групп* вероятнее всего *он принадлежал*?

9. Производится 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов будет только *одно* попадание.

10. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Свёрла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что: а) в коробке *не окажется* бракованных свёрл; б) число бракованных свёрл окажется *не более трёх*.

11. Вероятность изготовления подшипникового шарика ниже третьего класса, равна 0,04. Определить вероятность того, что в партии из 100 таких *шариков* содержится *хотя бы один ниже третьего класса*.

12. На опытном участке в 1000 га урожайность пшеницы такая

Урожайность	17	18	19	20	21	22	23
Площадь	50	90	150	350	200	100	60

Рассматривая урожайность, как случайную величину X, определить её *математическое ожидание* и *дисперсию*.

13. Говорят, что случайная величина X распределена по *закону Лапласа*, если её *плотность вероятности* равна

$$f(x)=\frac{1}{2\alpha}e^{-\frac{|x-A|}{\alpha}},\ \alpha>0,$$

где A – любое действительное число. Найти *математическое ожидание* и *дисперсию* случайной величины X.

14. Случайная величина задана *интегральной функцией распределения*

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ Ax+B, & -1\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}.$$

Найти *постоянные* A и B; вычислить *вероятность* того, что случайная величина X примет значение, заключенное *в промежутке* $[0;1]$; построить *графики* функций $F(X)$ и $f(x)$.

15. Предполагается, что предел прочности выпускаемой партии стальной проволоки диаметром 1,4 мм является *нормально* распределённой случайной величиной с математическим ожиданием a=160 кг/мм^2 со средне-квадратическим отклонением $\sigma=8\,кг/мм^2$. Требуется: а) найти *дифференциальную* и *интегральную функции распределения* этой случайной величины; б) определить, какое *предельное отклонение* в ту или другую сторону предела прочности испытываемого образца проволоки от математического ожидания можно гарантировать с вероятностью 0,9901.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 17

1. Три детали проверяются на качество. Событие A_1 – все три детали качественные, A_2 – *хотя бы одна* из деталей бракованная. *В чём состоят* события $A_1 \cdot A_2$ и $A_1 + A_2$?

2. В партии, состоящей из 50 изделий, имеется 4 бракованных. Наудачу выбирается 5 *изделий* из этой партии. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 *бракованных изделия*.

3. Каждая из букв **А**, **У**, **К**, **С**, **З** написана на одной из пяти карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке одна за другой. Найти вероятность того, что при этом получится слово "*казус*".

4. Стрелок стреляет по мишени, разделённой на три зоны. Вероятность попадания в первую зону равна 0,45; во вторую – 0,30; в третью – 0,15. Найти *вероятность попадания в мишень*.

5. В двух ящиках находятся детали. В первом – 10 (из них 6 стандартных), во втором – 15 (из них 12 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что *обе детали окажутся стандартными*.

6. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует внимания рабочего, равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены: а) потребуют внимания рабочего какие-либо *два* станка; б) *ни один* станок.

7. Упакованные консервы поступают с конвейера на проверку к одному из двух контролёров. Вероятность того, что проверяемая банка попадёт к первому контролёру, равна 0,6; ко второму – 0,4. Вероятность того, что качественная банка будет признана стандартной при проверке первым контролёром, равна 0,94; вторым – 0,98. Определить вероятность того, что *наудачу взятая после проверки банка окажется стандартной*.

8. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-2 – с вероятностью 1,0. Вероятности того, что автомат снабжён сигнализатором С-1 или С-2, равны 0,6 и 0,4, соответственно. Получен сигнал о разладе автомата. Что вероятнее: автомат снабжён *сигнализатором* С-1 *или* С-2?

9. Монета подбрасывается 8 раз. Какова вероятность того, что 6 *раз* она упадёт *гербом вверх*?

10. Вероятность того, что пара обуви, взятая наугад из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,4. Чему равна вероятность того, что среди 600 пар, поступивших на контроль, окажется *от* 228 *до* 262 *пар обуви высшего сорта*?

11. Прядильщица обслуживает 1000 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдёт в *пяти* веретенах.

12. Испытывается устройство, состоящее из четырёх независимо работающих приборов. Вероятность отказа приборов такова: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}5$ и $p_4 = 0{,}6$. Найти *математическое ожидание* и *дисперсию* числа отказавших приборов.

13. *Плотность вероятности* случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид:

$$f(x) = A\,x\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}},\ a = const\,,\ x \ge 0\,.$$

Определить: а) *коэффициент* A; б) *интегральную функцию распределения*.

14. *Функция распределения* случайной величины

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x_0^3}{x^3}, & x \ge x_0 \\ 0, & x < x_0,\ x_0 > 0 \end{cases}.$$

Найти *дифференциальную функцию распределения*, *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

15. Все детали различаются своими диаметрами, которые распределяются по *нормальному закону* с параметрами $M[X] = 5\,см$ и $D[X] = 0{,}81$ $см$. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали: а) *от* 4 *до* 7 см; б) отличается от математического ожидания по абсолютной величине *не более* чем на 2 мм.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант **18**

1. Пусть A_1, A_2, A_3 – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A_1, A_2, A_3: а) произошло *только* событие A_2; б) произошли *все три* события; в) произошло *по крайней мере одно* событие.

2. В партии из 100 изделий имеется 6 штук бракованных. Какова вероятность того, что среди *шести* выбранных наугад для проверки изделий 2 *окажутся бракованными*?

3. Участники жеребьёвки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что *номер первого наудачу выбранного жетона делится на* 6.

4. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,6. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что произошло *одно* попадание?

5. Детали проходят три операции обработки. Вероятность появления брака во время первой операции равна 0,02; второй – 0,03, третьей – 0,02. Найти *вероятность изготовления стандартной детали*.

6. Три стрелка стреляют в одну мишень. Известно, что вероятности попадания при одном выстреле, для первого стрелка равна 0,5; для второго – 0,3; для третьего – 0,4. Определить вероятность того, что в результате одновременного выстрела трёх стрелков в мишени будет: а) *одна* пробоина; б) *не менее одной* пробоины.

7. В каждой из двух урн содержится 4 чёрных и 6 белых шаров. Из урны 2 наудачу извлечён один шар и переложен в урну 1, после чего из урны 1 наудачу извлечён шар. Найти вероятность того, что шар, извлечённый из *первой урны*, окажется *белым*.

8. В цехе три группы автоматических станков (по степени амортизации) производят одни и те же детали. Производительность их одинакова, но качество работы различно. Известно, что станки первой группы производят детали первого сорта с вероятностью 0,8; второй – 0,85; третьей – 0,9. Все произведенные в цехе за смену детали в нерассортированном виде сложены на складе. Взятая наудачу со склада деталь оказалась первого сорта. *На станке какой группы* вероятнее всего она была изготовлена, если станков первой группы 5 штук, второй – 4 шт. и третьей – 2 шт.?

9. В магазине приобретено 5 телевизоров для студенческих общежитий. Для каждого из них вероятность невыхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,8. Определить вероятность того, что: а) *три*; б) *четыре* телевизора в течение гарантийного срока *не выйдут из строя*.

10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 *раз* в 243 *испытаниях*.

11. Пять работниц окрашивают одинаковые по форме и размерам игрушки. Две из них производят окраску в красный цвет, а три – в зелёный. Производительность труда работниц одинакова. Окрашенные игрушки оказались перемешанными. Определить вероятность того, что среди 600 *игрушек*, отобранных случайным образом, красных окажется *от* 228 *до* 264 шт. включительно.

12. Дан ряд распределения случайной X

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	?

Построить *график* функции распределения этой случайной величины, найти её *математическое ожидание* и *дисперсию*.

13. Найти *математическое ожидание*, *дисперсию* и *функцию распределения* случайной величины X, *плотность вероятности* которой $f(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{2}$.

14. Дана *функция распределения* случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ A\sin\left(\dfrac{x}{2}\right), & 0 \le x \le \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *вероятность* $P\left(|x| \le \dfrac{\pi}{2}\right)$; в) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; г) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Предполагается, что длина болтов, изготавливаемых на автоматическом станке, является *нормально* распределённой случайной величиной с математическим ожиданием 5,6 см. Вероятность того, что наудачу взятый болт имеет размер от 5,55 до 5,65, равна 0,9545. Чему равна *вероятность* того, что размер наудачу взятого болта будет *от* 5,60 *до* 5,75 см?

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 19

1. Судно имеет одно рулевое устройство, 4 котла и 2 турбины. Событие A – означает исправность рулевого устройства B_k $(k=1, 2, 3, 4)$– исправность k-го котла C_j $(j=1,2)$ исправность j-ой турбины. Событие D означает – судно управляемое, что будет в том случае, когда исправны рулевое устройство, *хотя бы один* котёл и *хотя бы одна* турбина. *Выразить* событие D *через* A, B_k, C_j.

2. В мешочке имеется пять кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из букв **О**, **П**, **С**, **Р**, **Т**. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно прочесть слово “*спорт*”.

3. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) *один* выигрышный; б) *хотя бы один* выигрышный.

4. Ящик содержит 10 деталей, среди которых две нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных *шести* деталях окажется *не более одной нестандартной детали*.

5. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,9. Стрелок произвёл три выстрела. Найти вероятность того, что *три* выстрела дали попадание.

6. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает её наугад. Какова вероятность того, что ему придётся звонить *не более*, чем *три раза*?

7. Изделие принадлежит к одной из 3 партий с вероятностями $p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}25$. Вероятности того, что изделие проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что *изделие проработает заданное число часов*.

8. На фабрике, изготовляющей болты, машины А, В и С производят соответственно 25, 35 и 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет, соответственно 5, 4 и 2 %. Случайно выбранный из продукции болт оказался бракованным. Какова вероятность того, что он был произведен *машиной* А, *машиной* В, *машиной* С?

9. В хлопке содержится 10 % коротких волокон. Определить вероятность того, что среди отобранных наудачу *шести* волокон окажется *не более двух коротких*.

10. По данным технического контроля в среднем 10 % изготовляемых на заводе часов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что *из* 400 *изготовленных часов* 350 *штук не будет нуждаться в дополнительной регулировке*?

11. Известно, что $\frac{3}{5}$ всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов выпускаются первым сортом. Изготовленные аппараты расположены один возле другого случайным образом. Приёмник берёт первые попавшиеся 200 штук. Чему равна вероятность того, что среди них аппаратов первого сорта окажется: а) *от* 120 *до* 150 штук; б) *от* 90 *до* 150 штук включительно.

12. В урне имеется 4 шара с номерами 1, 2, 3, 4. Вынули два шара. Случайная величина X – сумма номеров вынутых шаров. Построить *ряд распределения* случайной величины X, найти её *функцию распределения*, *математическое ожидание* и *дисперсию*.

13. Дана *плотность вероятности* случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<2 \\ A(x-2)(4-x), & 2\le x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *интегральную функцию распределения*; в) *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины.

14. Дана *функция распределения* случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0\le x\le \pi \\ 1, & x>\pi \end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; б) *вычислить* $P\left(\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$; в) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Случайная величина X, распределенная по *нормальному закону*, представляет собой ошибку измерения некоторого расстояния. При измерении допускается систематическая ошибка на 1,2 м (в сторону завышения). Средне-квадратическое отклонение ошибки измерения равно 0,8 м. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдёт по абсолютной величине 1,6 м.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 20

1. Бросаются две игральные кости. Пусть А – событие, состоящей в том, что сумма очков нечётная; В – событие, заключающееся в том, что *хотя бы на одной* из костей выпала единица. *Описать* событие А·В, А+В.

2. В партии из 80 банок консервов бракованных оказалось 6. Вычислить вероятность того, что *две подряд взятые банки окажутся бракованными*?

3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлечённых 2 деталей есть *хотя бы одна* стандартная.

4. На девяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Две из них вынимают наугад и кладут на стол в порядке появления, затем читается полученное число. Найти вероятность того, что это число *чётное*.

5. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду первого, второго и третьего спортсмена равны 0,8; 0,7 и 0,6, соответственно. Найти вероятность того, что *хотя бы один* из этих спортсменов попадёт в сборную.

6. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность принятия для первого вызова равна 0,2; для второго вызова – 0,3; для третьего вызова – 0,4. Найти *вероятность установления связи*, если события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы.

7. В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчёта автомат не откажет, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчёт на наугад взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчёта *машина не откажет*.

8. Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Найти вероятность того, что это *мужчина* (*женщина*)? (Считать, что мужчин и женщин *одинаковое* число).

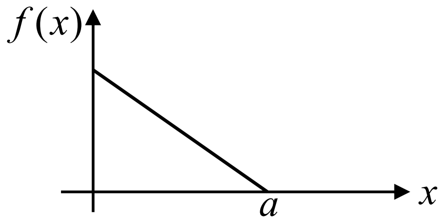
9. Вероятность изготовления стандартной детали на автоматическом станке равна 0,9. Определить, чему равна вероятность того, что из *пяти наудачу взятых деталей три окажутся стандартными*.

10. Вероятность обрыва нити в течение минуты на каждом веретене прядильного станка равна 0,001. Найти вероятность того, что в течение одной минуты на 100 веретенах нить оборвётся: а) *один* раз; б) *хотя бы один* раз.

11. Вероятность выпуска нестандартной электролампы равна 0,1. Чему равна вероятность того, что в партии 2000 ламп: а) число стандартных будет *не менее* 1790; б) число нестандартных будет *менее* 101 штук?

12. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо, друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,9. Найти вероятность того, что в цель попадёт *хотя бы один* стрелок.

13. Случайная величина X распределена по *закону прямоугольного треугольника* в интервале $(0;\ a)$ (см. рис.):



Требуется: а) написать выражение для *плотности распределения* $f(x)$; б) найти *функцию распределения* $F(x)$; в) вычислить *вероятность* $P\left(\frac{a}{2}<x<a\right)$.

14. Дана *функция распределения* случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ 2A\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right), & x>1 \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *плотность вероятности* $f(x)$; в) *математическое ожидание* и *дисперсию*.

15. Случайные ошибки измерения подчинены *нормальному закону* со средне-квадратическим отклонением $\sigma=1$ мм и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка *хотя бы одного* из них не превзойдёт по абсолютной величине 1,28 мм.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 21

1. Производится наблюдение за четырьмя однородными объектами. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен, или не обнаружен. Рассматриваются события: A – обнаружен *хотя бы один* объект; B – обнаружено *не менее* двух объектов; C – обнаружено ровно *три* объекта; D – обнаружены все *четыре* объекта. *Совпадают ли* события AD и BD? Указать, *в чём состоят* события: A+B; AB; AD.

2. Из колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу 3. Найти вероятность того, что эти карты будут: *тройка*, *семёрка*, *туз*.

3. Из пяти букв составлено слово “***книга***”. Ребёнок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово “*книга*”.

4. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; 9 очков – 0,3; 8 и меньше – 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет *не менее девяти очков*.

5. В мастерскую по ремонту радиоприёмников поступили две партии радиоламп определённого типа. В первой партии ламп в 2 раза больше, чем во второй; качество ламп в первой партии более высокое. Из большого числа нерассортированных ламп мастер берёт первые попавшиеся две. Чему равна вероятность того, что обе лампы окажутся: а) из какой-либо *одной* партии; б) из *различных* партий.

6. Вероятность *хотя бы одного* попадания в цель при четырёх выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при *одном* выстреле.

7. В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что *мишень будет поражена*, если стрелок произведёт *один выстрел из наудачу взятой винтовки*.

8. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина *грузовая*.

<u>9</u>. В случайно выбранной семье 6 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, определить вероятность того, что в выбранной семье окажется: а) 4 *мальчика* и 2 *девочки*; б) *не более* 2-х *мальчиков*; в) *более* 2-х *мальчиков*.

<u>10</u>. В автобусном парке 100 автобусов. Известно, что вероятность выхода из строя мотора в течение дня равна 0,1. Чему равна вероятность того, что в определённый день окажутся неисправными моторы у 12 *автобусов*?

<u>11</u>. Известно, что $\frac{2}{5}$ всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов выпускаются первым сортом. Изготовленные аппараты расположены один возле другого случайным образом. Приёмщик берёт первые попавшиеся 100 штук. Чему равна вероятность того, что среди них аппаратов первого сорта окажется: а) *от* 20 *до* 80 штук; б) *от* 95 *до* 100 штук включительно.

<u>12</u>. Случайная величина X имеет следующее распределение вероятностей:

x_i	− 1,0	− 0,5	− 0,1	0	0,2	0,5	1,0	1,5	2,0
p_i	0,005	0,012	0,074	0,102	0,148	0,231	0,171	0,160	?

Найти *функцию распределения*, *математическое ожидание* и *среднеквадратическое отклонение* этой случайной величины.

<u>13</u>. Плотность вероятности случайной величины X, распределённой по *закону Рэлея*, имеет вид:

$$f(x) = Axe^{-\frac{Ax^2}{2}},\ x > 0,\ A \geq 0.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *интегральную функцию распределения*.

<u>14</u>. Случайная величина задана *функцией распределения*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; б) *вероятности попадания* случайной величины X *в промежутки* $(1;2{,}5)$ и $(2{,}5;\ 3{,}5)$; в) *математическое ожидание* и *дисперсию*; г) построить *графики* функций $f(x)$ и $F(x)$.

<u>15</u>. Средне-квадратическое отклонение случайной величины, распределённой по *нормальному закону*, равно 2 см, а её математическое ожидание равно 20 см. Найти, *в каких границах* следует ожидать значение случайной величины, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 22

1. Пусть A, B, C и D – четыре произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из данных 4 событий: а) произошло *только* A; б) произошло *только одно* событие; в) произошли *два* события.

2. В шахматном турнире участвуют 10 человек, которые по жребию распределены в две группы по 5 человек. Найти вероятность того, что *двое наиболее сильных игроков будут играть в разных группах*.

3. В лотерее 100 билетов; среди них один выигрыш в 50 рублей, 3 выигрыша по 25 рублей, 6 – по 10 рублей, 15 – по 3 рубля. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выиграть *не менее* 25 рублей; б) выиграть *не более* 25 рублей.

4. События A, B, C, D образуют полную группу. Вероятности событий равны: $p(A)=0,1$; $p(B)=0,4$; $p(C)=0,3$. Чему равна *вероятность* события D?

5. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,8. Оба стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) оба промахнутся; в) *хотя бы один* попадёт в мишень; г) произойдёт *одно* попадание в мишень.

6. Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя равна 0,0003. *Из скольких генераторов должна состоять партия*, чтобы вероятность наличия в ней *хотя бы одного* бракованного была *не более* 0,01?

7. При проверке качества зёрен пшеницы было установлено, что все зёрна могут быть разделены на 4 группы. К первой группе принадлежат 96 %, ко второй – 2 %, к третьей – 1 %, к четвёртой – 1 % всех зёрен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зёрен, для семян первой группы – 0,50; для семян второй группы – 0,2; для семян третьей группы – 0,18; для семян четвёртой группы – 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наудачу зерна *вырастет колос*, содержащий *не менее* 50 *зёрен*.

8. В пирамиде установлены 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень одним выстрелом из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки *с оптическим прицелом* или *без него*?

9. Вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартна, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 *деталей не более двух нестандартных*.

10. При штамповке металлических деталей (клемм) получается 30 % брака. Найти вероятность наличия *от* 790 *до* 820 (включительно) годных деталей в партии из 900 клемм.

11. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 *испытаниях* событие появится 76 *раз*.

12. На двух автоматических станках производятся стальные кольца. Законы распределения количества бракованных изделий отображаются табл.1. и 2:

Табл. 1.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,6	?	0,1

Табл. 2.

y_i	0	1	2
g_i	0,5	0,3	?

Составить *закон распределения* количества бракованных колец, производимых в течение смены обоими станками, найти *дисперсию* рассматриваемой случайной величины. Проверить на этом примере *свойство дисперсии суммы независимых случайных величин*.

13. *Плотность распределения* случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ A\sin^2 x, & 0\le x\le\pi \\ 0, & x>\pi \end{cases}.$$

Найти *коэффициент* A и *интегральную функцию распределения*.

14. Величина X задана *функцией распределения*:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{64}, & 0\le x\le 8 \\ 1, & x>8 \end{cases}.$$

Найти: а) *плотность вероятности* $f(x)$; б) *математическое ожидание* и *дисперсию* случайной величины X; в) построить *графики* $f(x)$ и $F(x)$.

15. Для величины, которая распределена по *нормальному закону*, найти вероятность того, что $|X|>2\sigma$, если $M[X]=0$.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 23

1. Токарь изготовил три детали. Пусть событие $A_i (i = 1, 2, 3)$ заключается в том, что i-ая деталь, изготовленная им, бракованная. Записать событие, состоящее в том, что: а) *по крайней мере* 2 *детали качественные*; б) *точно* 2 *детали качественные*; в) 2 *детали бракованные*.

2. Из 6 карточек с буквами **Л**, **И**, **Т**, **Е**, **Р**, **А** выбрали наугад 4 и последовательно уложили их друг за другом. Найти вероятность того, что получится слово “*тире*”.

3. Спортивная группа состоит из 7 спортсменов – студентов экономического, 9 – радиотехнического, 6 – механического и 2 – авиационного факультетов. Какова вероятность того, что *три случайно отобранных студента окажутся студентами радиотехнического факультета*?

4. Библиотека состоит из 15 различных книг, причём 5 книг стоят по 400 руб., 3 книги – по 100 руб., 2 – по 300 руб. и 5 – по 200 руб. Найти вероятность того, что взятые наудачу *две* книги стоят 400 руб.

5. Станок-автомат изготовляет 99 % стандартных гаек М-16. Из скольких гаек должна состоять партия, чтобы вероятность обнаружить в ней *хотя бы одну* нестандартную была не больше 0,1?

6. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,65. Какова вероятность того, что в течение часа: а) *ни один станок* не потребует внимания рабочего; б) *все* 3 *станка* потребуют внимания рабочего; в) *какой-нибудь* 1 *станок* потребует внимания рабочего?

7. Из 25 кинескопов, имеющихся в телевизионном ателье, 5 штук изготовлены заводом А; 12 штук – заводом Б; 8 штук – заводом В. Вероятность того, что кинескоп, изготовленный заводом А, в течение гарантийного срока не выйдет из строя, равна 0,95; для завода Б – 0,9; для завода В – 0,8. Найти вероятность того, что *наудачу взятый кинескоп выдержит гарантийный срок*.

8. В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием К, 30 % – с заболеванием L, 20 % – с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7; для болезней L и М – 0,8 и 0,9, соответственно. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал *заболеванием* К.

9. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,015. Из большой партии изделий отбирается 100 шт. и проверяется их качество. Если среди них окажется 3 или более бракованных, то вся партия возвращается на сплошную разбраковку. Определить вероятность того, что *партия будет отвергнута*.

10. Изделие некоторого производства содержит 5 % брака. Вычислить вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) не окажется *ни одного испорченного*; б) будут 2 *испорченных изделия*.

11. Вероятность появления события в каждом из независимых опытов равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 *опытах* событие появится *не менее* 70 и *не более* 80 раз.

12. Рабочий у конвейера при сборке механизма устанавливает в него определённую деталь. Эту деталь приходится в некоторых случаях дополнительно обрабатывать (подгонять) и проверять качество подгонки пробной установкой её в механизм. Закон распределения случайной величины X – количества пробных установок детали в механизм – задан таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,38	0,26	0,20	0,14	0,02

Найти *математическое ожидание* и *дисперсию* рассматриваемой случайной величины.

13. Случайная величина характеризуется *функцией распределения*:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^3 + Ax, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; в) *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины; г) построить *графики* $F(x)$ и $f(x)$.

14. *Плотность вероятности* случайной величины *X*:

$$f(x) = \frac{2Ae^x}{e^{2x}+1}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *функцию распределения* этой случайной величины; в) *вероятность* того, что она примет какое-нибудь значение, *не меньшее* 1.

15. Случайная величина X подчинена *нормальному закону* с математическим ожиданием, равным нулю. Вероятность попадания случайной величины на промежуток $(-2;2)$ равна 0,5. Найти *средне-квадратическое отклонение* и *дифференциальную функцию распределения*.

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 24

1. Участковый врач обслуживает на дому троих больных. Событие А – в течение суток врач потребуется первому больному, В – второму, С – третьему. Записать через А, В и С выражения событий, состоящих в том, что: а) *все* больные вызовут врача; б) *только один* больной вызовет врача; в) *хотя бы один* не вызовет врача.
2. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 чёрных. Вытянули 2 шара наугад. Какова вероятность того, что *оба шара белые*?
3. Буквы **А**, **А**, **А**, **Н**, **Н**, **С** написаны по одной на шести кубиках и уложены в урну. Затем кубики последовательно вынимают наугад и укладывают друг за другом. Найти вероятность того, что при этом получится слово "*ананас*".
4. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали – заводом № 2. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что *хотя бы одна* из них окажется изготовленной *заводом* № 1.
5. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что *первого* и *второго июля будет ясная погода*.
6. Вероятность попадания в цель каждым из 2-х стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причём каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень получает приз. Найти вероятность того, что получит приз стрелок, начавший стрелять *первым*; *вторым*.
7. Три стрелка произвели залп, причём две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что *третий стрелок поразил мишень*, если вероятность попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками равны $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}4$, соответственно.
8. Наборщик пользуется двумя кассами. В первой кассе 90 %, а во второй – 80 % отличного шрифта. Найти вероятность того, что *наудачу извлечённая литера из наудачу взятой кассы будет отличного качества*.
9. Найти вероятность того, что в семье с 6 детьми, *не менее двух девочек*. Предполагается, что вероятности рождения мальчиков и девочек одинаковые.
10. Вероятность того, что покупатели необходим костюм 48-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что *из* 150 *покупателей* 120 *потребуют костюмы этого размера*.

<u>11</u>. Случайная величина X имеет распределение вероятностей, заданного нижеприведенной таблицей.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,021	0,081	0,156	0,201	?	0,151
x_i	6	7	8	9	10	11
p_i	0,097	0,097	0,004	0,026	0,007	0,012

Найти *математическое ожидание* и *дисперсию* данной случайной величины.

<u>12</u>. Всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что *из* 1000 *посеянных семян взойдут не менее* 700.

<u>13</u>. Случайная величина подчинена закону распределения с *плотностью вероятности*:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ A(3x-x^2), & 0\le x\le 3 \\ 0, & x>3 \end{cases}.$$

Найти: а) *коэффициент* A; б) *интегральную функцию распределения* этой случайной величины; в) *вероятность попадания* X *в интервал* $(1;2)$.

<u>14</u>. *Функция распределения* случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1-\cos(2x)}{2}, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; б) *математическое ожидание* и *дисперсию* этой случайной величины; в) построить *графики* $F(x)$ и $f(x)$.

<u>15</u>. Случайная величина X распределена *нормально* с математическим ожиданием равным 25. Вероятность попадания X в интервал $[10;15]$ равна 0,2. Чему равна *вероятность попадания в интервал* $[35;40]$?

Задания для самостоятельного решения

Теория вероятностей

Вариант 25

1. Производится два выстрела по мишени. Опишите для этого опыта структуру пространства элементарных исходов (событий). Каким является событие, равное *сумме* приведенных Вами событий? Какими являются события, равные *пересечению* любых двух событий из приведенных Вами.

2. Подлежит контролю 260 деталей, из которых 5 нестандартных. Какова вероятность того, что *из* 2-х *наудачу* взятых деталей *одна окажется нестандартной*?

3. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь окрашенных граней: а) *одну*; б) *две*; в) *три*.

4. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,6; вторым – 0,7. Найти вероятность того, что *хотя бы один* из них попал в мишень.

5. Пусть вероятность того, что покупателю женской обуви понадобится 37-й размер, равна 0,25. Найти вероятность того, что из четырёх первых покупателей обувь этого размера: а) *никому* не потребуется; б) потребуется *хотя бы одному*.

6. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение смены первый станок потребует внимания рабочего, равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего какие-либо *два* станка.

7. На сборку поступило 3000 деталей с первого автомата и 2000 – со второго. Первый автомат даёт 0,2 % брака; второй – 0,3 %. Найти *вероятность попадания на сборку бракованной детали*.

8. В трёх урнах имеются белые и чёрные шары. В 1-ой урне – 3 белых и 1 чёрный шар, во 2-ой – 6 белых и 4 чёрных, в 3-ей – 9 белых и 1 чёрный. Из наугад выбранной урны выбирается случайным образом шар. Найти вероятность того, что он *белый*.

9. Среди вырабатываемых рабочим деталей в среднем 4 % брака. Какова вероятность того, что среди взятых для испытания *пяти деталей одна бракованная*?

10. Принимая вероятность изготовления нестандартной детали 0,05, найти вероятность того, что *из взятых* 5 *деталей* 4 *окажутся стан-*

дартными.

11. В хлопке 60 % длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 40 *волокон не более* 5 *длинных*?

12. Дан ряд распределения случайной величины Х:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	?

Построить *график* функции распределения этой случайной величины, найти её *математическое ожидание* и *дисперсию*.

13. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2+\pi^2}$ является *плотностью вероятности* некоторой случайной величины и вычислить *вероятность попадания* этой случайной величины *в интервал* $(\pi;\infty)$.

14. Дана *функция распределения* случайной величины Х:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Найти: а) *дифференциальную функцию распределения* $f(x)$; б) *вероятность* $P\left(\dfrac{\pi}{6}\le x\le \dfrac{\pi}{3}\right)$; в) построить *графики* функций $F(x)$ и $f(x)$.

15. Случайная величина Х распределена *нормально* с математическим ожиданием $M[X]=6$ и средне-квадратическим отклонением $\sigma[X]=2$. Найти *вероятность* того, что в результате испытания случайная величина Х примет значение, заключённое *в промежутке* $(4;8)$.

V

Тема: *Элементы* ***математической статистики***

***56*. "Основные определения. Статистический ряд. Функция распределения"**

Математическая статистика изучает математические методы систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов о природе исследуемого явления.

56.1. ***Предмет, метод и основные задачи математической статистики***

Статистическое описание совокупности однородных объектов занимает промежуточное состояние между индивидуальным описанием каждого из объектов и описанием самой совокупности по её общим свойствам. *Статистический метод* сводится к подсчёту объектов, входящих в те или иные группы, рассмотрению распределения количественных признаков, применению выборочного метода, использованию теории вероятностей при достаточно большом числе наблюдений. Сущность статистического метода определяет предмет математической статистики. *Математическая статистика* в основном решает *три основные задачи*:

1 – *оценка на основе наблюдений неизвестной статистической функции распределений*;

2 – *оценка неизвестных параметров распределения*;

3 – *выдвижение и проверка статистических гипотез*.

56.2. ***Статистический ряд***

Пусть проводится исследование совокупности объектов, которые характеризуются качественным или количественным признаком X. Например, имеется партия деталей. Качественным признаком является стандартность детали, а количественным – например, их длина. При статистическом изучении большого количества объектов, чаще всего, *из общего множества объектов выбирают их ограниченное количество, которое наиболее полно описывает свойства всего множества объектов*.

Вся совокупность объектов, *подлежащая изучению*, называется ***генеральной совокупностью***.

Ограниченная часть объектов, *наиболее полно характеризующая свойства генеральной совокупности*, называется ***выборочной совокупностью***.

Число объектов в генеральной и выборочной совокупностях называется ***объёмом выборки***.

Выборочный метод состоит в том, что после проведения серии независимых испытаний (опыты независимы в смысле теории вероятностей) из генеральной совокупности объёмом N берётся выборка объёмом $n \le N$ (*из генеральной совокупности удаляют данные, которые резко отличаются от остальных*), после чего находят характеристики выборки, которые принимаются в качестве соответствующих характеристик генеральной совокупности.

Пусть над случайной величиной X проводится серия независимых испытаний, в каждом из которых случайная величина X принимает определённое значение x_1, x_2, x_3, …, x_n.

Совокупность результатов наблюдений называется ***простой статистической совокупностью***.

Если случайная величина X принимает m_i раз значение x_i, то объём выборки равен $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$.

X	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Ряд значений m_i, расположенные в порядке возрастания значений, называется ***вариационным рядом*** (***упорядоченной выборкой***), значения x_i называются ***вариантами***, а числа m_i – их ***частотами***.

Числа $\boxed{p_i^* = \frac{m_i}{n}}$ называются ***относительными частотами***.

Разность между наибольшим $\boxed{x_{max}}$ и наименьшим $\boxed{x_{min}}$ значениями в выборке называется ***размахом варьирования*** или ***широтой распределения выборки***, т.е. $\boxed{l = x_{max} - x_{\min}}$.

Перечень вариант и *соответствующих им частот* (или *относительных частот*) называют ***статистическим распределением выборки.***

X	$(x_1;\, x_2]$	$(x_2;\, x_3]$	…	$(x_{k-1};\, x_k]$
m_i	m_1	m_2	…	m_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

Если число опытов достаточно велико и случайная величина X непрерывна, то весь диапазон значений случайной величины X разбивают на отрезки $(x_i;\, x_{i+1}]$, которые располагают в порядке возрастания. Подсчитывают количество значений случайной величиной X, которые попали в этот интервал, т.е. количество значений m_i, приходящихся на каждый разряд i (интервал $(x_i;\, x_{i+1}]$). Вычисляют статистические *относительные частоты* попадания случайной величины X в интервал $(x_i;\, x_{i+1}]$, т.е. величины $\boxed{p_i^* = \dfrac{m_i}{n}}$. Тогда статистическое распределение имеет вид, показанный в таблице.

Число интервалов, на которые разбивается выборка, не должно быть *слишком малым* (в этом случае относительные частоты $\boxed{p_i^* = \dfrac{m_i}{n}}$ обнаруживают незакономерные колебания) и *слишком большим* (в этом случае статистический ряд грубо описывает свойства распределения). Если число испытаний составляет от 200 до 300, то в предположении *нормального* распределения случайной величины X рекомендуется брать 12 интервалов. В большинстве практических случаев рекомендуют ***формулу Серджеса*** для вычисления шага h, определяющего длину интервала:

$$\boxed{h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n} = \frac{l}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n}},$$

где x_{max} и x_{min} – наибольшее и наименьшее значения случайной величины X в выборке, l – *размах варьирования*. Отметим, что концы интервалов необязательно должны совпадать с наблюдёнными значениями. За начало первого интервала выбирают значение

$$\boxed{x_1 = x_{min} - \frac{h}{2}},$$

все остальные значения концов интервалов вычисляют по формуле

$$\boxed{x_{i+1} = x_i + h}.$$

Вычисление концов интервалов продолжается до тех пор, пока некоторое значение x_k не станет больше или равным наибольшему значению значения случайной величины X в выборке, т. е. x_{max}.

Пример 1. Наблюдатель в течение 30 дней декабря измерял температуру воздуха (см. таблицу). Найти статистическое распределение полученной выборки.

Таблица измерений температуры в течении 30 дней декабря

j	x_j	j	x_j	j	x_j
1	−11,8	11	−13,2	21	−14,5
2	−10,5	12	−11,3	22	−11,7
3	−9,6	13	−10,1	23	−10,5
4	−8,0	14	−9,0	24	−9,4
5	−6,9	15	−7,0	25	−7,9
6	−13,2	16	−13,1	26	−14,7
7	−11,5	17	−11,3	27	−11,7
8	−10,3	18	−10,0	28	−10,4
9	−9,1	19	−8,7	29	−9,4
10	−7,7	20	−6,9	30	−7,7

Проведём *упорядочение* полученной выборки

Таблица упорядоченных значений температуры в порядке возрастания

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	−14,7	11	−11,3	21	−9,1
2	−14,5	12	−10,5	22	−9,0
3	−13,2	13	−10,5	23	−8,7
4	−13,2	14	−10,4	24	−8,0
5	−13,1	15	−10,3	25	−7,9
6	−11,8	16	−10,1	26	−7,7
7	−11,7	17	−10,0	27	−7,7
8	−11,7	18	−9,6	28	−7,0
9	−11,5	19	−9,4	29	−6,9
10	−11,3	20	−9,4	30	−6,9

Вычислим размах варьирования $l = x_{max} - x_{min} = -6{,}9 - (-14{,}7) = 7{,}8$.

В предположении, что исследуемая величина является случайной *непрерывной* величиной, вычислим по ***формуле Серджеса*** длину интервала: $h = \dfrac{l}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n} \approx \dfrac{7{,}8}{5{,}91} = 1{,}32$.

○ При вычислении длины интервала всегда выбирают в значении шага на один разряд больше, чем число разрядов после запятой в данной таблице. ○

Вычислим концы интервалов:

$$x_1 = x_{min} - \frac{h}{2} = -14{,}7 - \frac{1{,}32}{2} = -15{,}36 < x_{\min}, \quad x_2 = x_1 + h = -15{,}36 + 1{,}32 = -14{,}54,$$

$x_3 = x_2 + h = -14{,}54 + 1{,}32 = -13{,}22$, $\quad x_4 = x_3 + h = -13{,}22 + 1{,}32 = -11{,}90$,
$x_5 = x_4 + h = -11{,}90 + 1{,}32 = -10{,}58$, $\quad x_6 = x_5 + h = -10{,}58 + 1{,}32 = -9{,}26$,
$x_7 = x_6 + h = -9{,}26 + 1{,}32 = -7{,}94$, $x_8 = x_7 + h = -7{,}94 + 1{,}32 = -6{,}62 > -6{,}9 = x_{\max}$.

Следовательно, число интервалов равно 7. Таким образом,

I_i	(−15,36; −14,54]	(−14,54; −13,22]	(−13,22; −11,90]	(−11,90; −10,58]	(−10,58; −9,26]	(−9,26; −7,94]	(−7,94; −6,62]
m_i	1	1	3	6	9	4	6
p_i^*	0,03	0,03	0,10	0,20	0,30	0,13	0,20

I_i	(−15,36; −14,54]	(−14,54; −13,22]	(−13,22; −11,90]	(−11,90; −10,58]	(−10,58; −9,26]	(−9,26; −7,94]	(−7,94; −6,62]
p_i^*	0,03	0,03	0,10	0,20	0,30	0,13	0,20
$\frac{p_i^*}{h}$	0,025	0,025	0,076	0,152	0,227	0,101	0,152

56.3. *Полигон и гистограмма*

Геометрическая иллюстрация статистических данных позволяет не только представить их в наглядной форме, но и проанализировать в простом и доступном виде. Если в прямоугольной системе координат (по оси абсцисс откладывают значения случайной величины X, а по оси ординат *частоты* (*относительные частоты*) попадания в интервал i) соединить точки, которые имеют координаты ($u_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$; m_i $\left(\textit{или } \frac{p_i^*}{h}\right)$), то получим ***полигон частот*** (***относительных частот*** (рис. 1)). Если на каждом интервале построить прямоугольник высотой равной $\frac{p_i^*}{h}$, то получим ***гистограмму относительных частот*** (***относительных частот*** (рис. 2)):

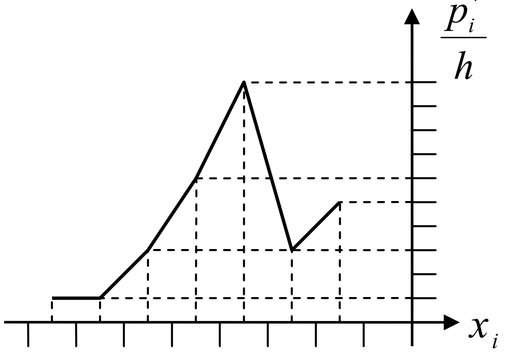


Рис. 1. *Полигон относительных частот.*

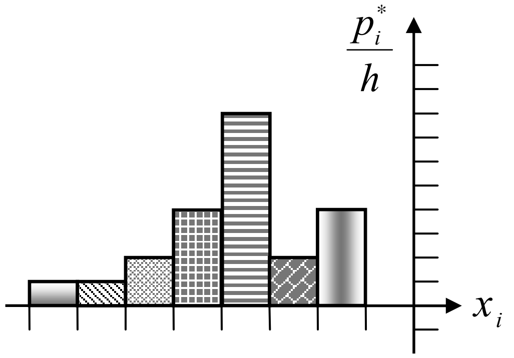


Рис. 2. *Гистограмма относительных частот.*

56.4. *Статистическая функция распределения*

Статистической функцией распределения $F^*(x)$ случайной величины X называется закон изменения относительной частоты события $X < x_{i+1}$ для данного статистического интервала, т.е.

$$F_k^*\left(x_{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i^*\left(X < x_{i+1}\right)$$

или в развёрнутом виде:

$$F_0^*\left(x_1\right) = P(X < x_1) = 0\,,\ \forall x \le x_1;$$
$$F_1^*\left(x_2\right) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1^*,\ \forall x \in (x_1;\ x_2];$$
$$F_2^*\left(x_3\right) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + (X = x_2) = p_1^* + p_2^*,\ \forall x \in (x_2;\ x_3];$$
$$.\ .$$
$$F_{k-1}^*\left(x_k\right) = p_1^* + p_2^* + \ldots + p_{k-1}^*,\ \ \forall x \in (x_{k-1};\ x_k];$$
$$F_k^*\left(x_{k+1}\right) = 1,\ \forall x \ge x_k\,.$$

Для ***Примера 1*** *статистическая функция распределения* $F^*(x)$ имеет вид (*ступенчатый вид для дискретной* случайной величины, и *плавная кривая – для непрерывной* величины) (рис. 3).

Различие между функцией распределения $F(x)$ и статистической функцией распределения $F^*(x)$ состоит в том, что *первая определяет вероятность события* $X < x_{i+1}$, а *вторая – относительную частоту появления того же события*.

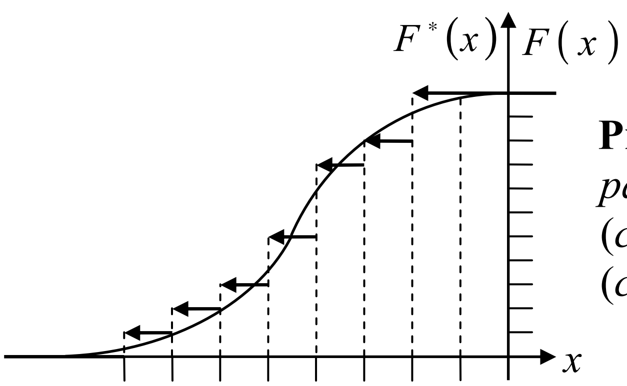


Рис. 3. *Статистическая функция распределения для непрерывной* (*сплошная линия*) *или дискретной* (*ступеньки*) *случайной величины*.

57. "*Оценки параметров распределения*"

Большинство случайных величин подчиняются нормальному закону распределения, поэтому предположим, что исследуемая случайная величина является *нормальной*. При решении задачи **2** математической статистики (*оценка параметров распределения*) применяют точечные и интервальные оценки параметров распределения.

57.1. *Точечные оценки*

Любое значение искомого параметра, вычисленное на основе ограниченного числа экспериментальных данных, всегда содержит элемент случайности. Рассмотрим *точечные оценки* искомых параметров.

Приближённое случайное значение параметра Θ называется его ***оценкой*** $\overline{\Theta}$.

Оценка $\overline{\Theta}_k$ называется ***состоятельной оценкой*** параметра Θ, если для любого, сколь угодно малого положительного числа ε *последовательность оценок* $\overline{\Theta}_k$ *сходится по вероятности к истинному значению параметра* Θ, т.е.

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} P\left(\left|\,\Theta_k - \Theta\right| < \varepsilon\right) = 1}.$$

Оценка $\overline{\Theta}_k$ называется ***несмещённой оценкой*** параметра Θ, если математическое ожидание оценки равно истинному параметру Θ:

$$\boxed{M[\overline{\Theta}_k] = \Theta}.$$

○ Это требование гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценке искомого параметра. ○

Оценка $\overline{\Theta}_k$ называется ***эффективной оценкой*** параметра Θ, если её *дисперсия является наименьшей из всех дисперсий оценок искомого параметра*.

Оценка $\overline{\Theta}_k$, удовлетворяющая требованиям *состоятельности*, *несмещённости* и *эффективности*, называется ***подходящей*** или ***хорошей оценкой*** параметра Θ.

На практике не всегда удаётся одновременно удовлетворить всем требованием *хорошей оценки*. Поэтому укажем способ получения *хорошей оценки* для основных параметров распределения: математического ожидания и дисперсии. Пусть дискретная или непрерывная случайная величина X при проведении серии независимых испытаний принимает набор значений x_i. В качестве оценки математического ожидания принимают *среднее арифметическое* (*наиболее вероятное значение случайной величины* X) полученных данных, т.е.

$$\overline{M}[X]=X_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\text{ , при }p_i^*=1;\ \overline{M}[X]=X_B=\sum_{i=1}^{k}x_ip_i^*\text{ , при }p_i^*\neq 1.$$

Величина $\boxed{\overline{M}[X]=X_B}$ называется ***выборочной средней***.

В дальнейшем для простоты рассуждений будем рассматривать случай, когда все полученные экспериментальные данные x_i различны, т.е. частота значения x_i равна единице.

На основании ***теоремы Чебышёва*** эта оценка математического ожидания является *состоятельной*. Покажем, что эта оценка является *несмещённой*, так как

$$M[\overline{M}[X]]=M[X_B]=M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[x_i]=\frac{1}{n}nM[X]=M[X].$$

Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то *приведенная оценка математического ожидания является эффективной*.

В качестве оценки дисперсии $D[X]$ используется статистическая дисперсия $\overline{D}[X]=D_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{M}[X]\right)^2=\overline{M}[X^2]-\overline{M}^2[X]$. Согласно ***теореме Чебышёва***, эта оценка дисперсии является *состоятельной*, но *смещённой*, так как

$$\overline{D}[X]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{M}[X]\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{n}x_i\,x_j=$$

$$=\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{n}x_i\,x_j\,.$$

Следовательно, математическое ожидание этой оценки равно:

$$M[\overline{D}[X]]=\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}M\left[X^2\right]-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{n}M[X_i\,X_j].$$

Так как оценка $\overline{D}[X]$ не зависит от того, в какой точке выбрать начало координат, то выберем его в точке $\overline{M}[X]$. Тогда

$$M[X_i^2]=M[X_{0i}^2]=D;\ \sum_{i=1}^{n}M[X_i^2]=n\,D$$

и величина $M[X_i\,X_j]=0$ в силу независимости экспериментов. Следовательно, $M\,[\overline{D}[X]]=\frac{n-1}{n^2}n\,D=\frac{n-1}{n}D$, т.е. оценка дисперсии является *смещённой*. Вводя <u>***исправленную оценку дисперсии***</u>

$$\boxed{\overline{D}_{испр.}=\frac{n}{n-1}\overline{D}},$$

получим *несмещённую оценку дисперсии*.

Если частота появления значения x_i отлична от единицы, то оценка дисперсии равна $\overline{D}_{испр.}[X]=\overline{S}^2=\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}p_i^*\left(x_i-\overline{M}[X]\right)^2$ или общая формула $\overline{D}_{испр.}[X]=\overline{S}^2=\frac{n}{n-1}\left(\overline{M}[X^2]-\overline{M}^2[X]\right)$.

57.2. *Метод максимального правдоподобия для нахождения оценок параметров распределения*

Если распределение случайной величины X содержит параметр Θ, который не выражается через математическое ожидание и дисперсию, то для нахождения оценки такого параметра используют *метод максимального правдоподобия*. Суть этого метода состоит в следующем:

– вводят *функцию правдоподобия* $L(x_i;\Theta)=f(x_i;\Theta)$, где $f(x_i;\Theta)$ – плотность вероятности;

– так как экстремумы функции $L(x_i;\Theta)$ совпадают с экстремумами $L(x_i;\Theta)=f(x_i;\Theta)$, то для нахождения оценки параметра Θ решают *уравнение правдоподобия* $\boxed{\frac{\partial\ln\left(L(x_i;\ \Theta)\right)}{\partial\Theta}=0}$.

Если *испытания независимы* в смысле теории вероятностей, то функция правдоподобия выбирается в виде $L(x_i;\ \Theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \Theta)$.

Если распределение случайной величины X содержит k параметров Θ_k, не выражаемых через математическое ожидание и дисперсию, то уравнения правдоподобия имеют вид: $\frac{\partial\ln\left(L(x_i;\ \Theta_k)\right)}{\partial\Theta_k}=0$.

Пример 1. Найти оценку параметра λ **распределения Пуассона** по методу максимального правдоподобия.

Так как $P_n\left(X=x_i\right)=\frac{\lambda^{x_i}}{(x_i)!}e^{-\lambda}$, где n – число проведенных испытаний, x_i – число появлений некоторого события A в опыте i. *Функция правдоподобия* имеет вид:

$$\ln\left(L(x_i;\ \lambda)\right)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{(x_i)!}e^{-\lambda}\right)=\ln\left(\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i)!}e^{-n\lambda}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)!\right)-n\lambda.$$

Воспользуемся *уравнением правдоподобия*

$$\frac{\partial \ln\left(L(x_i;\lambda)\right)}{\partial\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 .$$

Отсюда следует $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Сравнив полученное выражение с выражением для математического ожидания, видим, что оценка λ совпадает с математическим ожиданием.

57.3. *Интервальные оценки*

При малом числе опытов точечная оценка параметра распределения даёт довольно грубое приближение этого параметра. Поэтому при небольшом числе наблюдений используют *интервальную оценку*, которая определяет доверительный интервал для значений оцениваемого параметра. Если величина $\overline{\Theta}$ является оценкой параметра Θ, то с точностью ε и надёжностью γ должно выполняться равенство

$$\boxed{P\left(\left|\overline{\Theta}-\Theta\right|<\varepsilon\right)=\gamma}.$$

Это равенство утверждает, что с доверительной вероятностью γ случайный параметр Θ попадает в интервал $[\overline{\Theta}-\varepsilon;\ \overline{\Theta}+\varepsilon]$. Ранее в теории вероятностей был рассмотрен случай, когда случайная величина X попадала в заданный (неслучайный) интервал. Для исследуемой задачи необходимо знать закон распределения оценки $\overline{\Theta}$, который зависит от распределения случайной величины X, а, следовательно, и от самого оцениваемого параметра Θ и от числа проведенных испытаний n. Если $n \in [20;\ 30]$, то указанное затруднение обходится путём замены неизвестных параметров на их оценки.

В качестве примера построим доверительный интервал для математического ожидания случайной величины X. Пусть произведено n независимых испытаний над случайной величиной X, математическое ожидание и дисперсия которой равны $M[X]$ и $D[X]$, соответственно. Их точечные статистические оценки обозначим посредством $\overline{M}[X]$ и $\overline{D}[X]$. Согласно ***<u>теореме Ляпунова</u>***, случайная оценка математического ожидания $\overline{M}[X]$ распределена по нормальному закону с параметрами:

$$M[\overline{M}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = m\,;\quad D[\overline{M}] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] = \frac{n\,d}{n^2} = \frac{d}{n}\,;$$

$$\sigma[\overline{M}] = \sqrt{D[\overline{M}]} = \sqrt{\frac{d}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Найдём такую величину ε_γ, для которой выполняется равенство:

$$P\left(\left|\overline{M}-M\right|<\varepsilon_\gamma\right)=\gamma.$$

В силу того, что случайная оценка математического ожидания распределена по нормальному закону, то $\gamma=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon_\gamma\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_\gamma=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

где $\Phi^{-1}(t)$ – функция, обратная к ***функции Лапласа*** $\Phi(t)$. Заменяя величину σ по её определению на величину $\sqrt{\overline{D}_{испр.}}=\overline{\sigma}$, получим следующее выражение для доверительного интервала:

$$\boxed{I_\gamma=\left(\overline{M}[X]-\frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right);\ \overline{M}[X]+\frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)}.$$

Аналогично строится доверительный интервал для *дисперсии*.

57.4. *Точные методы построения интервалов для нормальной случайной величины*

Для точного построения доверительных интервалов надо знать закон распределения случайной величины X. Если X – *нормальная* случайная величина, то можно показать, что величины:

$T=\dfrac{n\left(\overline{M}[X]-M[X]\right)}{\overline{\sigma}}$ – подчиняется ***распределению Стьюдента*** с $(n-1)$ "***степенями свободы***" (т.е. распределение характеризуется $(n-1)$ ***связью***);

$V=\dfrac{n-1}{2}\overline{\sigma}^2$ – распределена по ***закону*** "***хи-квадрат*** (χ^2)" (***законы Стьюдента*** и "***хи-квадрат*** (χ^2)" приведены в ***52***).

Применим ***распределение Стьюдента*** для построения точного доверительного интервала для математического ожидания *нормальной* случайной величины X. Пусть выполняется равенство

$$P\left(\left|\overline{M}-M\right|<\varepsilon_\gamma\right)=\gamma.$$

Тогда для случайной величины

$$T=\frac{n\left(\overline{M}[X]-M[X]\right)}{\overline{\sigma}}$$

будет выполняться равенство

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\,\left|\overline{M}-M\right|}{\overline{\sigma}} < \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon_\gamma}{\overline{\sigma}}\right)=\gamma$$

или в принятых обозначениях $\boxed{P\left(\left|T\right|<t_\gamma\right)=\gamma}$, где $t_\gamma=\dfrac{\sqrt{n}\,\varepsilon_\gamma}{\overline{\sigma}}$. Используя таблицы для ***распределения Стьюдента*** по заданной величине γ, находят значение t_γ, по которому вычисляют точность измерений

$$\varepsilon_\gamma = t_\gamma \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}.$$

Записывают *доверительный интервал для **математического ожидания***:

$$\boxed{I_\gamma=\left(\overline{M}[X]-t_\gamma\frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{M}[X]+t_\gamma\frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)}.$$

Аналогичные рассуждения *для **дисперсии*** приводят к следующему выражению *для доверительного интервала*:

$$\boxed{I_\gamma=\left(\frac{(n-1)\overline{\sigma}^2}{\chi_1^2}\ ;\ \frac{(n-1)\overline{\sigma}^2}{\chi_2^2}\right)},$$

где величины χ_1^2 и χ_2^2 определяют по известному числу “***степеней свободы***” и заданной надёжности измерений γ по таблицам для *распределения* “***хи-квадрат*** (χ^2)” из соотношений (***Приложение Е***):

$$\boxed{P\left(\chi^2>\chi_1^2\right)=\frac{1-\gamma}{2}} \text{ и } \boxed{P\left(\chi^2>\chi_2^2\right)=\frac{1+\gamma}{2}}.$$

○ Под “***степенями свободы***” понимают число ограничений, накладываемых на случайную величину X. В качестве таких ограничений могут быть выбраны следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1;\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{M}[X];\quad \overline{M}[X^2]-\overline{M}^2[X]=\overline{D}[X];$$

и другие соотношения. ○

○ Число “***степеней свободы***” можно определить по формуле

$$\boxed{k=l-r-1},$$

где $\boxed{l}$ – количество интервалов, на которые разбивается выборочная совокупность, $\boxed{r}$ – число параметров, входящих в закон распределения (*для нормального закона распределения* $\boxed{r=2}$, так как в выражение для плотности вероятности входят два параметра: m *– математическое ожидание* и σ *– средне-квадратическое отклонение*). ○

58. “***Статистическая проверка гипотез***”

58.1. ***Метод последовательного анализа***

Пусть в результате проведения серии из n независимых испытаний для случайной величины X получен статистический ряд её значений x_1, x_2, …, x_n. После обработки экспериментальных данных находят статистическую функцию распределения, вычисляют оценки параметров и выдвигают гипотезу H относительно закона распределения случайной величины X. Для проверки принятой гипотезы H (третья задача математической статистики) существует несколько математических методов. Одним из таких методов является *метод последовательного анализа*, сущность которого состоит в следующем:

– выбирают критерий проверки (например, саму случайную величину X, значения которой зависят от номера проведенного опыта);

– назначают точность эксперимента и надёжность получаемых результатов;

– проводят испытания и определяют значение критерия проверки;

– если критерий проверки соответствует принятой гипотезе H, то она *принимается*, в противном случае – *отвергается*.

Если по *методу последовательного анализа* построить зависимость, например, случайной величины X от номера проводимого эксперимента, то получим 3 области, размеры которых определяются точностью эксперимента и уровнем надёжности получаемых результатов в зависимости от принятой *гипотезы H о законе распределения* случайной величины X (рис. 4). В зависимости от поведения кривой $X(n)$ принимают то или иное решение о проведении испытаний.

Если график зависимости $X(n)$ при числе опытов N_{I} входит в область I, то *гипотеза H* заменяется новой *гипотезой H_1* (траектория (**1**)), и опыты повторяются. Если график зависимости $X(n)$ находится в области II, то испытания продолжаются до тех пор, пока *гипотеза H* будет либо отброшена, либо принята (траектория (**2**)). Если график зависимости $X(n)$ входит в область III при числе опытов N_{III}, то *гипотеза H* принимается, и опыты прекращаются (траектория (**3**)).

Для реализации метода последовательного анализа разработано несколько математических способов, из которых рассмотрим ***способ Пирсона*** (*критерий χ^2*) и ***способ А.Н. Колмогорова***.

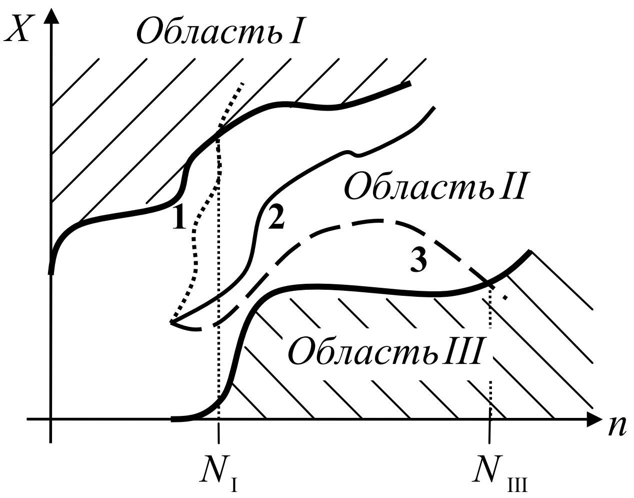


Рис. 4. *Экспериментальные области принятия или отклонения выдвинутых гипотез*:

Область I – *область* *отклонения гипотезы* H .

Область II – *область* *проведения дальнейших испытаний* (*для подтверждения или отклонения гипотезы* H).

Область III – ***область принятия гипотезы*** H .

58.2. *Способ Пирсона* (*критерий* χ^2)

В ***способе Пирсона*** в качестве критерия проверки используется величина $\boxed{U = \chi^2_{расч.} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i^*}}$, где k – число интервалов, на которые разбивается вся выборка, m_i – теоретическая частота попадания случайной величины X в интервал $(x_i;\, x_{i+1}]$, а m_i^* – статистическая частота попадания этой случайной величины в тот же интервал. При увеличении числа опытов n случайная величина $U = \chi^2$ практически не зависит от числа испытаний n и её закон распределения приближается к ***закону распределения*** “***хи-квадрат*** (χ^2)”. Теоретические частоты m_i вычисляются в соответствии с принятой гипотезой о законе распределения случайной величины X и оценкам её параметров распределения.

Вычисляя число “***степеней свободы***”, задавая уровень значимости (обычно принимают $\boxed{\alpha = 0{,}03 \div 0{,}05}$), по таблицам для ***распределения*** “***хи-квадрат*** (χ^2)” находят $\chi^2_{кр.}$. Если $\chi^2_{расч.} < \chi^2_{кр.}$, то гипотеза *принимается*, в противном случае – *отвергается*.

Достоинством ***способа Пирсона*** является то, что он применим тогда, *когда известен вид гипотетического распределения*, *но неиз-*

вестны его параметры.

К *недостаткам* этого способа относятся:
– его применимость при числе опытов $n \geq 100$;
– количество интервалов $k = 7 \div 10$ и частота попадания в i-тый интервал $m_i \geq 5$;
– результаты проверки зависят от способа разбиения выборки на интервалы.

Пример 1. Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка:

X − *содержание* (%) *вольфрама в руде*

0, 89	1, 33	2, 81	0, 64	2, 67	2, 13	4, 27	5, 48	2, 22	4, 11
2, 54	0, 33	3, 69	0, 84	2, 69	3, 63	2, 44	4, 83	4, 12	1, 89
1, 80	1, 13	1, 28	1, 89	2, 33	3, 89	2, 53	1, 67	3, 70	3, 22
1, 17	0, 71	0, 71	2, 67	2, 97	3, 48	2, 87	3, 61	2, 20	0, 35
0, 81	0, 50	1, 41	1, 72	2, 64	2, 09	3, 47	2, 94	4, 38	1, 82
1, 43	1, 74	1, 28	1, 50	5, 16	3, 13	4, 92	3, 18	2, 41	1, 79
1, 89	1, 69	2, 14	1, 80	2, 58	3, 06	2, 07	3, 83	2, 56	3, 65
0, 71	1, 83	0, 48	3, 72	5, 48	2, 72	2, 10	3, 39	2, 19	1, 47
0, 62	1, 28	0, 96	0, 81	2, 93	2, 38	2, 12	3, 77	2, 84	1, 61
3, 10	0, 89	3, 84	1, 61	2, 75	3, 01	0, 45	0, 48	2, 95	2, 77

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.

2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.

3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.

4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.

5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.

6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.

7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.

8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.

9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания M*[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Найдём *решение* поставленной задачи в соответствии с указанными пунктами:

1. Найдём в данной таблице максимальное $x_{max} = 5{,}48$ и минимальное $x_{\min} = 0{,}35$ значения заданной случайной величины X. Вычислим размах варьирования или широту распределения

$$l = x_{max} - x_{\min} = 5{,}48 - 0{,}35 = 5{,}13\,.$$

Определим длину интервалов, на которые разбивается вся выборка (в таблице дано 100 значений, следовательно, $n = 100$; кроме того, при вычислении шага интервала *рекомендуется оставлять на одну цифру больше после запятой*, *чем даны значения в таблице*):

$$h = \frac{l}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n} = \frac{5{,}13}{1 + 3{,}322 \cdot \lg 100} = \frac{5{,}13}{1 + 3{,}322 \cdot 2} = \frac{5{,}13}{7{,}644} = 0{,}671\,,$$

и концы интервалов:

$$x_1 = x_{\min} - \frac{h}{2} = 0{,}35 - \frac{0{,}671}{2} = 0{,}014\,;$$

$$x_2 = x_1 + h = 0{,}014 + 0{,}671 = 0{,}685\,;$$

$$x_3 = x_2 + h = 0{,}685 + 0{,}671 = 1{,}356\,;$$

$$x_4 = x_3 + h = 1{,}356 + 0{,}671 = 2{,}027\,;$$

$$x_5 = x_4 + h = 2{,}027 + 0671 = 2{,}698\,;$$

$$x_6 = x_5 + h = 2{,}698 + 0{,}671 = 3{,}369\,;$$

$$x_7 = x_6 + h = 3{,}369 + 0{,}671 = 4{,}040\,;$$

$$x_8 = x_7 + h = 4{,}040 + 0{,}671 = 4{,}711\,;$$

$$x_9 = x_8 + h = 4{,}711 + 0{,}671 = 5{,}382\,;$$

$$x_{10} = x_9 + h = 5{,}382 + 0{,}671 = 6{,}053 > x_{\max}\,.$$

Итак, вся выборка разбивается на 9 интервалов. Подсчитаем количество раз, которое случайная величина X попадает в тот или иной интервал (правый конец интервала не принадлежит интервалу, подсчёт ведём палочками, зачёркивая их по три штуки, см. табл. 1). Внизу таблицы приведены те величины, которые служат для *самоконтроля* правильности проведенных подсчётов. Изображение *подсчёта попаданий* случайной величины X в указанном виде позволяет увидеть вид гисто-

Таблица 1.

Начальная обработка экспериментальных данных

Интервалы	*Подсчёт попаданий*	m_i^*	$p_i^* = m_i / n$	p_i^* / h
1. $[x_1;\ x_2) = [0{,}014;\ 0{,}658)$	NN II	8	0,08	0,119
2. $[x_2;\ x_3) = [0{,}658;\ 1{,}356)$	NN NN N	15	0,15	0,224
3. $[x_3;\ x_4) = [1{,}356;\ 2{,}027)$	NN NN NN	18	0,18	0,268
4. $[x_4;\ x_5) = [2{,}027;\ 2{,}698)$	NN NN NNN	21	0,21	0,313
5. $[x_5;\ x_6) = [2{,}698;\ 3{,}369)$	NN NN NI	16	0,16	0,238
6. $[x_6;\ x_7) = [3{,}369;\ 4{,}040)$	NN NN I	13	0,13	0,194
7. $[x_7;\ x_8) = [4{,}040;\ 4{,}711)$	NI	4	0,04	0,060
8. $[x_8;\ x_9) = [4{,}711;\ 5{,}382)$	N	3	0,03	0,045
9. $[x_9;\ x_{10}) = [5{,}382;\ 6{,}053)$	II	2	0,02	0,030
	Самоконтроль:	$n = 100$	$\sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1$	$1/h = 1{,}49$

граммы (*относительных*) частот (мысленно надо повернуть второй столбец таблицы против часовой стрелки на 90^0) и *график плотности вероятности* (провести плавную кривую, которая охватывает гистограмму относительных частот). Первый, третий, четвёртый и пятый столбцы таблицы определяют интервальный вариационный ряд, который представим в виде табл. 2.

Таблица 2.

Интервальный вариационный ряд

Интервалы	$u_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	m_i^*	$p_i^* = \dfrac{m_i^*}{n}$	$\dfrac{p_i^*}{h}$
1. $[x_1;\ x_2) = [0{,}014;\ 0{,}658)$	0,336	8	0,08	0,119
2. $[x_2;\ x_3) = [0{,}658;\ 1{,}356)$	1,007	15	0,15	0,224
3. $[x_3;\ x_4) = [1{,}356;\ 2{,}027)$	1,692	18	0,18	0,268
4. $[x_4;\ x_5) = [2{,}027;\ 2{,}698)$	2,363	21	0,21	0,313
5. $[x_5;\ x_6) = [2{,}698;\ 3{,}369)$	3,034	16	0,16	0,238
6. $[x_6;\ x_7) = [3{,}369;\ 4{,}040)$	3,705	13	0,13	0,194
7. $[x_7;\ x_8) = [4{,}040;\ 4{,}711)$	4,376	4	0,04	0,060
8. $[x_8;\ x_9) = [4{,}711;\ 5{,}382)$	5,047	3	0,03	0,045
9. $[x_9;\ x_{10}) = [5{,}382;\ 6{,}053)$	5,718	2	0,02	0,030

Второй столбец табл. 2 *представляет собой абсциссу середин интервалов*. По данным табл. 2 построим гистограммы частот (рис. 5) и относительных частот (рис. 6). Тем самым выполнен пункт **<u>1</u>** задания и частично пункт **<u>2</u>**: на гистограмме относительных частот изображён

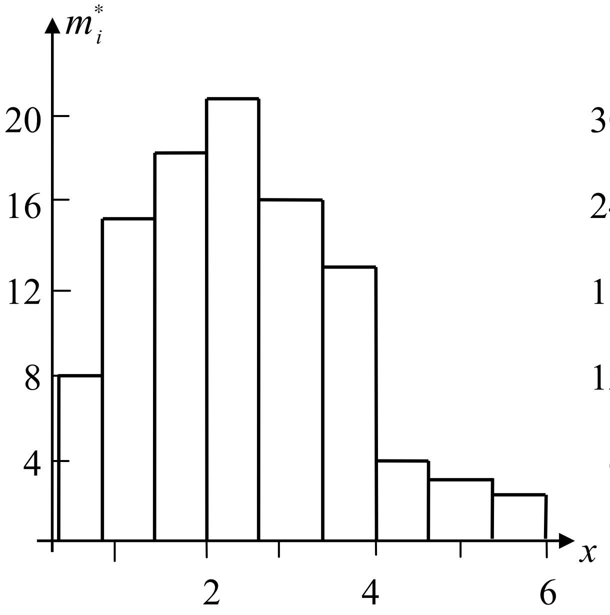


Рис. 5. *Гистограмма частот.*

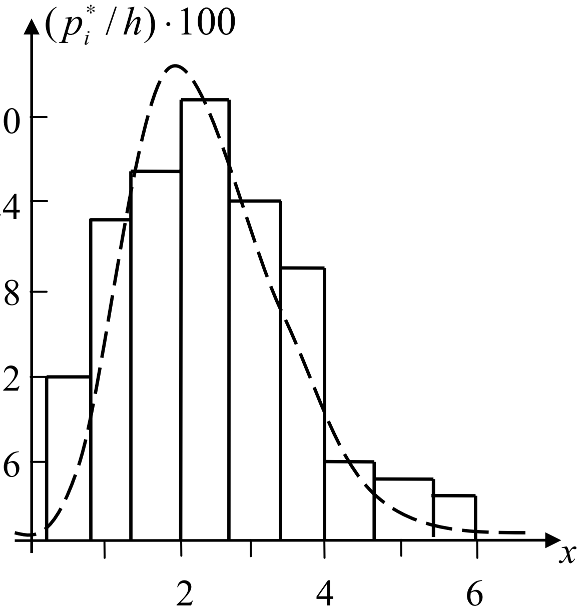


Рис. 6. *Гистограмма относительных частот* (*пунктирной линией показан ориентировочный график плотности вероятности*).

приближённый эскиз графика дифференциальной функции распределения (*плотности вероятности*).

2. Вычислим по табл. 2 значения *статистической функции распределения*, согласно определению $\boxed{F_i^*(x) = P\left(X < x_i\right) = \sum_{k=1}^{n<i} p_k^*}$, и построим её график в предположении, что случайная величина X является *дискретной* (см. на рис. 3 ступенчатый вид статистической функции распределения) или *непрерывной* (на рис. 3 статистическая функция распределения отображена в виде пунктирной линии). Рассмотрим события, определяющие *дискретную* случайную величину X, и вероятности этих событий:

1) $X < 0{,}336$: $P(X < 0{,}336) = P(\Theta) = 0$ – данное событие является *невозможным*;

2) $X < 1{,}007$: $P(X < 1{,}007) = P(X = 0{,}336) = 0{,}08$;

3) $X < 1{,}692$: $P(X < 1{,}692) = P(X = 0{,}336) + P(X = 1{,}007) = 0{,}08 + 0{,}15 = 0{,}23$;

4) $X < 2{,}363$: $P(X < 2{,}363) = P(X = 0{,}336) + P(X = 1{,}007) + P(X = 1{,}692) =$
$$= 0{,}23 + 0{,}18 = 0{,}41;$$

аналогично поступаем далее: *к каждому предыдущему значению прибавляем последующую относительную частоту попадания в новый интервал*:

5) $X < 3{,}034$: $P(X < 3{,}034) = 0{,}41 + 0{,}21 = 0{,}62$;

6) $X < 3{,}705$: $P(X < 3{,}705) = 0{,}62 + 0{,}16 = 0{,}78$;
7) $X < 4{,}376$: $P(X < 4{,}376) = 0{,}78 + 0{,}13 = 0{,}91$;
8) $X < 5{,}047$: $P(X < 5{,}047) = 0{,}91 + 0{,}04 = 0{,}95$;
9) $X < 5{,}718$: $P(X < 5{,}718) = 0{,}95 + 0{,}03 = 0{,}98$;
10) $X \geq 5{,}718$: $P(X < \infty) = 0{,}98 + 0{,}02 = 1 = P(\Omega)$ – данное событие является *достоверным*. Таким образом, *статистической функции распределения* имеет вид:

$$F_i^*(x) = \begin{cases} X < 0{,}336: \ P(X < 0{,}336) = 0 \\ X < 1{,}007: \ P(X < 1{,}007) = 0{,}08 \\ X < 1{,}692: \ P(X < 1{,}692) = 0{,}23 \\ X < 2{,}363: \ P(X < 2{,}363) = 0{,}41 \\ X < 3{,}034: \ P(X < 3{,}034) = 0{,}62 \\ X < 3{,}705: \ P(X < 3{,}705) = 0{,}78 \\ X < 4{,}376: \ P(X < 4{,}376) = 0{,}91 \\ X < 5{,}047: \ P(X < 5{,}047) = 0{,}95 \\ X < 5{,}718: \ P(X < 5{,}718) = 0{,}98 \\ X \geq 5{,}718: \ P(X < \infty) = 1 \end{cases}.$$

3. Составим дискретный вариационный ряд (см. табл. 3) и построим *полигоны* частот (рис. 7) и относительных частот (рис. 8).

Таблица 3.
Дискретный вариационный ряд

$u_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$	m_i^*	$p_i^* = \dfrac{m_i^*}{n}$
0,336	8	0,08
1,007	15	0,15
1,692	18	0,18
2,363	21	0,21
3,034	16	0,16
3,705	13	0,13
4,376	4	0,04
5,047	3	0,03
5,718	2	0,02

4. Построим график функции распределения, исходя из дискретного вариационного ряда (рис. 9).

5. Найдём оценки математического ожидания $M[X]$, дисперсии $D[X]$, средне-квадратического отклонения $\sigma[X]$, используя дискретный вариационный ряд:

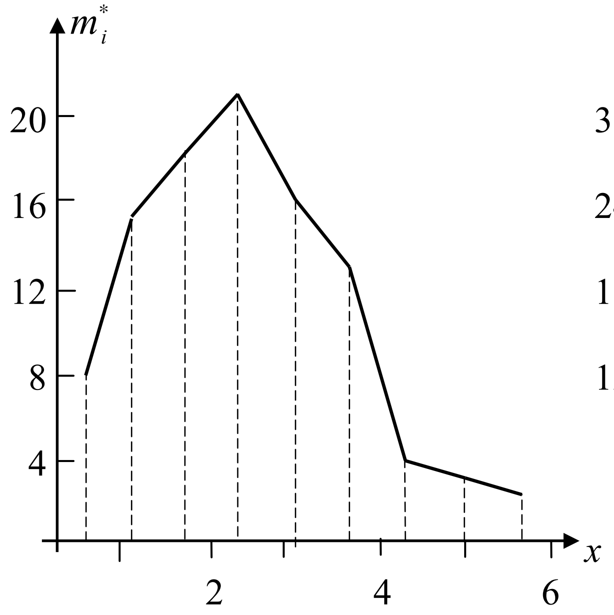


Рис. 7. *Полигон частот.*

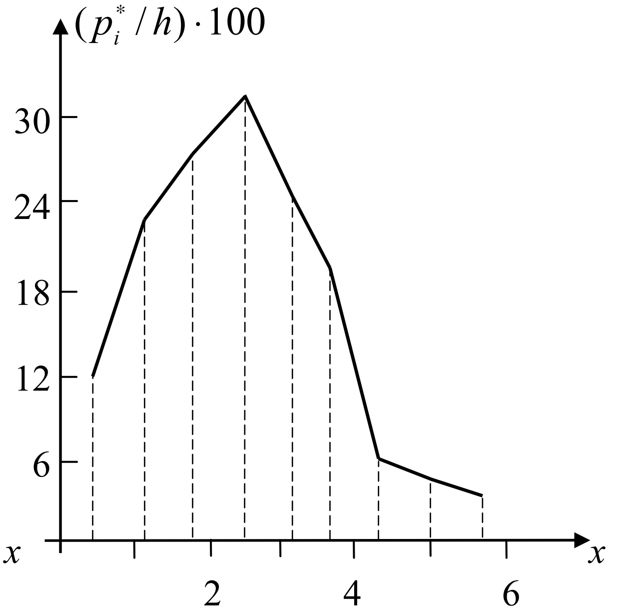


Рис. 8. *Полигон относительных частот.*

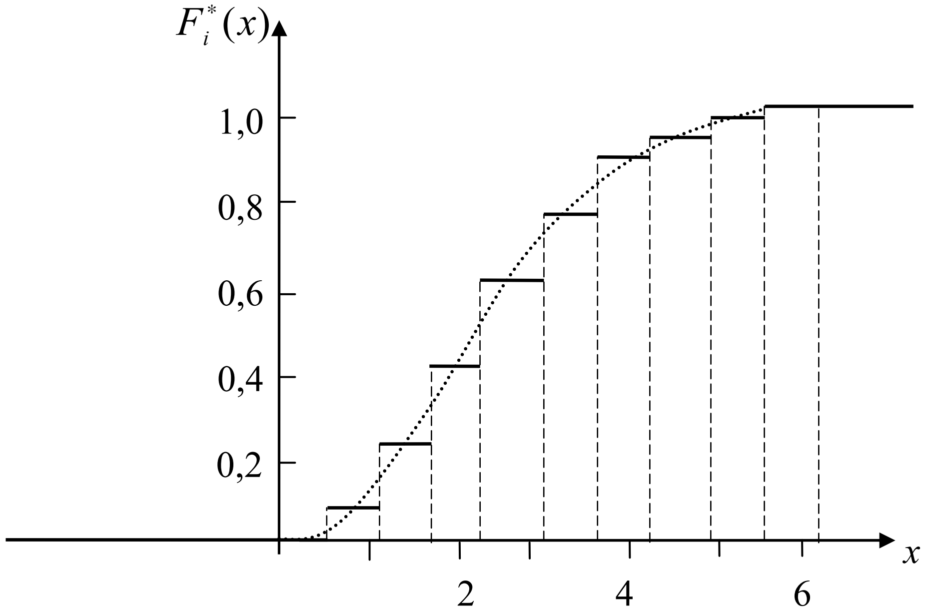


Рис. 9. *График статистической функции распределения*
(*ступеньки – дискретная*, *пунктирная линия – непрерывная* величина X).

$$\boxed{M[X]=\sum_{i=1}^{9}u_i\,p_i^*}=0{,}336\cdot 0{,}08+1{,}007\cdot 0{,}15+1{,}692\cdot 0{,}18+2{,}363\cdot 0{,}21+3{,}034\cdot 0{,}16+$$

$$+3{,}705\cdot 0{,}13+4{,}376\cdot 0{,}04+5{,}047\cdot 0{,}03+5{,}718\cdot 0{,}02=0{,}027+0{,}151+0{,}305+0{,}496+$$

$$+0{,}485+0{,}482+0{,}175+0{,}151+0{,}114=2{,}386\approx 2{,}39.$$

Для самоконтроля надо помнить, что математическое ожидание $M[X]$ есть наиболее вероятное значение, которое может принять случайная величина X. Если посмотреть на *полигон относительных частот*, то увидим, что полученное значение математического ожидания соответствует графику, следовательно, *вычисления проведены правильно*.

Дисперсия случайной величины X вычисляется по формуле:

$$\boxed{D[X]=M[X^2]-M^2[X]},$$

поэтому вначале вычислим величину $M[X^2]$, согласно выражению:

$$\boxed{M[X^2]=\sum_{i=1}^{9}u_i^2\,p_i^*}=(0{,}336)^2\cdot 0{,}08+(1{,}007)^2\cdot 0{,}15+(1{,}692)^2\cdot 0{,}18+(2{,}363)^2\cdot 0{,}21+$$

$$+(3{,}034)^2\cdot 0{,}16+(3{,}705)^2\cdot 0{,}13+(4{,}376)^2\cdot 0{,}04+(5{,}047)^2\cdot 0{,}03+(5{,}718)^2\cdot 0{,}02=$$

$$=0{,}009+0{,}152+0{,}515+1{,}173+1{,}473+1{,}785+0{,}766+0{,}764+0{,}654=7{,}291\approx 7{,}29.$$

Тогда дисперсия $D[X]$ равна

$$\boxed{D[X]=M[X^2]-M^2[X]}=7{,}29-(2{,}39)^2=1{,}5779\approx 1{,}58.$$

Средне-квадратическое отклонение $\sigma[X]$ вычисляется по формуле:

$$\boxed{\sigma[X]=\sqrt{D[X]}}=\sqrt{1{,}58}\approx 1{,}26.$$

6. Найдём исправленные значения дисперсии и средне-квадратического отклонения. Согласно ***теореме Чебышёва***, эта оценка дисперсии является *состоятельной*, но *смещённой*. Вводя исправленную оценку дисперсии ($n=100$)

$$\boxed{D_{испр.}=\frac{n}{n-1}D}=\frac{100}{100-1}\cdot 1{,}58=\frac{158}{99}=1{,}596\approx 1{,}60,$$

получим *несмещённую оценку дисперсии*. Исправленная оценка средне-квадратического отклонения равна

$$\boxed{\sigma_{испр.}[X]=\sqrt{D_{испр.}[X]}}=\sqrt{1{,}60}=1{,}265\approx 1{,}27\ .$$

Для данного конкретного примера значения выборочных оценок не очень отличаются от их исправленных величин.

7. Вычислим теоретические частоты попадания в заданный интервал в предположении, что случайная величина X распределена нормально (*гипотеза о нормальном законе распределения*), для чего составим табл. 4 (здесь введены обозначения $\boxed{M[X]=a}$, $\boxed{\sigma_{испр.}[X]=\sigma}$, $\boxed{p_{i\,теор.}=p_i}$, см. также ***Приложение В***).

8. Пользуясь ***критерием согласия Пирсона***, проверим гипотезу о нормальном распределении случайной величины X, выдвинутую в пункте **7**, для чего рассчитаем параметр $\chi^2_{расч.}=\dfrac{(m_i^*-m_i)^2}{m_i}$, где $m_{i\,теор.}=m_i$ (см. табл. 5).

Таблица 4.

Расчёт теоретических частот попадания случайной величины X в заданный интервал ($n = 100$).

x_i	x_{i+1}	$z_i = \dfrac{x_i - a}{\sigma}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - a}{\sigma}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$m_{i\ теор.} = p_i \cdot n$
0,014	0,658	−1,871	−1,364	−0,4693	−0,4137	0,0556	5,56
0,658	1,356	−1,364	−0,814	−0,4137	−0,2922	0,1215	12,15
1,356	2,027	−0,814	−0,286	−0,2922	−0,1126	0,1796	17,96
2,027	2,698	−0,286	0,243	−0,1126	0,0960	0,2086	20,86
2,698	3,369	0,243	0,771	0,0960	0,2794	0,1834	18,34
3,369	4,040	0,771	1,299	0,2794	0,4030	0,1236	12,36
4,040	4,711	1,299	1,828	0,4030	0,4662	0,0632	6,32
4,711	5,382	1,828	2,356	0,4662	0,4908	0,0246	2,46
5,382	6,053	2,356	2,884	0,4908	0,4980	0,0072	0,72

Таблица 5.

Расчет параметра $\chi^2_{расч.} = \dfrac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i}$.

m_i	m_i^*	$m_i^* - m_i$	$(m_i^* - m_i)^2$	$\dfrac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i}$
5,56	8	2,44	5,9536	1,071
12,15	15	2,85	8,1225	0,669
17,96	18	0,04	0,0016	0,0001
20,86	21	0,14	0,0196	0,001
18,34	16	−2,34	5,4756	0,299
12,36	13	0,64	0,4096	0,033
6,32	4	−2,32	5,3824	0,852
2,46	3	0,54	0,2916	0,119
0,72	2	1,28	1,6384	2,276
				$\chi^2_{расч.} = 5{,}320$

Вычислим число “***<u>степеней свободы</u>***” по формуле $\boxed{k = l - r - 1}$, где l – количество интервалов, на которые разбивается выборка, r – число параметров, входящих в предполагаемый закон распределения (*для нормального закона распределения* число параметров $r = 2$: $M[X] = a$ – математическое ожидание и σ – средне-квадратическое отклонение): $k = l - r - 1 = 9 - 2 - 1 = 6$. Выбрав уровень значимости $\boxed{\alpha = 0{,}05}$ при числе “степеней свободы” $\boxed{k = 6}$, воспользуемся таблицей для критических значений $\chi^2_{кр.}$ (***Приложение Д***), по которой найдём, что в нашем случае $\boxed{\chi^2_{кр.} = 12{,}6}$. Так как $\boxed{\chi^2_{расч.} = 5{,}320 < \chi^2_{кр.} = 12{,}6}$, то *гипотеза о нормаль-*

ном законе распределения изучаемой случайной величины X ***принимается*** (при выполнении противоположного неравенства гипотеза отбрасывается).

9. Найдём интервальную оценку (доверительный интервал) для математического ожидания $M[X]$ для *нормальной* случайной величины X, который определяется формулой:

$$\boxed{a - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M[X] < a + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

где величина $\boxed{t_\gamma}$ определяется из равенства

$$\boxed{\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}},$$

здесь $\boxed{\gamma}$ – доверительная вероятность, которая обычно принимается равной $\boxed{\gamma = 0{,}95}$. Тогда из равенства $\boxed{\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}}$ находим при использовании таблицы для ***интегральной функции Муавра-Лапласа*** (см. ***Приложение В***), что $\boxed{t_\gamma = 1{,}96}$. Следовательно, *интервальная оценка для математического ожидания* имеет вид:

$$2{,}39 - 1{,}96\frac{1{,}27}{\sqrt{100}} < M[X] < 2{,}39 + 1{,}96\frac{1{,}27}{\sqrt{100}} \text{ или } \boxed{2{,}14 < M[X] < 2{,}64}.$$

58.3. *Способ А.Н. Колмогорова*

В этом способе в качестве критерия проверки выбирается случайная величина $\boxed{U\sqrt{n} = \sqrt{n}\max\left|F(x) - F^*(x)\right|}$, которая представляет собой наибольшее значение разности между величинами *теоретической* $F(x)$ и *статистической* $F^*(x)$ функциями распределения. Академик Колмогоров доказал, что независимо от вида закона распределения случайной величины X при $n \to \infty$ существует предел вероятности того, что величина $U\sqrt{n} < \lambda$, где λ – некоторое число. При достаточно большом числе опытов n ($n \ge 100$) выполняется приближенное равенство $P(U\sqrt{n}) \approx P(\lambda)$. Отсюда следует *схема применения* ***способа Колмогорова***:

– вычисляют модуль наибольшей разности между теоретической и статистической функциями распределения и критерий проверки

$$U\sqrt{n};$$

– назначают уровень значимости $\alpha = P(\lambda)$ (принимают $\boxed{\alpha = 0{,}03 \div 0{,}05}$);

– по соответствующим таблицам находят критическое значение величины $\lambda_{кр.}$ из равенства $\alpha = P\left(\lambda_{кр.}\right)$;

– если расчётное значение критерия проверки $U\sqrt{n} \geq \lambda$, то гипотеза H отбрасывается, в противном случае – принимается.

Достоинство **<u>*способа А.Н. Колмогорова*</u>** состоит в том, *что он не требует сложных расчётов*.

К *недостаткам* этого способа относятся:

– для применения этого способа надо знать не только вид закона распределения, но и его параметры;

– критерий проверки учитывает только модуль наибольшей разности между теоретической и статистической функциями распределения, но не закон изменения этого отклонения по всему объёму выборки.

V

Элементы математической статистики

Вариант 1

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *вольфрама в руде*

0, 89	1, 33	2, 81	0, 64	2, 67	2, 13	4, 27	5, 48	2, 22	4, 11
2, 54	0, 33	3, 69	0, 84	2, 69	3, 63	2, 44	4, 83	4, 12	1, 89
1, 80	1, 13	1, 28	1, 89	2, 33	3, 89	2, 53	1, 67	3, 70	3, 22
1, 17	0, 71	0, 71	2, 67	2, 97	3, 48	2, 87	3, 61	2, 20	0, 35
0, 81	0, 50	1, 41	1, 72	2, 64	2, 09	3, 47	2, 94	4, 38	1, 82
1, 43	1, 74	1, 28	1, 50	5, 16	3, 13	4, 92	3, 18	2, 41	1, 79
1, 89	1, 69	2, 14	1, 80	2, 58	3, 06	2, 07	3, 83	2, 56	3, 65
0, 71	1, 83	0, 48	3, 72	5, 48	2, 72	2, 10	3, 39	2, 19	1, 47
0, 62	1, 28	0, 96	0, 81	2, 93	2, 38	2, 12	3, 77	2, 84	1, 61
3, 10	0, 89	3, 84	1, 61	2, 75	3, 01	0, 45	0, 48	2, 95	2, 77

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 2

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *цинка в руде*

5, 48	6, 24	10,05	11,18	4, 29	6, 28	12,23	6, 22	13,90	8, 57
1, 18	3, 05	7, 28	12,70	9, 07	5, 05	6, 38	10,70	4, 88	0, 10
5, 77	4, 21	6, 57	11,54	5, 24	11,30	8, 06	8, 07	11,40	9, 45
2, 91	1, 07	6, 54	8, 18	4, 37	7, 94	6, 29	6, 18	6, 01	6, 29
3, 77	2, 01	7, 21	6, 29	6, 01	11,97	4, 64	9, 39	6, 98	13,70
2, 54	4, 10	8, 02	6, 27	8, 21	5, 11	6, 21	7, 39	10,15	14,10
1, 98	2, 40	5, 11	9, 74	5, 97	4, 49	6, 12	5, 17	6, 30	8, 29
3, 83	2, 21	6, 09	8, 23	10,20	9, 11	8, 99	8, 50	4, 94	8, 62
2, 23	2, 97	1, 57	2, 89	1, 32	3, 86	4, 11	6, 23	4, 51	5, 18
5, 58	0, 98	3, 17	1, 05	1, 69	6, 38	4, 00	3, 47	4, 23	6, 03

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант <u>3</u>

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *скорость продвижения очистного забоя* (м/мес.)

53, 9	82, 6	56, 6	20, 4	52, 8	23, 8	37, 4	36, 0	31, 3	31, 9
71, 4	70, 5	45, 2	18, 5	48, 2	29, 0	20, 0	31, 8	31, 8	33, 4
72, 8	77, 5	45, 6	17, 0	32, 8	23, 2	32, 3	24, 2	32, 1	31, 0
76, 6	71, 8	42, 3	37, 2	23, 9	33, 2	35, 0	45, 3	28, 9	61, 5
47, 6	47, 6	49, 5	49, 5	45, 0	28, 5	47, 9	27, 7	27, 6	43, 2
41, 7	35, 4	51, 6	41, 8	53, 1	44, 9	16, 5	30, 9	38, 3	41, 5
69, 9	63, 0	64, 6	46, 1	57, 5	25, 1	37, 3	31, 5	34, 1	57, 4
74, 1	53, 5	44, 3	28, 3	56, 0	32, 1	43, 8	29, 3	36, 5	58, 1
68, 1	59, 4	41, 1	51, 0	19, 8	30, 7	58, 0	16, 9	34, 9	59, 3
79, 3	34, 2	69, 3	49, 0	44, 7	22, 5	35, 0	33, 2	35, 9	63, 6

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 4

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *марганца в руде*

12, 8	12, 0	12, 4	2, 2	12, 5	13, 9	15, 4	11, 1	18, 5	16, 6
4, 8	10, 8	13, 5	16, 8	23, 4	5, 2	6, 0	16, 4	10, 9	8, 0
9, 0	13, 1	7, 5	15, 6	8, 8	18, 3	24, 3	10, 7	15, 1	16, 2
10, 2	14, 3	3, 2	9, 6	14, 2	6, 5	7, 0	17, 9	9, 4	11, 4
19, 4	10, 6	20, 5	14, 1	12, 2	8, 1	11, 0	12, 7	16, 6	15, 8
7, 1	19, 0	9, 8	13, 0	11, 6	3, 5	8, 5	12, 3	9, 3	12, 4
12, 4	6, 3	12, 9	12, 3	18, 7	10, 7	12, 8	8, 0	11, 7	19, 1
12, 6	18, 8	16, 2	9, 3	22, 2	11, 9	14, 0	10, 4	6, 5	10, 7
7, 9	15, 8	12, 2	20, 5	16, 1	8, 1	12, 5	9, 5	14, 8	4, 7
17, 8	9, 2	12, 7	20, 8	14, 7	13, 1	11, 8	7, 6	18, 4	12, 2

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант <u>5</u>

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X - *производительность труда рабочего очистного забоя* (т./выход)

13,13	15,35	12,49	17,01	15,33	16,59	12,05	15,93	13,75	17,32
13,63	13,84	10,98	17,39	16,58	10,65	9,35	19,51	14,18	11,98
19,05	14,28	14,08	8,69	10,84	10,55	16,01	12,62	14,55	15,79
11,68	14,56	12,33	16,19	14,90	11,26	10,78	14,87	16,15	12,11
12,74	14,70	14,83	9,02	12,57	16,18	12,90	9,05	13,68	16,54
14,79	14,77	9,18	16,03	19,62	11,17	10,66	13,63	14,97	17,91
18,30	16,07	18,43	14,57	14,67	16,91	10,02	14,95	15,13	12,13
11,93	18,59	13,74	11,05	16,05	13,87	10,74	14,99	12,04	17,23
18,13	13,96	18,89	16,12	14,79	17,43	14,73	17,17	14,89	19,40
12,88	12,45	12,89	12,79	12,85	14,57	12,89	12,91	17,51	10,16

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 6

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *себестоимость добычи угля по участку* (руб./т.)

4, 00	2, 45	1, 83	1, 15	2, 91	1, 91	1, 84	1, 79	1, 95	1, 36
1, 17	2, 48	3, 60	1, 54	3, 61	1, 53	1, 54	2, 04	1, 04	1, 34
1, 16	2, 35	1, 36	1, 78	2, 68	1, 37	2, 16	2, 02	2, 48	1, 21
1, 08	1, 93	3, 50	1, 69	2, 89	1, 29	1, 88	2, 37	1, 87	1, 34
1, 13	1, 99	2, 08	1, 94	3, 02	1, 34	1, 76	2, 60	1, 81	1, 30
0, 99	3, 30	2, 13	1, 74	3, 03	1, 36	1, 77	1, 91	1, 73	1, 22
1, 00	3, 80	4, 10	2, 56	3, 08	1, 48	1, 86	1, 78	4, 08	0, 99
0, 98	1, 15	2, 15	2, 22	3, 78	2, 54	1, 80	2, 47	2, 67	1, 10
2, 87	3, 70	2, 30	2, 56	1, 53	3, 05	1, 72	2, 97	1, 80	1, 38
2, 72	2, 26	1, 70	2, 16	1, 72	1, 94	2, 05	2, 01	1, 51	1, 86

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 7

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *вольфрама в руде*

1, 49	1, 44	1, 68	2, 48	3, 93	2, 34	7, 00	1, 56	0, 46	1, 14
0, 60	3, 57	1, 34	1, 59	4, 30	0, 74	1, 62	2, 13	2, 22	3, 63
1, 26	0, 86	2, 39	3, 05	2, 38	0, 80	1, 24	0, 76	1, 65	0, 92
2, 34	0, 64	1, 26	4, 32	0, 68	0, 92	0, 96	1, 77	1, 02	1, 07
2, 69	2, 02	3, 42	1, 19	2, 66	1, 00	1, 82	3, 04	0, 92	1, 44
1, 63	3, 41	1, 16	1, 44	0, 45	2, 41	0, 87	0, 81	2, 85	1, 94
1, 25	1, 90	0, 72	2, 05	2, 38	1, 80	2, 88	2, 02	1, 26	1, 11
0, 54	0, 94	1, 71	1, 52	1, 38	1, 32	1, 01	0, 79	1, 71	0, 99
0, 78	0, 99	1, 60	2, 07	2, 17	1, 47	0, 82	1, 59	0, 28	2, 36
2, 01	1, 51	0, 95	3, 17	1, 08	1, 09	2, 43	1, 88	2, 64	4, 80

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 8

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *мощность угольного пласта* (м)

1, 15	1, 90	1, 69	1, 43	1, 75	1, 38	1, 96	1, 79	1, 70	1, 51
1, 53	1, 93	1, 95	1, 76	1, 69	1, 74	1, 64	1, 22	1, 86	1, 41
1, 05	1, 78	1, 87	1, 34	1, 90	1, 73	1, 83	1, 42	1, 80	1, 91
1, 06	1, 35	1, 26	1, 56	1, 55	1, 13	1, 58	1, 19	1, 31	1, 77
1, 21	1, 11	1, 51	1, 08	1, 45	1, 85	1, 55	1, 65	1, 59	1, 26
1, 32	1, 52	1, 44	1, 68	1, 36	1, 90	1, 46	1, 32	1, 42	1, 87
1, 98	1, 45	1, 18	1, 42	1, 94	1, 57	1, 27	1, 46	1, 62	1, 99
1, 41	1, 24	1, 53	1, 16	1, 56	1, 43	1, 74	1, 09	1, 75	1, 39
1, 87	1, 53	1, 30	1, 54	1, 64	1, 55	1, 39	1, 60	1, 52	1, 64
1, 79	1, 67	1, 78	1, 25	1, 49	1, 70	1, 69	1, 53	1, 29	1, 60

Требуется:
1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 9

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *свинца в руде*

1, 98	3, 73	8,63	3,68	4,79	8,53	3,89	9,59	7,05	1,08
2, 57	5, 28	2,22	9,14	7,88	8,36	2,88	9,13	11,87	5,32
5, 70	4, 52	3,42	4,03	6,37	1,13	7,26	10,85	3,87	1,21
3, 30	2, 04	1,84	6,89	7,81	10,82	11,63	4,85	9,28	1,27
2, 93	7, 81	7,13	7,85	8,01	1,08	1,14	5,76	10,01	6,26
3, 24	4, 93	2,18	8,37	4,76	8,60	8,74	1,28	3,65	11,51
1, 85	1, 99	3,60	4,75	6,90	5,32	6,34	6,00	9,23	4,02
4, 68	1, 47	1,61	3,17	11,34	9,37	4,10	6,10	4,44	10,50
3, 42	3, 20	1,90	1,01	8,26	6,11	4,91	9,39	5,88	4,68
1, 61	2, 33	11,44	11,62	6,07	9,54	4,96	9,18	6,11	6,98

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 10

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *себестоимость добычи угля на участке* (руб./т.)

2, 61	1, 56	1, 84	2, 00	2, 11	2, 63	2, 98	3, 29	2, 15	2, 15
1, 58	1, 56	2, 03	2, 80	2, 34	2, 39	2, 73	3, 40	2, 16	2, 16
1, 54	1, 81	3, 60	2, 04	3, 07	2, 59	2, 66	3, 43	2, 20	2, 37
2, 35	1, 55	3, 61	2, 46	3, 54	2, 74	2, 59	2, 50	2, 30	2, 27
2, 68	2, 05	1, 79	2, 38	2, 34	2, 81	3, 52	2, 59	2, 03	2, 24
2, 88	1, 47	2, 47	2, 64	2, 32	2, 50	3, 15	2, 56	2, 15	2, 34
1, 68	1, 86	1, 81	1, 81	2, 06	2, 98	3, 05	2, 66	2, 23	2, 42
1, 78	2, 06	3, 31	2, 51	2, 88	2, 56	2, 57	2, 72	2, 21	2, 11
1, 75	2, 51	3, 15	1, 87	3, 05	2, 96	2, 85	3, 12	3, 24	3, 27
1, 58	2, 85	2, 11	1, 86	3, 57	2, 93	3, 28	2, 22	2, 23	2, 35

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант **11**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *свинца в руде*

3, 89	1, 33	2, 81	1, 04	0, 67	2, 13	4, 97	5, 48	2, 22	2, 71
2, 54	1, 13	3, 69	0, 84	0, 98	1, 63	1, 44	4, 83	2, 82	1, 89
1, 80	1, 13	1, 28	0, 98	1, 33	0, 89	1, 53	1, 67	2, 71	3, 22
1, 17	1, 11	0, 71	2, 67	4, 97	3, 48	4, 80	4, 61	2, 20	4, 25
0, 41	1, 50	1, 41	1, 72	1, 46	2, 09	3, 17	4, 14	1, 38	1, 82
1, 43	1, 74	1, 26	1, 50	2, 16	1, 13	4, 12	4, 18	2, 41	1, 79
1, 98	1, 69	2, 14	1, 80	1, 58	1, 06	2, 07	3, 33	2, 56	3, 05
3, 71	1, 83	0, 81	2, 72	0, 84	0, 70	2, 10	3, 39	2, 19	1, 47
0, 62	3, 78	0, 66	0, 54	1, 53	2, 38	2, 12	4, 77	2, 95	1, 61
2, 10	0, 89	3, 84	1, 61	1, 45	1, 01	0, 45	0, 48	0, 84	2, 77

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 12

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *результаты измерения наружного диаметра плашек* (мм)

37,91	37,82	37,86	37,80	37,84	37,85	37,90	37,88	37,90	37,79
37,90	37,87	37,86	37,87	37,88	37,81	37,91	37,87	37,93	37,83
37,82	37,89	37,84	37,80	37,85	37,85	37,81	37,91	37,77	37,88
37,80	37,90	37,87	37,78	37,86	37,90	37,87	37,86	37,91	37,89
37,87	37,85	37,81	37,83	37,90	37,84	37,88	37,88	37,94	37,90
37,88	37,80	37,88	37,83	37,84	37,78	37,76	37,82	37,81	37,78
37,82	37,87	37,78	37,85	37,87	37,81	37,87	37,83	37,82	37,95
37,87	37,85	37,86	37,86	37,92	37,86	37,91	37,88	37,86	37,90
37,91	37,89	37,83	37,83	37,93	37,85	37,80	37,87	37,85	37,88
37,90	37,87	37,82	37,81	37,86	37,84	37,87	37,85	37,80	37,84

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 13

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *марганца в руде*

14, 4	6, 9	18, 8	18, 9	20, 1	20, 6	22, 0	24, 4	26, 9	10, 2
16, 8	16, 9	7, 0	19, 0	21, 4	21, 7	22, 9	25, 5	6, 7	30, 7
2, 9	3, 0	11, 0	7, 1	19, 5	22, 8	23, 0	6, 2	27, 2	30, 9
8, 8	9, 0	3, 3	1, 1	7, 9	20, 9	6, 1	26, 6	28, 3	31, 4
10, 9	11, 0	10, 1	3, 3	1, 2	6, 0	23, 3	23, 7	29, 4	26, 3
12, 7	12, 9	11, 7	9, 5	3, 5	1, 4	8, 0	24, 8	30, 5	30, 9
14, 9	15, 0	13, 0	5, 9	9, 6	3, 6	1, 7	8, 3	29, 6	30, 4
15, 3	15, 5	12, 6	12, 3	11, 9	9, 9	3, 9	1, 9	8, 5	30, 9
16, 0	2, 4	16, 3	16, 7	14, 0	12, 0	10, 3	4, 3	2, 0	8, 7
22, 3	16, 9	17, 0	17, 1	17, 2	14, 1	12, 3	10, 7	5, 7	22, 1

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант **14**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *золота в руде*

11, 7	13, 2	75, 5	10, 8	10, 2	56, 3	50, 3	57, 6	48, 2	11, 8
32, 4	16, 5	25, 5	8, 9	15, 7	63, 5	19, 3	63, 2	63, 8	36, 8
17, 7	25, 8	12, 5	21, 7	12, 2	23, 9	41, 3	26, 6	22, 8	77, 5
7, 8	13, 9	12, 3	15, 6	39, 0	83, 5	65, 0	32, 3	39, 1	33, 7
27, 7	12, 9	61, 5	15, 3	83, 6	33, 1	16, 1	14, 8	44, 4	26, 4
8, 5	21, 3	75, 6	47, 4	46, 0	12, 4	23, 6	27, 6	40, 7	39, 1
24, 8	17, 9	27, 3	60, 7	37, 4	60, 7	22, 5	87, 8	22, 8	34, 2
58, 4	78, 8	11, 7	45, 6	28, 1	73, 2	53, 0	41, 6	24, 9	48, 1
15, 9	10, 5	12, 0	11, 1	42, 0	50, 2	22, 3	49, 5	94, 2	21, 6
84, 7	74, 5	14, 1	48, 5	93, 8	49, 0	67, 8	37, 1	39, 1	6, 6

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

***Вариант* 15**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *годовая выработка* (тыс./га) *пахоты на один трактор*

1, 55	2, 15	0, 80	2, 40	1, 35	1, 60	1, 15	1, 50	2, 35	1, 65
0, 95	1, 25	1, 00	1, 50	1, 75	2, 10	1, 35	0, 70	1, 15	1, 95
0, 75	1, 60	1, 50	0, 95	1, 00	1, 10	1, 10	1, 90	1, 40	1, 15
2, 10	1, 40	2, 10	1, 15	0, 70	1, 05	0, 35	2, 25	1, 70	1, 40
1, 05	2, 05	1, 30	1, 30	1, 95	1, 75	1, 20	1, 50	0, 95	1, 75
1, 30	1, 50	1, 20	0, 60	1, 55	2, 15	0, 90	1, 45	1, 50	1, 90
1, 10	1, 10	2, 35	1, 20	0, 70	1, 20	2, 40	2, 10	1, 95	1, 20
1, 45	2, 10	0, 90	1, 45	1, 35	1, 50	1, 70	1, 95	1, 55	1, 85
0, 75	1, 10	1, 75	0, 80	1, 90	1, 80	2, 00	1, 35	0, 65	1, 15
0, 90	1, 55	1, 35	1, 75	1, 70	1, 40	1, 30	1, 55	0, 10	1, 35

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант **16**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *удельный расход топлива* (кг) *на трактор*

10,09	9,64	11,19	9,23	9,68	11,58	10,68	11,16	11,47	12,16
9,27	9,19	13,76	12,33	11,75	13,38	9,77	11,71	9,91	11,47
10,36	11,15	10,23	9,75	12,69	10,58	11,72	10,73	10,98	12,56
8,38	12,18	11,08	10,35	9,95	9,56	10,52	8,74	13,88	11,71
9,18	9,15	10,49	9,55	10,49	12,33	9,82	12,56	8,28	11,92
10,49	10,10	12,42	10,51	10,71	10,50	9,37	9,57	10,12	9,28
11,28	11,48	7,73	9,23	10,64	9,76	9,31	10,05	13,31	9,75
9,96	8,75	11,86	10,25	10,31	10,42	11,85	12,22	10,34	10,21
11,23	11,43	10,05	10,22	10,45	10,22	9,16	11,76	10,36	10,47
11,13	10,75	10,95	10,76	11,24	13,74	11,13	10,52	10,69	11,57

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант **17**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *годовая выработка* (тыс./га) *пахоты на один трактор*

1, 55	2, 15	0, 80	2, 40	1, 35	1, 60	1, 15	1, 50	2, 35	1, 65
0, 95	1, 25	1, 00	1, 50	1, 75	2, 10	1, 35	0, 70	1, 15	1, 95
0, 75	1, 60	1, 50	0, 95	1, 00	1, 10	1, 10	1, 90	1, 40	1, 15
2, 10	1, 40	2, 10	1, 15	0, 70	1, 05	0, 35	2, 25	1, 70	1, 40
1, 05	2, 05	1, 30	1, 30	1, 95	1, 75	1, 20	1, 50	0, 95	1, 75
1, 30	1, 50	1, 20	0, 60	1, 55	2, 15	0, 90	1, 45	1, 50	1, 90
1, 10	1, 10	2, 35	1, 20	0, 70	1, 20	2, 40	2, 10	1, 95	1, 20
1, 45	2, 10	0, 90	1, 45	1, 35	1, 50	1, 70	1, 95	1, 55	1, 85
0, 75	1, 10	1, 75	0, 80	1, 90	1, 80	2, 00	1, 35	0, 65	1, 15
0, 90	1, 55	1, 35	1, 75	1, 70	1, 40	1, 30	1, 55	0, 10	1, 35

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 18

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *скорость продвижения очистного забоя* (м/мес.)

31, 8	54, 8	46, 4	28, 0	35, 8	27, 7	23, 6	84, 3	29, 3	58, 7
33, 8	52, 8	42, 9	38, 1	43, 5	18, 0	22, 6	58, 7	18, 3	67, 5
24, 7	41, 1	42, 6	39, 4	55, 3	35, 3	22, 7	68, 0	20, 2	73, 1
26, 8	44, 0	29, 5	46, 1	40, 5	29, 3	31, 7	58, 2	86, 8	21, 9
18, 3	59, 0	49, 2	42, 3	42, 6	29, 7	59, 0	80, 1	67, 9	77, 0
36, 5	27, 7	31, 5	33, 2	60, 4	36, 2	26, 3	67, 0	83, 2	86, 0
39, 6	54, 2	46, 2	36, 2	85, 4	35, 1	26, 5	24, 2	28, 9	34, 5
46, 8	51, 3	47, 0	86, 9	37, 7	36, 6	86, 6	65, 3	75, 1	80, 5
45, 2	56, 9	52, 4	22, 2	50, 7	36, 3	67, 8	27, 7	59, 5	21, 5
46, 9	55, 2	35, 5	45, 1	68, 1	32, 0	29, 6	60, 5	74, 4	38, 4

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 19

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *производительность труда рабочего очистного забоя* (т/выход)

9,02	38,26	24,66	50,06	28,45	60,37	33,22	31,38	19,96	50,36
18,16	30,44	30,42	39,10	51,19	23,78	44,77	35,94	71,14	24,50
39,99	40,05	47,92	33,72	30,24	26,13	53,32	59,10	36,03	43,29
45,23	61,22	43,14	10,40	31,20	29,94	58,14	18,09	49,32	59,95
54,80	35,20	63,00	36,02	40,51	42,18	34,33	39,02	32,52	35,34
26,89	63,22	66,47	53,36	56,13	42,55	15,00	84,02	36,33	53,14
37,12	45,88	73,36	36,33	37,40	76,58	19,23	40,38	62,93	70,36
32,36	20,30	34,10	62,39	62,90	49,90	34,95	71,38	43,18	25,28
28,22	28,56	35,55	46,50	22,76	38,35	79,19	89,37	26,3	80,86
26,98	46,95	44,36	38,27	37,94	32,50	44,10	35,72	47,84	44,35

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 20

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *мощность угольного пласта* (м)

1, 50	2, 35	0, 40	1, 15	1, 50	1, 30	1, 30	1, 10	1, 10	0, 40
0, 70	1, 15	1, 65	1, 35	1, 10	0, 75	1, 60	0, 35	1, 05	1, 55
1, 90	0, 80	1, 95	0, 70	1, 00	1, 50	0, 90	1, 20	1, 75	1, 00
2, 25	1, 40	1, 15	1, 80	0, 20	1, 05	2, 15	0, 90	2, 15	0, 85
1, 50	1, 70	1, 40	2, 35	1, 10	1, 10	1, 15	2, 40	1, 20	2, 30
1, 45	0, 95	0, 65	1, 15	2, 20	2, 40	1, 65	1, 70	1, 50	1, 25
2, 10	1, 50	1, 75	1, 20	1, 70	0, 30	1, 10	2, 00	1, 80	1, 05
1, 95	1, 95	1, 90	1, 55	0, 85	1, 50	1, 85	1, 30	1, 40	1, 45
1, 35	1, 55	1, 20	2, 40	1, 20	0, 50	1, 35	0, 95	1, 15	2, 05
1, 55	0, 65	1, 85	0, 45	2, 30	0, 50	1, 00	2, 10	2, 00	0, 95

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант **21**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *скорость продвижения очистного забоя* (м/мес.)

50, 1	21, 6	13, 2	8, 7	38, 8	19, 2	20, 7	35, 5	19, 7	12, 3
52, 2	42, 9	9, 4	13, 7	19, 3	20, 3	26, 9	35, 4	18, 9	12, 0
54, 3	11, 0	12, 9	19, 1	20, 1	24, 1	27, 0	36, 5	18, 4	4, 7
19, 9	12, 5	19, 0	19, 9	25, 3	34, 0	27, 8	49, 6	18, 7	4, 2
21, 4	18, 0	19, 8	25, 2	33, 9	43, 4	27, 9	48, 5	15, 1	4, 1
23, 6	19, 9	26, 2	32, 8	42, 3	5, 9	28, 0	54, 4	16, 7	4, 9
26, 1	26, 1	30, 3	41, 3	6, 3	4, 8	34, 1	20, 9	17, 3	10, 3
16, 3	30, 1	40, 9	6, 1	5, 0	11, 9	44, 4	25, 1	17, 0	10, 1
16, 2	40, 1	12, 5	5, 5	9, 0	14, 0	35, 2	25, 3	11, 1	5, 7
16, 0	12, 3	4, 3	8, 5	14, 1	19, 4	42, 5	25, 9	12, 4	5, 3

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 22

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *марганца в руде*

15, 6	2, 46	5, 06	4, 32	6, 01	9, 02	7, 20	11,20	11,24	13,21
2,11	4, 14	5, 16	3, 68	6, 12	9, 12	7, 25	11,06	11,34	13,40
2,12	4, 18	4, 14	3, 33	6, 44	9, 14	7, 93	11,01	11,66	13,80
2,14	4, 42	5, 18	4, 41	6, 90	9, 16	7, 98	10,01	11,69	6,92
2,13	3, 10	5, 20	5, 17	6, 92	9, 18	8, 01	10,22	11,80	6,99
4,90	2, 14	4, 10	5, 21	6, 96	8, 13	8, 24	10,27	11,86	6,01
2,99	2, 18	2, 44	2, 41	7, 00	9, 22	8, 15	10,12	12,01	6,90
2,64	3, 11	5, 00	5, 90	7, 02	9, 28	8, 45	10,16	12,12	15,01
2,73	2, 44	5, 08	5, 92	7, 14	9, 44	9, 00	10,14	13,01	15,20
4,10	5, 08	3, 64	5, 98	7, 19	9, 98	8, 36	10,99	13,20	15,21

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* $M[X]$, *дисперсии* $D[X]$, *средне-квадратического отклонения* $\sigma[X]$.
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* $M[X]$ случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант **23**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *толщина плашек после шлифовки* (мм)

14,13	14,17	14,20	14,10	14,21	14,16	14,18	14,18	14,12	14,17
14,13	14,18	14,18	14,21	14,17	14,23	14,18	14,19	14,19	14,11
14,18	14,18	14,15	14,18	14,16	14,13	14,14	14,24	14,29	14,25
14,20	14,16	14,17	14,14	14,12	14,17	14,19	14,18	14,26	14,20
14,20	14,20	14,21	14,11	14,15	14,23	14,16	14,17	14,20	14,11
14,14	14,21	14,23	14,21	14,20	14,20	14,15	14,16	14,19	14,12
14,21	14,12	14,16	14,19	14,15	14,18	14,21	14,12	14,23	14,12
14,12	14,18	14,27	14,22	14,19	14,17	14,17	14,10	14,18	14,21
14,18	14,19	14,22	14,21	14,18	14,19	14,18	14,25	14,26	14,28
14,19	14,13	14,12	14,15	14,16	14,12	14,19	14,17	14,24	14,09

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант 24

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *длина ампул* (мм)

21, 9	20, 2	24, 0	21, 0	19, 7	21, 0	20, 8	19, 8	22, 4	21, 0
20, 5	19, 5	23, 5	22, 7	19, 6	22, 4	20, 0	20, 0	20, 7	19, 0
20, 0	22, 5	23, 7	21, 3	22, 4	20, 7	24, 6	22, 5	24, 6	20, 6
19, 5	18, 2	24, 2	21, 5	21, 7	18, 6	21, 6	21, 8	19, 6	23, 5
21, 5	20, 3	23, 6	24, 9	23, 0	21, 0	19, 5	22, 3	21, 2	19, 5
23, 0	20, 4	21, 5	19, 8	23, 5	21, 6	20, 1	20, 6	23, 0	22, 5
22, 3	21, 5	21, 2	19, 6	22, 3	20, 5	20, 8	23, 0	21, 5	20, 4
20, 6	21, 4	19, 8	19, 7	24, 5	22, 5	21, 5	21, 5	22, 0	20, 8
20, 4	20, 8	20, 0	18, 0	23, 8	20, 4	20, 5	19, 7	20, 8	21, 8
18, 3	22, 1	23, 0	20, 1	23, 0	24, 0	23, 0	21, 0	22, 3	22, 0

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Задания для самостоятельного решения

Элементы математической статистики

Вариант **25**

Над случайной величиной X произведено 100 независимых испытаний, в результате которых получена выборка.

X – *содержание* (%) *золота в руде*

11, 7	13, 2	75, 5	10, 8	10, 2	56, 3	50, 3	57, 6	48, 2	11, 8
32, 4	16, 5	25, 5	8, 9	15, 7	63, 5	19, 3	63, 2	63, 8	36, 8
17, 7	25, 8	12, 5	21, 7	12, 2	23, 9	41, 3	26, 6	22, 8	77, 5
7, 8	13, 9	12, 3	15, 6	39, 0	83, 5	65, 0	32, 3	39, 1	33, 7
27, 7	12, 9	61, 5	15, 3	83, 6	33, 1	16, 1	14, 8	44, 4	26, 4
8, 5	21, 3	75, 6	47, 4	46, 0	12, 4	23, 6	27, 6	40, 7	39, 1
24, 8	17, 9	27, 3	60, 7	37, 4	60, 7	22, 5	87, 8	22, 8	34, 2
58, 4	78, 8	11, 7	45, 6	28, 1	73, 2	53, 0	41, 6	24, 9	48, 1
15, 9	10, 5	12, 0	11, 1	42, 0	50, 2	22, 3	49, 5	94, 2	21, 6
84, 7	74, 5	14, 1	48, 5	93, 8	49, 0	67, 8	37, 1	39, 1	6, 6

Требуется:

1. Составить *интервальный вариационный ряд* и построить *гистограммы частот* и *относительных частот*.
2. Изобразить на гистограмме относительных частот *приближённый эскиз графика плотности распределения*. Построить *график статистической функции распределения*.
3. Составить *дискретный вариационный ряд*, взяв за значения вариант середины интервалов, и построить *полигоны частот* и *относительных частот*.
4. Построить *график статистической функции распределения*, исходя из дискретного вариационного ряда.
5. Найти *оценки математического ожидания* M[X], *дисперсии* D[X], *средне-квадратического отклонения* σ[X].
6. Найти *исправленные значения дисперсии* и *средне-квадратического отклонения* и сравнить их с выборочными (статистическими) значениями.
7. Найти *теоретические частоты* в предположении, что *случайная величина* X *распределена нормально*.
8. Пользуясь *критерием согласия К. Пирсона*, проверить *гипотезу о нормальном распределении* случайной величины X.
9. Найти *интервальную оценку* (доверительный интервал) *для математического ожидания* M[X] случайной величины X, если X предполагается распределённой нормально.

Список использованных источников

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: Высшая школа. – 2003. – 479 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Айрис-пресс. – 2004. – 256 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – Москва: Едиториал УРСС. – 2005. – 448 с.
4. Босс В. Лекции по математике. Т.4. Вероятность, информация, статистика. – Москва: КомКнига. – 2005. – 216 с.
5. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. – Москва: Мир. – 1969.– 431 с.
6. Уиттл П. Вероятность. – Москва: Наука. – 1982. – 288 с.
7. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – Москва: Наука. – 1987. – 240 с.
8. Баврин И.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: Высшая школа. – 2005. – 160 с.
9. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 496 с.
10. Амосова Н.Н., Куклин Б.А., Макарова С.Б. и др. Вероятностные разделы математики. – Санкт-Птербург: «Иван Федоров». – 2001. – 592 с.
11. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2004. – 456 с.
12. Самойленко Н.И., Кузнецов А.И., Костенко А.Б. Теория вероятностей. – Харьков: Изд-во «НТМТ», ХНАГХ. – 2009. – 200 с.
13. Андронов А.М., Копытов Е.А., Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика. – Санкт-Птербург: Питер. – 2004. – 461 с.
14. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 296 с.
15. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: ЮНИТИДАНА.– 2004. – 573 с.
16. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: Высшая школа. – 1991. – 400 с.
17. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. – Москва: Гл. изд-во. физ.-мат. лит-ры. – 1963. – 156 с.
18. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В., Сиротин А.Н. Теория

вероятностей и математическая статистика. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 224 с.
19. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – Москва: Наука. – 1982. – 256 с.
20. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – Москва: ФИМА, МЦНМО. – 2006. – 400 с.
21. Савельев Л.Я. Элементарная теория вероятностей. Ч.1. – Новосибирск: НГУ. – 2005. – 158 с.
22. Боровков А.А. Теория вероятностей.– Москва: Наука.– 1986.– 432 с.
23. Вентцель Е.С. Теория вероятностей.– Москва: Наука.– 1969.– 576 с.
24. Горяинов В.Б., Павлов И.В., Цветкова Г.М., Тескин О.И. Математическая статистика. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана.– 2001.– 424 с.
25. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – Москва: ЛКИ. – 2010. – 600 с.
26. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. – Москва: МГУ. – 1990. – 344 с.
27. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей // Учебное пособие для вузов. – Москва: Высшая школа. – 1994. – 112 с.
28. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. Т.2. Задачи.– Донецк: Цифровая типография.– 2011.– 511 с.
29. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей // Справочное пособие к решению задач. – Минск: ТетраСистемс. – 2003. – 288 с.
30. Трошин Л.И. Математическая статистика // Учебно-практическое пособие.– Москва: МУЭСИ.– 2003.– 144 с.
31. Кочетков П.А. Краткий курс теории вероятностей и математической статистики. – Москва: МГИУ. – 1999. – 51 с.
32. Родионов В.В. Элементы теории вероятностей и математической статистики. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2003. – 80 с.

Приложение А

Справочный материал

1. *Таблица первых производных от элементарных и сложных функций*

№ п/п	*Функция*	*Производная* ***элементарной*** *функции* $f(x)$	*Производная* ***сложной*** *функции* $f(U(x))$
1	C	$(C)'=0$	$(C)'=0$
2	x^n	$(x^n)'=n\,x^{n-1}$	$(U^n)'=nU'U^{n-1}$
	$\frac{1}{x}=x^{-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{U}\right)'=-\frac{U'}{U^2}$
	$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{U})'=\frac{U'}{2\sqrt{U}}$
	$x=x^1$	$(x^1)'=1$	$(U)'=U'$
3	a^x	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^U)'=U'a^U\ln a$
	e^x	$(e^x)'=e^x$	$(e^U)'=e^U U'$
4	$\log_a x$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a U)'=\frac{U'}{U\ln a}$
	$\ln x$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln U)'=\frac{U'}{U}$
5	$\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin U)'=U'\cos U$
	$\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos U)'=-U'\sin U$
	tgx	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$	$(tgU)'=\frac{U'}{\cos^2 U}=U'\sec^2 U$
	$ctgx$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\cos ec^2 x$	$(ctgU)'=-\frac{U'}{\sin^2 U}=-U'\cos ec^2 U$
6	$\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin U)'=\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
	$\arccos x$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos U)'=-\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
	$arctgx$	$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(arctgU)'=\frac{U'}{1+U^2}$
	$arcctgx$	$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgU)'=-\frac{U'}{1+U^2}$

2. Тригонометрические функции

а) Основные тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$tg\alpha = \frac{\sin x}{\cos x},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z; \qquad ctg\alpha = \frac{\cos x}{\sin x},\ \alpha \neq \pi k;\ k \in Z;$$

$$co\sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ \ n \in Z; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \alpha \neq \pi k;\ n,k \in Z;$$

$$1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$1 + ctg^2\alpha = co\sec^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ \ n \in Z.$$

б) Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta},\ \alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\alpha \pm ctg\beta},\ \alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \pi n,\ n \in Z.$$

в) Формулы для половинного значения аргумента

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ (знак перед квадратными корнями выбирается в зависимости от того, в каком квадранте оказывается угол $\frac{\alpha}{2}$);

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

г) Сумма и разность функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \qquad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

д) Функции кратного аргумента

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha; \quad \sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\sin(4\alpha) = \cos\alpha\cdot(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha);$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \qquad \cos(4\alpha) = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$

$$tg\,(2\alpha) = \frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}; \quad tg\,(3\alpha) = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}; \quad tg\,(4\alpha) = \frac{4tg\alpha - 4tg^3\alpha}{1-6tg^2\alpha + tg^4\alpha}.$$

е) Произведения функций

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)].$$

ж) Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}; \qquad \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4};$$

$$\sin^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{8}; \qquad \cos^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{8}.$$

з) Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\boxed{\begin{array}{l} t = tg\left(\dfrac{ax}{2}\right), \quad x = \dfrac{2}{a} arctg(t), \quad dx = \dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin(ax) = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(ax) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}}$$

3. *Гиперболические функции*

а) Связь с тригонометрическими функциями

$$\sin(ix) = i\,shx;\ \cos(ix) = chx;\ sh(ix) = i\sin x;\ \ ch(ix) = \cos x;$$

б) Основные тождества

$$ch^2x - sh^2x = 1;\ sh(-x) = -shx;\ \ ch(-x) = chx;$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\ \ chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\ \ chx + shx = e^x;\ chx - shx = e^{-x};$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};\ \ cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{1}{thx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$1 - th^2\alpha = \frac{1}{ch^2\alpha};\ \ cth^2\alpha - 1 = \frac{1}{sh^2\alpha}.$$

в) Формулы сложения и вычитания

$$sh(\alpha\pm\beta) = sh\alpha\cdot ch\beta \pm sh\beta\cdot ch\alpha;$$

$$ch(\alpha\pm\beta) = ch\alpha\cdot ch\beta \pm sh\alpha\cdot sh\beta;$$

$$th(\alpha\pm\beta) = \frac{th\alpha \pm th\beta}{1 \pm th\alpha\cdot th\beta}; \quad cth(\alpha\pm\beta) = \frac{1 \pm cth\alpha\cdot cth\beta}{cth\alpha \pm cth\beta}.$$

Приложение Б

Таблица значений дифференциальной функции Лапласа $\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989
0,01	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989
0,02	3989	3989	3988	3988	3988	3988	3988	3988	3988	3988
0,03	3988	3988	3987	3987	3987	3987	3987	3987	3987	3986
0,04	3986	3986	3986	3986	3986	3985	3985	3985	3985	3985
0,05	3984	3984	3984	3984	3984	3983	3983	3983	3983	3982
0,06	3982	3982	3982	3982	3981	3981	3981	3980	3980	3980
0,07	3980	3979	3979	3979	3979	3978	3978	3978	3977	3977
0,08	3977	3976	3976	3976	3975	3975	3975	3974	3974	3974
0,09	3973	3973	3973	3972	3972	3971	3971	3971	3970	3970
0,10	3970	3969	3969	3968	3968	3967	3967	3967	3966	3966
0,11	3965	3965	3964	3964	3964	3963	3963	3962	3962	3961
0,12	3961	3960	3960	3959	3959	3958	3958	3957	3957	3956
0,13	3956	3955	3955	3954	3954	3953	3953	3952	3952	3951
0,14	3951	3950	3949	3949	3948	3948	3947	3947	3946	3945
0,15	3945	3944	3944	3943	3942	3942	3941	3941	3940	3939
0,16	3939	3938	3937	3937	3936	3935	3935	3934	3934	3933
0,17	3932	3932	3931	3930	3929	3929	3928	3927	3927	3926
0,18	3925	3925	3924	3923	3922	3922	3921	3920	3920	3919
0,19	3918	3917	3917	3916	3915	3914	3914	3913	3912	3911
0,20	3910	3910	3909	3908	3907	3906	3906	3905	3904	3903
0,21	3902	3902	3901	3900	3899	3898	3897	3897	3896	3895
0,22	3894	3893	3892	3891	3891	3890	3889	3888	3887	3886
0,23	3885	3884	3883	3883	3882	3881	3880	3879	3878	3877
0,24	3876	3875	3874	3873	3872	3871	3871	3870	3869	3868
0,25	3867	3866	3865	3864	3863	3862	3861	3860	3859	3858
0,26	3857	3856	3855	3854	3853	3852	3851	3850	3849	3848
0,27	3847	3846	3845	3843	3842	3841	3840	3839	3838	3837
0,28	3836	3835	3834	3833	3832	3831	3830	3828	3827	3826
0,29	3825	3824	3823	3822	3821	3820	3818	3817	3816	3815
0,30	3814	3813	3812	3810	3809	3808	3807	3806	3805	3803
0,31	3802	3801	3800	3799	3798	3796	3795	3794	3793	3792
0,32	3790	3789	3788	3787	3785	3784	3783	3782	3780	3779
0,33	3778	3777	3776	3774	3773	3772	3770	3769	3768	3767
0,34	3765	3764	3763	3762	3760	3759	3758	3756	3755	3754
0,35	3752	3751	3750	3748	3747	3746	3744	3743	3742	3740
0,36	3739	3738	3736	3735	3734	3732	3731	3730	3728	3727
0,37	3725	3724	3723	3721	3720	3719	3717	3716	3714	3713
0,38	3712	3710	3709	3707	3706	3704	3703	3702	3700	3699
0,39	3697	3696	3694	3693	3691	3690	3689	3687	3686	3684
0,40	3683	3681	3680	3678	3677	3675	3674	3672	3671	3669

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,41	0,3668	3666	3665	3663	3662	3660	3659	3657	3656	3654
0,42	3653	3651	3650	3648	3646	3645	3643	3642	3640	3639
0,43	3637	3636	3634	3632	3631	3629	3628	3626	3625	3623
0,44	3621	3620	3618	3617	3615	3613	3612	3610	3609	3607
0,45	3605	3604	3602	3600	3599	3597	3595	3594	3592	3591
0,46	3589	3587	3586	3584	3582	3581	3579	3577	3576	3574
0,47	3572	3571	3569	3567	3566	3564	3562	3560	3559	3557
0,48	3555	3554	3552	3550	3548	3547	3545	3543	3542	3540
0,49	3538	3536	3535	3533	3531	3529	3528	3526	3524	3522
0,50	3521	3519	3517	3515	3514	3512	3510	3508	3506	3505
0,51	3503	3501	3499	3498	3496	3494	3492	3490	3489	3487
0,52	3485	3483	3481	3479	3478	3476	3474	3472	3470	3468
0,53	3467	3465	3463	3461	3459	3457	3456	3454	3452	3450
0,54	3448	3446	3444	3443	3441	3439	3437	3435	3433	3431
0,55	3429	3428	3426	3424	3422	3420	3418	3416	3414	3412
0,56	3410	3409	3407	3405	3403	3401	3399	3397	3395	3393
0,57	3391	3389	3387	3385	3383	3382	3380	3378	3376	3374
0,58	3372	3370	3368	3366	3364	3362	3360	3358	3356	3354
0,59	3352	3350	3348	3346	3344	3342	3340	3338	3336	3334
0,60	3332	3330	3328	3326	3324	3322	3320	3318	3316	3314
0,61	3312	3310	3308	3306	3304	3302	3300	3298	3296	3294
0,62	3292	3290	3288	3286	3284	3282	3280	3278	3275	3273
0,63	3271	3269	3267	3265	3263	3261	3259	3257	3255	3253
0,64	3251	3249	3246	3244	3242	3240	3238	3236	3234	3232
0,65	3230	3228	3226	3223	3221	3219	3217	3215	3213	3211
0,66	3209	3207	3204	3202	3200	3198	3196	3194	3192	3190
0,67	3187	3185	3183	3181	3179	3177	3175	3172	3170	3168
0,68	3166	3164	3162	3159	3157	3155	3153	3151	3149	3146
0,69	3144	3142	3140	3138	3136	3133	3131	3129	3127	3125
0,70	3123	3120	3118	3116	3114	3112	3109	3107	3105	3103
0,71	3101	3098	3096	3094	3092	3090	3087	3085	3083	3081
0,72	3079	3076	3074	3072	3070	3067	3065	3063	3061	3059
0,73	3056	3054	3052	3050	3047	3045	3043	3041	3038	3036
0,74	3034	3032	3029	3027	3025	3023	3020	3018	3016	3014
0,75	3011	3009	3007	3005	3002	3000	2998	2996	2993	2991
0,76	2989	2986	2984	2982	2980	2977	2975	2973	2971	2968
0,77	2966	2964	2961	2959	2957	2955	2952	2950	2948	2945
0,78	2943	2941	2938	2936	2934	2932	2929	2927	2925	2922
0,79	2920	2918	2915	2913	2911	2908	2906	2904	2902	2899
0,80	2897	2895	2892	2890	2888	2885	2883	2881	2878	2876
0,81	2874	2871	2869	2867	2864	2862	2860	2857	2855	2853
0,82	2850	2848	2846	2843	2841	2839	2836	2834	2832	2829
0,83	2827	2825	2822	2820	2818	2815	2813	2810	2808	2806
0,84	2803	2801	2799	2796	2794	2792	2789	2787	2785	2782
0,85	2780	2777	2775	2773	2770	2768	2766	2763	2761	2759

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,86	0,2756	2754	2751	2749	2747	2744	2742	2740	2737	2735
0,87	2732	2730	2728	2725	2723	2721	2718	2716	2713	2711
0,88	2709	2706	2704	2701	2699	2697	2694	2692	2690	2687
0,89	2685	2682	2680	2678	2675	2673	2670	2668	2666	2663
0,90	2661	2658	2656	2654	2651	2649	2646	2644	2642	2639
0,91	2637	2634	2632	2630	2627	2625	2622	2620	2618	2615
0,92	2613	2610	2608	2606	2603	2601	2598	2596	2594	2591
0,93	2589	2586	2584	2582	2579	2577	2574	2572	2570	2567
0,94	2565	2562	2560	2557	2555	2553	2550	2548	2545	2543
0,95	2541	2538	2536	2533	2531	2529	2526	2524	2521	2519
0,96	2516	2514	2512	2509	2507	2504	2502	2500	2497	2495
0,97	2492	2490	2487	2485	2483	2480	2478	2475	2473	2471
0,98	2468	2466	2463	2461	2458	2456	2454	2451	2449	2446
0,99	2444	2441	2439	2437	2434	2432	2429	2427	2425	2422
1,00	2420	2417	2415	2412	2410	2408	2405	2403	2400	2398
1,01	2396	2393	2391	2388	2386	2383	2381	2379	2376	2374
1,02	2371	2369	2366	2364	2362	2359	2357	2354	2352	2350
1,03	2347	2345	2342	2340	2337	2335	2333	2330	2328	2325
1,04	2323	2321	2318	2316	2313	2311	2308	2306	2304	2301
1,05	2299	2296	2294	2292	2289	2287	2284	2282	2280	2277
1,06	2275	2272	2270	2267	2265	2263	2260	2258	2255	2253
1,07	2251	2248	2246	2243	2241	2239	2236	2234	2231	2229
1,08	2227	2224	2222	2219	2217	2215	2212	2210	2207	2205
1,09	2203	2200	2198	2195	2193	2191	2188	2186	2183	2181
1,10	2179	2176	2174	2171	2169	2167	2164	2162	2159	2157
1,11	2155	2152	2150	2147	2145	2143	2140	2138	2135	2133
1,12	2131	2128	2126	2124	2121	2119	2116	2114	2112	2109
1,13	2107	2104	2102	2100	2097	2095	2093	2090	2088	2085
1,14	2083	2081	2078	2076	2074	2071	2069	2066	2064	2062
1,15	2059	2057	2055	2052	2050	2048	2045	2043	2040	2038
1,16	2036	2033	2031	2029	2026	2024	2022	2019	2017	2014
1,17	2012	2010	2007	2005	2003	2000	1998	1996	1993	1991
1,18	1989	1986	1984	1982	1979	1977	1975	1972	1970	1968
1,19	1965	1963	1961	1958	1956	1954	1951	1949	1947	1944
1,20	1942	1940	1937	1935	1933	1930	1928	1926	1923	1921
1,21	1919	1916	1914	1912	1909	1907	1905	1902	1900	1898
1,22	1895	1893	1891	1888	1886	1884	1882	1879	1877	1875
1,23	1872	1870	1868	1865	1863	1861	1859	1856	1854	1852
1,24	1849	1847	1845	1842	1840	1838	1836	1833	1831	1829
1,25	1826	1824	1822	1820	1817	1815	1813	1811	1808	1806
1,26	1804	1801	1799	1797	1795	1792	1790	1788	1786	1783
1,27	1781	1779	1777	1774	1772	1770	1767	1765	1763	1761
1,28	1758	1756	1754	1752	1749	1747	1745	1743	1741	1738
1,29	1736	1734	1732	1729	1727	1725	1723	1720	1718	1716
1,30	1714	1711	1709	1707	1705	1703	1700	1698	1696	1694

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,31	0,1691	1689	1687	1685	1683	1680	1678	1676	1674	1672
1,32	1669	1667	1665	1663	1661	1658	1656	1654	1652	1650
1,33	1647	1645	1643	1641	1639	1636	1634	1632	1630	1628
1,34	1626	1623	1621	1619	1617	1615	1613	1610	1608	1606
1,35	1604	1602	1600	1597	1595	1593	1591	1589	1587	1584
1,36	1582	1580	1578	1576	1574	1572	1569	1567	1565	1563
1,37	1561	1559	1557	1554	1552	1550	1548	1546	1544	1542
1,38	1539	1537	1535	1533	1531	1529	1527	1525	1523	1520
1,39	1518	1516	1514	1512	1510	1508	1506	1504	1501	1499
1,40	1497	1495	1493	1491	1489	1487	1485	1483	1481	1478
1,41	1476	1474	1472	1470	1468	1466	1464	1462	1460	1458
1,42	1456	1454	1452	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437
1,43	1435	1433	1431	1429	1427	1425	1423	1421	1419	1417
1,44	1415	1413	1411	1408	1406	1404	1402	1400	1398	1396
1,45	1394	1392	1390	1388	1386	1384	1382	1380	1378	1376
1,46	1374	1372	1370	1368	1366	1364	1362	1360	1358	1356
1,47	1354	1352	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1338	1336
1,48	1334	1332	1330	1328	1326	1324	1323	1321	1319	1317
1,49	1315	1313	1311	1309	1307	1305	1303	1301	1299	1297
1,50	1295	1293	1291	1289	1287	1285	1284	1282	1280	1278
1,51	1276	1274	1272	1270	1268	1266	1264	1262	1260	1259
1,52	1257	1255	1253	1251	1249	1247	1245	1243	1241	1240
1,53	1238	1236	1234	1232	1230	1228	1226	1224	1223	1221
1,54	1219	1217	1215	1213	1211	1209	1208	1206	1204	1202
1,55	1200	1198	1196	1195	1193	1191	1189	1187	1185	1183
1,56	1182	1180	1178	1176	1174	1172	1171	1169	1167	1165
1,57	1163	1161	1160	1158	1156	1154	1152	1150	1149	1147
1,58	1145	1143	1141	1140	1138	1136	1134	1132	1131	1129
1,59	1127	1125	1123	1122	1120	1118	1116	1115	1113	1111
1,60	1109	1107	1106	1104	1102	1100	1099	1097	1095	1093
1,61	1092	1090	1088	1086	1085	1083	1081	1079	1078	1076
1,62	1074	1072	1071	1069	1067	1065	1064	1062	1060	1058
1,63	1057	1055	1053	1052	1050	1048	1046	1045	1043	1041
1,64	1040	1038	1036	1035	1033	1031	1029	1028	1026	1024
1,65	1023	1021	1019	1018	1016	1014	1013	1011	1009	1008
1,66	1006	1004	1003	1001	0999	0998	0996	0994	0993	0991
1,67	0989	0988	0986	0984	0983	0981	0979	0978	0976	0974
1,68	0973	0971	0970	0968	0966	0965	0963	0961	0960	0958
1,69	0957	0955	0953	0952	0950	0949	0947	0945	0944	0942
1,70	0940	0939	0937	0936	0934	0933	0931	0929	0928	0926
1,71	0925	0923	0921	0920	0918	0917	0915	0914	0912	0910
1,72	0909	0907	0906	0904	0903	0901	0900	0898	0896	0895
1,73	0893	0892	0890	0889	0887	0886	0884	0883	0881	0879
1,74	0878	0876	0875	0873	0872	0870	0869	0867	0866	0864
1,75	0863	0861	0860	0858	0857	0855	0854	0852	0851	0849

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,76	0,0848	0846	0845	0843	0842	0840	0839	0837	0836	0834
1,77	0833	0831	0830	0829	0827	0826	0824	0823	0821	0820
1,78	0818	0817	0815	0814	0812	0811	0810	0808	0807	0805
1,79	0804	0802	0801	0799	0798	0797	0795	0794	0792	0791
1,80	0790	0788	0787	0785	0784	0782	0781	0780	0778	0777
1,81	0775	0774	0773	0771	0770	0768	0767	0766	0764	0763
1,82	0761	0760	0759	0757	0756	0755	0753	0752	0750	0749
1,83	0748	0746	0745	0744	0742	0741	0739	0738	0737	0735
1,84	0734	0733	0731	0730	0729	0727	0726	0725	0723	0722
1,85	0721	0719	0718	0717	0715	0714	0713	0711	0710	0709
1,86	0707	0706	0705	0703	0702	0701	0700	0698	0697	0696
1,87	0694	0693	0692	0690	0689	0688	0687	0685	0684	0683
1,88	0681	0680	0679	0678	0676	0675	0674	0673	0671	0670
1,89	0669	0667	0666	0665	0664	0662	0661	0660	0659	0657
1,90	0656	0655	0654	0652	0651	0650	0649	0647	0646	0645
1,91	0644	0643	0641	0640	0639	0638	0636	0635	0634	0633
1,92	0632	0630	0629	0628	0627	0626	0624	0623	0622	0621
1,93	0620	0618	0617	0616	0615	0614	0612	0611	0610	0609
1,94	0608	0606	0605	0604	0603	0602	0601	0599	0598	0597
1,95	0596	0595	0594	0592	0591	0590	0589	0588	0587	0586
1,96	0584	0583	0582	0581	0580	0579	0578	0576	0575	0574
1,97	0573	0572	0571	0570	0569	0567	0566	0565	0564	0563
1,98	0562	0561	0560	0559	0557	0556	0555	0554	0553	0552
1,99	0551	0550	0549	0548	0546	0545	0544	0543	0542	0541
2,00	0540	0539	0538	0537	0536	0535	0533	0532	0531	0530
2,01	0529	0528	0527	0526	0525	0524	0523	0522	0521	0520
2,02	0519	0518	0517	0516	0514	0513	0512	0511	0510	0509
2,03	0508	0507	0506	0505	0504	0503	0502	0501	0500	0499
2,04	0498	0497	0496	0495	0494	0493	0492	0491	0490	0489
2,05	0488	0487	0486	0485	0484	0483	0482	0481	0480	0479
2,06	0478	0477	0476	0475	0474	0473	0472	0471	0470	0469
2,07	0468	0467	0466	0465	0464	0463	0462	0461	0461	0460
2,08	0459	0458	0457	0456	0455	0454	0453	0452	0451	0450
2,09	0449	0448	0447	0446	0445	0444	0444	0443	0442	0441
2,10	0440	0439	0438	0437	0436	0435	0434	0433	0432	0432
2,11	0431	0430	0429	0428	0427	0426	0425	0424	0423	0423
2,12	0422	0421	0420	0419	0418	0417	0416	0415	0415	0414
2,13	0413	0412	0411	0410	0409	0408	0408	0407	0406	0405
2,14	0404	0403	0402	0401	0401	0400	0399	0398	0397	0396
2,15	0396	0395	0394	0393	0392	0391	0390	0390	0389	0388
2,16	0387	0386	0385	0385	0384	0383	0382	0381	0380	0380
2,17	0379	0378	0377	0376	0376	0375	0374	0373	0372	0371
2,18	0371	0370	0369	0368	0367	0367	0366	0365	0364	0363
2,19	0363	0362	0361	0360	0359	0359	0358	0357	0356	0356
2,20	0355	0354	0353	0352	0352	0351	0350	0349	0349	0348

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,21	0,0347	0346	0345	0345	0344	0343	0342	0342	0341	0340
2,22	0339	0339	0338	0337	0336	0336	0335	0334	0333	0333
2,23	0332	0331	0330	0330	0329	0328	0328	0327	0326	0325
2,24	0325	0324	0323	0322	0322	0321	0320	0320	0319	0318
2,25	0317	0317	0316	0315	0315	0314	0313	0312	0312	0311
2,26	0310	0310	0309	0308	0308	0307	0306	0305	0305	0304
2,27	0303	0303	0302	0301	0301	0300	0299	0299	0298	0297
2,28	0297	0296	0295	0295	0294	0293	0293	0292	0291	0291
2,29	0290	0289	0289	0288	0287	0287	0286	0285	0285	0284
2,30	0283	0283	0282	0281	0281	0280	0279	0279	0278	0277
2,31	0277	0276	0276	0275	0274	0274	0273	0272	0272	0271
2,32	0270	0270	0269	0269	0268	0267	0267	0266	0265	0265
2,33	0264	0264	0263	0262	0262	0261	0261	0260	0259	0259
2,34	0258	0258	0257	0256	0256	0255	0255	0254	0253	0253
2,35	0252	0252	0251	0250	0250	0249	0249	0248	0247	0247
2,36	0246	0246	0245	0245	0244	0243	0243	0242	0242	0241
2,37	0241	0240	0239	0239	0238	0238	0237	0237	0236	0235
2,38	0235	0234	0234	0233	0233	0232	0232	0231	0230	0230
2,39	0229	0229	0228	0228	0227	0227	0226	0226	0225	0224
2,40	0224	0223	0223	0222	0222	0221	0221	0220	0220	0219
2,41	0219	0218	0218	0217	0217	0216	0215	0215	0214	0214
2,42	0213	0213	0212	0212	0211	0211	0210	0210	0209	0209
2,43	0208	0208	0207	0207	0206	0206	0205	0205	0204	0204
2,44	0203	0203	0202	0202	0201	0201	0200	0200	0199	0199
2,45	0198	0198	0197	0197	0196	0196	0195	0195	0195	0194
2,46	0194	0193	0193	0192	0192	0191	0191	0190	0190	0189
2,47	0189	0188	0188	0187	0187	0187	0186	0186	0185	0185
2,48	0184	0184	0183	0183	0182	0182	0182	0181	0181	0180
2,49	0180	0179	0179	0178	0178	0177	0177	0177	0176	0176
2,50	0175	0175	0174	0174	0174	0173	0173	0172	0172	0171
2,51	0171	0171	0170	0170	0169	0169	0168	0168	0168	0167
2,52	0167	0166	0166	0165	0165	0165	0164	0164	0163	0163
2,53	0163	0162	0162	0161	0161	0160	0160	0160	0159	0159
2,54	0158	0158	0158	0157	0157	0156	0156	0156	0155	0155
2,55	0154	0154	0154	0153	0153	0153	0152	0152	0151	0151
2,56	0151	0150	0150	0149	0149	0149	0148	0148	0148	0147
2,57	0147	0146	0146	0146	0145	0145	0145	0144	0144	0143
2,58	0143	0143	0142	0142	0142	0141	0141	0140	0140	0140
2,59	0139	0139	0139	0138	0138	0138	0137	0137	0137	0136
2,60	0136	0135	0135	0135	0134	0134	0134	0133	0133	0133

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,61	0,0132	0132	0132	0131	0131	0131	0130	0130	0130	0129
2,62	0129	0129	0128	0128	0128	0127	0127	0127	0126	0126
2,63	0126	0125	0125	0125	0124	0124	0124	0123	0123	0123
2,64	0122	0122	0122	0121	0121	0121	0120	0120	0120	0119
2,65	0119	0119	0118	0118	0118	0118	0117	0117	0117	0116
2,66	0116	0116	0115	0115	0115	0114	0114	0114	0114	0113
2,67	0113	0113	0112	0112	0112	0111	0111	0111	0111	0110
2,68	0110	0110	0109	0109	0109	0109	0108	0108	0108	0107
2,69	0107	0107	0106	0106	0106	0106	0105	0105	0105	0104
2,70	0104	0104	0104	0103	0103	0103	0103	0102	0102	0102
2,71	0101	0101	0101	0101	0100	0100	0100	0100	0099	0099
2,72	0099	0098	0098	0098	0098	0097	0097	0097	0097	0096
2,73	0096	0096	0096	0095	0095	0095	0094	0094	0094	0094
2,74	0093	0093	0093	0093	0092	0092	0092	0092	0091	0091
2,75	0091	0091	0090	0090	0090	0090	0089	0089	0089	0089
2,76	0088	0088	0088	0088	0087	0087	0087	0087	0087	0086
2,77	0086	0086	0086	0085	0085	0085	0085	0084	0084	0084
2,78	0084	0083	0083	0083	0083	0083	0082	0082	0082	0082
2,79	0081	0081	0081	0081	0080	0080	0080	0080	0080	0079
2,80	0079	0079	0079	0078	0078	0078	0078	0078	0077	0077
2,81	0077	0077	0077	0076	0076	0076	0076	0075	0075	0075
2,82	0075	0075	0074	0074	0074	0074	0074	0073	0073	0073
2,83	0073	0073	0072	0072	0072	0072	0072	0071	0071	0071
2,84	0071	0071	0070	0070	0070	0070	0070	0069	0069	0069
2,85	0069	0069	0068	0068	0068	0068	0068	0067	0067	0067
2,86	0067	0067	0066	0066	0066	0066	0066	0065	0065	0065
2,87	0065	0065	0065	0064	0064	0064	0064	0064	0063	0063
2,88	0063	0063	0063	0063	0062	0062	0062	0062	0062	0061
2,89	0061	0061	0061	0061	0061	0060	0060	0060	0060	0060
2,90	0060	0059	0059	0059	0059	0059	0058	0058	0058	0058
2,91	0058	0058	0057	0057	0057	0057	0057	0057	0056	0056
2,92	0056	0056	0056	0056	0056	0055	0055	0055	0055	0055
2,93	0055	0054	0054	0054	0054	0054	0054	0053	0053	0053
2,94	0053	0053	0053	0052	0052	0052	0052	0052	0052	0052
2,95	0051	0051	0051	0051	0051	0051	0051	0050	0050	0050
2,96	0050	0050	0050	0049	0049	0049	0049	0049	0049	0049
2,97	0048	0048	0048	0048	0048	0048	0048	0047	0047	0047
2,98	0047	0047	0047	0047	0046	0046	0046	0046	0046	0046
2,99	0046	0046	0045	0045	0045	0045	0045	0045	0045	0044
3,00	0044	0044	0044	0044	0044	0044	0044	0043	0043	0043

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
3,000—3,006	0,0044	3,133—3,143	0,0029	3,352—3,373	0,0014
3,007—3,013	0,0043	3,144—3,155	0,0028	3,374—3,395	0,0013
3,014—3,021	0,0042	3,156—3,166	0,0027	3,396—3,420	0,0012
3,022—3,029	0,0041	3,167—3,178	0,0026	3,421—3,446	0,0011
3,030—3,038	0,0040	3,179—3,191	0,0025	3,447—3,475	0,0010
3,039—3,046	0,0039	3,192—3,204	0,0024	3,476—3,507	0,0009
3,047—3,055	0,0038	3,205—3,218	0,0023	3,508—3,543	0,0008
3,056—3,064	0,0037	3,219—3,232	0,0022	3,544—3,583	0,0007
3,065—3,073	0,0036	3,233—3,246	0,0021	3,584—3,629	0,0006
3,074—3,082	0,0035	3,247—3,262	0,0020	3,630—3,684	0,0005
3,083—3,091	0,0034	3,263—3,278	0,0019	3,685—3,751	0,0004
3,092—3,101	0,0033	3,279—3,295	0,0018	3,752—3,840	0,0003
3,102—3,111	0,0032	3,296—3,313	0,0017	3,841—3,971	0,0002
3,112—3,122	0,0031	3,314—3,331	0,0016	3,972—4,238	0,0001
3,123—3,132	0,0030	3,332—3,351	0,0015	4,239— ∞	0,0000

Приложение В

Таблица значений интегральной функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0004	0008	0012	0016	0020	0024	0028	0032	0036
0,01	0040	0044	0048	0052	0056	0060	0064	0068	0072	0076
0,02	0080	0084	0088	0092	0096	0100	0104	0108	0112	0116
0,03	0120	0124	0128	0132	0136	0140	0144	0148	0152	0156
0,04	0160	0164	0168	0171	0175	0179	0183	0187	0191	0195
0,05	0199	0203	0207	0211	0215	0219	0223	0227	0231	0235
0,06	0239	0243	0247	0251	0255	0259	0263	0267	0271	0275
0,07	0279	0283	0287	0291	0295	0299	0303	0307	0311	0315
0,08	0319	0323	0327	0331	0335	0339	0343	0347	0351	0355
0,09	0359	0363	0367	0370	0374	0378	0382	0386	0390	0394
0,10	0398	0402	0406	0410	0414	0418	0422	0426	0430	0434
0,11	0438	0442	0446	0450	0454	0458	0462	0466	0470	0474
0,12	0478	0482	0486	0489	0493	0497	0501	0505	0509	0513
0,13	0517	0521	0525	0529	0533	0537	0541	0545	0549	0553
0,14	0557	0561	0565	0569	0572	0576	0580	0584	0588	0592
0,15	0596	0600	0604	0608	0612	0616	0620	0624	0628	0632
0,16	0636	0640	0643	0647	0651	0655	0659	0663	0667	0671
0,17	0675	0679	0683	0687	0691	0695	0699	0702	0706	0710
0,18	0714	0718	0722	0726	0730	0734	0738	0742	0746	0750
0,19	0753	0757	0761	0765	0769	0773	0777	0781	0785	0789
0,20	0793	0797	0800	0804	0808	0812	0816	0820	0824	0828
0,21	0832	0836	0839	0843	0847	0851	0855	0859	0863	0867
0,22	0871	0875	0878	0882	0886	0890	0894	0898	0902	0906
0,23	0910	0913	0917	0921	0925	0929	0933	0937	0941	0944
0,24	0948	0952	0956	0960	0964	0968	0972	0975	0979	0983
0,25	0987	0991	0995	0999	1003	1006	1010	1014	1018	1022
0,26	1026	1030	1033	1037	1041	1045	1049	1053	1057	1060
0,27	1064	1068	1072	1076	1080	1083	1087	1091	1095	1099
0,28	1103	1106	1110	1114	1118	1122	1126	1129	1133	1137
0,29	1141	1145	1149	1152	1156	1160	1164	1168	1171	1175
0,30	1179	1183	1187	1191	1194	1198	1202	1206	1210	1213
0,31	1217	1221	1225	1229	1232	1236	1240	1244	1248	1251
0,32	1255	1259	1263	1267	1270	1274	1278	1282	1285	1289
0,33	1293	1297	1301	1304	1308	1312	1316	1319	1323	1327
0,34	1331	1334	1338	1342	1346	1350	1353	1357	1361	1365
0,35	1368	1372	1376	1380	1383	1387	1391	1395	1398	1402
0,36	1406	1410	1413	1417	1421	1424	1428	1432	1436	1439
0,37	1443	1447	1451	1454	1458	1462	1465	1469	1473	1477
0,38	1480	1484	1488	1491	1495	1499	1503	1506	1510	1514
0,39	1517	1521	1525	1528	1532	1536	1539	1543	1547	1551
0,40	1554	1558	1562	1565	1569	1573	1576	1580	1584	1587

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,41	0,1591	1595	1598	1602	1606	1609	1613	1617	1620	1624
0,42	1628	1631	1635	1639	1642	1646	1649	1653	1657	1660
0,43	1664	1668	1671	1675	1679	1682	1686	1689	1693	1697
0,44	1700	1704	1708	1711	1715	1718	1722	1726	1729	1733
0,45	1736	1740	1744	1747	1751	1754	1758	1762	1765	1769
0,46	1772	1776	1780	1783	1787	1790	1794	1798	1801	1805
0,47	1808	1812	1815	1819	1823	1826	1830	1833	1837	1840
0,48	1844	1847	1851	1855	1858	1862	1865	1869	1872	1876
0,49	1879	1883	1886	1890	1893	1897	1901	1904	1908	1911
0,50	1915	1918	1922	1925	1929	1932	1936	1939	1943	1946
0,51	1950	1953	1957	1960	1964	1967	1971	1974	1978	1981
0,52	1985	1988	1992	1995	1999	2002	2006	2009	2013	2016
0,53	2019	2023	2026	2030	2033	2037	2040	2044	2047	2051
0,54	2054	2057	2061	2064	2068	2071	2075	2078	2082	2085
0,55	2088	2092	2095	2099	2102	2106	2109	2112	2116	2119
0,56	2123	2126	2129	2133	2136	2140	2143	2146	2150	2153
0,57	2157	2160	2163	2167	2170	2174	2177	2180	2184	2187
0,58	2190	2194	2197	2201	2204	2207	2211	2214	2217	2221
0,59	2224	2227	2231	2234	2237	2241	2244	2247	2251	2254
0,60	2257	2261	2264	2267	2271	2274	2277	2281	2284	2287
0,61	2291	2294	2297	2301	2304	2307	2311	2314	2317	2320
0,62	2324	2327	2330	2334	2337	2340	2343	2347	2350	2353
0,63	2356	2360	2363	2366	2370	2373	2376	2379	2383	2386
0,64	2389	2392	2396	2399	2402	2405	2409	2412	2415	2418
0,65	2422	2425	2428	2431	2434	2438	2441	2444	2447	2451
0,66	2454	2457	2460	2463	2467	2470	2473	2476	2479	2483
0,67	2486	2489	2492	2495	2498	2502	2505	2508	2511	2514
0,68	2517	2521	2524	2527	2530	2533	2536	2540	2543	2546
0,69	2549	2552	2555	2558	2562	2565	2568	2571	2574	2577
0,70	2580	2583	2587	2590	2593	2596	2599	2602	2605	2608
0,71	2611	2615	2618	2621	2624	2627	2630	2633	2636	2639
0,72	2642	2645	2649	2652	2655	2658	2661	2664	2667	2670
0,73	2673	2676	2679	2682	2685	2688	2691	2694	2697	2700
0,74	2704	2707	2710	2713	2716	2719	2722	2725	2728	2731
0,75	2734	2737	2740	2743	2746	2749	2752	2755	2758	2761
0,76	2764	2767	2770	2773	2776	2779	2782	2785	2788	2791
0,77	2794	2796	2799	2802	2805	2808	2811	2814	2817	2820
0,78	2823	2826	2829	2832	2835	2838	2841	2844	2847	2849
0,79	2852	2855	2858	2861	2864	2867	2870	2873	2876	2879
0,80	2881	2884	2887	2890	2893	2896	2899	2902	2905	2907
0,81	2910	2913	2916	2919	2922	2925	2927	2930	2933	2936
0,82	2939	2942	2945	2947	2950	2953	2956	2959	2962	2964
0,83	2967	2970	2973	2976	2979	2981	2984	2987	2990	2993
0,84	2995	2998	3001	3004	3007	3009	3012	3015	3018	3021
0,85	3023	3026	3029	3032	3034	3037	3040	3043	3046	3048

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,86	0,3051	3054	3057	3059	3062	3065	3068	3070	3073	3076
0,87	3078	3081	3084	3087	3089	3092	3095	3098	3100	3103
0,88	3106	3108	3111	3114	3117	3119	3122	3125	3127	3130
0,89	3133	3135	3138	3141	3143	3146	3149	3151	3154	3157
0,90	3159	3162	3165	3167	3170	3173	3175	3178	3181	3183
0,91	3186	3189	3191	3194	3196	3199	3202	3204	3207	3210
0,92	3212	3215	3217	3220	3223	3225	3228	3230	3233	3236
0,93	3238	3241	3243	3246	3248	3251	3254	3256	3259	3261
0,94	3264	3266	3269	3272	3274	3277	3279	3282	3284	3287
0,95	3289	3292	3295	3297	3300	3302	3305	3307	3310	3312
0,96	3315	3317	3320	3322	3325	3327	3330	3332	3335	3337
0,97	3340	3342	3345	3347	3350	3352	3355	3357	3360	3362
0,98	3365	3367	3370	3372	3374	3377	3379	3382	3384	3387
0,99	3389	3392	3394	3396	3399	3401	3404	3406	3409	3411
1,00	3413	3416	3418	3421	3423	3426	3428	3430	3433	3435
1,01	3438	3440	3442	3445	3447	3449	3452	3454	3457	3459
1,02	3461	3464	3466	3468	3471	3473	3476	3478	3480	3483
1,03	3485	3487	3490	3492	3494	3497	3499	3501	3504	3506
1,04	3508	3511	3513	3515	3518	3520	3522	3525	3527	3529
1,05	3531	3534	3536	3538	3541	3543	3545	3547	3550	3552
1,06	3554	3557	3559	3561	3563	3566	3568	3570	3572	3575
1,07	3577	3579	3581	3584	3586	3588	3590	3593	3595	3597
1,08	3599	3602	3604	3606	3608	3610	3613	3615	3617	3619
1,09	3621	3624	3626	3628	3630	3632	3635	3637	3639	3641
1,10	3643	3646	3648	3650	3652	3654	3656	3659	3661	3663
1,11	3665	3667	3669	3671	3674	3676	3678	3680	3682	3684
1,12	3686	3689	3691	3693	3695	3697	3699	3701	3703	3706
1,13	3708	3710	3712	3714	3716	3718	3720	3722	3724	3726
1,14	3729	3731	3733	3735	3737	3739	3741	3743	3745	3747
1,15	3749	3751	3753	3755	3757	3760	3762	3764	3766	3768
1,16	3770	3772	3774	3776	3778	3780	3782	3784	3786	3788
1,17	3790	3792	3794	3796	3798	3800	3802	3804	3806	3808
1,18	3810	3812	3814	3816	3818	3820	3822	3824	3826	3828
1,19	3830	3832	3834	3836	3838	3840	3842	3843	3845	3847
1,20	3849	3851	3853	3855	3857	3859	3861	3863	3865	3867
1,21	3869	3871	3872	3874	3876	3878	3880	3882	3884	3886
1,22	3888	3890	3891	3893	3895	3897	3899	3901	3903	3905
1,23	3907	3908	3910	3912	3914	3916	3918	3920	3921	3923
1,24	3925	3927	3929	3931	3933	3934	3936	3938	3940	3942
1,25	3944	3945	3947	3949	3951	3953	3954	3956	3958	3960
1,26	3962	3963	3965	3967	3969	3971	3972	3974	3976	3978
1,27	3980	3981	3983	3985	3987	3988	3990	3992	3994	3996
1,28	3997	3999	4001	4003	4004	4006	4008	4010	4011	4013
1,29	4015	4016	4018	4020	4022	4023	4025	4027	4029	4030
1,30	4032	4034	4035	4037	4039	4041	4042	4044	4046	4047

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,31	0,4049	4051	4052	4054	4056	4057	4059	4061	4062	4064
1,32	4066	4067	4069	4071	4072	4074	4076	4077	4079	4081
1,33	4082	4084	4086	4087	4089	4091	4092	4094	4096	4097
1,34	4099	4100	4102	4104	4105	4107	4108	4110	4112	4113
1,35	4115	4117	4118	4120	4121	4123	4125	4126	4128	4129
1,36	4131	4132	4134	4136	4137	4139	4140	4142	4143	4145
1,37	4147	4148	4150	4151	4153	4154	4156	4157	4159	4161
1,38	4162	4164	4165	4167	4168	4170	4171	4173	4174	4176
1,39	4177	4179	4180	4182	4183	4185	4186	4188	4189	4191
1,40	4192	4194	4195	4197	4198	4200	4201	4203	4204	4206
1,41	4207	4209	4210	4212	4213	4215	4216	4218	4219	4221
1,42	4222	4223	4225	4226	4228	4229	4231	4232	4234	4235
1,43	4236	4238	4239	4241	4242	4244	4245	4246	4248	4249
1,44	4251	4252	4253	4255	4256	4258	4259	4261	4262	4263
1,45	4265	4266	4267	4269	4270	4272	4273	4274	4276	4277
1,46	4279	4280	4281	4283	4284	4285	4287	4288	4289	4291
1,47	4292	4294	4295	4296	4298	4299	4300	4302	4303	4304
1,48	4306	4307	4308	4310	4311	4312	4314	4315	4316	4318
1,49	4319	4320	4322	4323	4324	4325	4327	4328	4329	4331
1,50	4332	4333	4335	4336	4337	4338	4340	4341	4342	4344
1,51	4345	4346	4347	4349	4350	4351	4352	4354	4355	4356
1,52	4357	4359	4360	4361	4362	4364	4365	4366	4367	4369
1,53	4370	4371	4372	4374	4375	4376	4377	4379	4380	4381
1,54	4382	4383	4385	4386	4387	4388	4389	4391	4392	4393
1,55	4394	4395	4397	4398	4399	4400	4401	4403	4404	4405
1,56	4406	4407	4409	4410	4411	4412	4413	4414	4416	4417
1,57	4418	4419	4420	4421	4423	4424	4425	4426	4427	4428
1,58	4429	4431	4432	4433	4434	4435	4436	4437	4439	4440
1,59	4441	4442	4443	4444	4445	4446	4448	4449	4450	4451
1,60	4452	4453	4454	4455	4456	4458	4459	4460	4461	4462
1,61	4463	4464	4465	4466	4467	4468	4470	4471	4472	4473
1,62	4474	4475	4476	4477	4478	4479	4480	4481	4482	4483
1,63	4484	4486	4487	4488	4489	4490	4491	4492	4493	4494
1,64	4495	4496	4497	4498	4499	4500	4501	4502	4503	4504
1,65	4505	4506	4507	4508	4509	4510	4511	4512	4513	4514
1,66	4515	4516	4517	4518	4519	4520	4521	4522	4523	4524
1,67	4525	4526	4527	4528	4529	4530	4531	4532	4533	4534
1,68	4535	4536	4537	4538	4539	4540	4541	4542	4543	4544
1,69	4545	4546	4547	4548	4549	4550	4551	4552	4552	4553
1,70	4554	4555	4556	4557	4558	4559	4560	4561	4562	4563
1,71	4564	4565	4566	4566	4567	4568	4569	4570	4571	4572
1,72	4573	4574	4575	4576	4576	4577	4578	4579	4580	4581
1,73	4582	4583	4584	4585	4585	4586	4587	4588	4589	4590
1,74	4591	4592	4592	4593	4594	4595	4596	4597	4598	4599
1,75	4599	4600	4601	4602	4603	4604	4605	4605	4606	4607

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,76	0,4608	4609	4610	4610	4611	4612	4613	4614	4615	4616
1,77	4616	4617	4618	4619	4620	4621	4621	4622	4623	4624
1,78	4625	4625	4626	4627	4628	4629	4630	4630	4631	4632
1,79	4633	4634	4634	4635	4636	4637	4638	4638	4639	4640
1,80	4641	4641	4642	4643	4644	4645	4645	4646	4647	4648
1,81	4649	4649	4650	4651	4652	4652	4653	4654	4655	4655
1,82	4656	4657	4658	4658	4659	4660	4661	4662	4662	4663
1,83	4664	4664	4665	4666	4667	4667	4668	4669	4670	4670
1,84	4671	4672	4673	4673	4674	4675	4676	4676	4677	4678
1,85	4678	4679	4680	4681	4681	4682	4683	4683	4684	4685
1,86	4686	4686	4687	4688	4688	4689	4690	4690	4691	4692
1,87	4693	4693	4694	4695	4695	4696	4697	4697	4698	4699
1,88	4699	4700	4701	4701	4702	4703	4704	4704	4705	4706
1,89	4706	4707	4708	4708	4709	4710	4710	4711	4712	4712
1,90	4713	4713	4714	4715	4715	4716	4717	4717	4718	4719
1,91	4719	4720	4721	4721	4722	4723	4723	4724	4724	4725
1,92	4726	4726	4727	4728	4728	4729	4729	4730	4731	4731
1,93	4732	4733	4733	4734	4734	4735	4736	4736	4737	4737
1,94	4738	4739	4739	4740	4741	4741	4742	4742	4743	4744
1,95	4744	4745	4745	4746	4746	4747	4748	4748	4749	4749
1,96	4750	4751	4751	4752	4752	4753	4754	4754	4755	4755
1,97	4756	4756	4757	4758	4758	4759	4759	4760	4760	4761
1,98	4761	4762	4763	4763	4764	4764	4765	4765	4766	4766
1,99	4767	4768	4768	4769	4769	4770	4770	4771	4771	4772
2,00	4772	4773	4774	4774	4775	4775	4776	4776	4777	4777
2,01	4778	4778	4779	4779	4780	4780	4781	4782	4782	4783
2,02	4783	4784	4784	4785	4785	4786	4786	4787	4787	4788
2,03	4788	4789	4789	4790	4790	4791	4791	4792	4792	4793
2,04	4793	4794	4794	4795	4795	4796	4796	4797	4797	4798
2,05	4798	4799	4799	4800	4800	4801	4801	4802	4802	4803
2,06	4803	4803	4804	4804	4805	4805	4806	4806	4807	4807
2,07	4808	4808	4809	4809	4810	4810	4811	4811	4811	4812
2,08	4812	4813	4813	4814	4814	4815	4815	4816	4816	4816
2,09	4817	4817	4818	4818	4819	4819	4820	4820	4820	4821
2,10	4821	4822	4822	4823	4823	4824	4824	4824	4825	4825
2,11	4826	4826	4827	4827	4827	4828	4828	4829	4829	4830
2,12	4830	4830	4831	4831	4832	4832	4832	4833	4833	4834
2,13	4834	4835	4835	4835	4836	4836	4837	4837	4837	4838
2,14	4838	4839	4839	4839	4840	4840	4841	4841	4841	4842
2,15	4842	4843	4843	4843	4844	4844	4845	4845	4845	4846
2,16	4846	4847	4847	4847	4848	4848	4848	4849	4849	4850
2,17	4850	4850	4851	4851	4851	4852	4852	4853	4853	4853
2,18	4854	4854	4854	4855	4855	4856	4856	4856	4857	4857
2,19	4857	4858	4858	4858	4859	4859	4860	4860	4860	4861
2,20	4861	4861	4862	4862	4862	4863	4863	4863	4864	4864

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,21	0,4864	4865	4865	4866	4866	4866	4867	4867	4867	4868
2,22	4868	4868	4869	4869	4869	4870	4870	4870	4871	4871
2,23	4871	4872	4872	4872	4873	4873	4873	4874	4874	4874
2,24	4875	4875	4875	4876	4876	4876	4876	4877	4877	4877
2,25	4878	4878	4878	4879	4879	4879	4880	4880	4880	4881
2,26	4881	4881	4882	4882	4882	4882	4883	4883	4883	4884
2,27	4884	4884	4885	4885	4885	4885	4886	4886	4886	4887
2,28	4887	4887	4888	4888	4888	4888	4889	4889	4889	4890
2,29	4890	4890	4890	4891	4891	4891	4892	4892	4892	4892
2,30	4893	4893	4893	4894	4894	4894	4894	4895	4895	4895
2,31	4896	4896	4896	4896	4897	4897	4897	4897	4898	4898
2,32	4898	4899	4899	4899	4899	4900	4900	4900	4900	4901
2,33	4901	4901	4901	4902	4902	4902	4903	4903	4903	4903
2,34	4904	4904	4904	4904	4905	4905	4905	4905	4906	4906
2,35	4906	4906	4907	4907	4907	4907	4908	4908	4908	4908
2,36	4909	4909	4909	4909	4910	4910	4910	4910	4911	4911
2,37	4911	4911	4912	4912	4912	4912	4912	4913	4913	4913
2,38	4913	4914	4914	4914	4914	4915	4915	4915	4915	4916
2,39	4916	4916	4916	4916	4917	4917	4917	4917	4918	4918
2,40	4918	4918	4918	4919	4919	4919	4919	4920	4920	4920
2,41	4920	4920	4921	4921	4921	4921	4922	4922	4922	4922
2,42	4922	4923	4923	4923	4923	4923	4924	4924	4924	4924
2,43	4925	4925	4925	4925	4925	4926	4926	4926	4926	4926
2,44	4927	4927	4927	4927	4927	4928	4928	4928	4928	4928
2,45	4929	4929	4929	4929	4929	4930	4930	4930	4930	4930
2,46	4931	4931	4931	4931	4931	4931	4932	4932	4932	4932
2,47	4932	4933	4933	4933	4933	4933	4934	4934	4934	4934
2,48	4934	4934	4935	4935	4935	4935	4935	4936	4936	4936
2,49	4936	4936	4936	4937	4937	4937	4937	4937	4938	4938
2,50	4938	4938	4938	4938	4939	4939	4939	4939	4939	4939
2,51	4940	4940	4940	4940	4940	4940	4941	4941	4941	4941
2,52	4941	4941	4942	4942	4942	4942	4942	4942	4943	4943
2,53	4943	4943	4943	4943	4944	4944	4944	4944	4944	4944
2,54	4945	4945	4945	4945	4945	4945	4946	4946	4946	4946
2,55	4946	4946	4946	4947	4947	4947	4947	4947	4947	4948
2,56	4948	4948	4948	4948	4948	4948	4949	4949	4949	4949
2,57	4949	4949	4949	4950	4950	4950	4950	4950	4950	4950
2,58	4951	4951	4951	4951	4951	4951	4951	4952	4952	4952
2,59	4952	4952	4952	4952	4953	4953	4953	4953	4953	4953
2,60	4953	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4954	4955
2,61	4955	4955	4955	4955	4955	4955	4956	4956	4956	4956
2,62	4956	4956	4956	4956	4957	4957	4957	4957	4957	4957
2,63	4957	4957	4958	4958	4958	4958	4958	4958	4958	4958
2,64	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4959	4960	4960
2,65	4960	4960	4960	4960	4960	4960	4960	4961	4961	4961

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,66	0,4961	4961	4961	4961	4961	4962	4962	4962	4962	4962
2,67	4962	4962	4962	4962	4963	4963	4963	4963	4963	4963
2,68	4963	4963	4963	4964	4964	4964	4964	4964	4964	4964
2,69	4964	4964	4964	4965	4965	4965	4965	4965	4965	4965
2,70	4965	4965	4966	4966	4966	4966	4966	4966	4966	4966
2,71	4966	4966	4967	4967	4967	4967	4967	4967	4967	4967
2,72	4967	4967	4968	4968	4968	4968	4968	4968	4968	4968
2,73	4968	4968	4969	4969	4969	4969	4969	4969	4969	4969
2,74	4969	4969	4969	4970	4970	4970	4970	4970	4970	4970
2,75	4970	4970	4970	4970	4971	4971	4971	4971	4971	4971
2,76	4971	4971	4971	4971	4971	4972	4972	4972	4972	4972
2,77	4972	4972	4972	4972	4972	4972	4972	4973	4973	4973
2,78	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4973	4974
2,79	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974	4974
2,80	4974	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975	4975
2,81	4975	4975	4975	4975	4976	4976	4976	4976	4976	4976
2,82	4976	4976	4976	4976	4976	4976	4976	4977	4977	4977
2,83	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977	4977
2,84	4977	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4978
2,85	4978	4978	4978	4978	4978	4978	4979	4979	4979	4979
2,86	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979	4979
2,87	4979	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980
2,88	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4980	4981	4981	4981
2,89	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981	4981
2,90	4981	4981	4981	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982
2,91	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982	4982
2,92	4982	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983
2,93	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4983	4984
2,94	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984
2,95	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4984	4985	4985
2,96	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985
2,97	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4985	4986
2,98	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986
2,99	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986	4986
3,00	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987	4987

x	***Φ***(*x*)	*x*	***Φ***(*x*)	*x*	***Φ***(*x*)
3,000—3,023	0,4987	3,139—3,174	0,4992	3,390—3,480	0,4997
3,024—3,048	0,4988	3,175—3,215	0,4993	3,481—3,615	0,4998
3,049—3,075	0,4989	3,216—3,263	0,4994	3,616—3,890	0,4999
3,076—3,105	0,4990	3,264—3,320	0,4995	3,891— ∞	0,5000
3,106—3,138	0,4991	3,321—3,389	0,4996		

Приложение Г

Таблица значений функции $t_{\gamma} = t(\gamma;\ n)$.

n \ γ	***0,95***	***0,99***	***0,999***	n \ γ	***0,95***	***0,99***	***0,999***
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение Д

Критические точки распределения χ^2.

Число степеней свободы k	***Уровень значимости*** α					
	0,01	***0,025***	***0,05***	***0,95***	***0,975***	***0,99***
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63

Приложение Е

Таблица значений функций $P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = \dfrac{1-\gamma}{2}$ и $P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = \dfrac{1+\gamma}{2}$.

γ	0,99		0,95		0,90	
k	χ_1^2	χ_2^2	χ_1^2	χ_2^2	χ_1^2	χ_2^2
1	$39\cdot10^{-6}$	7,88	$98\cdot10^{-5}$	5,02	$39\cdot10^{-4}$	3,84
2	0,010	10,6	0,051	7,38	0,103	5,99
3	0,072	12,8	0,216	9,35	0,352	7,81
4	0,207	14,9	0,484	11,1	0,711	9,49
5	0,412	16,7	0,831	12,8	1,15	11,1
6	0,676	18,5	1,24	14,4	1,64	12,6
7	0,989	20,3	1,69	16,0	2,17	14,1
8	1,34	22,0	2,18	17,5	2,73	15,5
9	1,73	23,6	2,70	19,0	3,33	16,9
10	2,16	25,2	3,25	20,5	3,94	18,3
11	2,60	26,8	3,82	21,9	4,57	19,7
12	3,07	28,3	4,40	23,3	5,23	21,0
13	3,57	29,8	5,01	24,7	5,89	22,4
14	4,07	31,3	5,63	26,1	6,57	23,7
15	4,60	32,8	6,26	27,5	7,26	25,0
16	5,14	34,3	6,91	28,8	7,96	26,3
17	5,70	35,7	7,56	30,2	8,67	27,6
18	6,26	37,2	8,23	31,5	9,39	28,9
19	6,84	38,6	8,91	32,9	10,1	30,1
20	7,43	40,0	9,59	34,2	10,9	31,4
21	8,03	41,4	10,3	35,5	11,6	32,7
22	8,64	42,8	11,0	36,8	12,3	33,9
23	9,26	44,2	11,7	38,1	13,1	35,2
24	9,89	45,6	12,4	39,4	13,8	36,4
25	10,5	46,9	13,1	40,6	14,6	37,7
26	11,2	48,3	13,8	41,9	15,4	38,9
27	11,8	49,6	14,6	43,2	16,2	40,1
28	12,5	51,0	15,3	44,5	16,9	41,3
29	13,1	52,3	16,0	45,7	17,7	42,6
30	13,8	53,7	16,8	47,0	18,5	43,8

Авторы: ***Терехов Сергей Владимирович***,
д.ф.-м.н., доц., в.н.с. отдела № 16,
ГУ ДонФТИ им. А.А. Галкина.
Варюхин Виктор Николаевич,
д.ф.-м.н., проф., зав. каф. “Теоретической физики и нанотехнологий”, ДонНУ,
директор ГУ ДонФТИ им. А.А. Галкина.

Учебное пособие: Математическая библиотечка студента-физика. Т. 2 (части III−V). Решение задач по интегральному исчислению, теории рядов, дифференциальным уравнениям I и II порядков, теории вероятностей и математической статистике // Учебное издание для студентов физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов / Донецк: ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина. – 2018. – 425 с.