Терехов С.В.

Варюхин В.Н.

Математическая библиотечка студента-физика

Том 1

Решение задач

по линейной и векторной алгебрам,
аналитической геометрии на плоскости и в пространстве,
теории пределов, дифференциальному исчислению,
исследованию функций

Донецк

ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина»

2018

Терехов С.В.

Варюхин В.Н.

Математическая библиотечка студента-физика

Том 1

(*части* I *и* II)

Решение задач

по линейной и векторной алгебрам,
аналитической геометрии на плоскости и в пространстве,
теории пределов, дифференциальному исчислению,
исследованию функций

Донецк

ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина»

2018

УДК 512.8
PACS 02.10.Ud
Т35

Авторы-составители:
С.В. Терехов, д-р физ.-мат. наук, доцент, в.н.с.,
В.Н. Варюхин, д-р физ.-мат. наук, профессор

Рецензенты:
А.Г. Петренко, д-р.физ.-мат.наук, профессор,
В.М. Юрченко, д-р.физ.-мат.наук, профессор

Рекомендовано к изданию ученым советом
ГОУ ВПО Донецкого национального университета
протокол № 1 *от* «27» *января* 2017 *г.*

Т35 ***Терехов С.В.***, ***Варюхин В.Н.*** Математическая библиотечка студента-физика. Т. 1 (части I и II) . Решение задач по линейной и векторной алгебрам, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, теории пределов, дифференциальному исчислению, исследованию функций // Учебное издание для студентов физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов / Донецк: ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина. – 2018. – 411 с.

В учебном пособии изложены основные теоретические сведения по различным разделам математики, приведено большое количество примеров.
Для студентов всех специальностей и форм обучения физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов, молодых преподавателей.

УДК 512.8
PACS 02.10.Ud

Оглавление

Стр.

Стр.

0 “*Школьная математика*”

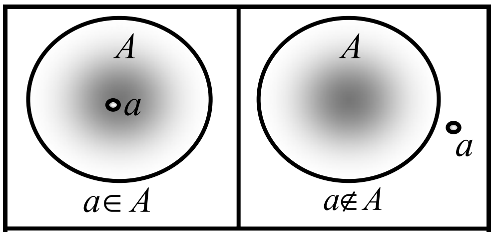
В университетском курсе высшей математики используются сведения по элементарной математике, излагаемые в средней школе. Остановимся на базовых знаниях и навыках, которыми должен обладать студент первого курса.

0.1. *Числовые множества*

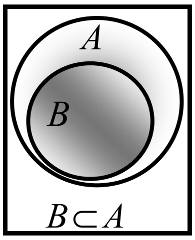
Множество это совокупность объектов, объединённых в единое целое по какому-либо признаку.

Пример 1. Множество книг, множество людей, множество столов, множество чисел.

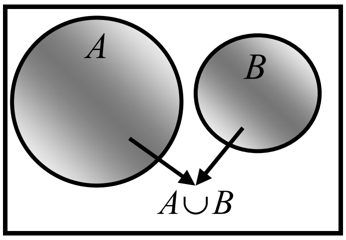
Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$, а объекты, входящие в эти множества и называемые ***элементами***, – прописными буквами a, b, c, ... Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$ (квантор “$\in$” означает *принадлежит*), в противном случае – $a \notin A$ (квантор “$\notin$” означает *не принадлежит*).



Диаграммы Эйлера – Венна

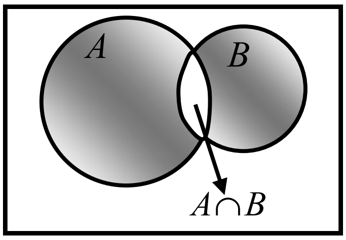


Если все элементы множества B являются элементами множества A, но не исчерпывают этого множества, то множество B ***входит*** в множество A ($B \subset A$, квантор “$\subset$” означает входит) и называется ***подмножеством*** множества A.



Объединением (квантор “$\cup$”) множеств A и B называется совокупность всех элементов данных множеств.

Обозначение: $A \cup B$.



Пересечением (квантор “$\cap$”) множеств A и B называется совокупность элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Обозначение: $A \cap B$.

Множество, не содержащее ***ни одного*** элемента, называется ***пустым*** (***нулевым***). Обозначение: Θ.

Для нас наибольший интерес представляют числовые множества:

1) множество ***натуральных*** чисел (числа счёта) $\boxed{N}$: 1, 2, 3, 4,...;

2) множество ***целых*** чисел $\boxed{Z}$: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...;

3) множество ***рациональных*** чисел $\boxed{Q}$: числа вида $\frac{m}{n}$ $(n\neq 0)$, где $m\in Z$, $n\in N$. Напомним, что рациональные числа могут быть представлены в виде ***периодической*** десятичной дроби, например,

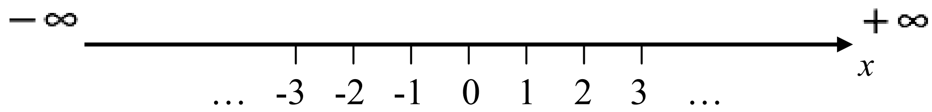
$$\frac{1}{3}=0,3\underline{33333...}=0,3(3);\ \boxed{\text{"3 в периоде"}}$$

4) множество ***иррациональных*** чисел $\boxed{I}$ (например, числа $\sqrt{2}$, π=3,14 ..., $e=2{,}7182...$). Иррациональные числа представляются в виде ***непериодической*** десятичной дроби;

5) множество ***действительных*** чисел $\boxed{R}$: совокупность всех вышеперечисленных чисел.

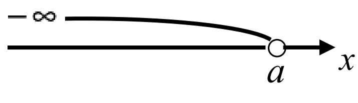
Помимо действительных чисел применяют комплексные ($\boxed{C}$) и гиперкомплексные (например, $\boxed{H}$ – множество кватернионов) числа, подмножеством которых является множество действительных чисел R ($\boxed{R\subset C\subset H}$).

С геометрической точки зрения множество действительных чисел R изображается в виде точек на направленной прямой с выбранным масштабом единичного отрезка (***числовая ось***):

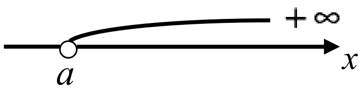


На числовой оси числа располагаются ***в порядке возрастания слева направо***, т.е. число, стоящее справа, больше числа, расположенного слева: $-3<-2$; $0>-1$ и т.д. Зачастую используют только часть числовой оси, которая называется ***интервалом*** (открытый, полуоткрытый или закрытый (***отрезок*** – по лат. *segmentum*)):

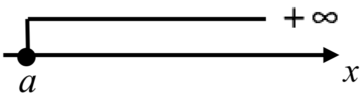
<u>А.</u> ***Полубесконечные*** интервалы



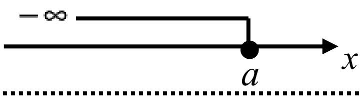
$x\in(-\infty;\ a)$ или $x<a$ – ***открытый*** интервал;



$x\in(\ a;\ +\infty)$ или $x>a$ – ***открытый*** интервал;



$x\in[a;\ +\infty)$ или $x\geq a$ – ***полуоткрытый*** интервал;



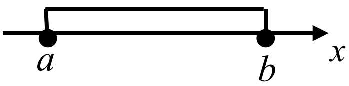
$x\in(-\infty;\ a]$ или $x\leq a$ – ***полуоткрытый*** интервал.

Б. ***Конечные*** интервалы

$x \in (a;\, b)$ или $a < x < b$ – ***открытый*** интервал;

$x \in (a;\, b]$ или $a < x \le b$ – ***полуоткрытый*** интервал;

$x \in [a;\, b)$ или $a \le x < b$ – ***полуоткрытый*** интервал;



$x \in [a;\, b]$ или $a \le x \le b$ – ***закрытый*** интервал.

Над числами призводят 4 арифметических действия (***сложение***, ***вычитание***, ***умножение*** и ***деление***) и другие операции (***возведение в степень***, ***извлечение корня*** и т.д.):

$$25 + 17 = 42\,;$$
$$36 - 24 = 12\,;$$
$$7 \times 24 = 168\,;$$
$$16 \div 4 = 4\,;\ldots$$

Отметим, что при вычитании из меньшего числа большего числа получают отрицательный ответ, так как знак "–" можно вынести за скобку, изменив знаки чисел на противоположные, например,

$$\boxed{34 - 57 = -(57 - 34) = -23};$$

вычитание из отрицательного числа другого числа выполняется по вышеуказанному правилу, которое приводит к их сложению

$$-19 - 23 = -(19 + 23) = -42\,.$$

Противоположными действиями являются:

– *сложение-<u>вычитание</u>*,

– *умножение-<u>деление</u>*,

– *возведение в степень-<u>извлечение соответствующего корня</u>* и т.д.

При ***умножении*** (***делении***) чисел действуют следующие ***правила определения знака*** ответа:

а) для чисел с ***одинаковыми знаками***

"+" · "+"="–" · "–"="+",

б) для чисел, имеющих ***разные знаки***

"+" · "–"= "–" · "+"="–".

Для быстрого умножения одного числа на другое используют таблицу умножения (табл. 1):

Таблица 1.

Таблица умножения

2·1=2	3·1=3	4·1=4	5·1=5	6·1=6	7·1=7	8·1=8	9·1=9
2·2=4	3·2=6	4·2=8	5·2=10	6·2=12	7·2=14	8·2=16	9·2=18
2·3=6	3·3=9	4·3=12	5·3=15	6·3=18	7·3=21	8·3=24	9·3=27
2·4=8	3·4=12	4·4=16	5·4=20	6·4=24	7·4=28	8·4=32	9·4=36
2·5=10	3·5=15	4·5=20	5·5=25	6·5=30	7·5=35	8·5=40	9·5=45
2·6=12	3·6=18	4·6=24	5·6=30	6·6=36	7·6=42	8·6=48	9·6=54
2·7=14	3·7=21	4·7=28	5·7=35	6·7=42	7·7=49	8·7=56	9·7=63
2·8=16	3·8=24	4·8=32	5·8=40	6·8=48	7·8=56	8·8=64	9·8=72
2·9=18	3·9=27	4·9=36	5·9=45	6·9=54	7·9=63	8·9=72	9·9=81

Простым числом называется число, которое делится без остатка только на себя и на единицу: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, …; остальные числа называются ***составными*** (число 1 не является ***ни простым***, ***ни составным*** числом). Составные числа представимы в виде произведения простых чисел.

Пример 2. Представить в виде произведения простых сомножителей составные числа 39, 106, 276 и 2520.

Решение имеет вид: $39=3\cdot13$; $106=2\cdot53$; $276=2\cdot2\cdot3\cdot23$; $2520=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$

или в виде столбцов деления:

$$\begin{array}{r|l} 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 106 & 2 \\ 53 & 53 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 276 & 2 \\ 138 & 2 \\ 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}.$$

При разложении составного числа на простые сомножители используют признаки делимости, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2.

Признаки делимости

Сомножитель	*Признак делимости*
2	*число заканчивается одной из цифр* **0**, **2**, **4**, **6**, **8**
3	*сумма цифр числа делится на* **3**
4 (*составное*)	*число, записанное двумя последними цифрами, делится на* **4**
5	*числа заканчивается цифрой* **0** *или* **5**
7	*разность между числом десятков и удвоенным числом единиц делится на* **7**
11	*разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на* **11**

Числа, которые делятся на **2**, называются ***чётными***, а остальные числа – ***нечётными***.

Пример 3. Делятся ли числа 1956 на **3**, 154 на **7**?
Сумма цифр числа 1956 равна 1+9+5+6=21. Так как число 21 делится на **3** (сумма цифр числа 21 равна 2+1=3), то и число 1956 делится на **3**. Число десятков у числа 154 равно 15, а удвоенное число единиц 2·4=8, следовательно, их разность 15––8=7 делится на **7**. Таким образом, число 154 делится на **7**.

Величина $|a|$ называется ***модулем*** (***абсолютной величиной***) числа a и определяется так: $\boxed{|a| = \begin{cases} -a, & если\ a < 0 \\ a, & если\ a \geq 0 \end{cases}}$.

Например, $\left|-\dfrac{7}{13}\right| = \dfrac{7}{13}$; $|19| = 19$.

Согласно определению, ***модуль любого числа*** (*или* ***выражения***) ***является неотрицательной величиной***.

0.2. *Степени*, *дроби*, *приоритет действий*, *прогрессии*

A. Если число умножается несколько раз ***само на себя***, то действие умножение заменяется ***возведением*** числа ***в степень***, например,

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{\textbf{4 двойки}} = 2^{\overset{\textbf{степень 4}}{4}} = 16.$$

$$\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{\textbf{5 троек}} = 3^{\overset{\textbf{степень 5}}{5}} = 81.$$

$$\underbrace{1\cdot 1\cdot 1}_{\textbf{3 единицы}} = 1^{\overset{\textbf{степень 3}}{3}} = 1.$$

Число **1**, возведённое в любую степень, равно **1**.

Степенью действительного числа a с натуральным показателем n ($n \in N$) называется произведение числа a самого на себя n раз:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n}}.$$

По договорённости ***степень* 1** не пишут. Например, ***не пишут*** 5^1 в первой степени, а пишут просто **5**.

В табл. 3 приведены квадраты первых 30 натуральных чисел, которые наиболее часто встречаются при решении задач.

Таблица 3.

Квадраты первых 30 натуральных чисел.

N	N^2	N	N^2	N	N^2
1	**1**	11	**121**	21	**441**
2	**4**	12	**144**	22	**484**
3	**9**	13	**169**	23	**529**
4	**16**	14	**196**	24	**576**
5	**25**	15	**225**	25	**625**
6	**36**	16	**256**	26	**676**
7	**49**	17	**289**	27	**729**
8	**64**	18	**324**	28	**784**
9	**81**	19	**361**	29	**841**
10	**100**	20	**400**	30	**900**

Степени обладают следующими ***свойствами***:

1°. $\boxed{a^0 = 1}$ – по определению, $a \neq 0$ (0^0 – *не имеет смысла*), например: $7^0 = 1$;

2°. $m = n \Rightarrow a^m = a^n$, из *равенства показателей степени* следует *равенство степеней* одинаковых чисел;

3°. $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}}$, при *возведении степени в степень показатели степеней* ***перемножаются***, например: $\left(2^2\right)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64$;

4°. $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$, *при перемножении одинаковых чисел с разными показателями степеней* ***показатели степени складываются***, например, $3\cdot 10^{-5}\cdot 4\cdot 10^{-7} = 3\cdot 4\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-7} = 12\cdot 10^{-5-7} = 12\cdot 10^{-12}$;

5°. $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$, при *делении одинаковых чисел с разными показателями степеней* ***из показателя степени числа***, ***стоящего в числителе***, ***вычитают показатель степени числа***, ***стоящего в знаменателе дроби***, например: $\dfrac{3\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{-7}} = \dfrac{3}{4}\cdot 10^{-5-(-7)} = \dfrac{3}{4}\cdot 10^{-5+7} = \dfrac{3}{4}\cdot 10^{2}$;

6°. $\boxed{(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m}$, при *возведении в степень произведения разных чисел* ***каждое из чисел возводится в ту же степень***.

7°. $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m} = \dfrac{a^m}{b^m}}$, *возведение в степень дроби* ***сводится к возведению в эту степень числителя и знаменателя дроби***: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \dfrac{3^3}{5^3} = \dfrac{27}{125}$.

Обратным действием к возведению в степень является *извлечение соответствующего корня*. Извлечение корня *чётной* степени из *положительного* числа a приводит к результату

$$\boxed{\sqrt[2n]{a}=|a|},\ (n\in N).$$

Например,

корень 4 степени $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4}=|2|.$

Для *квадратного корня* по договорённости *не пишут 2 на полочке корня*, например, $\sqrt{49}$.

Нельзя извлекать *корень чётной степени из отрицательного числа*.

В общем случае извлечение корня из действительного числа a соответствует его возведению в дробную степень:

$$\sqrt{a}=\sqrt[2]{a^1}=a^{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt[3]{a^7}=a^{\frac{7}{3}};$$

$$\sqrt[4]{a^5}=a^{\frac{5}{4}};$$

$$\ldots$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}}.$$

Рассмотрим основные ***свойства*** корня n-ой степени:

1°. $\sqrt[2n+1]{a\cdot b}=\sqrt[2n+1]{a}\cdot\sqrt[2n+1]{b}$;

2°. $\sqrt[2n]{a\cdot b}=\sqrt[2n]{|a|}\cdot\sqrt[2n]{|b|}$;

3°. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^k=\sqrt[m]{a^k}$;

4°. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$;

5°. $\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}$;

6°. $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}$.

Б. ***Дробью*** называется рациональное число (множество $\boxed{Q}$), у которого *числитель* дроби не делится нацело на её *знаменатель*:

m → *числитель*

n → *знаменатель*

Делить на 0 нельзя, так как выражение $\frac{3}{0}$ (или ему аналогичные) *смысла не имеет*.

Число **0** *можно делить на любое другое число*, *не равное нулю*, в результате получим **0**.

Дробь называется ***правильной***, если $\boldsymbol{m<n}$ (дробь меньше 1), в противоположном случае, когда $\boldsymbol{m\ge n}$ (дробь больше или равна 1), – ***неправильной***.

Пример 4. Указать, какие из приведенных дробей правильные, а какие – неправильные: $\frac{3}{29}$; $\frac{17}{31}$; $\frac{15}{13}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{143}{25}$; $\frac{18}{73}$.

Правильные дроби: $\frac{3}{29}$; $\frac{17}{31}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{18}{73}$.

Неправильные дроби: $\frac{15}{13}$; $\frac{9}{9}=1$; $\frac{143}{25}$.

Над дробями выполняют следующие ***действия***:

а) *сокращение дробей*. Если числитель и знаменатель дроби содержат в своём разложении на простые сомножители общие множители, то числитель и знаменатель дроби можно сократить на эти множители:

$$\frac{30}{105}=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot 7}=\frac{2}{7};$$

б) *сложение* (*вычитание*) *дробей*. При *сложении* (*вычитании*) дробей (например, $\frac{7}{30}+\frac{4}{105}=...?$), прежде всего, находят ***наименьший общий знаменатель*** (***НОЗ***). Для отыскания ***НОЗ*** *знаменатели дробей раскладываются на простые множители*. В приведенном примере $30=2\cdot\underline{3}\cdot\underline{5}$ и $105=\underline{3}\cdot\underline{5}\cdot 7$. ***НОЗ*** *берётся в виде произведения простых сомножителей*: ***НОЗ***$=2\cdot\underline{3}\cdot\underline{5}\cdot 7=210$. Деля ***НОЗ*** на знаменатель первой дроби, получим *дополнительный множитель* к этой дроби 7. Поступая аналогично по отношению к знаменателю второй дроби, получаем *дополнительный множитель* к этой дроби 2. Итак,

$$\frac{\overset{7}{7}}{30}+\frac{\overset{2}{4}}{105}=\frac{7\cdot 7}{210}+\frac{4\cdot 2}{210}=\frac{49+8}{210}=\frac{57}{210}=\frac{19\cdot 3}{70\cdot 3}=\frac{19}{70}.$$

в) *умножение дробей* сводится к *перемножению числителей и знаменателей* дробей, причём первое произведение (числителей дробей) будет числителем, а второе произведение (знаменателей дробей) – знаменателем результирующей дроби:

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 3}=\frac{10}{21}.$$

г) *деление дробей*. Для того чтобы разделить одну дробь на другую, надо *первую дробь умножить на перевёрнутую вторую дробь*:

$$\frac{6}{13}\div\frac{5}{11}=\frac{6}{13}\cdot\frac{11}{5}=\frac{6\cdot 11}{13\cdot 5}=\frac{66}{65}=1\frac{1}{65}.$$

Если рациональная *числовая* дробь неправильная, то можно выделить ***целую*** часть.

Пример 5. Выделить целую часть и правильную рациональную дробь у числа $\frac{257}{3}=\ldots?$

Разделим числитель дроби на её знаменатель с остатком:

$$\begin{array}{r|l} -\underline{257} & \underline{3 - \textit{знаменатель дроби}} \\ \underline{24} & \underline{85} - \textit{целая часть} \\ -17 & \\ \underline{15} & \\ 2 & - \textit{остаток деления} \end{array}$$

$\frac{257}{3} = \underline{85} + \frac{2}{3}$ или в сокращённом виде $\frac{257}{3} = 85\frac{2}{3}$.

В. Математические предложения часто содержат выражения, заключённые в круглые (…), квадратные […] и фигурные {…} скобки, для указания выполнения определённого порядка (*приоритета*) действий. Распределение действий ***по приоритету*** таковы:

1) вначале выполняются действия с выражениями в скобках;

При наличии нескольких скобок первоначально выполняют указанные действия во *внутренних* скобках.

2) затем последовательно выполняют возведение в степень и извлечение при необходимости корней;

3) выполняются действия умножения и деления;

4) действия сложения и вычитания выполняются последними.

Пример 6. Вычислить значение выражения: $\frac{\{[(9-2^2)+3\cdot 5]-(4+2)\cdot 2\}-\sqrt{16}}{2} = ...?$

Самой внутренней скобкой является скобка $(9-2^2)$, в которой надо вначале найти значение $2^2 = 4$, а затем найти разность $9-4=5$. Следующей скобкой является квадратная скобка $[(9-2^2)+3\cdot 5] = [5+3\cdot 5]$: вначале выполним действие умножения $3\cdot 5 = 15$, а затем сложения – $[5+3\cdot 5]=[5+15]=20$. После этого выполняются: действие в оставшейся круглой скобке $(4+2)=6$ с последующим умножением $(4+2)\cdot 2 = 6\cdot 2 = 12$. Итак в фигурной скобке осталось выполнить действие вычитания $\{20–12\}=8$. Вычислим *числитель* дроби так: $8-\sqrt{16}=8-4=4$. Последним действием делим *числитель* дроби на её *знаменатель*: $\frac{4}{2} = 2$.

Г. ***Арифметической прогрессией*** называется такая последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, \ldots$, у которой ***разность*** d между предыдущим и последующим членами прогрессии постоянна:

$$\boxed{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = d}.$$

Пример 7. Является ли последовательность чётных чисел 2, 4, 6,... арифметической прогрессией?

Да, является, так как разность между предыдущим и последующим членами последовательности постоянна и равна $d = 2$.

Если известен первый член арифметической прогрессии a_1 и её разность d, то *любой член последовательности* вычисляется по формуле: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$.

Пример 8. Вычислить седьмой член арифметической прогрессии для последовательности чётных чисел.

Так как для последовательности чётных чисел первый член прогрессии равен $a_1 = 2$, а разность $d = 2$, то седьмой член прогрессии равен $a_7 = 2 + 6\cdot 2 = 14$.

Основное ***свойство*** арифметической прогрессии: *каждый её член равен полусумме его соседних членов*, т.е. $\boxed{a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$.

Для нахождения *суммы n первых членов арифметической прогрессии* применяют формулу:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n + a_1}{2}\cdot n}$$

или

$$\boxed{S_n = \left(a_1 + \frac{(n-1)\cdot d}{2}\right)\cdot n}.$$

<u>Д.</u> ***Геометрической прогрессией*** называется последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, \ldots$, для которой ***отношение*** прогрессии q последующего члена к предыдущему есть величина постоянная:

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = ... = q}.$$

Пример 9. Является ли последовательность чисел -2, 4, -8, 16, -32,... геометрической прогрессией.

Да, является, так как её знаменатель $q = \dfrac{4}{-2} = \dfrac{-8}{4} = \dfrac{16}{-8} = \dfrac{-32}{16} = -2$.

Согласно определению:

$$a_2 = a_1 \cdot q;$$

$$a_3 = a_2\cdot q = a_1\cdot q^2;$$

$$a_4 = a_3\cdot q = a_1\cdot q^3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

т.е. любой член геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Каждый член знакоположительной геометрической прогрессии *равен среднему геометрическому от его соседних членов*, т.е.

$$\boxed{a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}}.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии находится по формуле:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \ \ (q \neq 1)}.$$

Если $|q|<1$, то сумма ***бесконечной*** *убывающей прогрессии* равна

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}.$$

Пример 10. Вычислить сумму бесконечной убывающей прогрессии при $a_1 = \frac{1}{2}$ и $q = -\frac{1}{2}$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна $S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

0.3. *Полиномы и действия над ними*

Одночленом называется произведение числового множителя на одну или несколько букв с натуральными показателями степени:

$$-2\,a\,b; \quad \frac{1}{3}x^2 y\, z; \quad \sqrt{2}\,d; \quad l\,x; \quad -0.5\,.$$

Полиномом (***многочленом***, ***целым алгебраическим выражением***) называется сумма одночленов: $ax^2 + bx + c$; $3x - y$.

Члены полинома, отличающиеся только числовым множителем или равные между собой, называют ***подобными***.

Приведением подобных членов называется замена нескольких подобных слагаемых одним выражением, коэффициент при котором равен *алгебраической сумме коэффициентов при подобных слагаемых*:

$$\underline{\underline{2x^3}}\ \underline{-3x^2}\ \overline{+6x}\ \overline{\overline{-5}}\ \underline{\underline{+ax^3}}\ \underline{-bx^2}\ \overline{-4x}\ \overline{\overline{+6}} = (2+a)x^3 - (3+b)x^2 + 2x + 1\,.$$

В последующих частях числовые коэффициенты будем обозначать *начальными буквами латинского алфавита* a, b, c, d,... , а неизвестные и переменные величины – *последними буквами этого алфавита* s, t, u, v, w, x, y, z.

Все последующие рассуждения будем проводить по отношению к *полиномам* вида

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0},$$

где числовые множители a_n, a_{n-1}, …, a_2, a_1, $a_0 \in R$, x – *переменная неизвестная*, а $n \in N$ – называется ***степенью*** полинома:

$P_0(x) = -2$ и $P_0(x) = a$ – полиномы *нулевой степени*;

$P_1(x)=ax+b$ – полином *первой степени* (*линейный* полином);

$P_2(x)=ax^2+bx+c$ – полином *второй степени* и т.д.

Рассмотрим ***арифметические действия*** над полиномами:
а) при *сложении* (*вычитании*) полиномов после приведения подобных членов получают полином, степень которого *не превышает* высшую степень многочлена, входящего в сумму (разность).

Пример 11. Найти сумму полинома второй степени $P_2(x)=2x^2-3x+4$ и многочлена первой степени $P_1(x)=6x-7$.

Результирующим многочленом будет полином второй степени
$$Q_2(x)=P_2(x)+P_1(x)=2x^2-\underline{3x}+\underline{\underline{4}}+\underline{6x}-\underline{\underline{7}}=2x^2+(-3+6)x+(4-7)=2x^2+3x-3.$$

б) при *умножении* одного многочлена на другой получается полином, степень которого равна сумме степеней полиномов, входящих в произведение, получаемое *путём умножения каждого одночлена первого многочлена на каждый одночлен второго полинома и приведения подобных членов*.

Пример 12. Найти произведение полиномов $P_2(x)=2x^2-3x+4$ и $P_1(x)=6x-7$.

В результате произведения получим полином
$$Q_3(x)=P_2(x)P_1(x)=(2x^2-3x+4)(6x-7)=2x^2\cdot 6x+2x^2\cdot(-7)-3x\cdot 6x-3x\cdot(-7)+4\cdot 6x+$$
$$+4\cdot(-7)=12x^3-\underline{\underline{14x^2}}-\underline{\underline{18x^2}}+\underline{21x}+\underline{24x}-28=12x^3-32x^2+45x-28.$$

В определённых случаях для перемножения полиномов применяют ***формулы сокращённого умножения***:

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ – *квадрат суммы*, например:
$$(x+1)^2=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=x^2+2x+1;$$

2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ – *квадрат разности*, например:
$$(2x-5)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5+5^2=4x^2-20x+25;$$

3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ – *куб суммы*, например:
$$(3x+1)^3=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2+1^3=27x^3+27x^2+9x+1;$$

4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ – *куб разности*, например:
$$(2-x)^3=2^3-3\cdot 2^2\cdot x+3\cdot 2\cdot x^2-x^3=8-12x+6x^2-x^3;$$

5) $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ – *разность квадратов*, например:
$$3-x=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{x}\right);$$

6) $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$ – *разность кубов*, например:
$$(x-2)\cdot(x^2+2x+4)=x^3-2^3=x^3-8;$$

7) $a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$ – *сумма кубов*, например:
$$8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)\cdot(4x^2-6x+9);$$

в) при <u>*делении*</u> полиномов возникают дроби вида $\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$, при этом исключаются те значения переменной x, при которых знаменатель дроби обращается в нуль ($P_m(x)=0$ – корни этого уравнения исключаются из рассмотрения в силу того, что ***делить на 0 нельзя***).

Отношение полиномов $\boxed{\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}}$ называется ***рациональной дробью***.

Если степень многочлена, *стоящего в числителе дроби*, *меньше степени полинома*, *стоящего в знаменателе дроби* ($n<m$), то дробь называют ***правильной***, в противном случае ($n \ge m$) – ***неправильной***.

Пример 13. Определить, какие из приведенных рациональных дробей являются правильными, а какие – неправильными: $\dfrac{2x-3}{3x^2-4x+5}$; $\dfrac{x^3}{x^3-8}$; $\dfrac{3x^4-5x^2+7}{x-2}$?

а) $\dfrac{2x-3}{3x^2-4x+5}=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ $\begin{matrix} n=1; \\ m=2, \end{matrix}$ $n<m$ – *правильная* рациональная дробь;

б) $\dfrac{x^3}{x^3-8}=\dfrac{P_3(x)}{P_3(x)}$ $\begin{matrix} n=3; \\ m=3, \end{matrix}$ $n=m$ – *неправильная* рациональная дробь;

в) $\dfrac{3x^4-5x^2+7}{x-2}=\dfrac{P_4(x)}{P_1(x)}$ $\begin{matrix} n=4; \\ m=1, \end{matrix}$ $n>m$ – *неправильная* рациональная дробь.

Пример 14. Выделить "***целую***" часть у неправильной рациональной дроби

$$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}=\frac{3x^4-5x^2+7}{x-2}=\ldots?$$

Итак,

$$\begin{array}{l|l}
-\,3x^4-5x^2+7 & x-2 \text{ – знаменатель дроби} \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4-6x^3} & 3x^3+6x^2+7x+14 \text{ – "\textbf{целая}" часть} \\
\quad -\,6x^3-5x^2+7 & \\
\quad \underline{6x^3-12x^2} & \\
\qquad -\,7x^2+7 & \\
\qquad \underline{7x^2-14x} & \\
\qquad\quad -\,14x+7 & \\
\qquad\quad \underline{14x-28} & \\
\qquad\qquad 35 \text{ – остаток деления} &
\end{array}$$

$$\boxed{\frac{3x^4-5x^2+7}{x-2}=3x^3+6x^2+7x+14+\frac{35}{x-2}}.$$

Деление числителя на знаменатель дроби прекращается тогда, когда в остатке деления получается полином, *степень которого становится меньше степени полинома*, *стоящего в знаменателе*.

Если математическое предложение содержит рациональные дроби, то с ними выполняются те же действия, что и над обычными дробями. Отличие состоит в том, что ***надо исключать из рассмотрения значения переменной*** x, ***при которых знаменатель дроби обращается в нуль***.

Разложение полиномов на простые сомножители применяется при решении различных задач. Если $x_1, x_2, ..., x_n$ – действительные корни уравнения $P_n(x) = 0$, то полином можно представить в виде произведения простых сомножителей:

$$\boxed{P_n(x) = \boldsymbol{a_n} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \boldsymbol{a_n}(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)}.$$

В *разложении* любого полинома на *простые множители* всегда присутствует в качестве множителя коэффициент при старшей степени полинома $\boldsymbol{a}_n$.

Простыми сомножителями любого полинома являются *полиномы первой степени вида* $x - x_i$ и *полиномы второй степени типа* $x^2 + px + q$ *с отрицательным дискриминантом* ($D = p^2 - 4q < 0$, см. ниже решение квадратных уравнений).

При разложении полинома на простые сомножители используют следующие простые ***приёмы***:

а) ***вынесение общего множителя за скобки***

$$(x-1)(\underline{x+2}) + (x-1)(\underline{\underline{x^2-2}}) = (x-1)(\underline{x+\cancel{2}} + \underline{\underline{x^2-\cancel{2}}}) = (x-1)x(x+1);$$

б) ***объединение в группы членов полинома с целью выделения общего множителя***

$$\underline{x^3-3x^2}\,\underline{\underline{-4x+12}} = (x^3-3x^2) - (4x-12) = x^2(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x^2-4) =$$
$$= (x-3)(x-2)(x+2);$$

в) ***разложение какого-либо члена полинома на подобные слагаемые***

$$x^2 + \underline{\underline{3x}} + 2 = x^2 + \underline{\underline{x + 2x}} + 2 = (x^2 + x) + (2x + 2) = x(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x+2).$$

Если пример содержит несколько дробей, то все дроби надо привести к *наименьшему общему знаменателю* (***НОЗ***), для чего знаменатели дробей раскладывают на *простые множители* и ***НОЗ*** *берут в виде произведения сомножителей*.

Пример 15. Найти ***НОЗ*** и дополнительные множители для дробей

$$\frac{3x}{x+2}-\frac{2x+1}{2-x}=\frac{1}{x^2-4}.$$

Выполним простейшие преобразования знаменателей дробей:

$$\frac{3x}{x+2}-\frac{2x+1}{2-x}=\frac{1}{x^2-4}\ \Rightarrow\ \frac{3x}{x+2}-\frac{2x+1}{-(x-2)}=\frac{1}{x^2-4}\ \Rightarrow\ \frac{3x}{x+2}+\frac{2x+1}{x-2}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}\ \Rightarrow$$

в этой задаче знаменатели дробей равны

$$x+2,\ x-2\ \text{и}\ x^2-4=(x-2)(x+2),$$

отсюда видно, что произведение $(x-2)(x+2)$ является ***НОЗ***. Поступая так же, как и при суммировании обычных дробей, получаем

$$\frac{\overset{x-2}{3x}}{x+2}+\frac{\overset{x+2}{2x+1}}{x-2}=\frac{\overset{1}{1}}{(x-2)(x+2)}\ \Rightarrow\ \frac{3x\cdot(x-2)}{x^2-4}+\frac{(2x+1)\cdot(x+2)}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4},$$

при этом $x-2\neq 0,\ x+2\neq 0$.

0.4. *Уравнения и неравенства*

<u>**А.**</u> Если два математических выражения соединяются знаком "=" (равно), то такое математическое предложение называется ***равенством***. Если равенство справедливо для всех действительных значений неизвестных величин (s, t, u, v, w, x, y, z) и коэффициентах при них (a, b, c, d,...), входящих в равенство, то оно называется ***тождеством***, в противном случае – ***уравнением***. Частные значения неизвестной величины, при которых уравнение переходит в тождество, называются ***решениями*** или ***корнями*** уравнения. Решить уравнение означает найти все его корни или показать, что корней нет. Если *уравнение с одной неизвестной* x *выполняется при всех её действительных значениях* (является тождеством), то пишут “$x\in R$”, а если уравнение *не имеет действительных корней* или *в результате решения уравнения получают неверное математическое утверждение* – “$x\notin R$”.

Уравнения разделяются на ***алгебраические*** (над неизвестными совершаются четыре арифметических действия, возведение в степень и извлечение корня) и ***трансцендентные*** (показательные, логарифмические, тригонометрические и смешанные).

Два уравнения называются ***эквивалентными*** (***равносильными***), если *каждое решение первого уравнения является решением второго уравнения* и *наоборот*, или оба уравнения не имеют корней. Преобразования, с помощью которых осуществляется переход от первого уравнения ко второму, называются *тождественными*.

Если корень преобразованного уравнения не удовлетворяет первоначально заданному уравнению, то он называется ***посторонним*** (***лишним***) и подлежит отбрасыванию (преобразование, которое выполнено над исходным уравнением, называется ***нетождественным***).

Для преобразования исходного уравнения используют следующие ***приёмы***: **а)** *прибавление* (*вычитание*) к обеим частям уравнения *одного и того же выражения*; **б)** для операций сложение-вычитание перевод любого члена уравнения из одной части уравнения в другую *сопровождается изменением операции на противоположную*; **в)** *использование различных алгебраических формул*; **г)** *приведение подобных членов после раскрытия скобок* и *приведение к общему знаменателю* и т.д.

При решении алгебраических и трансцендентных задач надо *выделять* ***область допустимых значений*** (***ОДЗ***) переменной величины, в которой задача *имеет смысл* в области действительных чисел. Под ***ОДЗ*** понимается ***область определения функции*** $\boxed{D(f)}$:

1). Знаменатель дроби *не должен равняться нулю* (нельзя делить на нуль).

Пример 16. $\dfrac{2x-3}{\underline{\underline{x+3}}}=5$

ОДЗ: $\underline{\underline{x+3}}\neq 0$.

2). Выражение, стоящее *под корнем* ***чётной*** *степени*, *должно быть неотрицательным* (нельзя извлекать корень чётной степени из отрицательного числа).

Пример 17. $\sqrt{\underline{\underline{3x-4}}}=7$

ОДЗ: $\underline{\underline{3x-4}}\geq 0$.

3). Основание логарифмической функции $y=\log_{\underline{\underline{f(x)}}}\underline{g(x)}$ *должно быть строго положительным и не равным* **1** ($\underline{\underline{f(x)}}>0,\ \underline{\underline{f(x)}}\neq 1$), а *её аргумент должен быть строго положительным* $\underline{g(x)}>0$).

Пример 18. $\log_{\underline{\underline{x-3}}}(\underline{2x-5})=-1$

ОДЗ: $\begin{cases}\underline{\underline{x-3}}>0,\ \underline{\underline{x-3}}\neq 1\\ \underline{2x-5}>0\end{cases}$.

4). Аргументы обратных тригонометрических функций $\arcsin\ \underline{f(x)}$ и $\arccos\underline{f(x)}$ *по модулю не превышают* 1: $\left|\ \underline{f(x)}\right|\leq 1$.

Аналитические методы решения алгебраических уравнений с полиномами не выше второго порядка приведены в табл. 4.

Таблица 4.

Аналитические способы решения уравнений с полиномами ($n=1$ и $n=2$).

Уравнение	**Метод решения**
Линейное $\boxed{ax \pm b = c}$, $a \neq 0$	*неизвестные величины собирают в левой части уравнения*, а *известные величины – в правой*; *приводят подобные члены*; *число*, *стоящее справа*, *делится на коэффициент при неизвестной величине*. При решении надо помнить, что перенос числа или выражения из одной части уравнения в другую его часть сопровождается изменением действия на ему противоположное действие (“ + ” на “ – ”; “ –” на “ + ”; “ · ” на “ : ”; “ : ” на “ · ”) $\boxed{ax \pm b = c}$; $ax = c \mp b$; $\boxed{x = \dfrac{c \mp b}{a}}$.
Квадратное $\boxed{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$, $a \neq 0$	1) <u>*дискриминант*</u> $\boxed{D = b^2 - 4ac}$ а) $D < 0$ – действительных корней *нет*: $x \notin R$; б) $D = 0$ – 2 действительных *совпадающих* корня: $\boxed{x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2\,a}}$; в) $D > 0$ – два действительных *различных* корня: $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2\,a}}$ и $\boxed{x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2\,a}}$. 2) <u>*теорема Виета*</u> $\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}}$.
Неполное квадратное а) $c = 0$: $\boxed{a\,x^2 + b\,x = 0}$, $a \neq 0$; б) $b = 0$: $\boxed{ax^2 + c = 0}$, $a \neq 0$.	а) $c = 0$: $a\,x^2 + b\,x = 0$; $x(a\,x + b) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$; б) $b = 0$: $ax^2 + c = 0$, если числа a и c одного знака ($a > 0$ и $c > 0$ или $a < 0$ и $c < 0$), то уравнение корней не имеет, то есть $x \notin R$; если числа a и c разного знака, то уравнение имеет 2 корня, отличающиеся только знаком: $\boxed{x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}}$; $\boxed{x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}}$.

Пример 19. Решить линейное уравнение $2x - 5 = 9 - 5x$.

Решение имеет вид: $2x+5x=9+5$; $7x=14$; $x=\frac{14}{7}=2$. Подставив найденный корень в исходное уравнение, получаем тождество.

Пример 20. Решить с использованием дискриминанта квадратные уравнения:

а) $x^2+x+1=0$; **б**) $9x^2+12x+4=0$; **в**) $6x^2-7x-3=0$.

Решение имеет вид:

а) $x^2+x+1=0$ коэффициенты уравнения равны $a=1$; $b=1$; $c=1$. Дискриминант $D=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$, следовательно, $x\notin R$.

б) $9x^2+12x+4=0$ коэффициенты уравнения равны $a=9$; $b=12$; $c=4$. Дискриминант $D=b^2-4ac=12^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$, следовательно, корни уравнения равны $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\cdot9}=-\frac{12}{18}=-\frac{2}{3}$.

в) $6x^2-7x-3=0$ коэффициенты уравнения равны $a=6$; $b=-7$; $c=-3$. Дискриминант $D=b^2-4ac=(-7)^2-4\cdot6\cdot(-3)=49+72=121>0$, $\sqrt{D}=\sqrt{121}=11$, следовательно, корни уравнения равны

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-7)-11}{2\cdot6}=\frac{7-11}{12}=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3};\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{7+11}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}.$$

Пример 21. Решить по методу Виета квадратное уравнение $x^2+5x+6=0$.

Для данного квадратного уравнения коэффициенты уравнения равны $a=1$; $b=5$; $c=6$. По теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{1}=-5 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{6}{1}=6 \end{cases}$, следовательно, корни уравнения равны $x_1=-3$ и $x_2=-2$, сумма которых равна –5, а произведение – положительному числу 6.

Проверка правильности найденных решений осуществляется путём подстановки значений корней в заданное уравнение, которое при этом *обращается в тождество*.

Методы решения кубических уравнений и уравнений четвёртого порядка специального вида приведены в табл. 5.

Пример 22. Решить кубическое уравнение $x^3-3x^2-6x+8=0$.

В этом примере $a=1$ и $d=8$. Последнее число имеет множители 1, 2, 4 и 8, следовательно, корнями заданного уравнения могут быть числа ±1, ±2, ±4 и ±8. Подставляя эти числа в уравнение, найдём

$$x=-1:\ (-1)^3-3\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)+8=-1-3+6+8=10\neq0,$$

т.е. $x=-1$ – не является корнем уравнения;

$$x=1:\ 1^3-3\cdot1^2-6\cdot1+8=1-3-6+8=0,$$

т.е. $x=1$ – корень уравнения. Отсюда следует, что величина $(x-1)$ является простым сомножителем полинома $P_3(x)=x^3-3x^2-6x+8$, стоящего в левой части уравнения. Разделим $P_3(x)$ на $(x-1)$:

Таблица 5.

Методы решения уравнений с полиномами ($n = 3$ и $n = 4$).

Уравнение	***Метод решения***
Кубическое $\boxed{a x^3 + b x^2 + c x + d = 0}$ *производят замену неизвестной* $\boxed{x = y - \frac{b}{3a}}$, при этом уравнение приобретает вид приведенного $\boxed{y^3 + py + q = 0}$, где $\boxed{p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}}$; $\boxed{q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}}$.	1) *формулы Кардано* $\boxed{E = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$; $\boxed{A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{E}}}$; $\boxed{B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{E}}}$. В зависимости от *знака величины* E *возможны* 3 *случая*. а) $E > 0$ – один действительный корень: $\boxed{y = A + B}$. б) $E = 0\,(A = B)$ – три действительных корня, причём два совпадают: $\boxed{y_1 = 2A}$; $\boxed{y_2 = y_3 = -A}$. в) $E < 0$ (*неприводимый случай*) – 3 разных действительных корня: $\boxed{y_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\phi}{3}\right)}$; $\boxed{y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\phi + 2\pi}{3}\right)}$; $\boxed{y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\phi + 4\pi}{3}\right)}$, где $r = \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, $\cos\phi = -\frac{q}{2r}$. 2) *теорема Виета* $\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}}$.
Биквадратное $\boxed{a x^4 + b x^2 + c = 0}$	*заменой* $\boxed{x^2 = y \ge 0}$ *сводится к квадратному уравнению*: $\boxed{a y^2 + b y + c = 0}$.
Возвратное $\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0}$.	Приводится к виду $\boxed{a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0}$, затем вводится *новая неизвестная* $\boxed{x + \frac{m}{x} = y}$, тогда $y^2 = x^2 + 2m + \frac{m^2}{x^2} \Leftrightarrow \boxed{x^2 + \frac{m^2}{x^2} = y^2 - 2m}$, а уравнение принимает вид квадратного уравнения $\boxed{a y^2 + b y + c - 2am = 0}$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2-6x+8 & x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2-2x-8 \\
-2x^2-6x+8 & \\
\underline{-2x^2+2x} & \\
-8x+8 & \\
\underline{-8x+8} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $P_3(x)=(x-1)(x^2-2x-8)$. Значит, два других корня уравнения удовлетворяют квадратному уравнению $x^2-2x-8=0$. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1 x_2=-8 \end{cases}. \Rightarrow\ x_1=-2;\ x_2=4.$$

Подстановка полученных корней в исходное уравнение обращает его в тождество, что свидетельствует о правильности найденного решения.

<u>Б.</u> Если два математических выражения соединены знаками “$\neq$” (*не равно*), “$<$” (*меньше*), “$\leq$” (*меньше или равно*), “$>$” (*больше*), “$\geq$” (*больше или равно*), то такое математическое предложение называется ***неравенством***. Неравенства со знаками “$\neq$”, “$<$”, “$>$” называют ***строгими*** (в этом случае концы интервала не включаются в ответ), а остальные – ***нестрогими*** (в этом случае концы интервала включаются в ответ, если они входят в ОДЗ). ***Решением неравенства*** называется частное значение или область значений неизвестной, при которых неравенство становится истинным. Классификация неравенств подобна той, которая принята для алгебраических и трансцендентных уравнений.

Неравенство, содержащее только полиномы первого порядка, называется ***линейным*** (например, $ax+b>0$, $a\neq 0$, $(a\in R, b\in R)$). Линейное неравенство решается следующим образом (для определённости выбран знак “$>$”): $ax+b>0$, $ax>-b$. Если $a>0$, то при делении обеих частей неравенства на коэффициент a знак неравенства *не меняется* $x>-\dfrac{b}{a}$. Если $a<0$, то деление обеих частей неравенства на этот коэффициент сопровождается *изменением знака неравенства на противоположный* $x<-\dfrac{b}{a}$.

Неравенства вида $P_n(x)>0$ при $n\geq 2$ (знак неравенства “>” выбран для определённости рассуждений) решаются *методом интервалов*, сущность которого состоит в следующем:

а) находят *корни* x_i уравнения $P_n(x)=0$;

б) откладывают *корни* x_i *на числовой оси*;

в) на *каждом интервале* $(-\infty; x_1), \ldots, (x_i; x_{i+1}), \ldots (x_n; \infty)$ определяют *знак полинома* $P_n(x)$, для чего из интервала берут произвольное число q и вычисляют *величину* $P_n(q)$;

г) если величина $P_n(q)$ *положительна*, то над интервалом ставят знак “+”, а если *отрицательна* – знак “–”.

д) по *знаку неравенства* (знакам “$<$” и “$\le$” соответствует знак *полинома* “–”, а знакам “$>$” и “$\ge$” – знак “+”) выбирают *необходимые интервалы*.

Пример 23. Решить квадратное неравенство $6x^2 - x - 12 \le 0$.

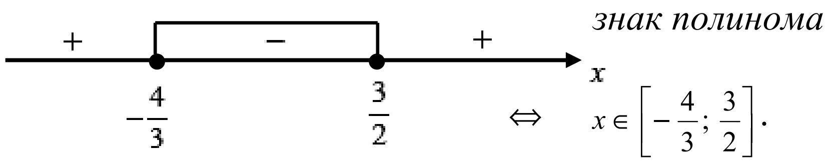
Решим квадратное уравнение $6x^2 - x - 12 = 0$:

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12) = 1 + 288 = 289$; $\sqrt{D} = 17$; $x_1 = \frac{1-17}{12} = -\frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{1+17}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

Разложим полином на простые множители

$$6x^2 - x - 12 = 6\left(x + \frac{4}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Отложим корни x_1 и x_2 на числовой оси и определим знаки полинома на интервалах $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right), \left(-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$, после чего по знаку неравенства “$\le$” выбираем те интервалы, на которых знак полинома “–”:



$\Leftrightarrow$ $x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$.

<u>**В.**</u> Для успешного решения показательных уравнений и неравенств необходимо усвоить ***свойства*** функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \ne 1,\ a \in R)$:

1^o. $\forall x \in R$ $a^x > 0$ (квантор “$\forall$” означает *для всех*);

2^o. *если* $0 < a < 1$, *то функция убывает для всех* $x \in R$;

3^o. *если* $a > 1$, *то функция возрастает для всех* $x \in R$;

4^o. $\boxed{a^0 = 1}$, $a \ne 0$; 5^o. $\boxed{a^1 = a}$; 6^o. $\boxed{1^x = 1}$; 7^o. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$; 8^o. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

9^o. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; 10^o. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$; 11^o. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$;

12^o. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$;

13^o. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;

14^o. $a^{\log_a b} = b$ – *основное показательно-логарифмическое тождество*.

При решении неравенств надо помнить:

а) при основании $a > 1$ из неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $(a^{f(x)} < a^{g(x)})$ следует неравенство $f(x) > g(x)$ $(f(x) < g(x))$, т.е. знак неравенства для показателей степеней *сохраняется*.

б) при основание $0<a<1$, то из неравенства $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ ($a^{f(x)}<a^{g(x)}$) следует неравенство $f(x)<g(x)$ ($f(x)>g(x)$), т.е. знак неравенства для показателей степеней при $0<a<1$ изменяется *на противоположный*.

<u>Г.</u> Логарифмическая функция $y=\log_a x$ ($y=\log_a f(x)$ ($a>0,\ a\neq 1$)) обладает следующими ***свойствами***:

1°. *Область определения функции* $x>0$ ($f(x)>0$);

2°. Если $0<a<1$, то функция *убывает* для всех значений x ($f(x)$) из области определения функции;

3°. Если $a>1$, то функция *возрастает* для всех значений x ($f(x)$) из области определения функции;

4°. $\boxed{\log_a 1=0}$; 5°. $\boxed{\log_a a=1}$; 6°. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$; 7°. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$;

8°. $\log_a a^x=x$; 9°. $\log_a x^{2n}=2n\log_a|x|$; 10°. $\log_a x^{2n+1}=(2n+1)\log_a x$;

11°. $\log_{a^m} x=\dfrac{1}{m}\log_a x$; 12°. $\log_{a^m} x^n=\dfrac{n}{m}\log_{|a|}|x|$; 13°. $\log_{a^n} x^n=\log_{|a|}|x|$;

14°. $\log_a(x\cdot y)=\log_a|x|+\log_a|y|$; 15°. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a|x|-\log_a|y|$;

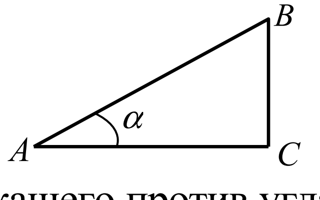
16°. $a^{\log_a x}=x$ – *основное показательно-логарифмическое тождество*.

При решении неравенств надо помнить:

а) при основании логарифмической функции $0<a<1$ из неравенства $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ следует $f(x)<g(x)$, знак неравенства для подлогарифмических функций меняется *на противоположный*.

б) при основании логарифмической функции $a>1$ знак неравенства для подлогарифмических функций *не меняется* $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow$ $f(x)>g(x)$.

<u>Д.</u> Рассмотрим ***прямоугольный*** треугольник *ABC*. Стороны *AC* и *CB* называют ***катетами***, а сторону *AB* – ***гипотенузой***.



Отношение катета, лежащего против угла α, к гипотенузе называется ***синусом угла*** α: $\boxed{\sin\alpha=\dfrac{CB}{AB}}$. Отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе называется ***косинусом угла*** α: $\boxed{\cos\alpha=\dfrac{AC}{AB}}$. Отношение противолежащего катета к прилежащему к углу катету называется

тангенсом угла α: $\boxed{tg\alpha = \frac{CB}{AC}}$. Отношение прилежащего к углу α катета к противолежащему к углу α катету называется ***котангенсом угла*** α: $\boxed{ctg\,\alpha = \frac{AC}{CB}}$. Из определений следует выполнение следующих равенств: $\boxed{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ и $\boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\,\alpha}}$.

Функция, которая в произведении с синусом равна единице, т.е. является к синусу алгебраически обратной, называется ***косекансом***: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Функция, которая в произведении с косинусом равна единице, т.е. является к косинусу алгебраически обратной, называется ***секансом***: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Уравнения (неравенства), в которые входят тригонометрические функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$, называются *тригонометрическими уравнениями* (*неравенствами*). При решении тригонометрических уравнений (неравенств) надо знать следующие ***сведения***:
а) значения функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на интервале $[0;2\pi]$ (остальные функции выражаются через эти две функции), приведенные в табл. 6.

Таблица 6.

Значения синуса и косинуса на интервале $[0;\,2\pi]$.

Значения синуса и косинуса на интервале $[0;\,\pi]$								
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Значения синуса и косинуса на интервале $[\pi;\,2\pi]$								
α	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

б) в табл. 6 приведены значения для положительных углов, а для отрицательных углов используются свойства нечётности $\sin\alpha$:

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha},$$

и чётности функции $\cos\alpha$: $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$.

Например, при решении простейшего уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

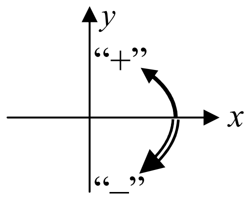
его лучше записать в виде

$$-\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а затем обе части уравнения умножить на (–1). Аналогичное уравнение для косинуса (в силу его чётности) приводит к уравнению

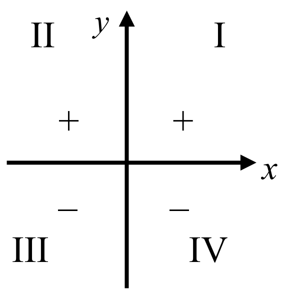
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \Leftrightarrow \ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

в) при решении тригонометрических уравнений и неравенств часто используют единичную окружность, при этом надо помнить, что ***положительные углы*** отсчитываются ***против хода*** часовой стрелки, а ***отрицательные углы – по ходу*** часовой стрелки от положительной полуоси оси абсцисс (ось Ox).

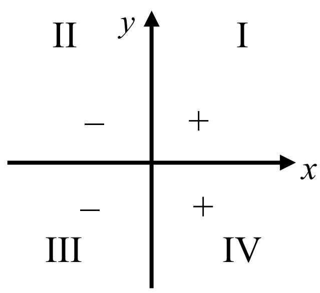


г) одним из важнейших моментов является ***умение определить знак*** тригонометрической функции при заданном значение аргумента в соответствующих четвертях координатной плоскости (I, II, III, IV – номера квадрантов), при этом полезно помнить следующие рисунки:

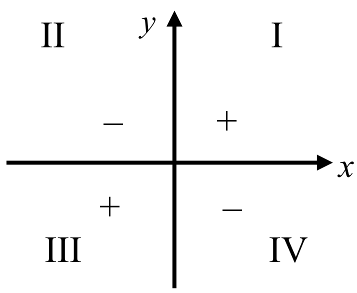
a) sin *α*



b) cos *α*



в) *tgα*



д) при решении тригонометрических уравнений и неравенств применяют формулы:

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **2)** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \alpha \neq \pi k; \ n, k \in Z$;

3) $1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

4) $1+ctg^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ \ n\in Z$;

5) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$;

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

$\sin(4\alpha)=\cos\alpha(4\sin\alpha-8\sin^3\alpha)$;

6) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;

$\cos(3\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

$\cos(4\alpha)=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$;

7) $tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta},\ \alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;

$tg\,(2\alpha)=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; $\ tg\,(3\alpha)=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$; $\ tg\,(4\alpha)=\dfrac{4tg\alpha-4tg^3\alpha}{1-6tg^2\alpha+tg^4\alpha}$;

8) $ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp1}{ctg\alpha\pm ctg\beta},\ \alpha,\beta,\alpha\pm\beta\neq\pi n,\ n\in Z$;

9) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ (знак перед квадратными корнями выбирается в зависимости от того, в каком квадранте оказывается угол $\dfrac{\alpha}{2}$);

10) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$; **11)** $tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

12) $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$; **13)** $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$;

14) $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$;

15) $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$;

$\sin^3\alpha=\dfrac{3\sin\alpha-\sin3\alpha}{4}$;

$\sin^4\alpha=\dfrac{\cos4\alpha-4\cos2\alpha+3}{8}$;

16) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$;

$\cos^3\alpha=\dfrac{3\cos\alpha+\cos3\alpha}{4}$;

$\cos^4\alpha=\dfrac{\cos4\alpha+4\cos2\alpha+3}{8}$;

17) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$; **18)** $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

19) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$; **20)** $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$;

21) $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

22) $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

23) $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; **24)** $tg\alpha-tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

е) при решении простейших тригонометрических уравнений (неравенств) надо помнить, что функции синус и косинус являются <u>*ограни-*</u>

<u>*ченными*</u> функциями, т.е. $-1 \le \cos\alpha\ (\sin\alpha) \le 1$. Следовательно, например, уравнение $\sin(3x) = -1{,}001$ и неравенство $\cos(5x) > 2$ решений не имеют.

Пусть вещественное число $b \in (0;1)$, тогда

$$\sin\alpha:\quad \sin\alpha = b,\qquad \alpha = (-1)^n \arcsin b + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin\alpha = -b,\qquad \alpha = (-1)^{n+1} \arcsin b + \pi n,\ n \in Z;$$

<u>***Особые случаи***</u>: $\sin\alpha = -1,\quad \alpha = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

$$\sin\alpha = 0,\qquad \alpha = \pi k,\ k \in Z;$$

$$\sin\alpha = 1,\qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

$$\cos\alpha:\quad \cos\alpha = b,\qquad \alpha = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos\alpha = -b,\qquad \alpha = \pm(\pi - \arccos b) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

<u>***Особые случаи***</u>: $\cos\alpha = -1,\quad \alpha = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;

$$\cos\alpha = 0,\qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$\cos\alpha = 1,\qquad \alpha = 2\pi k,\ k \in Z.$$

Пусть вещественное число $g > 0$ и $g \in R$, тогда

$$tg\alpha:\quad tg\alpha = g,\quad \alpha = arctg(g) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$tg\alpha:\quad tg\alpha = -g,\quad \alpha = -arctg(g) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$ctg\alpha:\quad ctg\alpha = g,\quad \alpha = arcctg(g) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$ctg\alpha:\quad ctg\alpha = -g,\quad \alpha = \pi - arcctg(g) + \pi n,\ n \in Z.$$

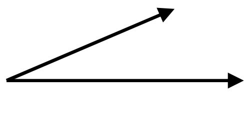
0.5. *Элементы геометрии*

Приведём некоторые элементы *геометрии*:

Углы

Отрезок – часть прямой, ограниченная точками.

Луч – направленная прямая, выходящая из точки.



Угол – часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки.

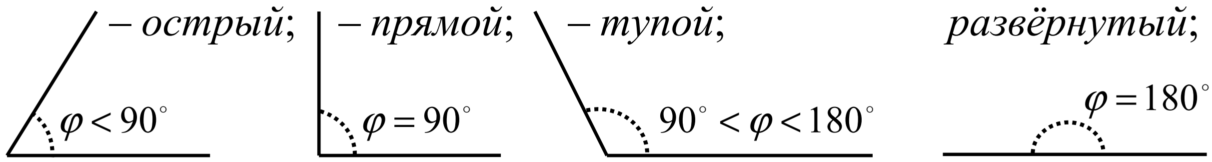
Углы измеряются в градусах (^{o}), минутах ($'$) и секундах ($''$).

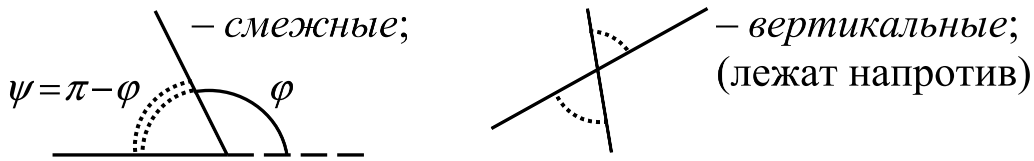
Градус – 1/360 часть полного оборота (360^o) по окружности;

Минута – 1/60 часть градуса;

Секунда – 1/3600 часть градуса или 1/60 часть минуты.

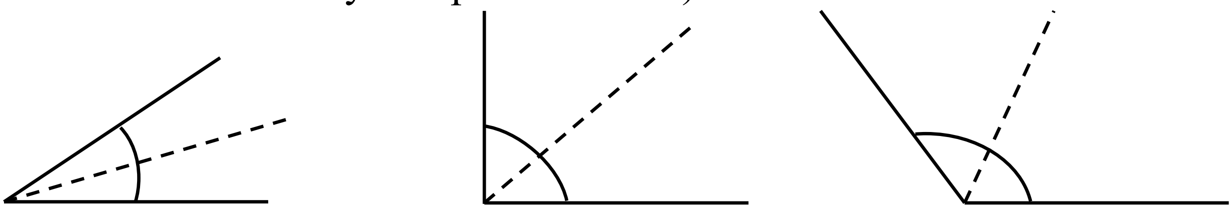
Углы также измеряются в радианах: $1\,радиан = \dfrac{180^o}{\pi}$, где трансцендентное число $\pi = 3{,}1415926535...$ Обратный переход от радиан к градусам осуществляется по формуле: $1^o = \dfrac{\pi}{180}$, т.е. π радиан отвечает угол в 180^o. Если произвольный угол $\varphi_{рад}$ задан в радианах, то в градусной мере он будет равен $\varphi^o = \dfrac{\varphi_{рад} \cdot 180^o}{\pi}$ (обратно: $\varphi_{рад} = \dfrac{\varphi^o \cdot \pi}{180^o}$). Среди углов выделяют:



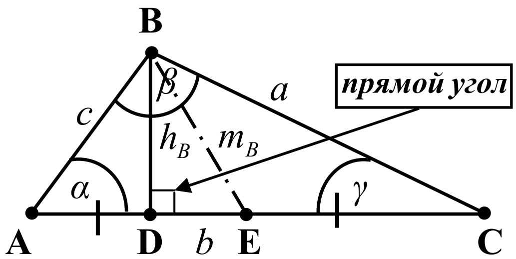


Сумма смежных углов равна развёрнутому углу 180^o (π радиан).

Биссектриса угла – луч, который делит угол пополам (на рисунках она показана пунктирной линией):



Треугольники



Высота BD (h_B) – отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины B треугольника на противоположную сторону или её продолжение (в случае вершины тупого угла). ***Медиана*** BE – отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (точка E: $AE = EC$). Стороны треугольника, лежащие против вершин, обозначаются соответствующими буквами: $BC=a$ (лежит напротив вершины A), $CA=b$ (лежит напротив вершины B) и $AB=c$ (лежит напротив вершины C). Сумма углов в ***евклидовом*** (на плоскости) треугольнике всегда равна π:

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi}.$$

Площадь треугольника равна половине произведения высоты треугольника на длину его основания, например:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} h \cdot b}.$$

Периметром называется сумма всех сторон, ограничивающих плоскую фигуру:

$$\boxed{P = a + b + c},$$

а ***полупериметром*** – величина $p = \dfrac{P}{2}$. ***Площадь треугольника*** вычисляется также по ***<u>формуле Герона</u>***: $\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

Если вокруг треугольника *<u>описана окружность</u>* радиуса R (площадь окружности равна $\boxed{S = \pi \cdot R^2}$, а длина – $\boxed{L = 2\pi \cdot R}$), то

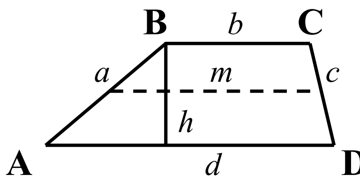
$$\boxed{R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S}}.$$

Для *<u>вписанной окружности</u>* с радиусом r эта формула имеет вид:

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}.$$

Частными случаями треугольников являются: ***равносторонний*** (все стороны имеют одинаковую длину), ***равнобедренный*** (две стороны имеют одинаковую длину, которая отличается, или не отличается от длины третьей стороны), ***прямоугольный*** (один из углов прямой, который равен 90^o или $\dfrac{\pi}{2}$ радиан).

Четырёхугольники

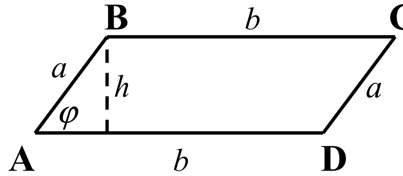


– трапеция.

Средняя линия m – отрезок прямой, который параллелен основаниям трапеции и соединяющий середины её боковых сторон:

$$\boxed{m = \frac{b + d}{2}};\ \boxed{S = h \cdot m}.$$

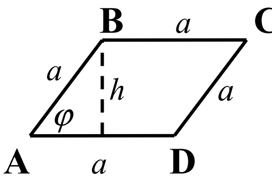
Если длины боковых сторон трапеции равны ($a = c$), то трапеция называется ***равнобедренной*** (***равнобокой***, ***равнобочной***). Если два угла трапеции прямые, то она называется ***прямоугольной***.



– параллелограмм.

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны и равны между собой.

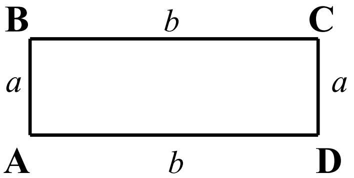
Площадь параллелограмма равна $\boxed{S = h \cdot b = a \cdot b \cdot \sin\varphi}$.



– ромб.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны между собой, а углы отличны от прямого.

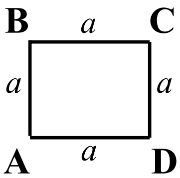
Площадь ромба равна $\boxed{S = h \cdot a = a \cdot a \cdot \sin\varphi = a^2 \sin\varphi}$.



– прямоугольник.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Площадь прямоугольника равна $\boxed{S = a \cdot b}$.

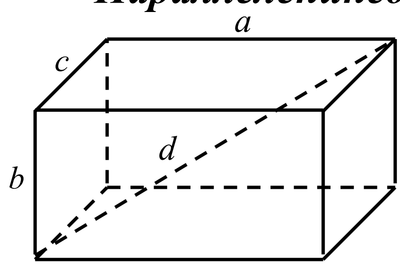


– квадрат.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Площадь квадрата равна $\boxed{S = a \cdot a = a^2}$.

Параллелепипед



Для параллелепипеда выполняются следующие равенства:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

площадь боковой поверхности

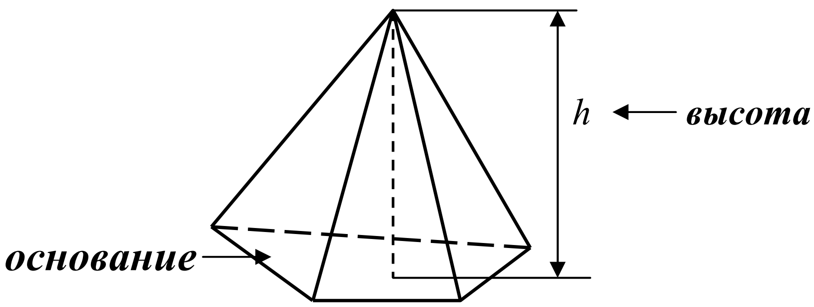
$$\boxed{S_б = 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)};$$

объём вычисляется по формуле $\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$.

Кубом называется параллелепипед, для которого все рёбра равны, т.е. $a = b = c$ ($\boxed{S_{бок.} = 6a^2}$, $\boxed{V = a^3}$).

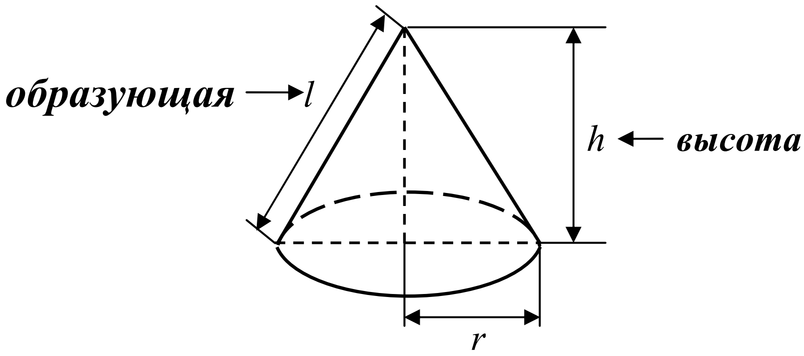
Пирамидой называется многогранник, в основании которого лежит многоугольник, а боковые грани являются треугольниками. Если в основании лежит ***правильный многоугольник*** (стороны равны: равносторонний треугольник, квадрат и т.д.), то пирамида называется

Пирамида



правильной. Объём пирамиды равен *одной трети произведения площади основания* S_0 *на её высоту* h: $\boxed{V = \frac{1}{3} S_0 h}$.

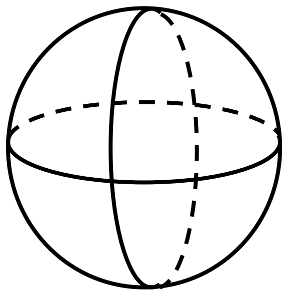
Прямой круговой конус



Прямым круговым конусом называется фигура, которая получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. В основании прямого кругового конуса лежит окружность с радиусом r, его ось перпендикулярна к основанию и является высотой h. Образующая конуса l связана с высотой и радиусом соотношени-ем $l = \sqrt{r^2 + h^2}$. ***Площадь основания*** $\boxed{S_0 = \pi r^2}$, а ***боковой поверхности*** – $\boxed{S_б = \pi r l}$. ***Объём прямого кругового конуса*** определяется формулой:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_0 h = \frac{1}{3} \pi r^2 h}.$$

Шар



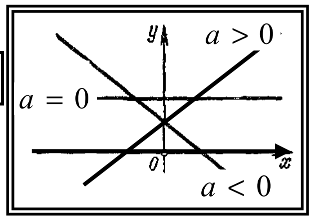
Шаром называется фигура, ограниченная ***сферой***, − геометрическим местом пространственных точек, равноудалённых на расстояние

R, называемого ***радиусом*** сферы, от выделенной точки, называемой ***центром*** сферы. ***Площадь поверхности сферы*** определяется формулой $\boxed{S = 4\pi R^2}$, а ***объём*** – $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

0.6. *Графики элементарных функций*

Большое значение при решении многих задач имеют графики элементарных функций. ***Графиком*** называется геометрическое место точек, абсциссы которых определяются аргументом x функции, а ординаты – значением функции $y = f(x)$ при данном значении аргумента.

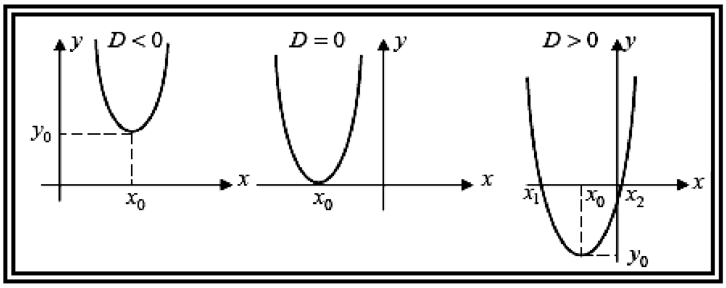
1. ***Линейная функция*** $\boxed{y = ax + b}$



$D(y): x \in R$
$E(y): y \in R$

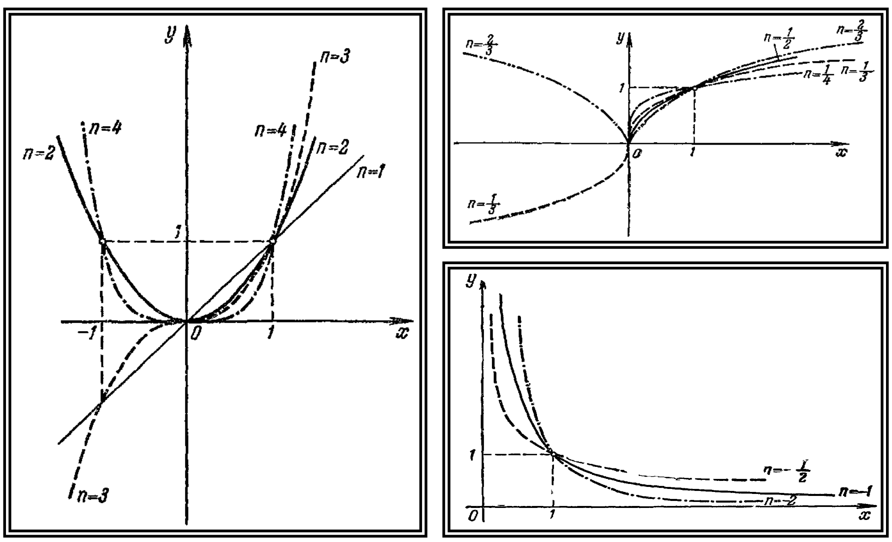
При $a = 0$ линейная функция называется *постоянной функцией*.

2. ***Квадратичная функция*** $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$. Пусть $a > 0$ (значения x_0 и y_0 связаны с параметрами a, b и c; они определяют положение вершины параболы на координатной плоскости; парабола *симметрична* относительно прямой $x = x_0$), тогда *ветви параболы направлены* *<u>вверх</u>* (при $a < 0$ – *ветви направлены* *<u>вниз</u>*):

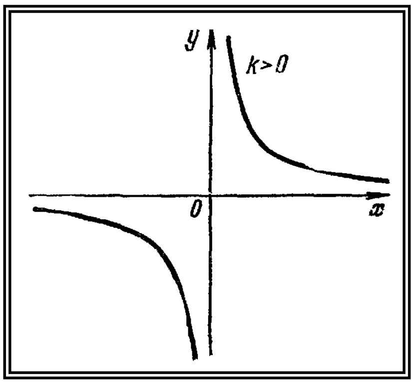


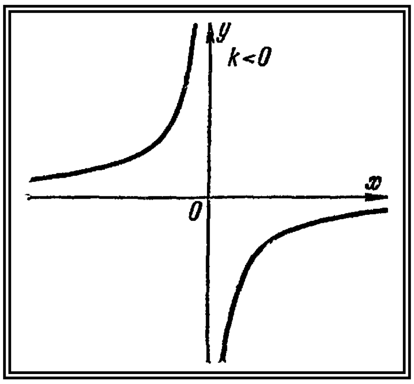
$D(y): x \in R:$
$E(y): y \in [y_0; \infty)$.

3. ***Степенная функция*** $y = x^n (n \in R)$:



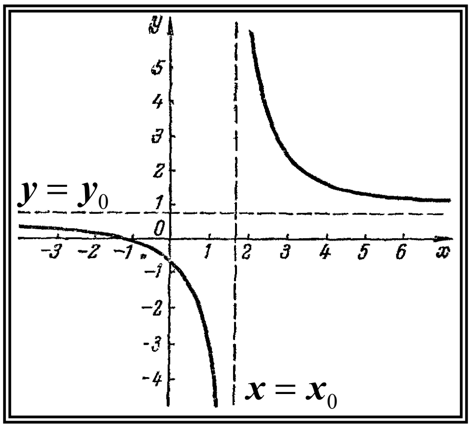
4. *Дробно-рациональная функция* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. В частном случае, когда $a=d=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ и $k=\dfrac{b}{c}$, дробно-рациональная функция принимает хорошо известный из курса школьной математики вид $y=\dfrac{k}{x}$, который соответствует *равносторонней гиперболе*.



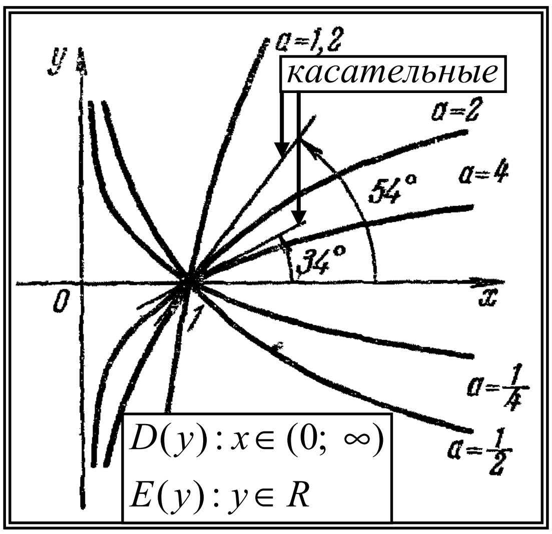


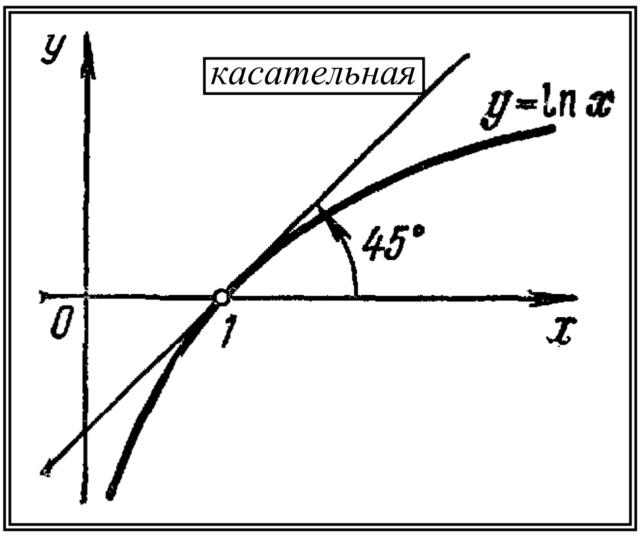
$D(y): x\in R,\ \ x\neq 0$
$E(y): y\in R,\ \ y\neq 0$

При отличных от нуля коэффициентах, график дробно-рациональной функции имеет разрыв в точке $x_0=-\dfrac{d}{c}$.



5. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$.





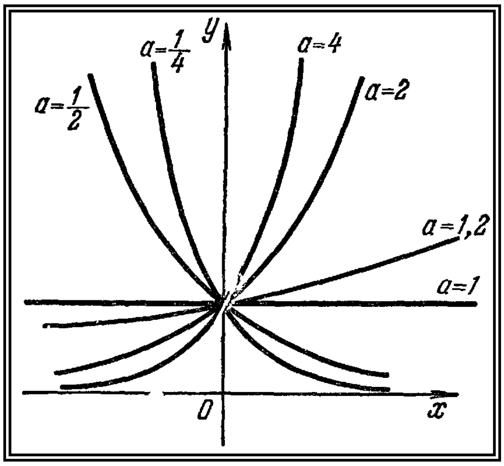
Если угол, образованный касательной к графику логарифмической функции в точке $x=1$, и положительной полуосью оси абсцисс Ox равен 45°, то основанием логарифмической функции будет иррациональное число $\boxed{e=2{,}71828194\ldots}$

Логарифм с таким основанием называется ***натуральным***.

Обозначение: $\boxed{\log_e \boldsymbol{x}=\ln \boldsymbol{x}}$.

Переход от натуральных к ***десятичным*** логарифмам ($\boxed{\log_{10}\boldsymbol{x}=\lg \boldsymbol{x}}$) и обратно задаётся формулами: $\boxed{\lg x \approx 0{,}4343\ \ln x}$; $\boxed{\ln x \approx 2{,}3031\ \lg x}$.

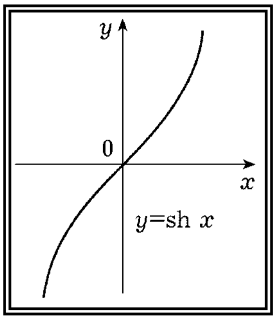
<u>6</u>. *Показательная функция* $y=a^x$ $(a>0\,, a\neq 1)$.

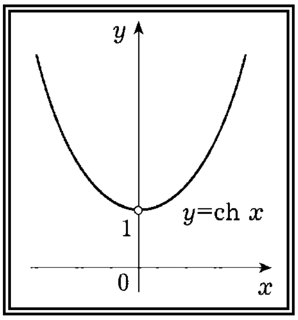


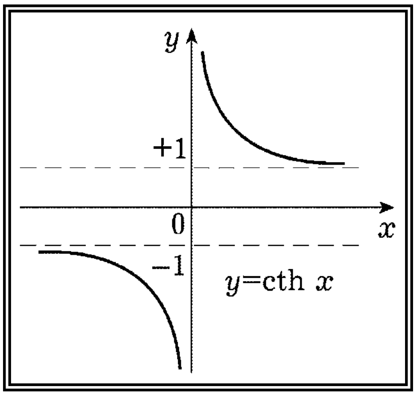
$D(y): x\in R$

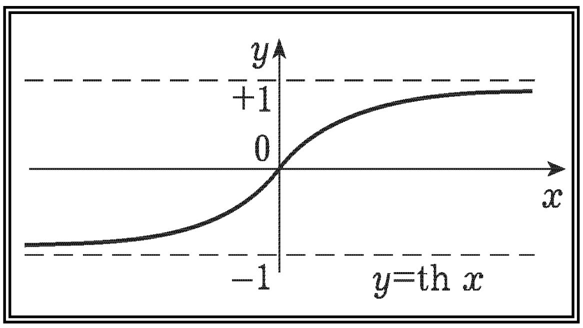
$E(y): y\in (0;\ \infty)$

<u>7</u>. *Гиперболические функции*: $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ – синус гиперболический; $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – косинус гиперболический; $thx=\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ – тангенс гиперболический; $cthx=\dfrac{chx}{shx}=\dfrac{1}{thx}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ – котангенс гиперболический.







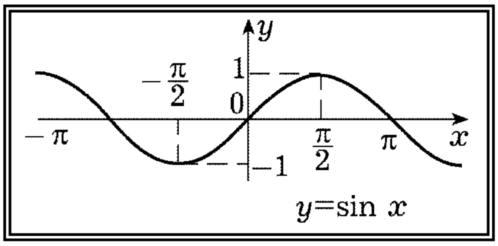


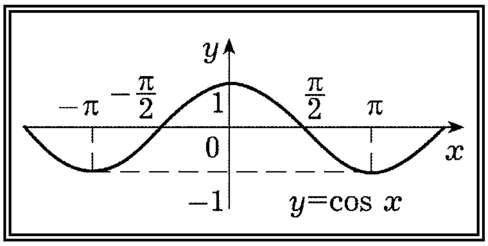
Гиперболические функции *непериодические в области действительных чисел*, но периодические в области комплексных чисел.

8. *Тригонометрические функции*.

а) $y = \sin\ x$: $D(y): x \in R$; $E(y): y \in [-1;\ 1]$; $T = 2\pi$; $\sin(-x) = -\sin x$.

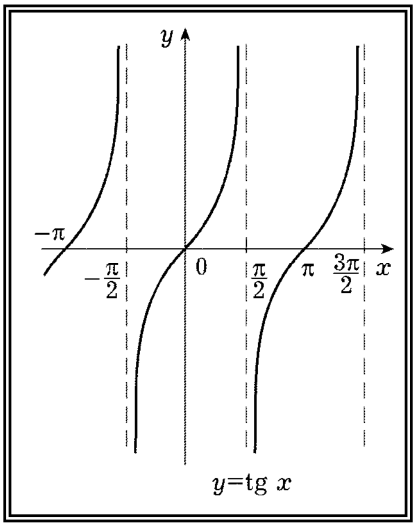
б) $y = \cos x$: $D(y): x \in R$; $E(y): y \in [-1;\ 1]$; $T = 2\pi$; $\cos(-x) = \cos x$.

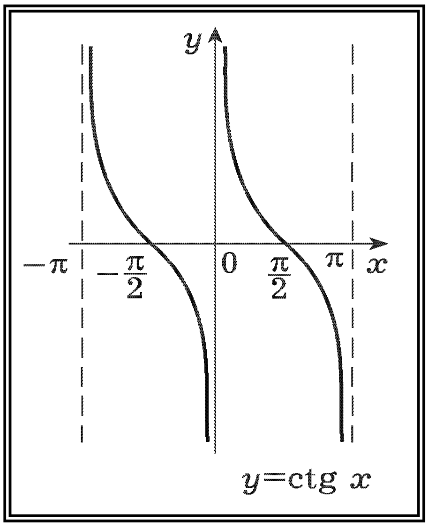




в) $y = tgx$ $: D(y): x \in R,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $E(y): y \in R$; $T = \pi$; $tg(-x) = -tgx$.

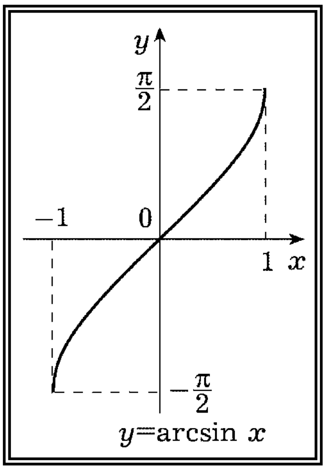
г) $y = ctgx$ $: D(y): x \in R,\ x \neq \pi k,\ k \in Z$; $E(y): y \in R$; $T = \pi$; $ctg(-x) = -ctgx$.

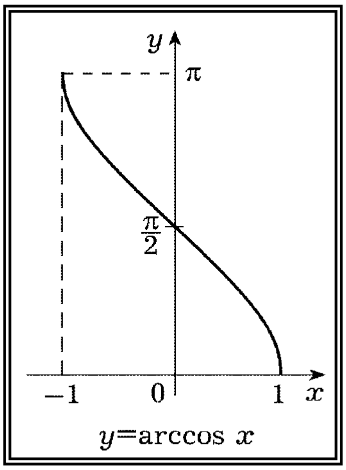


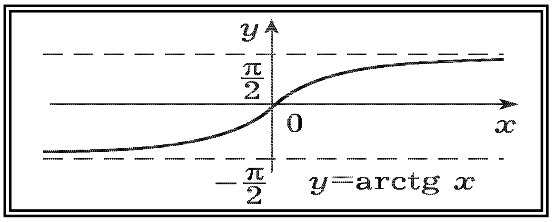


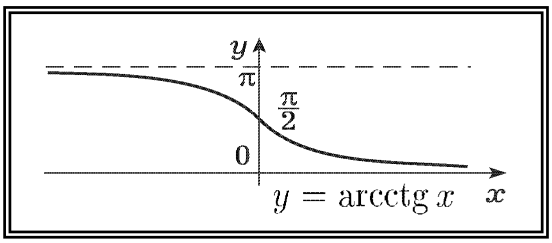
д) $y = \arcsin\ x$ $\boxed{\begin{matrix} D(y): x \in [-1;\ 1] \\ E(y): y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right] \end{matrix}}$; **е)** $y = \arccos x$ $\boxed{\begin{matrix} D(y): x \in [-1;1] \\ E(y):\ y \in [0;\pi] \end{matrix}}$;

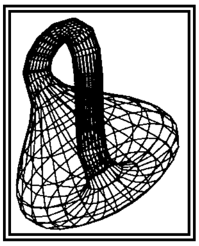
ж) $y = arctgx$ $\boxed{\begin{matrix} D(y): x \in R \\ E(y): y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right) \end{matrix}}$; **з)** $y = arcctgx$ $\boxed{\begin{matrix} D(y): x \in R \\ E(y): y \in (0;\ \pi) \end{matrix}}$;











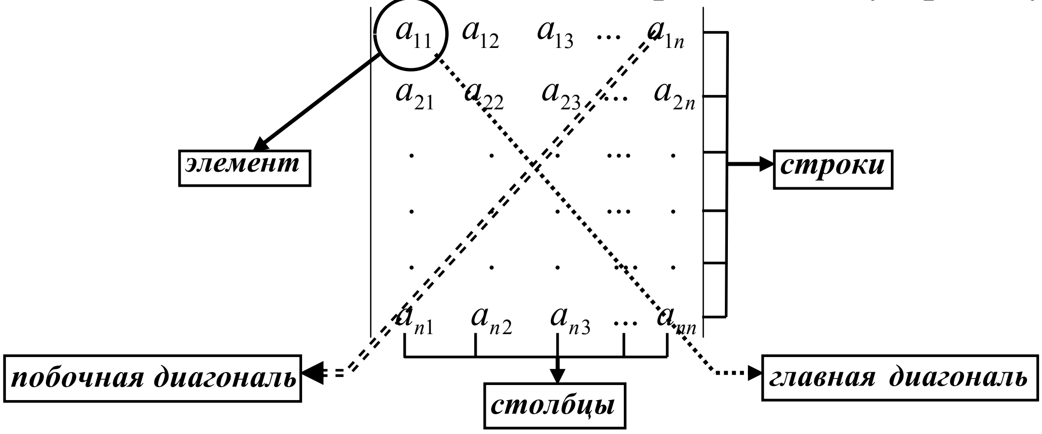
<u>I</u>. *Элементы* ***линейной*** *и* ***векторной алгебр***. ***Аналитическая геометрия*** *на плоскости и в пространстве*

Тема: *Элементы линейной алгебры*

<u>*1*</u> “***Определители и их свойства***”

1.1. *Определители II и III порядка*

Определителем (***детерминантом***) ***порядка n*** называется квадратная таблица, содержащая ***n*** строк и ***n*** столбцов, которой ставится в соответствие число, вычисляемое по определённому правилу:



Числа (*выражения*) a_{ij} $(i, j = 1...n)$ называются ***элементами*** определителя, i – ***номером строки***, j – ***номером столбца***. Элементы с одинаковым номером i образуют ***строки***, а элементы с одинаковым номером j – ***столбцы***. Элементы с равными номерами ($i = j$) образуют ***главную диагональ***. Другая диагональ квадратной таблицы, начинающаяся в левом нижнем углу и заканчивающаяся в правом верхнем углу, называется ***побочной***.

Определителем II порядка называется квадратная таблица, содержащая ***2*** строки и ***2*** столбца, которой ставится в соответствие число, вычисляемое по ***правилу***: *из произведения элементов, которые образуют главную диагональ, надо вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали*:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11} \cdot a_{22}} - \underline{\underline{a_{21} \cdot a_{12}}}}.$$

Пример 1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \underline{(-3) \cdot 5} - \underline{\underline{(-1) \cdot 2}} = \underline{-15} + \underline{\underline{2}} = -13$.

Определителем III порядка называется квадратная таблица, содержащая ***3*** строки и ***3*** столбца, которой ставится в соответствие число, вычисляемое по обобщённому <u>***правилу Саррюса***</u>: *за определите-*

лем выписывают первый и второй столбцы, затем из суммы произведений элементов, стоящих на главной диагонали и ей параллельных диагоналях, надо вычесть сумму произведений элементов, стоящих на побочной диагонали и ей параллельных:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Пример 2.

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 5 - 12 + 0 - (60 - 2 + 0) = -7 - 58 = -65\,.$$

Определители порядка $n \geq 4$ вычисляются путём разложения определителя по элементам какой-либо строки или столбца (см. свойство 9° в п.1.2, ***1***).

Минором $\boxed{M_{ij}}$ элемента a_{ij} называется определитель порядка $(n-1)$, который получается из исходного определителя порядка n путём вычёркивания строки i и столбца j, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

$$M_{ij} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right|.$$

Пример 3. Найти *миноры* элементов a_{12} и a_{33} определителя из ***Примера 2***.

Вычёркивая в определителе строку 1 и столбец 2: $\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix}\right|$, получим минор $M_{12} = \left|\begin{matrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right|$. Поступая аналогично со строкой 3 и столбцом 3, получим минор $M_{33} = \left|\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{matrix}\right|$.

Пример 4. Найти *миноры* элементов a_{11} и a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$.

Исходя из определения минора M_{11}: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$, получаем $M_{11} = -2$, аналогично найдём минор $M_{21} = 1$.

Алгебраическим дополнением $\boxed{A_{ij}}$ элемента a_{ij} называется произведение минора этого элемента на $(-1)^{i+j}$, т.е. $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$.

Из определения алгебраического дополнения следует, что алгебраическое дополнение ***совпадает*** со своим минором, если сумма $i+j$ является *чётным* числом, и ***противоположно*** ему по знаку, если сумма $i+j$ – *нечётное* число.

Транспонированным определителем n-го порядка называется определитель порядка n, полученный из исходного определителя путём *записывания* строк на места соответствующих столбцов, а столбцов – на места соответствующих строк.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, то $\boxed{\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$.

Пример 5. Найти определитель, транспонированный к определителю $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

Из определения транспонированного определителя $\Delta^T = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

1.2. *Свойства определителей*

1°. *Величина транспонированного определителя равна величине исходного определителя.*

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Отсюда видно, что $\boxed{\Delta^T = \Delta}$.

Пример 6. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$. Показать, что величина транспонированного определителя равна величине исходного определителя. Величина исходного определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$. Найдём транспонированный определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ и вычислим его значение $\Delta^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$. Отсюда следует, что $\Delta^T = \Delta$.

2°. *Перестановка местами двух строк* (*столбцов*) *изменяет знак* определителя *на противоположный*.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, тогда $\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} =$ $= -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\Delta$.

Пример 7. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$. Показать, что при обмене местами первой и второй строк знак определителя изменится на противоположный. Если после этого поменять местами первый и второй столбцы, то знак полученного определителя совпадет со знаком исходного определителя.

Величина исходного определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$. Обменяем местами первую и вторую строки в заданном определителе $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ получим определитель $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 = -\Delta$. Поменяем местами первый и второй столбцы в $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, получим определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 = \Delta$.

Если поменять местами строки (столбцы) чётное число раз, то величина и знак определителя *не меняется*. Нечётная перестановка местами строк (столбцов) *попарно* не меняет величину определителя, но *изменяет его знак на противоположный*.

3°. Определитель, который содержит *две* (или *более*) *одинаковых строки* (*столбца*), равен *нулю*.

Если определитель содержит два одинаковых столбца, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0.$$

Пример 8. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$. Доказать, что он равен нулю.

Вычислим данный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$.

4°. Для того чтобы умножить определитель на число k, достаточно *умножить на число k все элементы любой строки* (*столбца*). Обратно: если *все элементы какой-либо строки* (*столбца*) *имеют общий множитель k*, то *его можно вынести за знак определителя*.
Докажем это свойство:

$$k \cdot \Delta = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\, a_{11}a_{22} - k\, a_{21}a_{12} = k\,(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}).$$

Пример 9. Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$. Найти определитель $-2 \cdot \Delta$.

Исходный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 8 = -1$, тогда $-2 \cdot \Delta = -2 \cdot (-1) = 2$. Умножим (-2) на элементы первой строки: $-2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \rightarrow \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -14 - {}$ $-(-16) = 2$. Умножим (-2) на элементы второй строки определителя Δ: $-2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \rightarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -14 \end{vmatrix} = -14 - (-16) = 2$. Умножим (-2) на элементы первого столбца: $-2 \cdot \Delta = \begin{array}{c} (-2)\times \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -14 - (-16) = 2$, или на элементы второго столбца: $-2 \cdot \Delta = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \\ \times(-2) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -14 \end{vmatrix} = -14 - (-16) = 2$.

5°. Если *две каких-либо строки* (*столбца*) *пропорциональны*, то *определитель равен нулю*.
Пусть в определителе II порядка первая и вторая строки пропорциональны, тогда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\, k\, a_{12} - k\, a_{11}a_{12} = k\,(a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}) = 0$.

Пример 10. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ равен нулю.

Первая и третья строки этого определителя пропорциональны, т.е. можно из третьей строки вынести общий множитель 3, тогда

$\boxed{\textit{одинаковые строки}}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \Rightarrow 3 \end{matrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ – по свойству 3° (см. выше).

6^o. Если *все элементы какой-либо строки* (*столбца*) *равны нулю*, то *определитель равен нулю*.

Пусть в определителе II порядка все элементы первой строки равны нулю, тогда $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0\,a_{22} - a_{21}0 = 0$.

7^o. Если элементы какой-либо строки (или столбца) можно представить в виде двух слагаемых, то сам определитель можно представить в виде суммы двух определителей.

Если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + \overline{\overline{a_{11}}} & a_{12} \\ a_{21} + \overline{\overline{a_{21}}} & a_{22} \end{vmatrix}$, то $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{\overline{a_{11}}} & a_{12} \\ \overline{\overline{a_{21}}} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$ (*самостоятельно*).

8^o. Если *все элементы какой-либо строки* (*столбца*) *умножить на вещественное число* k и *прибавить к соответствующим элементам другой строки* (соответственно, *столбца*), *то величина определителя не изменится*.

Умножим элементы второго столбца на действительное число k и прибавим результат умножения к соответствующим элементам первого столбца: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + k\,a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k\,a_{12} & a_{12} \\ k\,a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta$. Второй определитель равен нулю по свойству 5^o.

Пример 11. Доказать, что величина определителя $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ не изменится, если элементы первой строки умножить на 2 и прибавить к соответствующим элементам третьей строки.

Вычислим величину исходного определителя (см. ***Пример 2***):

$$\left|\begin{matrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix} = -16 - 4 + 3 - (-4 - 8 + 6) = -17 - (-6) = -17 + 6 = -11.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Умножим все элементы первой строки на 2 и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ + \end{matrix} = \left|\begin{matrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & -5 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \\ 9 & -5 \end{matrix} = -48 - 36 + 15 - (-36 - 40 + 18) =$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$= -69 - (-58) = -69 + 58 = -11$.

○ Данное свойство применяется для обнуления всех элементов какой-либо строки (столбца) за исключением одного (***метод обнуления***), что значительно снижает трудоёмкость вычисления определителей порядка выше третьего (см. также свойство 9°). ○

9°. [*Метод раскрытия определителя по элементам строки* (или *столбца*); ***универсальный способ вычисления определителя любого порядка***]. Определитель *любого порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки* (*столбца*) *на их алгебраические дополнения*:

$$\boxed{\Delta = \sum_i a_{ij} A_{ij} = \sum_j a_{ij} A_{ij}}.$$

Пример 12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ по элементам 3 строки и по элементам 2 столбца.

Воспользуемся свойством 9° и раскроем определитель по элементам 3 строки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \overset{-2 \qquad -3 \qquad 4}{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}} = (-2)\cdot M_{31} + (-3)\cdot(-M_{32}) + 4\cdot M_{33} =$$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3) + 3\cdot 8 + 4\cdot(-1) = 26\,.$$

Вычислим определитель по элементам 2 столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \overset{-1 \qquad 1 \qquad -3}{a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}} = (-1)\cdot(-M_{12}) + 1\cdot M_{22} + (-3)\cdot(-M_{32}) =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-10) + 1\cdot 12 + 3\cdot 8 = 26\,.$$

Из полученных результатов видно, что свойство 9° является ***универсальным методом*** вычисления любых определителей по элементам любой строки или столбца.

○ Используя свойство 8°, можно обнулить все элементы какой-либо строки (столбца) за исключением одного (***метод обнуления***), а затем раскрыть определитель по элементам этой строки, воспользовавшись свойством 9°. ○

Пример 13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

Обнулим элементы в третьей строке, для чего выполним следующие действия:

$$\boxed{\textit{строка обнуления}} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow 2 =$$

(по свойству 4^o из 3-ей строки вынесем множитель 2)

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

(используя свойство 8^o, умножим все элементы второго столбца на $1{,}5$ и прибавим к соответствующим элементам третьего столбца, получим)

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0{,}5 \\ -3 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\times 1{,}5 \quad + \qquad\qquad \Downarrow 0{,}5$$

(по свойству 4^o из третьего столбца вынесем множитель $0{,}5$, тогда множитель перед определителем станет равным 1)

$$= 2 \cdot 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

(раскроем определитель по элементам третьей строки; выше из определителя третьего порядка вычеркнута третья строка с нулями и второй столбец, т.е. показан необходимый для дальнейших вычислений минор M_{32})

$$= \overset{0}{a_{31}} A_{31} + \overset{-2}{a_{32}} A_{32} + \overset{0}{a_{33}} A_{33} = 0 \cdot M_{31} + (-2) \cdot (-M_{32}) + 0 \cdot M_{33} =$$

$$= 2 \cdot M_{32} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 5 - (-3) \cdot 1) = \underline{26}.$$

Таким образом, метод обнуления позволяет значительно ускорить процесс вычисления любого определителя.

Пример 14. Вычислить определитель четвёртого порядка (аналогично выполнить такие же действия с определителем третьего порядка), преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Во второй строке исходного определителя присутствуют 1 и 0, поэтому обнуление элементов будем производить в этой строке (*при обнулении элементов в строке действия производят со столбцами* и наоборот):

$$\begin{array}{c} \\ \Rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{cccc} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{cccc} \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

($\Rightarrow$ – строка обнуления; $\uparrow$ – столбцы, с которыми производят действия)

$$=\Rightarrow\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{+ \quad \times \\ \uparrow\ (-2)}} = \Rightarrow\begin{vmatrix} -5 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{\times \quad + \\ (-3)\ \uparrow}} = \Rightarrow\begin{vmatrix} -5 & 4 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

[по свойству 9° раскроем определитель по элементам 2-ой строки ($\longleftrightarrow$ – цифры, с которыми производятся действия)]

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = 0\cdot(-M_{21}) + 1\cdot M_{22} + 0\cdot(-M_{23}) + 0\cdot M_{24} = M_{22} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \Rightarrow \end{array}\begin{vmatrix} -5 & -7 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{\uparrow \ \ \uparrow}} = \begin{vmatrix} -5 & -7 & 6 \\ 3 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{+ \quad +}} = \begin{vmatrix} -5 & -12 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

(по свойству 9° раскроем определитель по элементам 3-ей строки)

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = -1\cdot M_{31} + 0\cdot(-M_{32}) + 0\cdot M_{33} = -M_{31} = -\begin{vmatrix} -12 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(12-8) = -4\,.$$

Пример 15. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + \begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Вычислим определители второго и третьего порядков, согласно вышеописанным правилам:

а) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = x\cdot 1 - 3\cdot 2 = x - 6$; б) $\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = x\cdot 4 - 3\cdot x = 4x - 3x = x$;

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{matrix} = x\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 3\cdot 2 - ((-1)\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot x + 4\cdot 3\cdot 1) =$$
$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$
$$= 0 - 1 + 12 - (0 + 2x + 12) = 11 - 2x - 12 = -2x - 1\,.$$

Найденные величины подставим в исходное уравнение

$x-6-2\cdot(-2x-1)=4+x$; $x-6+4x+1=4+x$; $5x-5=4+x$; $5x-x=4+5$; $4x=9$; $x=\dfrac{9}{4}$.

10°. *Сумма произведений элементов какой-либо строки* (столбца) *на алгебраические дополнения соответствующих элементов иной строки* (столбца) *равна нулю*.

2 “Матрицы и действия над ними”

2.1. Матрицы

Матрицей размером $\boxed{m\times n}$ называется *прямоугольная таблица чисел* (выражений), имеющая ***m*** строк и ***n*** столбцов:

$$\boxed{A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \text{ или } \boxed{A_{m\times n}=(a_{ij})},\ i=1\dots m,\ j=1\dots n.$$

Числа a_{ij} называются ***матричными элементами***, i – ***номер строки***, j – ***номер столбца***.

В некоторых учебниках матрицы обозначают по-другому:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Если матрица содержит ***1*** строку и ***n*** столбцов, то она называется ***матрицей-строкой*** $\boxed{A_{1\times n}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}}$.

Если матрица содержит ***m*** строк и ***1*** столбец, то она называется ***матрицей-столбцом*** $\boxed{A_{m\times 1}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1}\end{pmatrix}}$.

Пример 1. Следующие таблицы являются матрицами

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0 \\ e \\ \pi-1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1 & 5 \\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

которые имеют размеры 1×3; 3×1; 2×3; 2×2, соответственно.

Матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ *одинакового размера* называются ***равными между собой***, если равны между собой соответствующие элементы, т.е. при выполнении равенств

$$\boxed{a_{ij} = b_{ij}},\ i = 1\ldots m,\ j = 1\ldots n \ \Leftrightarrow \ A = B.$$

Матрица, у которой *совпадает количество строк* ***m*** *с количеством столбцов* ***n*** ($\boxed{m=n}$), называется ***квадратной матрицей порядка n***.

Всякой квадратной матрице $A_{n\times n} = (a_{ij})$ ставится в соответствие определитель, составленный из тех же матричных элементов a_{ij}, который в теории матриц называется ***детерминантом матрицы***

$$\boxed{\det A = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Транспонированной матрицей $A^T_{n\times n} = (a_{ji})$ к исходной ***квадратной*** матрице $A_{n\times n} = (a_{ij})$ называется такая матрица, *строки* которой *записывают на место соответствующих столбцов*, а *столбцы – на место соответствующих строк*.

Согласно свойству 1° для определителей (см. **1.2**), детерминант исходной квадратной матрицы $\det A$ равен детерминанту транспонированной квадратной матрицы $\det A^T$, т.е. $\boxed{\det A = \det A^T}$.

Если квадратная матрица $A_{n\times n} = (a_{ij})$ совпадает с транспонированной матрицей $A^T_{n\times n} = (a_{ji})$, т.е. $A = A^T$, то она называется ***симметричной***. Элементы такой матрицы, расположенные *симметрично относительно главной диагонали*, равны между собой $a_{ij} = a_{ji}$. Если квадратная матрица $A_{n\times n} = (a_{ij})$ противоположна транспонированной матрице $A^T_{n\times n} = (a_{ji})$, т.е. $A = -A^T$, то она называется ***антисимметричной*** (***кососимметричной***). Элементы такой матрицы, которые расположены *симметрично относительно главной диагонали*, *противоположны* $a_{ij} = -a_{ji}$, на главной диагонали матрицы все элементы равны нулю, т.е. $a_{ii} = 0$.

Пример 2. Матрицы

$$\boxed{A^s = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}} \text{ – } \textbf{\textit{симметричная}};$$

$$\boxed{B^a = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \text{ – } \textbf{\textit{антисимметричная}};$$

В дальнейшем будем рассматривать, в основном, квадратные матрицы *третьего* порядка.

Матрица, у которой все элементы, стоящие *под* (*над*) *главной диагональю равны нулю*, называют ***треугольной матрицей***, например:

главная диагональ

$$\boxed{A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}}.$$

Матрица, все элементы которой равны ***нулю***, *за исключением элементов*, *стоящих на главной диагонали*, называется ***диагональной***

$$\boxed{A_{3\times 3}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}}.$$

Единичной матрицей называется *диагональная матрица*, у которой *на главной диагонали все элементы равны* 1, например:

$$\boxed{E_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} \text{ или } \boxed{E_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

Матрица, *все элементы* которой *равны нулю*, называется ***нулевой матрицей***, например:

$$\boxed{O_{3\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}.$$

Единичная и нулевая матрицы играют такую же роль в теории матриц, как числа 1 и 0 в теории чисел.

2.2. *Действия над матрицами*

1). <u>*Суммой*</u> (или <u>*разностью*</u>) двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ *одинакового размера* называется матрица *того же размера* $C_{m\times n}=(c_{ij})$, элементы которой вычисляются по формуле: $\boxed{c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}}$.

Пример 3. Найти сумму (разность) матриц

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 9\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Из приведенных матриц складывать (вычитать) можно только матрицы A и C, которые имеют одинаковый размер. Найдём сумму

$$A+C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix}$$

и разность этих матриц:

$$A-C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 10\\ -3 & -8 & 3\end{pmatrix}.$$

Любую квадратную матрицу A можно представить в виде суммы симметричной A^s и антисимметричной A^a матриц, т.е. $A = A^s + A^a$, при этом $A^s = \dfrac{A + A^T}{2}$, а $A^a = \dfrac{A - A^T}{2}$.

Пример 4. Разложить матрицу $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 7 & -1 & -1\\ 6 & 7 & 9\end{pmatrix}$ на сумму симметричной A^s и антисимметричной A^a матриц.

Запишем транспонированную матрицу $A^T = \begin{pmatrix}1 & 7 & 6\\ 3 & -1 & 7\\ -2 & -1 & 9\end{pmatrix}$. Вычислим элементы симметричной и антисимметричной матриц:

$$A^s = \frac{A + A^T}{2} = \begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 9\end{pmatrix};\ A^a = \frac{A - A^T}{2} = \begin{pmatrix}0 & -2 & -4\\ 2 & 0 & -4\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $A^s + A^a = A$ (выполнить *самостоятельно*).

2). При умножении действительного числа k на матрицу $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***все*** *элементы матрицы умножаются на это число*.

Пример 5. Умножить (–2) на матрицу $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}$.

Результат умножения имеет вид $-2\cdot A = -2\begin{pmatrix}-1 & 3 & 8\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6 & -16\\ -4 & 8 & -12\end{pmatrix}$.

3). *<u>Произведением</u> матриц* $A_{m\times l} = (a_{ij})$ и $B_{l\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, *элементы которой вычисляются по формуле*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{il}\cdot b_{lj}}.$$

Перемножать можно лишь те матрицы, для ***которых количество столбцов первой перемножаемой матрицы совпадает с количест-***

вом строк второй перемножаемой матрицы. Матрица, получаемая в результате перемножения, имеет количество строк равное количеству строк первой матрицы и количество столбцов равное количеству столбцов второй матрицы.

Пример 6. Найти (*возможные*) произведения матриц

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}; \quad B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad C_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет структуру 2×3, матрица $B-\ 2\times2$, матрица $C\ -\ 3\times2$. Согласно определению, можно найти произведения $B\cdot A$, $A\cdot C$, $C\cdot A$ и $C\cdot B$. Не существует произведений $A\cdot B$ и $B\cdot C$. Вычислим произведение $B\cdot A$. Прежде всего, найдём размер результирующей матрицы: имеем размеры $2\times\underset{\leftrightarrow}{\cancel{2}}$ и $\underset{\leftrightarrow}{\cancel{2}}\times3$, убирая подчёркнутые цифры, получим размер результирующей матрицы 2×3. Вычислим её элементы. Для того чтобы найти элементы возможных произведений, надо просуммировать произведения элементов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы:

$$d_{11} = 2\cdot(-1)+9\cdot2 = 16; \qquad d_{12} = 2\cdot3+9\cdot(-4) = -30; \qquad d_{13} = 2\cdot8+9\cdot6 = 70;$$

$$d_{21} = 3\cdot(-1)+(-2)\cdot2 = -7; \qquad d_{22} = 3\cdot3+(-2)\cdot(-4) = 17; \qquad d_{23} = 3\cdot8+(-2)\cdot6 = 12.$$

Отсюда следует, что $D = B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -30 & 70 \\ -7 & 17 & 12 \end{pmatrix}$.

Остальные возможные произведения найти *самостоятельно*.

Из приведенного примера видно, что ***в общем случае произведение матриц некоммутативно*** (***неперестановочно***), т.е.

$$\boxed{A\cdot B \ne B\cdot A}.$$

Для квадратных матриц определяют также:

1) ***произведение Ли*** (***коммутатор***) $\boxed{[A,B] = A\cdot B - B\cdot A}$

2) ***произведение Иордана*** (***антикоммутатор***) $\boxed{\{A,B\} = A\cdot B + B\cdot A}$.

Операции сложения матриц и умножения числа на матрицу обладают следующими ***свойствами***:

1^o. $A+B = B+A$;	4^o. $A-A = O$;	7^o. $\alpha\cdot(A+B) = \alpha A+\alpha B$;
2^o. $(A+B)+C = A+(B+C)$;	5^o. $1\cdot A = A$;	8^o. $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha A+\beta A$;
3^o. $A+O = A$;	6^o. $E\cdot A = A\cdot E = A$;	9^o. $\alpha\cdot(\beta\cdot A) = (\alpha\cdot\beta)\cdot A$;

Под ***элементарными преобразованиями*** *матриц* понимают:

а) *перемена местами* строк (столбцов);

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{1n} & a_{12} & \ldots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ . & . & . & . \\ a_{mn} & a_{m2} & \ldots & a_{m1} \end{pmatrix};$$

б) *умножение всех элементов строки* (столбца) *на отличное от нуля действительное число*;

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

в) *сложение элементов строки* (столбца), умноженных на отличное от нуля действительное число, *с соответствующими элементами другой строки* (столбца).

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} + \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & \ldots & a_{1n} + ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В результате *выполнения элементарных преобразований* над матрицей $A_{m\times n} = (a_{ij})$ получают *эквивалентную* ей матрицу $B_{m\times n} = (b_{ij})$, что записывают так: $A \sim B$.

Обратной матрицей к ***квадратной*** матрице $A_{n\times n} = (a_{ij})$ называется матрица $\boxed{A^{-1}_{n\times n}}$ того же размера, произведение которой с матрицей A коммутативно и равно единичной матрице, т.е.

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}.$$

Рассмотрим ***схему построения обратной матрицы*** A^{-1}:
– *находят детерминант матрицы* A ($\det A = \Delta_A \neq 0$ – определитель матрицы A, если $\Delta_A = 0$, то обратной матрицы <u>*не существует*</u>);
– *вычисляют алгебраические дополнения* A_{ij} (см. п.**1.1**, ***1***) *всех элементов определителя* Δ_A;
– *записывают выражение для обратной матрицы*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}}.$$

Обращаем ***внимание*** на то, что *матрица алгебраических дополнений записана в* ***транспонированном виде***.

Пример 7. Найти обратную матрицу к матрице $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим детерминант данной матрицы $\det C = \Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, раскроем этот определитель по элементам первой строки:

$$\det C = \Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 7 = 13.$$

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам определителя:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Запишем обратную матрицу $C^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Проверим ***правильность нахождения*** обратной матрицы, для чего воспользуемся её определением. Умножим найденную матрицу на исходную матрицу, вычислим элементы результирующей матрицы

$d_{11}=6\cdot1+1\cdot5+(-1)\cdot(-2)=13$; $d_{12}=6\cdot(-1)+1\cdot4+(-1)\cdot(-2)=0$; $d_{13}=6\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot1=0$;

$d_{21}=-7\cdot1+1\cdot5+(-1)\cdot(-2)=0$; $d_{22}=-7\cdot(-1)+1\cdot4+(-1)\cdot(-2)=13$; $d_{23}=-7\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot1=0$;

$d_{31}=-2\cdot1+4\cdot5+9\cdot(-2)=0$; $d_{32}=-2\cdot(-1)+4\cdot4+9\cdot(-2)=0$; $d_{33}=-2\cdot0+4\cdot1+9\cdot1=13$.

Таким образом, $C^{-1}_{3\times3}\cdot C_{3\times3}=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}13&0&0\\0&13&0\\0&0&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_{3\times3}$, т.е. обратная матрица найдена ***верно***.

Рангом матрицы A ($rang\ A$) называется *наивысший порядок отличного от нуля минора* этой матрицы.

Если $rang\ A=r$, то среди всевозможных миноров этой матрицы есть хотя бы один минор порядка r, который отличен от нуля, а все миноры порядков бо́льших, чем r, равны нулю. При вычислении ранга необходимо начинать вычислять миноры 2 порядка, затем миноры 3 порядка и так далее, пока не будут найдены миноры, обращающиеся в нуль. Если все миноры порядка p равны нулю, то и все миноры, порядок которых больше p, равны нулю.

Пример 8. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1&4&3\\0&5&2&2\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Очевидно, что среди миноров второго порядка есть миноры отличные от нуля, например, $\begin{vmatrix}2&1\\0&5\end{vmatrix}=10\neq0$, среди миноров третьего порядка также есть миноры, которые не равны нулю, например,

$$\begin{vmatrix}1&4&3\\5&2&2\\0&1&4\end{vmatrix}\begin{matrix}1&4\\5&2\\0&1\end{matrix}=8+0+15-(0+2+80)=-69\neq0.$$

Очевидно, что определитель четвёртого порядка равен нулю, так как он будет содержать строку, состоящую из одних нулей (см. свойство 6° для определителей). Следовательно *ранг матрицы A* равен 3.

Отметим, что $rang\ A=r\le\min(\boldsymbol{m};\boldsymbol{n})$ ($\min(\boldsymbol{m};\boldsymbol{n})$ – наименьшее из чисел $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$). Ранг матрицы не изменится при:

а) транспонировании матрицы;

б) вычёркивании из матрицы строки (столбца), все элементы которой равны нулю;

в) элементарных преобразованиях матрицы.

<u>3</u> “*Методы решения систем линейных алгебраических уравнений* (*СЛАУ*)”

3.1. *Матричный метод решения СЛАУ*

Системой линейных алгебраических уравнений (***СЛАУ***) называется выражение $\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}}$, где числа $\boxed{a_{ij}}$ называются ***коэффициентами при неизвестных*** $\boxed{x_j}$, а числа $\boxed{b_i}$ − ***свободными коэффициентами***. Если все свободные коэффициенты равны нулю ($\boxed{b_i = 0}$), то *СЛАУ* называется ***однородной***.

СЛАУ называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение (значения неизвестных x_j, которые обращают все уравнения *СЛАУ* в тождества), при отсутствии решений – она называется ***несовместной***. Если *СЛАУ* имеет единственное решение, то она называется ***определённой***, а при бесконечном множестве решений – ***неопределённой***. Решить *СЛАУ* означает выяснить, совместна она, или несовместна. Если система уравнений совместна, то найти значения неизвестных x_j, при которых уравнения обращаются в тождества.

Для решения *СЛАУ* матричным способом введём в рассмотрение матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных

$$\boxed{A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}},$$

которая называется ***основной матрицей*** (матрицей *коэффициентов*) *СЛАУ*, *матрицу-столбец неизвестных величин* $\boxed{X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}}$ и *матрицу-столбец свободных коэффициентов* $\boxed{B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}}$.

Для решения вопроса о *совместности СЛАУ* введём в рассмотрение *расширенную матрицу* $\overline{A}_{m\times(n+1)} = (a_{ij}|b_i)$

$$\overline{A}_{m\times(n+1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

<u>Теорема Кронекера-Капелли</u> (*критерий совместности СЛАУ*). Для совместности *СЛАУ* необходимо и достаточно, чтобы *ранг расширенной матрицы совпадал с рангом основной матрицы*.

а) Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение (т.е. она ***определённая***).

б) Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений (т.е. она ***неопределённая***).

В случае *неопределённой* системы решения ищут следующим образом:

1) выбираются ***главные*** неизвестные, число которых равно рангу, а остальные неизвестные считаются ***свободными***;

2) главные неизвестные выражаются через свободные и получают *множество решений*, зависящих от свободных неизвестных. Это *множество решений* называется ***общим решением системы***. Придавая свободным неизвестным различные произвольные значения, получим бесчисленное множество решений, каждое из которых называется ***частным решением системы***.

Используя вышеприведенные обозначения, запишем *СЛАУ* в матричном виде $\boxed{A\cdot X = B}$.

Матричный способ решения СЛАУ (*m*=*n*) состоит в следующем:

1) умножим слева матричное уравнение на обратную матрицу A^{-1} к матрице A ($\det A \neq 0$), получим

$$\boxed{A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B};$$

2) в силу того, что произведение $A^{-1}\cdot A = E$ (см. определение *обратной матрицы*) и $E\cdot X = X$ (см. *свойство* 6° для матриц), найдём

$$\boxed{X = A^{-1}\cdot B}.$$

○ Таким образом, ***для нахождения неизвестных величин матричным способом***, ***надо найти обратную к*** A ***матрицу*** A^{-1}, ***после чего надо умножить эту матрицу на матрицу-столбец свободных коэффициентов***. ○

Пример 1. Решить СЛАУ матричным способом $\begin{cases} 2x-3y+2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$.

Введем в рассмотрение следующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу A^{-1} (см. п. 2.2, **2**): вычислим детерминант матрицы A (*самостоятельно*) $\det A=\Delta=-15\neq 0$, следовательно, обратная матрица существует. Найдём алгебраические дополнения всех элементов $\det A$:

Первый столбец матрицы A^{-1}

$$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

Второй столбец матрицы A^{-1}

$$A_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5;$$

Третий столбец матрицы A^{-1}

$$A_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$A_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=5.$$

Запишем обратную матрицу

$$A^{-1}=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

(в правильности нахождения обратной матрицы убедиться *самостоятельно*). Подействуем найденной матрицей на матрицу-столбец свободных коэффициентов B:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix} -15 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что $x=1;\ y=1;\ z=1$.

После нахождения решения *СЛАУ* необходимо обязательно ***провести проверку***, для чего найденные числовые значения неизвестных подставляют в *СЛАУ*.

Выполним проверку

$$\begin{cases} 2\cdot1-3\cdot1+2\cdot1=1 & 1\equiv1 \\ 1+1+1=3 & \Rightarrow 3\equiv3 \\ 1+1-2\cdot1=0 & 0\equiv0 \end{cases}.$$

Отсюда видно, что *СЛАУ* решена ***верно***.

3.2. *Метод Гаусса*

Метод Гаусса (***метод исключения неизвестных***) состоит в том, чтобы за счёт *элементарных преобразований строк* расширенной матрицы *СЛАУ* привести её к треугольному виду. В частности, расширенная матрица для *СЛАУ* ***Примера 1*** имеет вид:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

В ***методе Гаусса*** желательно, чтобы ***первая строка расширенной матрицы начиналась с единицы***.

Обменяем в расширенной матрице первую и вторую строки местами, получим

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Приведём матрицу к *треугольному виду*, выполнив следующие преобразования: умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2) \\ + \\ \end{array} \Longrightarrow \overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Разделим все элементы второй строки на (-5), получим эквивалентную матрицу

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\div(-5) \Longrightarrow \overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Умножим элементы первой строки на (-1) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \\ + \end{array} \Longrightarrow \overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right).$$

Разделим все элементы третьей строки на (-3), получим

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \div(-3) \end{array} \Longrightarrow \overline{A}\sim\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & b_i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Таким образом, *эквивалентная СЛАУ* имеет вид (напомним, что первый столбец это коэффициенты при неизвестной x, второй – при неизвестной y, третий – при неизвестной z, а за вертикальной чертой находится столбец свободных коэффициентов):

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}.$$

Из первого уравнения находим, что $x=1$.

○ Из вышеизложенного материала следует, что вне зависимости от способа решения *СЛАУ* всегда должен получаться один и тот же ответ. ○

○ После нахождения решения *СЛАУ* надо ***обязательно выполнить проверку***, то есть подставить полученные значения неизвестных в заданную *СЛАУ* и убедиться в тождественности левой части ***всех*** равенств системы соответствующим правым частям. Отметим, что ***задание СЛАУ всегда верно***, т.е. если *проверка показывает нарушение тождественного равенства левой и правой частей уравнений системы*, то *надо* ***искать ошибку*** *в проведенных вычислениях*. ○

3.3. *Метод Крамера*

Детерминант основной матрицы совместной СЛАУ (***n*** уравнений и ***n*** неизвестных величин) называется ***главным определителем СЛАУ***

$$\boxed{\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Крамер предложил следующий метод решения СЛАУ: умножим *главный определитель* на x_1, для этого умножим *все элементы первого столбца* на эту неизвестную:

$$x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Второй столбец умножим на x_2, третий столбец – на x_3, … , n-ый столбец – на x_n и все эти произведения прибавим к первому столбцу, при этом произведение $x_1 \cdot \Delta$ не изменится:

$$x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Согласно записи *СЛАУ*, первый столбец получившегося определителя представляет собой столбец свободных коэффициентов, т.е.

$$\begin{array}{c} \boxed{\textit{первый столбец}} \\ x_1 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 \end{array}$$

Определитель Δ_1 называется ***первым вспомогательным определителем СЛАУ***.

Поступая аналогично тому, как описано выше, найдём ***<u>все</u>*** *вспомогательные определители СЛАУ*:

$$\begin{array}{c} \boxed{\textit{второй столбец}} \\ x_2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_2 \end{array}; \quad \dots \quad \begin{array}{c} \boxed{\textit{n – ый столбец}} \\ x_n \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix} = \Delta_n \end{array}$$

Для того чтобы найти вспомогательный определитель i, надо ***в главном определителе*** *СЛАУ* ***сделать замену столбца*** i ***на столбец свободных коэффициентов***.

Полученные равенства называются ***<u>формулами Крамера</u>***.

Используя ***<u>формулы Крамера</u>***, находят неизвестные величины

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}},\ i = 1,\ 2,\ 3\,.$$

Проанализируем полученные формулы:

а) если главный определитель системы отличен от нуля ($\boxed{\Delta \neq 0}$), то система совместная и определённая, т.е. имеет ***единственное*** решение;
б) если главный определитель системы равен нулю ($\boxed{\Delta = 0}$), а хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля ($\boxed{\Delta_1 \neq 0}$ или $\boxed{\Delta_2 \neq 0}$, или, …, или $\boxed{\Delta_n \neq 0}$), то система несовместная и ***не имеет решений*** (***деление на нуль запрещено***);
в) если все определители системы равны нулю ($\boxed{\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0}$), то система уравнений неопределённая, т.е. имеет ***бесчисленное множество решений***.

Пример 2. Решить СЛАУ ***<u>методом Крамера</u>*** $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ y - 2z + x = 0 \end{cases}$.

Прежде всего, обращаем внимание на то, что в последнем уравнении переменные записаны в неправильном порядке, в этом случае говорят, что *СЛАУ* записана в ***ненормализованном виде***. Нормализуем *СЛАУ*, для чего запишем неизвестные в последнем уравнении системы в правильном порядке, чтобы одноименные неизвестные были записаны друг под другом $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + \ y + \ z = 3 \\ x + \ y - 2z = 0 \end{cases}$. Вычислим главный определитель *СЛАУ* (*раскрываем по элементам первой строки*)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 9 = -15\,.$$

Так как главный определитель системы отличен от нуля, то СЛАУ имеет единственное решение. Найдём три вспомогательных определителя, *раскрывая их по элементам первой строки*:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 18 + 6 = -15\,;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 3 - 6 = -15\,;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\left(-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right) + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6-9=-15\,.$$

Воспользуемся ***формулами Крамера***

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1;\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1;\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-15}{-15}=1\,.$$

Проверку выполнить *самостоятельно*.

Пример 3. Решить *СЛАУ* $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+4y=13 \end{cases}$ матричным методом.

Введём в рассмотрение матрицы

$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};\ X_{2\times 1}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\ B_{2\times 1}=\begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Тогда *СЛАУ* запишется в виде $A\cdot X=B$. Умножим это равенство слева на матрицу A^{-1}, обратную к матрице A, получим

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B.$$

По определению обратной матрицы $A^{-1}\cdot A=E$ и $E\cdot X=X$, поэтому $X=$ $=A^{-1}\cdot B$. Вычислим определитель матрицы A: $\det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=9\neq 0$, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Найдём матричные элементы обратной матрицы A^{-1}:

$$A_{11}=M_{11}=a_{22}=4;\qquad A_{21}=-M_{21}=-a_{12}=1;$$
$$A_{12}=-M_{12}=-a_{21}=-1;\qquad A_{22}=M_{22}=a_{11}=2\,.$$

Таким образом, обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что обратная матрица найдена верно, для чего воспользуемся её определением:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 4\cdot 2+1\cdot 1 & 4\cdot(-1)+1\cdot 4 \\ (-1)\cdot 2+2\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+2\cdot 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Подействуем матрицей A^{-1} на матрицу свободных коэффициентов B:

$$X_{2\times 1}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 4\cdot(-1)+1\cdot 13 \\ (-1)\cdot(-1)+2\cdot 13 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x=1$ и $y=3$. Выполним проверку правильности найденного решения, для этого подставим найденные значения неизвестных в заданную *СЛАУ*: $\begin{cases} 2\cdot 1-3=-1 & -1\equiv -1 \\ 1+4\cdot 3=13 & 13\equiv 13 \end{cases}$.

Таким образом, *СЛАУ* решена верно.

I
Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 1

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -2 & -9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + \begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} x-y+3z=1 \\ 3x+2y+4z=5 \\ -2x+y+z=4 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 4x-y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x-3y-3z=-4 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 2

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x > 3$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 2x - y - z = -4 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \\ x + 5y - z = 3 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 8x - y - z = 6 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y + 4z = 11 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 3

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} x & x \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 2x = 10$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 5x+3y-z=-3 \\ -x+4y+3z=8 \\ 3x+2y+5z=4 \end{cases}$.

8. Решить *методами Крамера и Гаусса* СЛАУ $\begin{cases} 2x-y-2z=-1 \\ x+y+7z=9 \\ 4x+y+2z=7 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 4

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -9 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ x & x \end{vmatrix} + 6 < 5x$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x + 4y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 5

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -2 & -9 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 2+x & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} > 1$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 3x - y + z = -3 \\ x + y - z = -1 \\ 5x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 4x + 2y - 7z = -1 \\ 3x + y + z = 5 \\ 5x + 2y - 6z = 1 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 6

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 9 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 1 & x-3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 3x = 2$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 9 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} x - y - z = -3 \\ 6x - 2y + 5z = -3 \\ 5x - y + 7z = 1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} x - 2y - 2z = -3 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 5x - 4y - z = 0 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 7

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 9 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - x^2 > 2$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} x-5y-2z=-8 \\ 3x+4y+z=2 \\ -2x+y+4z=7 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ 2x-2y+z=1 \\ 4x+3y+5z=12 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 8

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 = 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 4x - 3y + 8z = 1 \\ 7x + y + z = -5 \\ x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 2y - z = 7 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 9

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & x \end{vmatrix} - 4x \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 5 > 0$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 4x + y + z = -2 \\ 5x - y + z = -5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 9x - 2y - 4z = 3 \\ x + y - 5z = -3 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 10

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 4 & 1 \end{vmatrix} + x = 0$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -7 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 3 & -8 & 7 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 7 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ x+y+z=1 \\ 2x-3y+4z=-1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Крамера и Гаусса* СЛАУ $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-y-4z=0 \\ 3x+y+5z=9 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 11

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 4x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \le \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 8 \\ -2 & 9 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 5x+7y-z=1 \\ -x+4y+2z=7 \\ -3x+2y+5z=10 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x-y-3z=-2 \\ x+y+3z=5 \\ 4x+y+2z=7 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 12

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ x & x \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 7x = 0$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} x-y+4z=2 \\ x+y+z=1 \\ 2x-3y+8z=3 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-y+2z=6 \\ 3x+y+z=5 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 13

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 8 & 1 & 7 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 5 \\ x & 2 \end{vmatrix} \le 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -2 & -2 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 4x - 3y + 12z = 5 \\ x - 2y + 4z = 1 \\ x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} x + 4y - 2z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 4 \\ 3x - 3y + 5z = 5 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 14

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -6 & 2 & 7 \\ -1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 4x = 3\cdot\begin{vmatrix} x & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -4 & 9 & -1 \\ -1 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -7 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 2x+5y-3z=0 \\ x-y+3z=1 \\ 3x+y+z=-1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 4x-5z+3y=2 \\ x-y+z=1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 15

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 7 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант **16**

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 8 & -5 & -8 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 9 & 0 & -7 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 4x + 3y - 2z = -3 \\ 5x + y - z = -5 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 17

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -8 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} - 2x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x + 4y - z = 2 \\ x - 5y + 6z = 0 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 4x - 3y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант **18**

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -7 & -5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -3 & 7 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = -2 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = -1 \\ x + 4y - 3z = 2 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 19

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 8 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \geq x + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 7x - y + z = -7 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 4y - 3z = -1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 3x + 4y + z = 8 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + z = 8 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант <u>20</u>

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & -9 & 4 \\ -4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 2x & -4 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 + \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 8 \\ -5 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+4y-3z=-1 \\ x+5y-6z=-2 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x+2y+4z=9 \\ -2x-3y+5z=0 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 21

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ x & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 3x \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 < \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 9 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -5 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 5x + 4y + 5z = 4 \\ 3x - y + 2z = -2 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \\ 4x + 4y - z = 7 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 22

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} + x\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 8 = \begin{vmatrix} x & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -2 & 7 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 9 & -8 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A\cdot B$ и $B^T\cdot A$, если матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -5 & -3 & 7 \\ -3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 3x+3y+2z=2 \\ x-y-2z=-4 \\ 2x-3y-2z=-7 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ 3x+2y-4z=1 \\ x+5y+z=7 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант <u>23</u>

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *неравенство* $\begin{vmatrix} 3 & x & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -6 & 1 & -7 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 4x - 3y + 4z = -3 \\ 2x + y - z = -2 \\ x - 5y + 5z = -1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x - 3y - 2z = -3 \\ x + y + z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 24

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -6 & -3 & 5 \\ -5 & -9 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -9 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 3 \\ x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + y - 4z = 2 \\ 4x + y - 3z = 2 \end{cases}$.

Задания для самостоятельного решения

Элементы линейной алгебры

Вариант 25

1. Вычислить *определители* $\begin{vmatrix} -9 & -8 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Решить *уравнение* $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить *определитель четвёртого порядка* $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, преобразовав его так, чтобы три элемента некоторого ряда равнялись нулю, и вычислить полученный определитель по элементам этого ряда.

4. Найти *алгебраические дополнения* всех элементов определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & -6 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить *произведения матриц* $A \cdot B$ и $B^T \cdot A$, если матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу A^{-1}, *обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

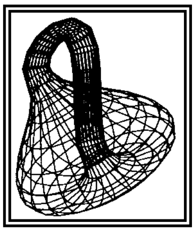
7. Решить *матричным методом* СЛАУ $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 3 \\ x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases}$.

8. Решить *методами Гаусса и Крамера* СЛАУ $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + y - 4z = 2 \\ 4x + y - 3z = 2 \end{cases}$.

Список использованных источников

1. Аршон С. Обобщенное правило Саррюса. – Математический сборник. – 1935. – Т. 42, № 1. – С. 121-128.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1961. – 436 с.
3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – Москва: Наука. – 1973. – 640 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т.1. – Москва: Наука. – 1974. – 479 с.
5. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Изд-во ХГУ. – 1967. – 946 с.
6. Краткий курс высшей математики / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – Москва: Высшая школа. – 1972. – 640 с.
7. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – Москва: Наука. – 1976. – 400 с.
8. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа. –1985. – 232 с.
9. Высшая математика / П.Ф. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Киев: Вища школа. – 1987. – 552 с.
10. Солодовников А.С., Торопова Г.А. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.– Москва: Высшая школа. – 1987. – 255 с.
11. Зорич В.А. Математический анализ. – Ч.1. – Москва: ФАЗИС. – 1997. – 554 с.
12. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Москва: МГУ. – 1998. – 320 с.
13. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 592 с.
14. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – Москва: Факториал Пресс. – 2001. – 544 с.
15. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2002. – 336 с.
16. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. – Ч.2. Основы математического анализа и элементы дифференциальных уравнений. – Минск: Амалфея. – 2003. – 352 с.
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 560 с.
18. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Москва: Дрофа. –

2004. – 288 с.
19. Мозалева Е.М. Комплексные числа. Линейная и векторная алгебра: Методические указания и контрольные задания. – Оренбург: ГОУ ОГУ. – 2004. – 60 с.
20. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 304 с.
21. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 280 с.
22. Босс В. Лекции по математике: линейная алгебра. – Т.3. – Москва: КомКнига. – 2005. – 224 с.
23. Зимина О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика. (Решебник). – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 368 с.
24. Самохин А.В., Жулёва Л.Д., Шевелёва В.Н., Дементьев Ю.И. Сборник задач по высшей математике. – Москва: МГТУГА. – 2003. – 156 с.
25. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Ч. 1. – Москва: Айрис-пресс. – 2005. – 288 с.
26. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа. – 2005. – 591 с.
27. Дураков Б.К. Краткий курс высшей алгебры. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2006. – 232 с.
28. Белоусов И.В. Матрицы и определители. – Кишинев: Институт прикладной физики. – 2006. – 101 с.
29. Терехов С.В. Математический практикум для абитуриентов. – Донецк: Норд-Пресс. – 2006. – 240 с.
30. Зубков В.Г., Ляховский В.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б. Курс высшей математики. Т.1. – Москва: МИИР.– 2007. – 440 с.
31. Лизунова Н.А., Шкроба С.П. Матрицы и системы линейных уравнений. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2007. – 352 с.
32. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс.– Москва: Айрис-пресс.– 2008. – 576 с.
33. Антонов В.И., Лагунова М.В., Лобкова Н.И. и др. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. / Опорный конспект: учебное пособие. – Москва: Проспект. – 2011. – 144 с.
34. http://w7.e-fusion.ru/help/detail.php?ID=9887.



I. *Элементы* ***линейной*** *и* ***векторной алгебр****.* ***Аналитическая геометрия*** *на плоскости и в пространстве*

Тема: *Элементы векторной алгебры*

<u>***4***</u> “***Векторы. Проекции***”

4.1. ***Векторы. Основные определения***

В естественнонаучных и технических науках встречаются как величины, которые характеризуются только их численным значением (<u>***скаляры***</u>: температура, давление, объём, площадь, длина и т.д.), так и величины, для определения которых надо знать не только их численное значение, но и направление действия (<u>***векторы***</u>: поток, скорость, импульс, сила, напряжённость поля и т.д.).

Вектором называется *направленный отрезок* $\boldsymbol{AB}$ (упорядоченная пара точек):

$$A \xrightarrow{\vec{a}\ (\textit{или}\ \boldsymbol{a})} B,$$

где точка A – ***начало***, а точка B – ***конец*** вектора $\boldsymbol{AB}$.

○ Согласно определению, векторы определяются ***длиной*** (расстояние между упорядоченными точками A и B) и ***направлением*** (от A к B). Вектор $\boldsymbol{AB}$ обычно обозначают одной прописной буквой латинского алфавита с чёрточкой наверху: $\vec{a} = \boldsymbol{AB}$ или $\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}}$. ○

Нулевым вектором $\vec{0}$ ($\boldsymbol{0}$) называется вектор, у которого *начальная и конечная точки совпадают*.

○ Направление для *нулевого вектора* не определено, т.е. *нулевой вектор имеет любое наперёд заданное направление*. ○

Модулем вектора $\boldsymbol{a}$ называется его ***длина*** (*расстояние между началом и концом вектора*): $\boxed{|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{AB}|}$.

○ Модуль *нулевого вектора* равен нулю, т.е. $|\boldsymbol{0}| = 0$. ○

Единичным вектором $\boldsymbol{e}$ называется вектор, длина которого равна единице, т.е. $\boxed{|\boldsymbol{e}| = 1}$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ***коллинеарными*** (рис. 1), если *они лежат на одной прямой* или *на параллельных прямых*.

Обозначение: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

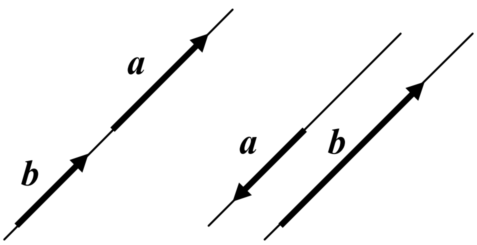


Рис. 1. *Коллинеарные векторы.*

Среди *коллинеарных* векторов выделяют ***сонаправленные*** ($\uparrow\uparrow$) и ***противоположно направленные*** ($\uparrow\downarrow$). На рис. 1а: $\boxed{\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}}$, рис. 1б: $\boxed{\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}}$.

Два *коллинеарных* вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ***равными***, если они *сонаправленные* и *имеют одинаковую длину*, т.е. $\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}}$.

Из определения следует, что вектор можно переносить параллельно ему самому в любую точку пространства, в котором он задан.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ***компланарными*** (рис. 2), если они лежат *в одной плоскости* или *на параллельных плоскостях*.

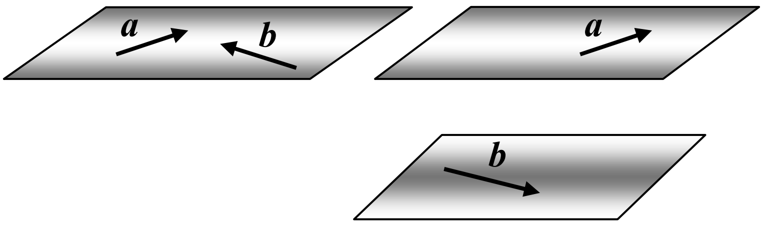


Рис. 2. *Компланарные векторы.*

4.2. *Линейные операции над векторами*

<u>1.</u> *Сумма* векторов. Для нахождения суммы векторов применяют два правила:

а) <u>*правило треугольника*</u>. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарные и пусть начало вектора $\boldsymbol{b}$ совмещено с концом вектора $\boldsymbol{a}$, тогда их суммой будет вектор $\boxed{\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$, начало которого совпадает с началом вектора $\boldsymbol{a}$, а его конец – с концом вектора $\boldsymbol{b}$ (рис. 3):

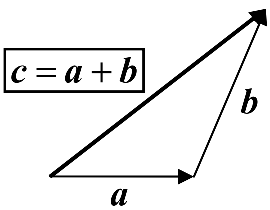


Рис. 3. *Сложение векторов по правилу треугольника.*

б) <u>*правило параллелограмма*</u>. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарные и пусть начальные точки векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ совпадают. Построим на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллелограмм (рис. 4), тогда их суммой будет вектор $\boxed{\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$, начало которого совпадает с общим началом векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а его конец лежит в противоположной вершине параллелограмма:

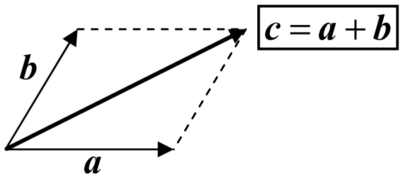


Рис. 4. *Сложение векторов по правилу параллелограмма.*

Сумма векторов обладает следующими ***свойствами***:

1°. Коммутативность $\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}}$.

2°. Ассоциативность $\boxed{\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}}$. 3°. $\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}}$.

Вектор $(-\boldsymbol{a})$ называется ***противоположным*** к вектору $\boldsymbol{a}$, если их *сумма равна нулевому вектору*: $\boxed{\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}}$.

○ Очевидно, что $\boxed{-\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}}$ $\overset{\boldsymbol{a}}{\underset{-\boldsymbol{a}}{\rightleftarrows}}$. ○

<u>**2.**</u> *Разность* векторов. Разностью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boxed{\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})}$, равный сумме вектора $\boldsymbol{a}$ с вектором, *противоположным* вектору $\boldsymbol{b}$ (или сумма векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ должна быть равна вектору $\boldsymbol{a}$, рис. 5, см. <u>*правило треугольника*</u> для суммы векторов):

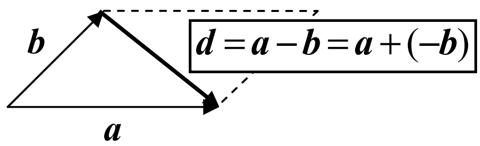


Рис. 5. *Разность векторов.*

○ *Числа* в векторной алгебре называют ***скалярами***. Отметим здесь, что ***векторы и скаляры нельзя ни складывать***, ***ни вычитать***, так как это объекты разной природы. ○

<u>**3.**</u> *Умножение вектора на действительное число* λ. При умножении действительного числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ получают ему коллинеарный вектор $\boxed{\boldsymbol{b}=\lambda\cdot\boldsymbol{a}}$, длина которого равна $\boxed{|\boldsymbol{b}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|}$, ***сонаправленный*** с вектором $\boldsymbol{a}$, если $\boxed{\lambda>0}$ ($\boxed{\boldsymbol{b}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}}$), или ***антинаправленный*** к вектору $\boldsymbol{a}$, если $\boxed{\lambda<0}$ ($\boxed{\boldsymbol{b}\uparrow\downarrow\boldsymbol{a}}$).

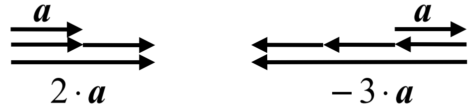
○ Если действительное число $\boxed{\lambda=0}$, то результатом умножения числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ будет нулевой вектор, т.е. $\boxed{0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}}$. При $\boxed{\lambda=1}$ получают заданный вектор $\boxed{1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}}$, а при $\boxed{\lambda=-1}$ – ему противоположный вектор $\boxed{-1\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}}$. ○

○ Если вектор $\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}}$, то $\boxed{|\boldsymbol{b}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{e}|=|\lambda|\cdot 1=|\lambda|}$. ○

○ Если единичный вектор $\boxed{\boldsymbol{e}_{\vec{a}}\uparrow\uparrow\boldsymbol{a}}$, то согласно определению модуля, $\boxed{|\lambda|=\lambda>0}$ и $\boxed{\lambda=|\boldsymbol{a}|}$. Следовательно, $\boxed{\boldsymbol{a}=\lambda\cdot\boldsymbol{e}_{\vec{a}}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{e}_{\vec{a}}}$. Откуда следует выражение для *единичного вектора того же направления*, *что и вектор* $\boldsymbol{a}$: $\boxed{\boldsymbol{e}_{\vec{a}}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}}$ (при условии, что $\boxed{|\boldsymbol{a}|\neq 0}$). ○

Пример 1. Найти произведение чисел $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=-3$ на вектор $\xrightarrow{\boldsymbol{a}}$.

Используя вышеприведенное правило, получим



Произведение числа на вектор обладает следующими ***свойствами***:

1°. Коммутативность $\lambda\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\lambda$.

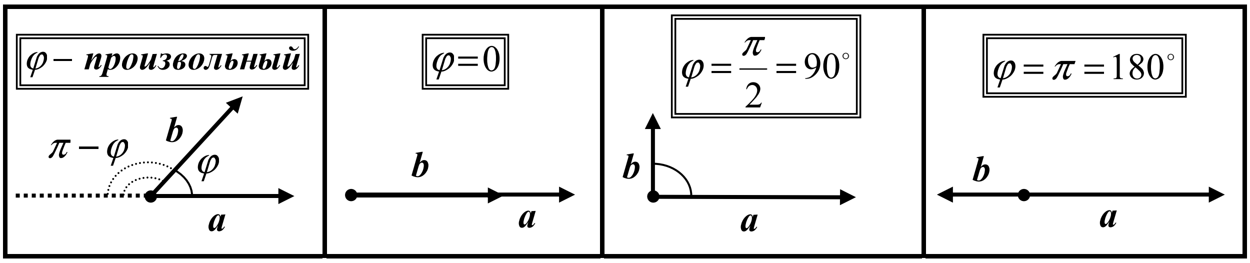
2°. Ассоциативность $\lambda\cdot(\mu\cdot\boldsymbol{a})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\boldsymbol{a}$.

3°. Дистрибутивность относительно скаляров $(\lambda+\mu)\cdot \boldsymbol{a}=\lambda\cdot \boldsymbol{a}+\mu\cdot \boldsymbol{a}$.

4°. Дистрибутивность относительно векторов $\lambda\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\cdot \boldsymbol{a}+\lambda\cdot \boldsymbol{b}$.

4.3. *Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на произвольную ось l*

Углом между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, отложенными из одной точки (напомним, что векторы можно переносить параллельно им самим, поэтому их начала всегда можно совместить), называется наименьший угол φ, на который надо повернуть один из них до совпадения их направлений ($0 \le \varphi \le \pi$). Для коллинеарных сонаправленных векторов ($\boxed{\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}}$) угол $\varphi = 0$, для антинаправленных векторов ($\boxed{\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}}$) – $\varphi=\pi$ (см. табл.). Если угол между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 90° ($\varphi = \dfrac{\pi}{2}$), то они называются ***перпендикулярными***.



Направленная прямая с выбранным *началом отсчёта* и *ортом* называется ***числовой осью***. ***Ортом*** направления оси l называется *единичный вектор* $\boldsymbol{e}_l$, *сонаправленный* с осью l (рис. 6).

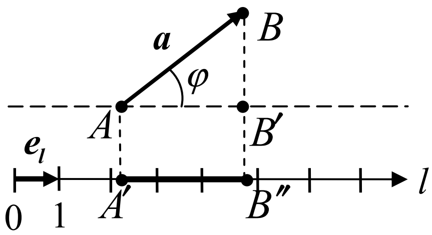


Рис. 6. *Проекция вектора на заданную ось.*

Пусть даны числовая ось l и вектор $\boldsymbol{a}$. Проведём через начало вектора $\boldsymbol{a}$ прямую, параллельную числовой оси l. Угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и прямой обозначим через φ (угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и единичным вектором $\boldsymbol{e}_l$ числовой оси l, $\varphi\in[0;\pi]$, рис. 6). Из начала (точка A) и конца (точка B) вектора $\boldsymbol{a}$ опустим перпендикуляры на прямую и числовую ось l: точка A' называется *проекцией начальной точки A* вектора $\boldsymbol{a}$, а точка B'' – *проекцией конечной точки B* вектора $\boldsymbol{a}$ на числовую ось l. Из рис. 6 видно, что $AB' = A'B''$.

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на ось l называется длина отрезка $A'B''$, взятая со знаком «+», если угол $\varphi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2} = 90^\circ\right)$, и со знаком «–», если $\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi = 180^\circ\right]$.

Из рис. 6 видно, что отрезок $\mathrm{A'B''} = \mathrm{AB'} = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\varphi$, следовательно,

$$\boxed{\text{Пр}_l\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cdot \cos\varphi},$$

при этом

$$\boxed{\text{Пр}_l\, \boldsymbol{a} \begin{cases} > 0,\ \varphi \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right) \\ = 0,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ < 0,\ \varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right] \end{cases}}.$$

Проекции обладают ***свойствами***:

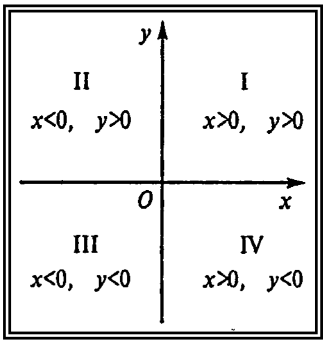
1°. Если $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{e}_l$, то $\boxed{\text{Пр}_l\, \boldsymbol{a} = 0}$.

2°. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то $\boxed{\text{Пр}_l\, \boldsymbol{a} = \text{Пр}_l \boldsymbol{b}}$.

3°. $\boxed{\text{Пр}_l(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{Пр}_l\, \boldsymbol{a} + \text{Пр}_l \boldsymbol{b}}$.

4°. $\boxed{\text{Пр}_l\,(\lambda \cdot \boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \text{Пр}_l \boldsymbol{a}}$.

4.4. *Декартова система координат и векторы*



Две (*три*) взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом отсчёта O называются ***прямоугольной*** (или ***декартовой***) ***системой координат на плоскости*** (***в пространстве***), а числовые оси – ***координатными осями***.

В некоторых специальных случаях используют ***косоугольную систему координат***, в которой угол между координатными осями отличен от 90°. Единичные векторы (*орты*) координатных осей косоугольной системы координат обозначают буквой $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

В декартовой системе координат по всем координатным осям (***абсцисс*** – Ox, ***ординат*** – Oy, ***аппликат*** – Oz) обычно выбирают одинаковый масштаб. ***Орты координатных осей*** обозначают (рис. 7):

$\boxed{Ox}$ – буквой $\boxed{\boldsymbol{i}}$,

$\boxed{Oy}$ – буквой $\boxed{\boldsymbol{j}}$,

$\boxed{Oz}$ – буквой $\boxed{\boldsymbol{k}}$.

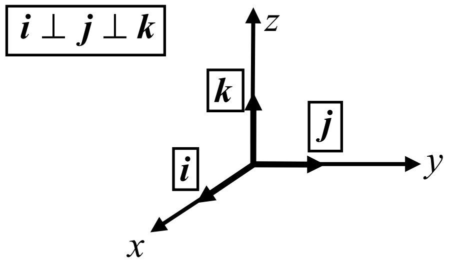


Рис. 7. *Орты* (*единичные векторы*) *декартовой системы координат.*

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{a}$ в *декартовой системе координат на плоскости*. Спроектируем вектор $\boldsymbol{a}$ на координатные оси (рис. 8).

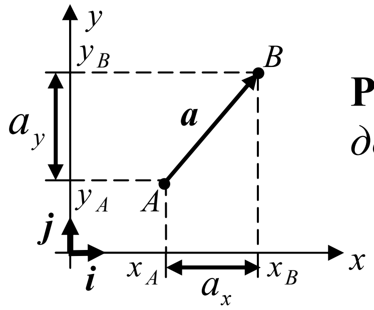


Рис. 8. *Проекции вектора* $\boldsymbol{a}$ *на оси декартовой системы координат.*

Из рис. 8 видно, что проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на координатные оси декартовой системы координат равны (***<u>теорема Шаля</u>***)

а) ось *абсцисс* (Ox): $\boxed{\text{Пр}_{Ox}\,\vec{a} = a_x = x_B - x_A}$,

б) ось *ординат* (Oy): $\boxed{\text{Пр}_{Oy}\,\vec{a} = a_y = y_B - y_A}$,

(в пространстве – **в)** ось *аппликат* (Oz): $\boxed{\text{Пр}_{Oz}\,\vec{a} = a_z = z_B - z_A}$).

Проекции $\boxed{a_x,\ a_y,\ a_z}$ называются ***координатами вектора*** $\boldsymbol{a}$.

Вектор $\boldsymbol{a}$ записывается в виде $\boxed{\boldsymbol{a}\,(a_x;\ a_y;\ a_z)}$.

При умножении действительного числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ ***<u>все</u>*** проекции вектора умножаются на это число: $\boxed{\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x;\ \lambda \cdot a_y;\ \lambda \cdot a_z)}$.

Используя ***<u>теорему Пифагора</u>***, найдём ***модуль*** (***длину***) вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boxed{|\,\vec{a}\,| = |AB| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \left(|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)}.$$

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$ определяется *расстоянием между точками* A и B.

Из рис. 7 видно, что *орты координатных осей* имеют *проекции*:

$$\boxed{\boldsymbol{i}(1;\ 0;\ 0)},$$

$$\boxed{\boldsymbol{j}(0;\ 1;\ 0)},$$

$$\boxed{\boldsymbol{k}(0;\ 0;\ 1)}.$$

Из определения линейной операции **<u>3.</u>** (см. п. 4.2, ***<u>4</u>***) следует *условие коллинеарности векторов*: векторное равенство $\boxed{\boldsymbol{b} = \lambda \cdot \boldsymbol{a}}$ эквивалентно трём скалярным равенствам для проекций векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{cases} b_x = \lambda \cdot a_x \\ b_y = \lambda \cdot a_y \\ b_z = \lambda \cdot a_z \end{cases}.$$

Отсюда вытекает ***<u>условие коллинеарности векторов</u>***

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} : \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda} -$$

отношения соответствующих проекций векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *на координатные оси декартовой системы координат должны быть равны между собой.*

Пример 2. Даны три точки $A(1;\,0;\,2)$, $B(3;1;-1)$ и $C(-2;\,-1;\,1)$. Найти: проекции векторов $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}$, их модули, единичные векторы $\boldsymbol{e}_{\vec{a}}$ и $\boldsymbol{e}_{\vec{b}}$, коллинеарные ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}\left(\underbrace{x_B - x_A}_{a_x};\ \underbrace{y_B - y_A}_{a_y};\ \underbrace{z_B - z_A}_{a_z}\right)$:

$$\begin{array}{r} \\ - \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} \overset{x_B}{}\ \overset{y_B}{}\ \overset{z_B}{} \\ B(\overset{x_B}{3};\ \overset{y_B}{1};\ \overset{z_B}{-1}) \\ \underline{A(\overset{x_A}{1};\ \overset{y_A}{0};\ \overset{z_A}{2})} \\ \boldsymbol{a}(\underset{a_x}{2};\ \underset{a_y}{1};\ \underset{a_z}{-3}). \end{array}$$

Вектор $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}\left(\underbrace{x_C - x_A}_{b_x};\ \underbrace{y_C - y_A}_{b_y};\ \underbrace{z_C - z_A}_{b_z}\right)$:

$$\begin{array}{r} - \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{l} C(\overset{x_C}{-2};\ \overset{y_C}{-1};\ \overset{z_C}{1}) \\ \underline{A(\overset{x_A}{1};\ \overset{y_A}{0};\ \overset{z_A}{2})} \\ \boldsymbol{b}(\underset{b_x}{-3};\ \underset{b_y}{-1};\ \underset{b_z}{-1}). \end{array}$$

Модули векторов $\vec{a}(\overset{a_x}{2};\ \overset{a_y}{1};\ \overset{a_z}{-3})$ и $\vec{b}(\overset{b_x}{-3};\ \overset{b_y}{-1};\ \overset{b_z}{-1})$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14};$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}.$$

Единичные векторы

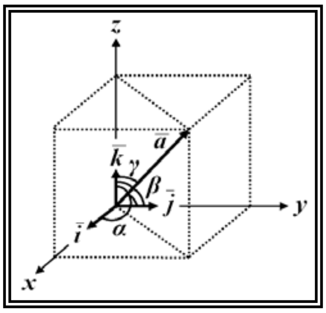
$$\boldsymbol{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (2;\,1;\,-3) = \left(\frac{2}{\sqrt{14}};\ \frac{1}{\sqrt{14}};\ -\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \left(\frac{\sqrt{14}}{7};\ \frac{\sqrt{14}}{14};\ -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right);$$

$$\boldsymbol{e}_{\vec{b}} = \frac{1}{|\boldsymbol{b}|} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot (-3;\,-1;\,-1) = \left(-\frac{3}{\sqrt{11}};\ -\frac{1}{\sqrt{11}};\ -\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{11}}{11};\ -\frac{\sqrt{11}}{11};\ -\frac{\sqrt{11}}{11}\right).$$

Для выяснения вопроса о *коллинеарности векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ воспользуемся *условием коллинеарности*:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} : \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \frac{2}{-3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-1} \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}.$$

4.5. *Направляющие косинусы вектора* $\boldsymbol{a}$



Обозначим углы, которые образует вектор $\boldsymbol{a}$ с ортами координатных осей декартовой системы координат в пространстве, через $\alpha\,(Ox)$, $\beta(Oy)$, $\gamma(Oz)$. Тогда

$$\boxed{a_x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha};\quad \boxed{a_y = |\vec{a}|\cdot\cos\beta};\quad \boxed{a_z = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma}.$$

Величины

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}},\quad \boxed{\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}},\quad \boxed{\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}}$$

называются ***направляющими косинусами*** вектора $\boldsymbol{a}$.

Вычислив квадрат модуля вектора $\boldsymbol{a}$, найдём соотношение, которое связывает направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2\cdot\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cdot\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cdot\cos^2\gamma \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \;=1}.$$

Пример 3. Найти направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}(\overset{a_x}{-3};\ \overset{a_y}{1};\overset{a_z}{-2})$.

Модуль вектора $\boldsymbol{a}$ равен

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

Вычислим направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Пример 4. Найти $|2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|$, если векторы $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, $\boldsymbol{b}(-2;\ 1;\ 0)$ и $\boldsymbol{c}(-3;\ -1;-1)$.

Обозначим через $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ и вычислим проекции этого вектора:

$$+\left\{\begin{array}{r} 2\boldsymbol{a}(-6;\ \ 2;\ -4)\\ -3\boldsymbol{b}(\ \ 6;\ -3;\ \ \ 0)\\ \underline{\boldsymbol{c}(-3;\ -1;\ -1)}\end{array}\right.$$
$$\boldsymbol{n}(-3;-2;\ -5)$$

Длина вектора $\boldsymbol{n}$: $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38}.$

Пример 5. Определить координаты вектора $\vec{X}(x;y;z)$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|X| = 5$, и он направлен в сторону, противоположную направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Условия задачи сводятся к выполнению выражений: $\boldsymbol{X}\parallel\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{X}\downarrow\uparrow\boldsymbol{a}$, $|\boldsymbol{X}| = 5$. Следовательно (модуль вектора $\boldsymbol{a}$ вычислен в ***Примере 3*** и равен $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{14}$),

$$\boldsymbol{X}=\lambda\cdot\boldsymbol{a} \text{ при } \lambda<0;\ |\boldsymbol{X}|=5=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|;\ |\lambda|=-\lambda=\frac{5}{|\boldsymbol{a}|};\ \lambda=-\frac{5}{\sqrt{14}}=-\frac{5\sqrt{14}}{14}.$$

Таким образом, вектор $\vec{X}(x;y;z)$ равен

$$\vec{X}=-\frac{5\sqrt{14}}{14}\cdot a=-\frac{5\sqrt{14}}{14}\cdot(-3;1;-2)=\left(\frac{15\sqrt{14}}{14};-\frac{5\sqrt{14}}{14};\frac{5\sqrt{14}}{7}\right).$$

4.6. *Способы задания векторов*

1. Задают *координаты начальной* (точка $A(x_A;\,y_A;\,z_A)$) и *конечной* (точка $B(x_B;\,y_B;\,z_B)$) *точек вектора* $\boldsymbol{a}$ (см. ***Пример 2***):

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}\left(\boldsymbol{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A}\right).$$

2. Задают *координаты вектора* $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a}(-1;\ 5;\ 2)$.

3. Задают *длину вектора*, *два любых угла*, *образуемых вектором* $\boldsymbol{a}$ *с какими-либо координатными осями* и *знак одной из проекций вектора*: $|\boldsymbol{a}|=2$, $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$, $a_z>0$. Тогда

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\alpha=2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\beta=2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

$$a_z=\pm\sqrt{|\vec{a}|^2-a_x^2-a_y^2}=\pm\sqrt{2},$$

но так как по условию $a_z>0$, то $a_z=\sqrt{2}$. Следовательно, $\boldsymbol{a}(1;\ 1;\ \sqrt{2})$.

4.7. *Деление отрезка в заданном отношении*

Пусть в пространственной декартовой системе координат заданы две точки $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$. Требуется найти на данном отрезке AB такую точку $M(x;\,y;\,z)$, чтобы $\boxed{\dfrac{|\boldsymbol{AM}|}{|\boldsymbol{MB}|}=\lambda}$, где λ – заданное число (рис. 9).

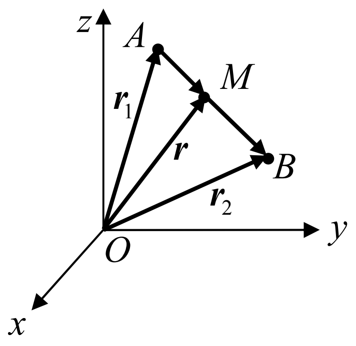


Рис. 9. *Деление отрезка в заданном отношении.*

Из рис. 9 видно, что по *правилу треугольника* (см. *п.2*)

$$\begin{cases} \boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{OM} \\ \boldsymbol{OM}+\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{OB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{r}+\boldsymbol{MB}=\boldsymbol{r}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{AM}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{MB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r} \end{cases}.$$

В силу того, что

$$|\boldsymbol{AM}|=\lambda\cdot|\boldsymbol{MB}| \text{ и } \boldsymbol{AM}\uparrow\uparrow\boldsymbol{MB}\text{, то } \boldsymbol{AM}=\lambda\cdot\boldsymbol{MB}.$$

Подставляя это равенство в систему и исключая вектор $\boldsymbol{MB}$, найдём, что

$$\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1.$$

Отсюда находим вектор $\boldsymbol{r}$:

$$\boxed{\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}}.$$

В проекциях это равенство равносильно системе равенств:

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda\cdot x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda\cdot y_2}{1+\lambda} \\ z=\dfrac{z_1+\lambda\cdot z_2}{1+\lambda} \end{cases}},$$

которая определяет ***деление отрезка в заданном отношении***.

Если точка $M(x;\,y;\,z)$ делит отрезок AB пополам ($\boxed{\lambda=1}$), то система полученных равенств принимает вид, известный из курса математики средней школы:

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \\ z=\dfrac{z_1+z_2}{2} \end{cases}}.$$

Пример 6. Даны три точки $A(-1;1;1)$, $B(1;1;-1)$ и $C(-1;-1;1)$. Вычислить координаты точки $M(x;\,y;\,z)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda=\dfrac{1}{2}$, а также координаты точки $N(x;y;z)$, которая делит отрезок AC пополам ($\lambda=1$).

В данном примере точка $A(\overset{x_1}{-1};\,\overset{y_1}{1};\,\overset{z_1}{1})$, точка $B(\overset{x_2}{1};\,\overset{y_2}{1};\,\overset{z_2}{-1})$ и $\lambda=\dfrac{1}{2}$, поэтому координаты точки $M(x;\,y;\,z)$ определяются по формулам:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-1 + \frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}} = 1 \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}\cdot (-1)}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\overset{x}{-\frac{1}{3}};\ \overset{y}{1};\ \overset{z}{\frac{1}{3}}\right).$$

При делении отрезка AC пополам точка $A(\overset{x_1}{-1};\ \overset{y_1}{1};\ \overset{z_1}{1})$, точка $C(\overset{x_2}{-1};\ \overset{y_2}{-1};\ \overset{z_2}{1})$ и $\lambda=1$, поэтому координаты точки $N(x;\,y;\,z)$ определяются по формулам:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-1+(-1)}{2} = -1 \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0 \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow N(\overset{x}{-1};\ \overset{y}{0};\ \overset{z}{1}) \cdot$$

4.8. *Понятие базиса*

В пространстве с числом измерений $n \ge 2$ можно построить бесконечное множество векторов, однако все они представимы в виде линейной комбинации n базисных векторов.

Вектор $\boldsymbol{c}$ называется ***линейной комбинацией векторов*** $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если существуют (в последующих частях используется квантор $\exists$ – ***существует***) такие числа $\exists\lambda,\ \mu \in \mathrm{R}$, что $\boxed{\boldsymbol{c} = \lambda \cdot \boldsymbol{a} + \mu \cdot \boldsymbol{b}}$.

Если вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ является *нулевым вектором и хотя бы одно из чисел* λ *или* μ *не равно нулю*, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ***линейно-зависимыми***. Если вектор $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, а *числа* λ и μ *тоже равны нуля*, то ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ***линейно-независимыми***.

○ В скалярном виде вопрос о *линейной зависимости* или *независимости векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сводится к решению однородной системы линейных алгебраических уравнений (см. ***3***), в которой коэффициентами являются проекции векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на оси декартовой системы координат, а неизвестными – числа λ и μ. Если *СЛАУ* имеет единственное нулевое (тривиальное) решение относительно чисел λ и μ, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются *линейно-независимыми*. При бесконечном множестве решений (главный определитель и все вспомогательные определители по ***<u>методу Крамера</u>*** равны нулю) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются *линейно-зависимыми*. ○

Любые *два* (*три*) *линейно-независимых* упорядоченных ненулевых вектора образуют ***базис на плоскости*** (***в пространстве***).

○ *Базис на плоскости* (*в пространстве*) образован *неколлинеарными* (*некомпланарными*) векторами. ○

<u>Теорема 1.</u> Пусть даны два *ненулевых* вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, образующих *базис на плоскости*. Любой другой вектор плоскости может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boxed{\boldsymbol{c} = \lambda \cdot \boldsymbol{a} + \mu \cdot \boldsymbol{b}},$$

где $\lambda,\ \mu \in R$.

***<u>Док-во</u>*:** Пусть все векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ выходят из общего начала (точка O, рис. 10), т.е.

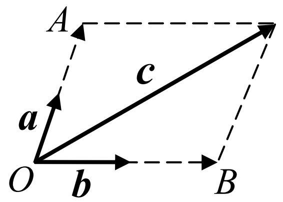


Рис. 10. *Разложение вектора по заданному базису.*

Из рис. 10 видно, что $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ (<u>*правило параллелограмма*</u>, п. 4.2, <u>**4**</u>). Вектор $\boldsymbol{OA}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{OB}$ – вектору $\boldsymbol{b}$. Следовательно, найдутся два действительных числа λ и μ такие, что будут выполняться равенства: $\boldsymbol{OA} = \lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{OB} = \mu\boldsymbol{b}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + {}$ $+ \mu\boldsymbol{b}$. Докажем единственность разложения вектора $\boldsymbol{c}$ по базису $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Пусть существуют другие действительные числа λ_1 и μ_1 такие, что $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \mu_1\boldsymbol{b}$, и пусть хотя бы одна из пар ((λ, λ_1) или (μ, μ_1)) содержит разные числа, например, $\lambda \neq \lambda_1$. Вычитая из первого разложения второе, получим

$$(\lambda - \lambda_1)\boldsymbol{a} + (\mu - \mu_1)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \text{ или } \boldsymbol{a} = -\frac{\mu - \mu_1}{\lambda - \lambda_1}\boldsymbol{b} = \sigma\,\boldsymbol{b}.$$

Это означает, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарные, т.е. линейно-зависимые и потому не образуют базис, что противоречит условию теоремы. Следовательно, разложение вектора $\boldsymbol{c}$ по базису ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) единственно и имеет вид $\boxed{\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}}$. В силу произвольности вектора $\boldsymbol{c}$ данная теорема справедлива для любого вектора $\boldsymbol{c}$ плоскости, т.е. компланарного с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

○ С геометрической точки зрения *разложение по базису* означает: числа λ и μ надо умножить на *базисные векторы* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, соответственно, а затем сложить полученные векторы, чтобы по ***правилу параллелограмма*** найти вектор $\boldsymbol{c}$. В трёхмерном пространстве произвольный вектор $\boldsymbol{d}$ может быть разложен по *некомпланарной тройке векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$: $\boxed{\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}}$, причём единственным образом. В скалярном виде векторное равенство представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел λ, μ и ν:

$$\boxed{\begin{cases} a_x\lambda+b_x\mu+c_x\nu=d_x \\ a_y\lambda+b_y\mu+c_y\nu=d_y \\ a_z\lambda+b_z\mu+c_z\nu=d_z \end{cases}}. \;○$$

В силу того, что *орты осей декартовой системы координат* удовлетворяют всем условиям, определяющим *базис*, то они выбираются в качестве *базисных векторов*, такой *базис* называется ***ортонормированным***. Например, любой вектор пространства $\boldsymbol{a}$ представляется в виде разложения по *ортонормированному базису* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, причём в качестве чисел λ, μ и ν выступают проекции вектора $\boldsymbol{a}$, т.е. $\lambda=a_x$, $\mu=a_y$ и $\nu=a_z$:

$$\boxed{\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}}.$$

○ В косоугольной системе координат единичные векторы $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ базиса удовлетворяют соотношениям: $\boxed{\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{m}}=\delta_{\mathrm{nm}}=\begin{cases}0, \ \mathrm{m}\neq\mathrm{n}\\ 1, \ \mathrm{m}=\mathrm{n}\end{cases}}$ (*свойства скалярного произведения векторов*, *п. 5.1*, **5**), где $\boxed{\delta_{\mathrm{nm}}}$ – ***символ Кронекера***. ○

○ *Координатами единичного вектора* $\boldsymbol{e}_{\vec{a}}$, *коллинеарного вектору* $\boldsymbol{a}$ и *сонаправленного с ним*, являются *направляющие косинусы вектора* $\boldsymbol{a}$:

$$\boxed{\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{|\vec{a}|}\vec{i}+\frac{a_y}{|\vec{a}|}\vec{j}+\frac{a_z}{|\vec{a}|}\vec{k}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)}. \;○$$

Пример 7. Даны 4 вектора $\boldsymbol{a}(1;\,1;\,1)$, $\boldsymbol{b}(0;\,1;\,-1)$, $\boldsymbol{c}(1;\,-1;\,0)$ и $\boldsymbol{d}(1;\,0;\,2)$. Записать разложение этих векторов по ортонормированному базису и разложение вектора $\boldsymbol{d}$ по базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Запишем *разложение* заданных векторов *по ортонормированному базису*:

а) вектор $\boldsymbol{a}(\overset{a_x}{1};\ \overset{a_y}{1};\ \overset{a_z}{1}) \Rightarrow \boldsymbol{a}=a_x\,\boldsymbol{i}+a_y\,\boldsymbol{j}+a_z\,\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$;

б) вектор $\boldsymbol{b}(\overset{b_x}{0};\ \overset{b_y}{1};\ \overset{b_z}{-1}) \Rightarrow \boldsymbol{b} = b_x\,\boldsymbol{i} + b_y\,\boldsymbol{j} + b_z\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$;

в) вектор $\boldsymbol{c}(\overset{c_x}{1};\ \overset{c_y}{-1};\ \overset{c_z}{0}) \Rightarrow \boldsymbol{c} = c_x\,\boldsymbol{i} + c_y\,\boldsymbol{j} + c_z\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$;

г) вектор $\boldsymbol{d}(\overset{d_x}{1};\ \overset{d_y}{0};\ \overset{d_z}{2}) \Rightarrow \boldsymbol{d} = d_x\,\boldsymbol{i} + d_y\,\boldsymbol{j} + d_z\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$.

Так как линейная независимость векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ эквивалентна системе однородных линейных алгебраических уравнений относительно чисел λ, μ и ν, которая должна иметь отличный от нуля главный определитель, составленный из проекций векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, то вычислим этот определитель и убедимся, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *образуют базис*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 0 + 0 - 1 - (1 + 1 + 0) = -1 - 2 = -3 \neq 0 .$$

Так как главный определитель однородной *СЛАУ* отличен от нуля, то она имеет единственное решение, т.е. векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *линейно-независимые* и, следовательно, *образуют базис*. Найдём разложение вектора $\boldsymbol{d}$ по базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, для чего вычислим по ***методу Крамера*** все вспомогательные определители *СЛАУ*:

$$\begin{cases} a_x\lambda + b_x\mu + c_x\nu = d_x \\ a_y\lambda + b_y\mu + c_y\nu = d_y \\ a_z\lambda + b_z\mu + c_z\nu = d_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \nu = 1 \\ \lambda + \mu - \nu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases}.$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 0 + 0 + 0 - (2 + 1 + 0) = -3;$$

$$\Delta_2 = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 0 - 1 + 2 - (0 - 2 + 0) = 3;$$

$$\Delta_3 = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 2 + 0 - 1 - (1 + 0 + 0) = 0.$$

По ***формулам Крамера*** (см. п. 3.3, ***3***) найдём:

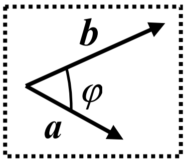
$$\lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1; \quad \mu = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1; \quad \nu = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{-3} = 0$$

(проверку правильности найденного решения выполнить *самостоятельно*). Следовательно, разложение вектора $\boldsymbol{d}$ по базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ имеет вид: $\boldsymbol{d} = \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b} + \nu\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

<u>5</u> "*Скалярное произведение векторов и его свойства*"

5.1. *Скалярное произведение векторов*

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется ***<u>число</u>*** (*<u>скаляр</u>*), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:



$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{a}\,|\cdot|\,\boldsymbol{b}\,|\cdot\cos\varphi},$$

где $\boxed{\varphi}$ – меньший угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Пример 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если их длины равны 2 и 5, соответственно, а угол между векторами равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Используя определение скалярного определения, находим

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2\cdot 5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\,.$$

Используя определения проекции (см. п. 4.3, <u>***4***</u>) и скалярного произведения двух векторов, можно записать, что

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{a}\,|\cdot \text{Пр}_{\bar{a}}\,\boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{b}\,|\cdot\text{Пр}_{\bar{b}}\,\boldsymbol{a}\,.$$

Откуда можно найти ***проекцию одного вектора на другой***, например,

$\boxed{\text{Пр}_{\bar{a}}\,\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\,\boldsymbol{a}\,|}}$; $\boxed{\text{Пр}_{\bar{b}}\,\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\,\boldsymbol{b}\,|}}$.

Пример 2. Найти проекции $\text{Пр}_{\bar{c}+\bar{k}}\left(3\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)$ и $\text{Пр}_{\bar{a}-\bar{c}}\left(2\,\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j}\right)$, если векторы $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;\ -2)$, $\boldsymbol{b}(-2;\ 1;\ 0)$ и $\boldsymbol{c}(-3;\ -1;\ -1)$.

Введём новые векторы:

$$+\begin{cases} 3\boldsymbol{a}(-3;\ 1;\ -2) \\ \ \ \boldsymbol{b}(-2;\ 1;\ \ \ 0) \end{cases} \qquad\qquad +\begin{cases} \boldsymbol{c}(-3;\ -1;\ -1) \\ \boldsymbol{k}(\ 0;\ \ \ 0;\ \ \ 1) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{p}(-11;\ 4;\ -6) \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{u}(-3;\ -1;\ \ 0)$$

Так как проекция одного вектора на другой определяется формулой

$$\text{Пр}_{\bar{u}}\,\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}}{|\,\boldsymbol{u}\,|},$$

вычислим скалярное произведение $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}$ и модуль вектора $\boldsymbol{u}$:

$$p\cdot u = p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z = (-11)\cdot(-3) + 4\cdot(-1) + (-6)\cdot 0 = -29\,;$$

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{9+1+0} = \sqrt{10}.$$

Следовательно, $\text{Пр}_{\bar{u}}\, \boldsymbol{p} = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = -\dfrac{29}{\sqrt{10}} = -\dfrac{29\sqrt{10}}{10}$. Поступая аналогичным образом, найдём

$$+\begin{cases} 2\boldsymbol{b}(-2; \quad 1; \quad 0) \\ \boldsymbol{c}(-3; \quad -1; -1) \\ -\boldsymbol{j}(\ 0; \quad -1; \quad 0) \end{cases} \qquad \qquad + \begin{cases} \boldsymbol{a}(-3;\ 1; -2) \\ -\boldsymbol{c}(\ 3;\ 1; \quad 1) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{p}(-7; \quad 1; -1) \qquad \qquad \boldsymbol{u}(\ 0;\ 2; -1)$$

вычислим скалярное произведение $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}$ и модуль вектора $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u} = p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z = (-7)\cdot 0 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) = 3;$$

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}.$$

Отсюда находим, что $\text{Пр}_{\bar{u}}\, \boldsymbol{p} = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Рассмотрим ***свойства*** *скалярного произведения*:

1°. $\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

2°. Коммутативность $\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}$.

3°. Дистрибутивность $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

4°. $\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2}$; $\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} > 0, \text{ при } \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}}$; $\boxed{\boldsymbol{e}_{\bar{a}}\cdot\boldsymbol{e}_{\bar{a}} = |\boldsymbol{e}_{\bar{a}}|^2 = 1}$.

5°. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *равно нулю* ($\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0}$), если *хотя бы один из них является нулевым вектором* или *ненулевой вектор* $\boldsymbol{a}$ *перпендикулярен ненулевому вектору* $\boldsymbol{b}$ ($\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}}$).

Свойство 5° определяет ***<u>условие перпендикулярности векторов</u>***:

если *скалярное произведение* <u>*ненулевых*</u> *векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *равно нулю* ($\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0}$), то *они перпендикулярны* $\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}}$.

5.2. *Координатная форма скалярного произведения векторов*

<u>Теорема 2.</u> Пусть даны 2 ненулевых вектора $\vec{a}\,(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}\,(b_x; b_y; b_z)$. Тогда скалярное произведение векторов в *ортонормированном базисе* имеет вид:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}.$$

***<u>Док-во</u>*:** Запишем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в ортонормированном базисе:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}.$$

Для доказательства теоремы составим *<u>таблицу скалярных произведений ортов осей декартовой системы координат</u>* ($\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j} \perp \boldsymbol{k}$):

$\boldsymbol{e}_{\mathrm{m}} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$1\,(4^\circ)$	$0\,(5^\circ)$	$0\,(5^\circ)$
$\boldsymbol{j}$	$0\,(5^\circ)$	$1\,(4^\circ)$	$0\,(5^\circ)$
$\boldsymbol{k}$	$0\,(5^\circ)$	$0\,(5^\circ)$	$1\,(4^\circ)$

Используя таблицу, вычислим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$= a_xb_x\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}^{1} + a_xb_y\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}^{0} + a_xb_z\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{k}}^{0} +$$

$$+ a_yb_x\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}^{0} + a_yb_y\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}^{1} + a_yb_z\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{k}}^{0} +$$

$$+ a_zb_x\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{i}}^{0} + a_zb_y\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{j}}^{0} + a_zb_z\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}^{1} =$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\,.$$

<u>**1.**</u> Если вектор $\boldsymbol{a}$ *перпендикулярен* вектору $\boldsymbol{b}$ ($\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}}$), то их *скалярное произведение равно нулю*, т.е. $\boxed{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0}$.

<u>**2.**</u> Если φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}}.$$

<u>**3.**</u> Проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на произвольную ось l равна скалярному произведению вектора $\boldsymbol{a}$ на орт $\boldsymbol{e}_l$ этой оси:

$$\text{Пр}_l\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_l = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{e}_l|\cdot\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|\cdot\cos\varphi\,.$$

<u>**4.**</u> Проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}$ вычисляется по формуле

$$\boxed{\text{Пр}_{\vec{a}}\,\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

а вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ – $\boxed{\text{Пр}_{\vec{b}}\,\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}} = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Пример 3. При каком значении параметра m вектор $\boldsymbol{a}\,(m;\ -1;\ 2)$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b}\,(3;\ m;\ -1)$.

Условием перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ является обращение в нуль их скалярного произведения, поэтому воспользуемся следствием

<u>1</u> из ***<u>Теоремы 2</u>***: $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3m - m - 2 = 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = 1$.

Пример 4. Вычислить скалярные произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ для векторов $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;\ -2)$, $\boldsymbol{b}(-2;\ 1;\ 0)$ и $\boldsymbol{c}(-3;\ -1;\ -1)$. Перпендикулярны ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$ между собой?

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (-3)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 = 7 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} \not\perp \boldsymbol{b}.$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = (-2)\cdot(-3) + 1\cdot(-1) + 0\cdot(-1) = 5 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b} \not\perp \boldsymbol{c}.$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = c_x a_x + c_y a_y + c_z a_z = (-3)\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) = 10 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{c} \not\perp \boldsymbol{a}.$$

Пример 5. Найти внутренний угол α при вершине A и внешний угол β при вершине C треугольника ABC, если координаты вершин треугольника: $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ -1)$ и $C(0;\ 1;\ 1)$.

Нарисуем произвольный треугольник ABC и введём в рассмотрение векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{CB}$, как показано на рис. 11:

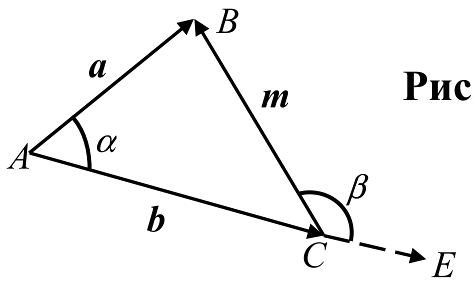


Рис. 11. *Вычисление углов в заданном* ΔABC.

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$: $-\begin{array}{r} B(-1;\ 1;\ -1) \\ A(\ 2;\ 0;\ 1) \\ \hline \boldsymbol{a}(-3;\ 1;\ -2) \end{array}$; $\quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}$: $-\begin{array}{r} C(\ 0;\ 1;\ 1) \\ A(\ 2;\ 0;\ 1) \\ \hline \boldsymbol{b}(-2;\ 1;\ 0) \end{array}$; $\quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{CB}$: $-\begin{array}{r} B(-1;\ 1;\ -1) \\ C(\ 0;\ 1;\ 1) \\ \hline \boldsymbol{c}(-1;\ 0;\ -2) \end{array}$.

Внутренний угол α при вершине A является углом между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому он равен:

$$\cos\alpha = \frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (-3)\cdot(-2) + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 = 7.$$

Вычислим модули векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14};$$

$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}.$$

Следовательно, $\cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{70}}{10}$. Откуда угол α равен:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{70}}{10}\right).$$

Внешний угол β при вершине C является углом между векторами $\boldsymbol{CE}$ и $\boldsymbol{c}$. В качестве вектора $\boldsymbol{CE}$ можно взять вектор $\boldsymbol{b}$, передвинув его вдоль прямой CE. Тогда

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|} = \frac{b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\cdot\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}}.$$

Вычислим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$b\cdot c = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = (-2)\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot(-2) = 2,$$

а также модуль вектора $\boldsymbol{c}$:

$$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{\boldsymbol{c}_x^2+\boldsymbol{c}_y^2+\boldsymbol{c}_z^2} = \sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}.$$

Косинус угла β определяется формулой

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|} = \frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

Отсюда следует, что $\beta = \arccos\left(\frac{2}{5}\right)$.

При выполнении равенства $\boxed{\cos\alpha = -|\nu|}$ ($\boxed{|\nu|\le 1}$) угол α определяется формулой: $\boxed{\alpha = \pi - \arccos(|\nu|)}$.

5.3. *Применение скалярного произведения векторов*

Физика

Пусть под воздействием силы $\boldsymbol{F}$ материальное тело совершает перемещение $\boldsymbol{s}$, тогда работа А, совершённая над телом, равна

$$\boxed{\text{А} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}}.$$

Пример 6. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}(2;\,-3;\,-1)$ при перемещении материального тела из точки $A\,(1;\,4;\,2)$ в точку $B\,(3;\,-2;\,-1)$.

Тело перемещается вдоль вектора $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{AB}$:

$$\begin{array}{r} -\;B\,(3;\;-2;\;-1) \\ A\,(1;\quad 4;\quad 2) \\ \hline \boldsymbol{s}(2;\,-6;\,-3). \end{array}$$

Следовательно, механическая работа

$$\text{А} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s} = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z = 2\cdot 2 + (-3)\cdot(-6) + (-1)\cdot(-3) = 25 \text{ (ед. работы)}$$

Тригонометрия

а) *Теорема косинусов.*

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, в котором введём векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{CA}$ (рис. 12), тогда:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi},$$

где $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ и $c = |\vec{c}|$.

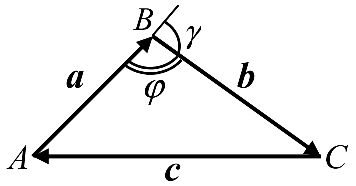


Рис. 12. *Теорема косинусов для произвольного треугольника.*

Вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, следовательно, по свойству 4° (см. п. 5.2, **5**) для скалярного произведения

$$c^2 = |\boldsymbol{c}|^2 = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} =$$

используя свойства 2° и 4° для *скалярного произведения векторов* (см. п. 5.2, **5**), найдём:

$$= a^2 + b^2 + 2\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma = (\gamma = \pi - \varphi) = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi .$$

б) *Косинус суммы двух углов.*

Пусть декартовой системе координат на плоскости даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которые образуют с положительным направлением оси Ox углы α и β, соответственно (рис. 13):

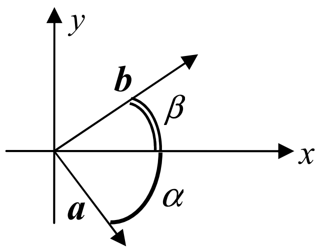


Рис. 13. *Косинус суммы двух угло*в.

Тогда $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\alpha+\beta)$. С другой стороны, координаты векторов равны $\boldsymbol{a}\big(|\boldsymbol{a}|\cos\alpha;\, -|\boldsymbol{a}|\sin\alpha;\, 0\big)$, $\boldsymbol{b}\big(|\boldsymbol{b}|\cos\beta;\, |\boldsymbol{b}|\sin\beta;\, 0\big)$. Используя формулу для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через проекции перемножаемых векторов, получим

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\alpha\,\cos\beta - |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\alpha\,\sin\beta .$$

Сравнивая полученные формулы, находим формулу для косинуса суммы двух углов

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

в частности,

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

6 “*Векторное и смешанное произведения векторов*”

6.1. *Векторное произведение векторов*

Тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется ***правой*** (***левой***), если обход векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ происходит ***против*** (рис. 14а) (***по*** (рис. 14б)) часовой стрелки (стрелке).

Пример 1.

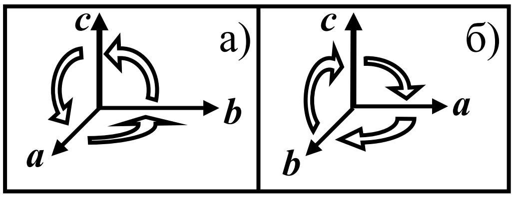
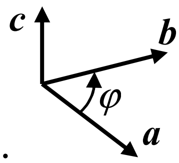


Рис. 14. *Правая* (а) *и левая* (б) *тройки векторов.*

В дальнейшем будем использовать <u>*правоориентированные*</u> тройки векторов.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется <u>***вектор***</u> $\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}$, который

– по *модулю численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;



– *перпендикулярен векторам* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$);

– если $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, то тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ является *правой*.

Из определения векторного произведения следует, что направление вектора $\boldsymbol{c}$ определяется *по правилу правого винта*: при вращении вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ правый винт движется в направлении вектора $\boldsymbol{c}$.

Вычислим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 15):

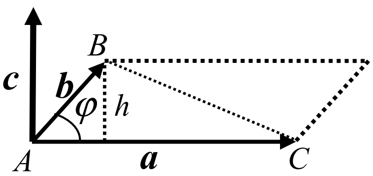


Рис. 15. *Площадь параллелограмма, определяющего модуль вектора* $\bar{c}$.

из треугольника ABC высота $\mathrm{h} = |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi$, тогда $\mathrm{S} = \mathrm{h} \cdot |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi$, следовательно, модуль вектора $\boldsymbol{c}$ равен

$$\boxed{|\boldsymbol{c}| = \mathrm{S}_{\text{параллелограмма}} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi},$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Векторное произведение обладает следующими ***свойствами***:

1°. $\boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

2°. $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}}$.

3°. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

4°. $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}}$.

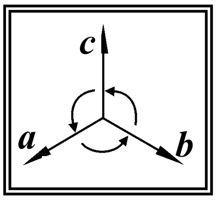
5°. Векторное произведение равно *нулевому вектору* $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}}$, если *хотя бы один из перемножаемых векторов является* <u>*нулевым*</u> или *ненулевой вектор* $\boldsymbol{a}$ *коллинеарен ненулевому вектору* $\boldsymbol{b}$ ($\boxed{\varphi = 0}$ или $\boxed{\varphi = \pi}$).

Свойство 5° определяет ещё одно ***<u>условие коллинеарности ненулевых векторов</u>***: если *векторное произведение ненулевых векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *равно нулевому вектору* $\boldsymbol{0}$, то *векторы* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ *коллинеарные*.

6.2. *Координатная форма векторного произведения векторов*

<u>Теорема 3.</u> Пусть даны два неколлинеарных ненулевых вектора $\vec{a}\,(a_x;a_y;a_z)$ и $\vec{b}(b_x;b_y;b_z)$. Тогда векторное произведение векторов в *ортонормированном базисе* имеет вид:

$$\boxed{\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}$$



.

<u>Док-во:</u> Запишем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в ортонормированном базисе:

$$\boldsymbol{a}=a_x\,\boldsymbol{i}+a_y\,\boldsymbol{j}+a_z\,\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}=b_x\,\boldsymbol{i}+b_y\,\boldsymbol{j}+b_z\,\boldsymbol{k}\,.$$

Для доказательства формулы теоремы составим *<u>таблицу векторных произведений ортов осей</u>*:

$\boldsymbol{e}_{\text{m}}\times\boldsymbol{e}_{\text{n}}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$ (4°)	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$ (2°)
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$ (2°)	$\boldsymbol{0}$ (4°)	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$ (2°)	$\boldsymbol{0}$ (4°)

Используя таблицу, вычислим векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\overset{\boldsymbol{0}}{\vec{i}\times\vec{i}}+a_xb_y\overset{\boldsymbol{k}}{\vec{i}\times\vec{j}}+a_xb_z\overset{-\boldsymbol{j}}{\vec{i}\times\vec{k}}+$$

$$+a_yb_x\overset{-\boldsymbol{k}}{\vec{j}\times\vec{i}}+a_yb_y\overset{\boldsymbol{0}}{\vec{j}\times\vec{j}}+a_yb_z\overset{\boldsymbol{i}}{\vec{j}\times\vec{k}}+$$

$$+a_zb_x\overset{\boldsymbol{j}}{\vec{k}\times\vec{i}}+a_zb_y\overset{-\boldsymbol{i}}{\vec{k}\times\vec{j}}+a_zb_z\overset{\boldsymbol{0}}{\vec{k}\times\vec{k}}=$$

$$=0+a_xb_y\,\vec{k}-a_xb_z\,\vec{j}-$$

$$-a_yb_x\,\vec{k}+0+a_yb_z\,\vec{i}+$$

$$+a_zb_x\,\vec{j}-a_zb_y\,\vec{i}+0=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=$$

$$=c_x\,\vec{i}+c_y\,\vec{j}+c_z\,\vec{k}\,.$$

Отсюда следует, что $\boxed{c_x = a_y b_z - a_z b_y}$; $\boxed{c_y = a_z b_x - a_x b_z}$; $\boxed{c_z = a_x b_y - a_y b_x}$.

○ Для запоминания этих формул существует *мнемоническое правило*: надо запомнить переход от одной координаты к другой по часовой стрелке (рис. 16):

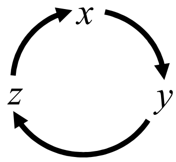


Рис. 16. *Циклический переход от одной координаты к другой.*

для нахождения, например, проекции c_x, надо взять компоненту y первого вектора и умножить на компоненту z второго вектора, а затем вычесть их произведение, обменяв местами обозначение координат. Аналогично поступают при нахождении двух других проекций вектора $\boldsymbol{c}$. ○

С другой стороны, полученную выше формулу можно записать в виде

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\boldsymbol{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}\,.$$

Полученное выражение представляет собой раскрытие определителя III порядка по элементам первой строки, т.е. окончательно можно записать, что

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}.$$

Пример 2. Найти, при каком значении параметра m вектор $\boldsymbol{a}\,(4;2;-m)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}\,(2;\ 1;\ -1)$.

Согласно свойству 5° для векторного произведения (п. 6.1, ***6***), ненулевые векторы будут коллинеарными, если их векторное произведение равно нулю. Вычислим векторное произведение заданных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -m \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & -m \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)\,\vec{i} - (2m-4)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\,.$$

Так как вектор $\boldsymbol{c}$ должен быть *нулевым вектором*, то все его координаты должны быть равными нулю, следовательно, $m = 2$.

Пример 3. Найти векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}\,(3;\ 2;\ 1)$ и $\boldsymbol{b}\,(-2;\ 0;\ 4)$.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=8\vec{i}-14\vec{j}+4\vec{k}=(8;\ -14;\ 4).$$

Пример 4. Найти единичный вектор, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ из ***Примера 3***.

Согласно определению векторного произведения, векторами, перпендикулярными к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, будут векторы

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{c},$$

где по ***Примеру 3*** вектор $\boldsymbol{c}\,(8; -14;\ 4)$. Единичный вектор того же направления, что и вектор $\boldsymbol{c}$ определим по формуле $\boldsymbol{e}_{\vec{c}}=\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$. Вычислим модуль вектора $\boldsymbol{c}$:

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}=\sqrt{8^2+(-14)^2+4^2}=\sqrt{64+196+16}=\sqrt{276}=2\sqrt{69}.$$

Следовательно, единичный вектор

$$\boldsymbol{e}_{\vec{c}}=\frac{1}{2\sqrt{69}}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2\sqrt{69}}\cdot(8;\ -14;\ 4)=\left(\frac{4\sqrt{69}}{69};\ -\frac{7\sqrt{69}}{69};\ \frac{2\sqrt{69}}{69}\right).$$

Таким образом, единичные векторы, перпендикулярные к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, определяются координатами $\bar{e}_{\pm\bar{c}}=\pm\left(\dfrac{4\sqrt{69}}{69};\ -\dfrac{7\sqrt{69}}{69};\ \dfrac{2\sqrt{69}}{69}\right)$.

6.3. *Приложения векторного произведения векторов*

Физика

Пусть точка начала вектора $\boldsymbol{r}$ закреплена, а к его концу приложена сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 17), тогда *момент этой силы* относительно точки A

$$\boxed{\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}}.$$

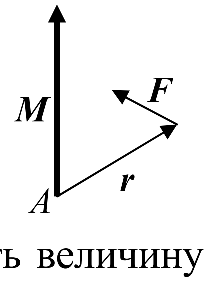


Рис. 17. *Момент силы* $\boldsymbol{F}$.

ример 5. Вычислить величину и направляющие косинусы механического момента силы $\boldsymbol{F}(2; -1; 3)$, приложенной к точке $A(2;\ 0;\ 1)$ относительно точки $C(0;\ 1;\ 1)$.

Введём в рассмотрение вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{CA}(-2;1;0)$. Вычислим механический момент силы $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = (-3;\ -6;\ 0).$$

Вычислим модуль вектора $\vec{\boldsymbol{M}}$

$$\left|\vec{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 36 + 0} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

и его направляющие косинусы (см. п. 4.5, <u>***4***</u>):

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{\left|\vec{M}\right|} = -\frac{\sqrt{5}}{5};\quad \cos\beta = \frac{M_y}{\left|\vec{M}\right|} = -\frac{2\sqrt{5}}{5};\quad \cos\gamma = \frac{M_z}{\left|\vec{M}\right|} = 0.$$

<u>*Геометрия*</u>

Пусть даны три несовпадающие точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$. Требуется вычислить площадь треугольника ABC.

Введём в рассмотрение векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}$ (рис. 18).

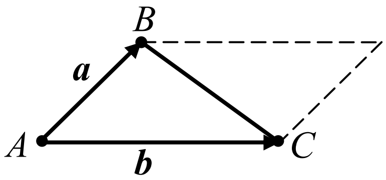


Рис. 18. *Площадь треугольника ABC.*

Координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}\ (x_2 - x_1;\ \ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1)$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}\ (x_3 - x_1;\ \ y_3 - y_1;\ \ z_3 - z_1).$$

Площадь треугольника составляет половину от площади параллелограмма, которая *равна модулю векторного произведения векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, следовательно:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right|.}$$

Пример 6. Даны 3 точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$ и $C(2;\ 0;\ 0)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Введём в рассмотрение векторы (для нахождения координат вектора надо из координат конечной точки вычесть координаты начальной точки): $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}(0;1;0)$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}(2;\ 0;\ 0)$. Вычислим их векторное произведение

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0\,\boldsymbol{i}-0\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=(0;\ 0;\ -2)\,.$$

Вычислим модуль вектора $\boldsymbol{c}$:

$$|\,\boldsymbol{c}\,|=\sqrt{c_x^2+c_y^2+c_z^2}=\sqrt{0^2+0^2+0^2}=\sqrt{0+0+4}=\sqrt{4}=2\,.$$

Следовательно, площадь треугольника равна

$$\mathrm{S}_{\Delta\,\mathrm{ABC}}=\frac{|\,\boldsymbol{c}\,|}{2}=\frac{2}{2}=1\,(\text{ед. пл.})\ .$$

<u>Тригонометрия</u>

Выведем формулу для синуса суммы двух углов

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}\,.$$

Пусть в декартовой системе координат на плоскости даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которые образуют с положительным направлением оси Ox углы α и β (рис. 19), соответственно.

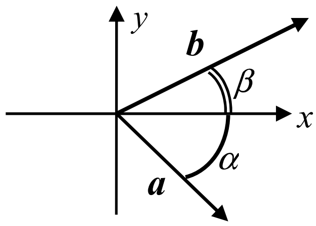


Рис. 19. *Синус суммы двух углов.*

Координаты векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равны

$$\boldsymbol{a}\big(|\,\boldsymbol{a}\,|\cos\alpha;\ -|\,\boldsymbol{a}\,|\sin\alpha;\ 0\big)\ \text{ и }\ \boldsymbol{b}\big(|\,\boldsymbol{b}\,|\cos\beta;\ |\,\boldsymbol{b}\,|\sin\beta;\ 0\big).$$

Используя формулу для векторного произведения векторов (см. *п. 6.2*, ***<u>6</u>***) и свойство 4° для определителей (см. ***<u>1</u>***), получим

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\,\boldsymbol{a}\,|\cdot|\,\boldsymbol{b}\,|\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскрыв этот определитель по элементам третьего столбца, имеем

$$\boldsymbol{c}=|\,\boldsymbol{a}\,|\cdot|\,\boldsymbol{b}\,|\cdot\boldsymbol{k}\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\,.$$

Модуль этого вектора равен $|\,\boldsymbol{c}\,|=|\,\boldsymbol{a}\,|\cdot|\,\boldsymbol{b}\,|\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)$, а по определению векторного произведения векторов эта величина равна

$$|\,\boldsymbol{c}\,|=|\,\boldsymbol{a}\,|\cdot|\,\boldsymbol{b}\,|\cdot\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Сравнивая две полученные формулы, получаем формулу для синуса суммы двух углов. В частности, при $\alpha{=}\beta$ получаем, что синус удвоенного угла равен

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

6.4. *Смешанное произведение векторов*

Смешанным произведением некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется ***<u>число</u>*** равное векторному произведению $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, умноженному скалярно на вектор $\boldsymbol{c}$, т.е. $\lambda = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

Получим формулу для вычисления смешанного произведения

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) = [(a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} +$$

$$+(a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}]\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + \boldsymbol{c}_z\boldsymbol{\vec{k}}) = c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$ Обменяв местами первую строку со второй, а затем и с третьей, получим окончательную формулу

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}.$$

Смешанному произведению векторов соответствует определитель III порядка, откуда следуют его ***свойства***:

1°. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$, т.е. векторы, входящие в смешанное произведение, можно циклически переставлять местами, поэтому смешанное произведение зачастую пишут без знаков $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

2°. *Смешанное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ равно ***объёму параллелепипеда***, построенного на этих векторах, взятого со знаком “+”, если тройка векторов *правая*, и со знаком “–”, если тройка векторов *левая* (рис. 20):

$$\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm\,\mathrm{V}_{\text{параллелепипеда}}}.$$

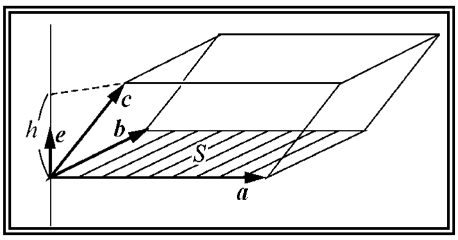


Рис. 20. *Объём параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Так как $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathrm{S}_{\text{параллелограмма}}\cdot\boldsymbol{e}$, то

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\mathrm{S}_{\text{параллелограмма}}\cdot\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}=\mathrm{S}_{\text{параллелограмма}}\cdot\left|\boldsymbol{c}\right|\cos\varphi=$$
$$=\pm\mathrm{S}_{\text{параллелограмма}}\cdot\mathrm{h}=\pm\,\mathrm{V}_{\text{параллелепипеда}}.$$

3°. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ ***компланарные*** (*лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях*), *то их смешанное произведение равно нулю*, т.е. $\boxed{(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})=0}$.

Свойство 3° определяет ***условие компланарности трёх векторов***: *если* $\boxed{(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})=0}$, *то векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ *лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях*.

Пример 7. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}(1;2;3)$, $\boldsymbol{b}(4;5;6)$ и $\boldsymbol{c}(7;8;9)$ компланарные.

Согласно формуле, определяющей смешанное произведение векторов, имеем

$$(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=-3+12-9=0.$$

Пример 8. Даны четыре точки $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ и $D(1;1;1)$. Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=$ $=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$.

Составим векторы (для нахождения координат вектора надо из координат конечной точки вектора вычесть координаты его начальной точки) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}(-1;1;0)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}(-1;0;1)$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}(0;1;1)$. Вычислим объём параллелепипеда

$$\mathrm{V}_{\text{параллелепипеда}}=(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}=1+1=2\,(\text{ед. об.}).$$

Положительность вычисленного объёма указывает на то, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ образуют *правую* тройку.

Если пренебрегать расположением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ относительно друг друга, то объём параллелепипеда вычисляют по формуле:

$$\boxed{\mathrm{V}_{\text{параллелепипеда}}=\left|(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})\right|}.$$

Пример 9. Чему равен объём пирамиды с вершинами A, B, C и D (координаты точек A, B, C и D взять из ***Примера 8***). Найти длину высоты, которая опущена из точки A на основание BCD.

Из школьного курса математики известно, что объём пирамиды равен

$$\boxed{\mathrm{V}_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}\ \mathrm{V}_{\text{параллелепипеда}}}.$$

В ***Примере 8*** точки $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$ и $D(1;1;1)$, векторы $\boldsymbol{a} =$ $= \boldsymbol{AB}(-1;\ 1;0)$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}(-1;0;1)$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AD}(0;1;1)$, а вычисленный там же объём параллелепипеда $|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})| = \mathrm{V}_{\text{параллелепипеда}} = 2$. Следовательно, объём пирамиды с вершинами A, B, C и D равен

$$\mathrm{V}_{\text{пирамиды}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}(\text{ед. об.})$$

С другой стороны, её объём по формуле из курса математики средней школы равен

$$\boxed{\mathrm{V}_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3}\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{BCD}} \cdot \mathrm{h}_{\mathrm{A}}}.$$

Вычислим площадь треугольника BCD, лежащего в основании пирамиды (см. п. 6.3, ***б***):

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{BC}:\ \ \begin{array}{r} C(0;\ \ 0;\ \ 1) \\ -\ B(0;\ \ 1;\ \ 0) \\ \hline \boldsymbol{m}(1;-1;\ \ 1) \end{array} \qquad\qquad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{BD}:\ \ \begin{array}{r} D(1;\ \ 1;\ \ 1) \\ -\ B(0;\ 1;\ 0) \\ \hline \boldsymbol{n}(1;\ 0;\ 1). \end{array}$$

Вычислим векторное произведение этих векторов

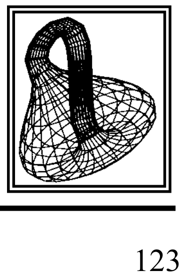
$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

т.е. вектор $\boldsymbol{p}(-1;0;1)$. Найдём его модуль $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Следовательно, площадь треугольника BCD равна

$$\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{BCD}} = \frac{|\boldsymbol{p}|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\text{ед. пл.}).$$

Тогда длина высоты h_A, опущенной из точки A на основание BCD, будет равна

$$\mathrm{h}_{\mathrm{A}} = \frac{3 \cdot \mathrm{V}_{\text{пирамиды}}}{\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{BCD}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(\text{ед. дл.}).$$



Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 1

Даны четыре точки $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;-1;-1)$ и $D(2;0;1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 2

Даны четыре точки A $(2;0;1)$, B $(-1;1;0)$, C $(0;\ -1;\ -2)$ и D $(1;\ 1;\ 0)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 3

Даны четыре точки $\mathrm{A}(1;2;0)$, $\mathrm{B}(0;1;1)$, $\mathrm{C}(0;\ 1;\ 2)$ и $\mathrm{D}(0;\ 1;\ -1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 4

Даны четыре точки $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(1;-1;0)$ и $D(0;1;1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x; y; z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3; 1; -2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}| = 5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2; -1; 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1; -1; 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 5

Даны четыре точки $\mathrm{A}(0;\,2;\,-1)$, $\mathrm{B}(0;\,1;\,-1)$, $\mathrm{C}(-1;\,0;\,1)$ и $\mathrm{D}(-1;\,0;\,2)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\,\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\,1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\,-1;\,3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\,-1;\,5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 6

Даны четыре точки $A(2;\,-1;\,0)$, $B(1;1;0)$, $C(-1;\,2;\,0)$ и $D(1;\,-1;\,1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\,\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\,1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\,-1;\,3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\,-1;\,5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **7**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(1;1;0)$, $\mathrm{B}(2;-1;0)$, $\mathrm{C}(0;1;-1)$ и $\mathrm{D}(0;1;-2)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 8

Даны четыре точки $\mathrm{A}(0;1;1)$, $\mathrm{B}(1;-1;0)$, $\mathrm{C}(1;0;2)$ и $\mathrm{D}(-1;-1;0)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 9

Даны четыре точки $A(-1;1;0)$, $B(-1;-1;1)$, $C(0;-1;1)$ и $D(1;\ 0;\ 2)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 10

Даны четыре точки $A(-1;0;1)$, $B(1;-1;-2)$, $C(1;-1;0)$ и $D(1;0;-1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 11

Даны четыре точки $\mathrm{A}(1;-1;0)$, $\mathrm{B}(0;-2;-1)$, $\mathrm{C}(-1;-1;0)$ и $\mathrm{D}(0;1;-1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\mathrm{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\mathrm{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **<u>12</u>**

Даны четыре точки $A(0;\,2;\,1)$, $B(-1;\,0;\,-1)$, $C(0;\,1;\,2)$ и $D(1;\,0;\,-1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\,\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\,1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\,-1;\,3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\,-1;\,5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **13**

Даны четыре точки $A(2;1;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(1;\ 0;\ -1)$ и $D(-1;0;1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **14**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(-1;\ 0;\ 1)$, $\mathrm{B}(1;\ 0;\ 1)$, $\mathrm{C}(-2;\ 1;\ 0)$ и $\mathrm{D}(0;\ -1;\ 1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **15**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(-1;\ 1;\ 0)$, $\mathrm{B}(2;-1;1)$, $\mathrm{C}(-2;-1;1)$ и $\mathrm{D}(1;1;-1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 16

Даны четыре точки $A(0;2;1)$, $B(1;-1;0)$, $C(1;\ 2;\ 1)$ и $D(0;\ 1;\ -1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **17**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(1;-1;0)$, $\mathrm{B}(0;2;1)$, $\mathrm{C}(1;\ 0;\ 1)$ и $\mathrm{D}(1;\ -1;\ 1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **18**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(-1;-1;-1)$, $\mathrm{B}(1;0;2)$, $\mathrm{C}(-1;1;1)$ и $\mathrm{D}(1;0;-2)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\,1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **19**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(-1;-1;-2)$, $\mathrm{B}(1;2;1)$, $\mathrm{C}(0;-1;0)$ и $\mathrm{D}(1;0;-1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 20

Даны четыре точки $\mathrm{A}(-1;-1;0)$, $\mathrm{B}(2;1;-1)$, $\mathrm{C}(1;0;-1)$ и $\mathrm{D}(2;1;1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\,1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 21

Даны четыре точки $A(0;-1;-1)$, $B(0;1;1)$, $C(-1;-2;0)$ и $D(0;-1;1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 22

Даны четыре точки $A(2;0;1)$, $B(-1;1;-1)$, $C(0;\ 1;\ 1)$ и $D(-1;-1;0)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант <u>23</u>

Даны четыре точки $\mathrm{A}(-1;0;-1)$, $\mathrm{B}(1;\ 2;\ 0)$, $\mathrm{C}(1;-1;0)$ и $\mathrm{D}(0;\ 1;\ 1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону, противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;-1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;-1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант **24**

Даны четыре точки $A(-1;1;2)$, $B(0;-1;-1)$, $C(1;\ 0;\ -1)$ и $D(1;\ 0;\ 1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Задания для самостоятельного решения

Элементы векторной алгебры

Вариант 25

Даны четыре точки $A(0;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(-1;2;1)$ и $D(-1;-1;-1)$:

1. Найти векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AD}$. Имеются ли среди них *коллинеарные*? Записать разложение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по ортонормированному базису $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

2. Найти *единичный* вектор того же направления что и вектор $\boldsymbol{a}$.

3. Найти *направляющие косинусы* вектора $\boldsymbol{a}$. Сравнить с ответом в предыдущем пункте. Сделать выводы.

4. Найти $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.

5. Определить координаты вектора $\boldsymbol{X}(x;y;z)$, *коллинеарного* вектору $\boldsymbol{a}(-3;\ 1;-2)$, зная, что $|\boldsymbol{X}|=5$, и *он направлен в сторону*, *противоположную* направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

6. Вычислить *скалярные* произведения $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. *Перпендикулярны* ли векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ между собой? Если векторы не перпендикулярны, то вычислить *косинус угла* между ними.

7. Найти *внутренний* угол при вершине A и *внешний* угол при вершине C треугольника ABC.

8. Найти $\text{Пр}_{\vec{c}+\vec{k}}(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ и $\text{Пр}_{\vec{a}-\vec{c}}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{j})$.

9. Вычислить $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|$ и угол φ между данными векторами.

10. Найти *единичный вектор*, *перпендикулярный* векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

11. Найти *площадь* ΔABC и *длину его высоты*, опущенной из вершины C.

12. Найти значение *модуля* и *направляющие косинусы момента силы* $\boldsymbol{F}(2;\ -1;\ 3)$, приложенной к точке A относительно точки C.

13. Лежат ли векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в *одной плоскости*? Могут ли эти векторы образовать *базис* пространства и почему? Если могут, то разложить по этому базису вектор $\boldsymbol{d}(1;\ -1;\ 5)$.

14. Чему равны *объём* пирамиды с вершинами A, B, C, D и её *высота*, опущенная из точки A на основание BCD?

Список использованных источников

1. Делоне Р.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. – Т.1. – Москва-Ленинград: Изд-во техн-теор. лит-ры. – 1948. – 456 с.

2. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – Москва: Наука. – 1965. – 426 с.

3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. – Москва: Наука. – 1968. – 911 с.

4. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – Москва: МГУ. – 1969. – 698 с.

5. Краткий курс высшей математики / В.Е. Шнейдер, А.И. Слуцкий, А.С. Шумов. – Москва: Высшая школа. – 1972. – 640 с.

6. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. – Минск: Вышейшая школа. – 1973. – 350 с.

7. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. – Москва: Наука. – 1975. – 336 с.

8. Кайгородов В.Р. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Казань: Изд-во Казанского университета. – 1985. – 238 с.

9. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах. – Москва: Высшая школа. – 1985. – 232 с.

10. Высшая математика / П.Ф. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Киев: Вища школа. – 1987. – 552 с.

11. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – Санкт-Петербург: “Специальная литература”. – 1998. – 200 с.

12. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – Москва: Наука. – 1999. – 224 с.

13. Замятин А.П., Булатов А.А., Верников Б.М. Алгебра и геометрия. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. – 2001. – 458 с.

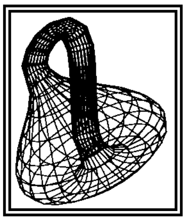
14. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. – Москва: ООО “ТК Велби”.– 2002. – 592 с.

15. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Московская область: ЗАО “Оптимизационные системы и технологии”. – 2004. – 368 с.

16. Мозалева Е.М. Комплексные числа. Линейная и векторная алгебра: Методические указания и контрольные задания. – Оренбург: ГОУ ОГУ. – 2004. – 60 с.

17. Босс В. Лекции по математике: анализ. – Москва: Едиториал УРСС. – 2004. – 216 с.

18. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 240 с.
19. Босс В. Лекции по математике: линейная алгебра. – Т.3. – Москва: КомКнига. – 2005. – 224 с.
20. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 304 с.
21. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Ч.1. – Москва: Айрис-пресс. – 2005. – 288 с.
22. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – Санкт-Петербург: Питер. – 2005. – 464 с.
23. Высшая математика. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие для экономических и инженерных специальностей вузов / Н.С. Коваленко, Т.И. Чепелева. – Минск: Юнипресс. – 2006. – 208 с.
24. Речкалов В.Г. Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников. – Челябинск: ИИУМЦ “Образование”. – 2008. – 140 с.
25. Курс высшей математики / В.Г. Зубков, В.А. Ляховский, А.И. Мартыненко, В.Б. Миносцев.– Т.1. – Москва: МИИР.– 2007. – 440 с.
26. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: учебное пособие / В.И. Антонов, М.В. Лагунова, Н.И. Лобкова и др. – Москва: Проспект. – 2011. – 144 с.
27. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.



<u>I</u>. *Элементы **линейной** и **векторной алгебр**. **Аналитическая геометрия** на плоскости и в пространстве*

Тема: *Аналитическая геометрия на плоскости*

<u>7</u> “***Прямая на плоскости. Основные задачи***”

7.1. *Общее уравнение прямой*

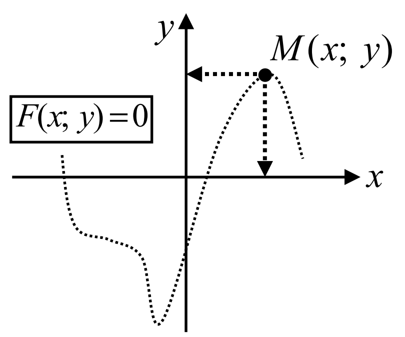


Рис. 1. *Кривая, возникающая при движении точки $M(x;y)$ по плоскости.*

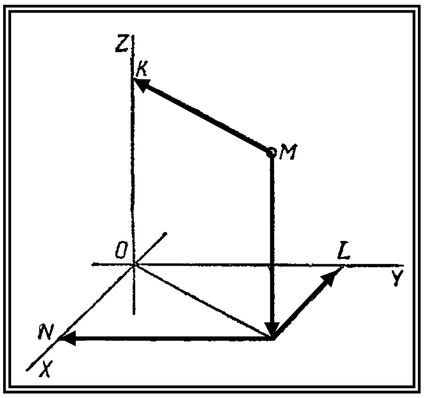
Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат. Движение произвольной точки $M(x;\ y)$ с текущими координатами x и y по плоскости порождает ***плоскую линию***

$F(x;\ y)=0$ (рис. 1).

Любое соотношение $\boxed{F(x;\ y)=0}$ (которое имеет смысл в области действительных чисел), где F некоторое выражение, связывающее переменные величины x и y, называется ***уравнением с двумя неизвестными*** и ***может определять линию на плоскости***.

Точки, ***принадлежащие линии***, *удовлетворяют данному соотношению*, а точки ***вне линии*** *– не удовлетворяют*.

○ Отметим, что ***не любое*** *уравнение* $\boxed{F(x;\ y)=0}$ *определяет линию*, например, уравнение $(x-1)^2+(y+1)^2=0$ определяет точку $M(1;\ -1)$, а уравнению $x^4\cdot y^2+2=0$ не отвечает никакой геометрический образ на плоскости. ○



○ Положение точки в пространстве определяется тремя координатами проекций точки $M\ (x;y;z)$ на координатные оси прямоугольной системы координат. Проекциями точки $M(x;\ y;\ z)$ являются точки $N(x;\ 0;\ 0)$, $L(0;\ y;\ 0)$ и $K(0;\ 0;\ z)$. Движение точки $M(x;\ y;\ z)$ в пространстве порождает ***пространственную*** линию. ○

Порядок линии определяется *по высшему показателю степени переменных x и y, или по сумме показателей степени в произведении этих величин.*

Пример 1. Определить порядок заданных линий: **а**) $2x+3y-5=0$; **б**) $x^3-2x^2y^6+3y^2-x+4y-8=0$; **в**) $x^2+y^2=25$; **г**) $x\cdot y=-4$.

степень 1

а) $2x+3y-5=0$ – линия *первого* порядка;

сумма показателей степени 2 + 6 = 8

б) $x^3-2x^2y^6+3y^2-x+4y-8=0$ – линия *восьмого* порядка;

степень 2

в) $x^2+y^2=25$ – линия *второго* порядка;

сумма показателей степени 1 + 1 = 2

г) $x\cdot y=-4$ – линия *второго* порядка.

С учётом сделанного выше замечания определим линию так:

Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\boxed{F(x;\ y)=0}$, называется ***линией***, а само уравнение $\boxed{F(x;\ y)=0}$ – ***уравнением линии***. Переменные x и y в уравнении линии называются ***текущими координатами точки***, *принадлежащей линии*.

Для того чтобы установить принадлежность точки $M(x_M;y_M)$ линии, заданной уравнением $F(x;\ y)=0$, надо подставить её координаты в это уравнение. Если $F(x_M;\ y_M)\equiv 0$ (знак “≡” означает *обращение уравнения в тождество*), то точка $M(x_M;\ y_M)$ лежит на линии. В противном случае, когда $F(x_M;\ y_M)\neq 0$, точка $M(x_M;\ y_M)$ лежит *вне* заданной линии.

Пример 2. Определить принадлежность точек $A(1;\ 1)$ и $B(1;\ 0)$ линии (l): $2x+3y-5=0$.

Координаты точки $A(\overset{x_A}{1};\ \overset{y_A}{1})$ обращают заданное уравнение в тождество: $2x_A+3y_A-5=0$; $2\cdot 1+3\cdot 1-5=0$; $\Rightarrow 0\equiv 0$. Следовательно, точка $A(1;1)\in$ $\in(l)$.

Координаты точки $B(\overset{x_B}{1};\ \overset{y_B}{0})$ не удовлетворяют заданному уравнению: $2x_B+3y_B-5=0$; $2\cdot 1+3\cdot 0-5=0$; $\Rightarrow -3\neq 0$, т.е. точка $B(1;\ 0)\notin(l)$.

Общим уравнением прямой называется *уравнение первого порядка* вида $\boxed{Ax+By+C=0}$, где *коэффициенты* A и B *одновременно в нуль не обращаются.*

Рассмотрим *частные случаи* общего уравнения прямой:

а) $C=0$; $Ax+By=0\Rightarrow y=-\dfrac{A}{B}x=kx$ – прямая проходит через начало системы координат (рис. 2):

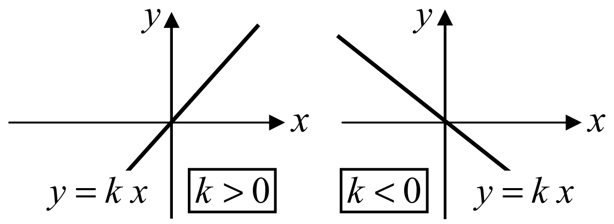


Рис. 2. *Прямая, проходящая через начало координат.*

б) $B=0; Ax+C=0 \Rightarrow x=-\dfrac{C}{A}=a$ – прямая проходит параллельно оси ординат Oy (рис. 3, уравнение справедливо для всех значений переменной y):

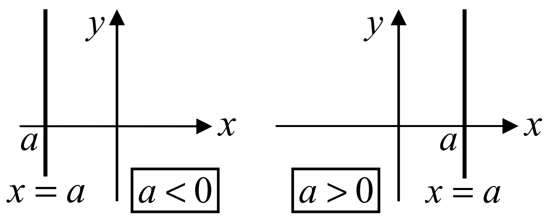


Рис. 3. *Прямая, проходящая параллельно оси* Oy.

При $C=0$ прямая $\boxed{x=0}$ описывает ось Oy.

в) $A=0; By+C=0 \Rightarrow y=-\dfrac{C}{B}=b$ – прямая проходит параллельно оси абсцисс (рис. 4, уравнение справедливо для всех значений переменной x):

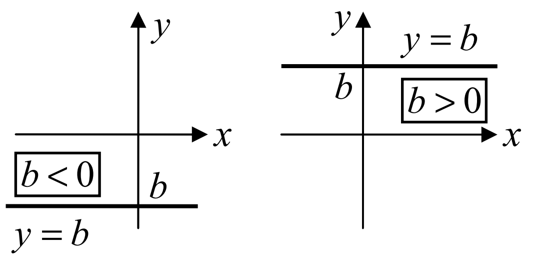


Рис. 4. *Прямая, проходящая параллельно оси абсцисс.*

При $C=0$ прямая $\boxed{y=0}$ описывает ось абсцисс.

Для того чтобы отобразить прямую в прямоугольной системе координат, достаточно выбрать *два* значения абсциссы x (например, $x_1=0$ и $x_2=1$) и вычислить по уравнению прямой *две* ординаты, так как ***через две несовпадающие точки проходит одна и только одна прямая***. Например, надо построить прямую

$$\boxed{2y-4x+1=0}.$$

x	y
0	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{2}$

Подставим в это уравнение значения абсцисс $x_1=0$ и $x_2=$ $=1$, вычислим ординаты $y_1=-\dfrac{1}{2}$ и $y_2=\dfrac{3}{2}$. Обычно эти данные представляют в виде таблицы. Следовательно, прямая проходит через точки $A\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$ и $B\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

7.2. *Виды уравнений прямой*

1. ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***. Пусть дано общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$, в котором коэффициент $B\neq 0$. Разрешим *общее уравнение прямой* относительно переменной y:

$$B\,y=-A\,x-C;\;\; y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Обозначим через $k=-\dfrac{A}{B}$ и $b=-\dfrac{C}{B}$, тогда уравнение примет вид

$$\boxed{y=k\,x+b}$$

и называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***.

Выясним геометрический смысл параметров k и b. При $x=0$, $y=b$, т.е. параметр b *показывает, какой величины отрезок* (OB) *отсекает прямая на оси ординат* Oy, считая от начала отсчёта (начальная ордината). При $y=0$, $x=-\dfrac{b}{k}$ (начальная абсцисса), т.е. прямая отсекает на оси абсцисс Ox отрезок $-\dfrac{b}{k}$ (OA, рис. 5, для определённости принято, что $k>0$, $b>0$):

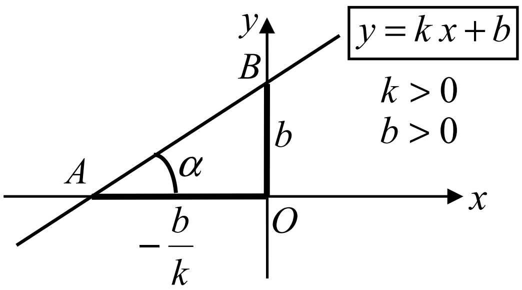


Рис. 5. *Отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях.*

Из рис. 5 видно, что

$$\boxed{tg\alpha=\frac{b}{\left|-\dfrac{b}{k}\right|}=|\,k\,|=k>0},$$

т.е. ***угловой коэффициент*** k ***определяет тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси*** Ox.

● Для прямой, *проходящей через начало координат* ($C=0\Rightarrow b=0$), уравнение прямой с угловым коэффициентом принимает вид

$$\boxed{y=k\,x}.$$

Для прямой, *параллельной оси ординат* Oy, угол $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, поэтому угловой коэффициент $k=tg\alpha=tg\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\textit{не существует}$. В этом случае прямая параллельна оси ординат и описывается уравнением $\boxed{x = x_0}$, где x_0 – абсцисса точки пересечения прямой с осью абсцисс Ox. Для прямой, *параллельной оси абсцисс* Ox, угол $\alpha = 0$, поэтому угловой коэффициент $k = tg\alpha = tg0 = 0$. В этом случае прямая определяется уравнением $\boxed{y = b}$, где b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

2. ***Уравнение прямой в отрезках***. Пусть в общем уравнении прямой параметр $C \neq 0$. Выполним следующие преобразования $Ax + By = -C$; $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$. Обозначим через $a = \frac{-C}{A}$ и $b = \frac{-C}{B}$, тогда последнее уравнение перепишется в виде

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1},$$

которое называется ***уравнением прямой в отрезках***.

При $x = 0,\ y = b$, т.е. параметр b показывает, какой величины отрезок отсекает прямая на оси ординат Oy, считая от начала отсчёта. При $y=0,\ x=a$, т.е. прямая отсекает на оси абсцисс Ox отрезок a. Следовательно, прямая проходит через две точки: $B(0;b)$ и $A(a;0)$. Геометрический смысл величин a и b показан на рис. 6 (для определённости взяты $a<0$ и $b<0$):

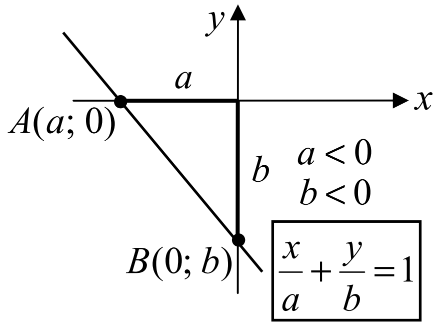
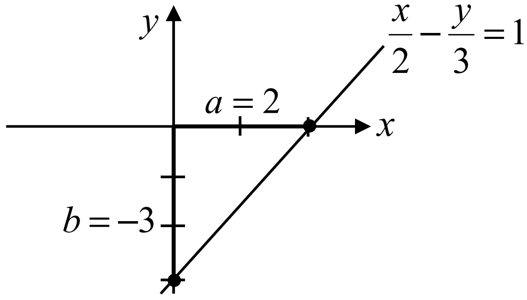


Рис. 6. *Отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях.*

Пример 3. Построить прямую $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

Перепишем уравнение в виде $\frac{x}{\underset{a}{2}} + \frac{y}{\underset{b}{-3}} = 1 \Rightarrow a = 2;\ \ b = -3$:



3. ***Уравнение прямой, проходящей через две точки***. Пусть дано *общее уравнение прямой* $Ax+By+C=0$, которая проходит через две заданные точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Так как точки M_1 и M_2 лежат на данной прямой, то их координаты удовлетворяют *общему уравнению прямой*, т.е. выполняются равенства:

$$Ax_1+By_1+C=0$$
$$Ax_2+By_2+C=0.$$

Вычтем первое из этих равенств из *общего уравнения прямой* и из второго равенства:

$$A(x-x_1)+B(y-y_2)=0,\quad A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0.$$

Пусть $B\neq 0$, тогда полученные равенства можно преобразовать к виду $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=-\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{A}{B}$. Отсюда находим, что

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ \text{ или } \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}.$$

Полученное уравнение называется ***уравнением прямой, проходящей через две заданные точки***.

При $x_2=x_1$ знаменатель первой дроби обращается в нуль, а уравнение прямой принимает вид $\boxed{x=x_1}$. В этом случае прямая параллельна оси ординат Oy. При $y_2=y_1$ (знаменатель второй дроби обращается в нуль) прямая, параллельная оси абсцисс Ox, описывается уравнением $\boxed{y=y_1}$.

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-1;-2)$ и $M_2(2;\ 3)$.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки

$$M_1(\overset{x_1}{-1};\overset{y_1}{-2})\ \text{ и }\ M_2(\overset{x_2}{2};\ \overset{y_2}{3}).$$

Тогда $\boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow}\ \dfrac{x-(-1)}{-2-(-1)}=\dfrac{y-2}{3-2}\Rightarrow\ \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{1}$.

Напомним, что переменные x и y являются *текущими координатами произвольной точки*, принадлежащей прямой, поэтому вместо этих величин *ничего не надо подставлять*.

4. ***Уравнение прямой, проходящей через заданную точку*** $M_0(x_0;\ y_0)$ ***параллельно данному вектору*** $\boldsymbol{S}\,(m;n)$ (***каноническое уравнение прямой***). Пусть прямая проходит через данную точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{S}\,(m;\ n)$, который называется ***направляющим вектором***

прямой. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x;y)$ и создадим вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_0M}\,(x-x_0;\ y-y_0)$ (рис. 7):

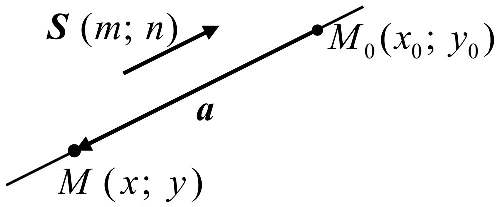


Рис. 7. *Прямая, проходящая через данную точку параллельно направляющему вектору.*

В силу того, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{S}$ коллинеарные ($\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{S}$), то по условию коллинеарности (отношения соответствующих проекций равны между собой, см. п. 4.4, ***4***):

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}.$$

Уравнение называется ***уравнением прямой, проходящей через заданную точку в данном направлении***, или ***каноническим уравнением прямой***.

5. ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку*** $M_0(x_0;\,y_0)$ ***перпендикулярно заданному ненулевому вектору*** $\boxed{\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\mathrm{B})}$. Пусть прямая проходит через данную точку $M_0(x_0;\,y_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\boxed{\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\mathrm{B})}$, который называется ***нормальным вектором прямой***. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x;y)$ и создадим вектор

$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_0M}\,(x-x_0;\ y-y_0)$ (рис. 8):

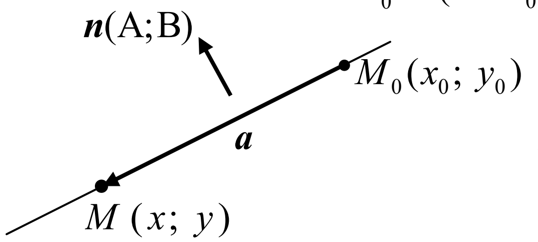


Рис. 8. *Прямая, проходящая через заданную точку перпендикулярно нормальному вектору.*

В силу того, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$ перпендикулярные, то их скалярное произведение равно нулю (см. п. 5.1, ***5***): $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$. Используя координатную форму записи скалярного произведения (см. п. 5.2, ***5***), получим ***уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному направлению***:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}.$$

○ Это уравнение можно переписать в виде общего уравнения прямой $\boxed{Ax+By+C=0}$, где свободный коэффициент

$$C=-Ax_0-By_0.\ ○$$

6. ***Параметрические уравнения прямой***. Если каждую дробь в каноническом уравнении прямой приравнять некоторому параметру t:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-x_0=m\cdot t \\ y-y_0=n\cdot t \end{cases},$$

то получим ***параметрические уравнения прямой*** $\boxed{\begin{cases} x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \end{cases}}$.

7.3. *Основные задачи о прямой на плоскости*

1. *Координаты точки пересечения двух прямых*. Пусть две прямые заданы общими уравнениями $\begin{cases} l_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$. Требуется найти *координаты точки пересечения* прямых. Для того чтобы вычислить *координаты точки пересечения* $M(x;y)$, необходимо решить вышеприведенную *СЛАУ*, так как координаты точки $M(x;y)$ должны одновременно удовлетворять уравнениям прямых l_1 и l_2.

Надо помнить, что главный определитель *СЛАУ* $\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$ должен быть отличен от нуля. Если он равен нулю, а какой-либо вспомогательный определитель отличен от нуля, то прямые не пересекаются, они параллельны. Если все определители *СЛАУ* равны нулю, то прямые l_1 и l_2 совпадают (***условием совпадения двух прямых*** ($l_1=l_2$) является выполнение равенств $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}}$).

2. *Угол между двумя пересекающимися прямыми*. Пусть даны две пересекающиеся прямые, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами $\begin{cases} l_1: y=k_1x+b_1 \\ l_2: y=k_2x+b_2 \end{cases}$ ($k_1=tg\alpha_1, k_2=tg\alpha_2$). Требуется найти угол φ между прямыми l_1 и l_2 (рис. 9):

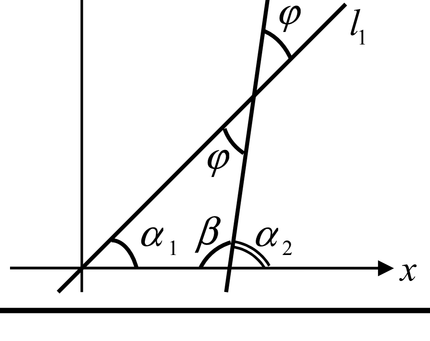


Рис. 9. *Угол между двумя прямыми.*

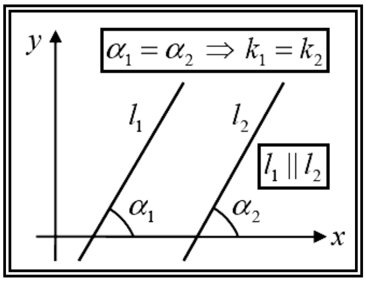
Из рис. 9 видно, что $\beta = \pi - \alpha_2$, а угол $\varphi = \pi - \alpha_1 - \beta = \alpha_2 - \alpha_1$. Вычислим $tg\varphi$:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1\, tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

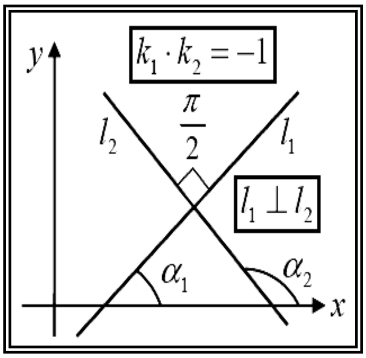
Следовательно, угол между пересекающимися прямыми определяется формулой

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}.$$

Из полученной формулы видно:



а) если прямые l_1 и l_2 ***параллельны*** или ***совпадают*** ($\boxed{\varphi = 0}$), то $tg\varphi = 0$. Отсюда следует ***<u>условие параллельности прямых</u>***: *угловые коэффициенты прямых равны между собой* $\boxed{k_2 = k_1}$.



б) если прямые l_1 и l_2 ***перпендикулярны*** ($\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$), то $tg\varphi$ *не существует* (знаменатель дроби обращается в нуль). Отсюда следует ***<u>условие перпендикулярности прямых</u>***: *угловые коэффициенты прямых связаны между собой соотношением*

$$\boxed{k_1 k_2 = -1} \text{ или } \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \ (\boxed{k_1 \neq 0}).$$

Пример 5. Определить угол между прямыми $\begin{cases} l_1 : y = 4x + 5 \\ l_2 : y = 4x - 7 \end{cases}$.

В силу того, что $\boxed{k_2 = k_1 = 4}$, то прямые параллельны, следовательно, $\varphi = 0$.

Пример 6. Как расположены прямые $\begin{cases} l_1 : y = 3x - 1 \\ l_2 : y = -\frac{1}{3}x + 7 \end{cases}$ относительно друг друга?

Так как угловые коэффициенты $k_1 = 3$, $k_2 = -1/3$ и связаны между собой соотношением $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$, то прямые взаимно перпендикулярны.

- Если прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями с направляющими векторами $\boldsymbol{S}_1(m_1; n_1)$ и $\boldsymbol{S}_2(m_2; n_2)$, то угол между прямыми можно найти из формулы (см. п. 5.2, **<u>5</u>**):

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2}{|\boldsymbol{S}_1|\cdot|\boldsymbol{S}_2|} =}\boxed{\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}}.$$

<u>Условие параллельности прямых</u> l_1 и l_2 ($l_1 \parallel l_2$): направляющие векторы $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ *коллинеарные*, т.е. $\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}}$.

<u>Условие перпендикулярности прямых</u> l_1 и l_2 ($l_1 \perp l_2$): направляющие векторы $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ *перпендикулярны*, т.е. $\boxed{m_1m_2+n_1n_2=0}$. ○

○ Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями или уравнениями прямых, которые проходят перпендикулярно двум векторам $\boldsymbol{n}_1(\mathrm{A}_1;\mathrm{B}_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(\mathrm{A}_2;\mathrm{B}_2)$, то угол между прямыми можно найти из формулы (см. п. 5.2, <u>**5**</u>):

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2+\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}{\sqrt{\mathrm{A}_1^2+\mathrm{B}_1^2}\cdot\sqrt{\mathrm{A}_2^2+\mathrm{B}_2^2}}}.$$

<u>Условие параллельности прямых</u> l_1 и l_2 ($l_1 \parallel l_2$): нормальные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ *коллинеарные*, т.е. $\boxed{\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2}=\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}}$.

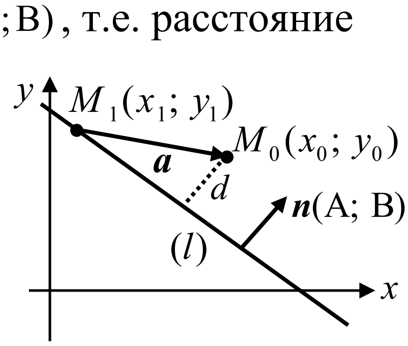
<u>Условие перпендикулярности прямых</u> l_1 и l_2 ($l_1 \perp l_2$): нормальные векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ *перпендикулярны*, т.е. $\boxed{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2+\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2=0}$. ○

<u>**3**</u>. <u>*Расстояние от точки до прямой*</u>. Расстояние от точки до прямой определяется вдоль перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0;\ y_0)$ на прямую l. Если прямая l задана общим уравнением

$$\boxed{l:\ Ax+By+C=0},$$

то расстояние d от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой l определяется формулой (расстояние определяется проекцией любого вектора, соединяющего произвольную точку $M_1(x_1;\ y_1)$ прямой ($M_1(x_1;\ y_1)\in l$) с заданной точкой $M_0(x_0;\ y_0)$, на нормальный вектор $\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\mathrm{B})$, т.е. расстояние

$$\boxed{\mathrm{d} = \text{Пр}_{\vec{n}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{n}|}},$$



где вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_0\,(x_0-x_1;\ y_0-y_1)$):

$$\boxed{\mathrm{d} = \frac{|\mathrm{A}\,x_0+\mathrm{B}\,y_0+\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}}.$$

Если прямая l задана уравнением прямой с угловым коэффициентом, то расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой l определяется формулой:

$$\boxed{d = \frac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{k^2+1}}}.$$

<u>8</u> “*Линии второго порядка*”

8.1. *Окружность*

<u>Кривой второго порядка</u> называется линия, которая описывается уравнением $\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$, при этом хотя бы один из коэффициентов A, B или C должен быть отличен от нуля.

○ Если коэффициенты $A = B = C = 0$, то уравнение кривой второго порядка вырождается в уравнение прямой. ○

○ При некоторых значениях параметров A, B,…, F приведенное уравнение может не отображать никакой геометрический образ или описывать точку на плоскости (см. примеры ниже по тексту). ○

При определённых значениях параметров, входящих в приведенное уравнение, оно задаёт канонические уравнения *окружности*, *эллипса* (не путать с *овалом*), *гиперболы* и *параболы*. Рассмотрим *кривые второго порядка* в указанной последовательности.

Окружностью называется *геометрическое место точек равноудалённых от выделенной точки* $O\,(x_0;\, y_0)$, называемой ***центром окружности***, на расстояние R, которое называется ***радиусом окружности***.

Получим уравнение окружности (рис. 10). Пусть точка $M(x;\, y)$ лежит на окружности:

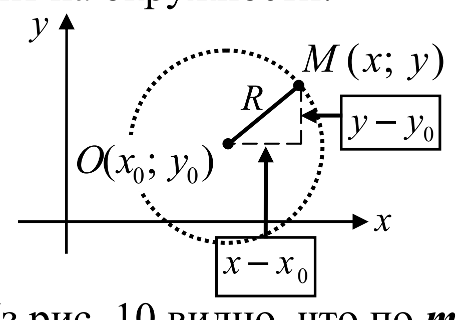


Рис. 10. *Вывод уравнения окружности.*

Из рис. 10 видно, что по ***<u>теореме Пифагора</u>*** получим равенство

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2},\ R \neq 0,$$

которое определяет ***каноническое уравнение окружности*** (рис. 11):

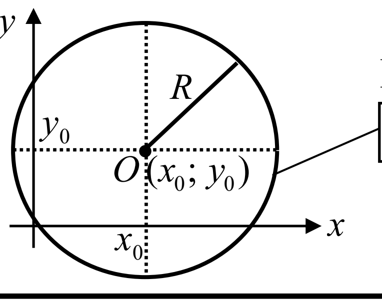


Рис. 11. *Окружность.*

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

Из рис. 11 видно, что *окружность* является симметричной фигурой относительно прямых $x = x_0$ и $y = y_0$.

Если выразить переменную x из уравнения окружности, то получим

$$\boxed{x = x_0 \pm \sqrt{R^2 - (y - y_0)^2}}.$$

В полученном равенстве знак “+” соответствует ***правой*** полуокружности, а знак “–” – ***левой*** полуокружности. Если выразить переменную y из уравнения окружности, то получим

$$\boxed{y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}.$$

В этом равенстве знак “+” соответствует ***верхней*** полуокружности, а знак “–” – ***нижней*** полуокружности.

При $x_0 = y_0 = 0$ ***уравнение окружности с центром в начале координат*** имеет вид $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$.

Раскрыв скобки в каноническом уравнении окружности, получим

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0}.$$

Сравнивая это уравнение с общим уравнением кривой второго порядка, найдём, что коэффициенты $B = 0$, $A = C \neq 0$. Преобразуем общее уравнение кривой второго порядка к каноническому уравнению окружности:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \;\Big|\; \div A \neq 0;$$

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0.$$

Выделим полные квадраты по текущим координатам:

$$x^2 + 2\frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{A}\right)^2 + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \left(\frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} - \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{E}{A}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}.$$

Из сравнения полученного уравнения с каноническим уравнением окружности найдём:

$$x_0 = -\frac{D}{A};\; y_0 = -\frac{E}{A};\; R^2 = \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}.$$

Рассмотрим возможные варианты:

а) $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} > 0$ – полученное уравнение описывает окружность;

б) $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} = 0$ – окружность вырождается в точку $O\,(x_0;\; y_0)$;

в) $\left(\dfrac{D}{A}\right)^2+\left(\dfrac{E}{A}\right)^2-\dfrac{F}{A}<0$ – полученное уравнение не определяет никакой линии на плоскости.

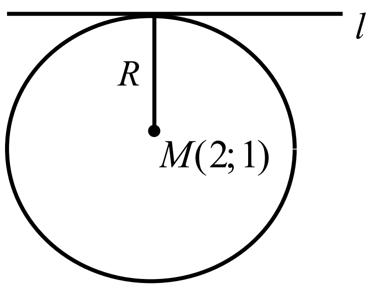
Пример 1. Какую линию определяет уравнение $x^2+y^2+6x-4y=0$?

Так как коэффициенты $B=0$, $A=C=1\neq 0$, то заданное уравнение может описывать окружность. Преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты:

$$x^2+y^2\overset{-2x_0}{\overline{+6x}}\overset{-2y_0}{\overline{\overline{-4y}}}=0;$$

Из приведенного равенства видно, что $\begin{cases}-2x_0=6\\ -2y_0=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-3\\ y_0=2\end{cases}$. Следовательно, $x^2+6x+9+y^2-4y+4=9+4 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=13$ – уравнение *окружности с центром в точке* $O\,(-3;\,2)$ *и радиусом* $R=\sqrt{13}$.

Пример 2. Составить уравнение окружности, центр которой совпадает с точкой $M(2;\,1)$, а прямая линия $l: 2x+3y+1=0$ является касательной к окружности.



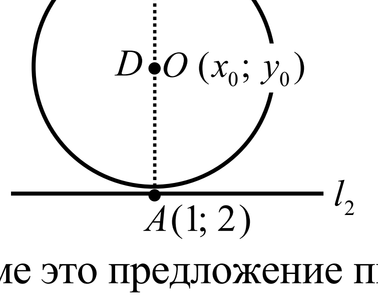
Радиус окружности R равен расстоянию от центра окружности точки $M(\overset{x_0}{2};\overset{y_0}{1})$ до прямой l (см. *п.3*, **Лекция № 7**), т.е.

$$R=d=\frac{|\,Ax_0+By_0+C\,|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|\,2\cdot 2+3\cdot 1+1\,|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{13}}\,(\textit{ед. дл.})$$

В уравнении окружности $x_0=2$, $y_0=1$, таким образом, оно имеет вид:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{64}{13}.$$

Пример 3. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 2x+3y+1=0$ и $l_2: 2x+3y-8=0$, причём одной из них в точке $A(1;\,2)$.



Прежде всего, определим, на какой из прямых l_1 или l_2 лежит точка $A(1;2)$. Для этого подставим её координаты в уравнения прямых l_1 и l_2:

$$l_1: 2\cdot 1+3\cdot 2+1=9\neq 0,$$

следовательно, точка $A(1;2)$ принадлежит прямой $l_2: 2\cdot 1+3\cdot 2-8=0\equiv 0$ (в сокращённой форме это предложение пишут так: $A(1;\,2)\in l_2$, где значок $\in$ означает *принадлежит*). Таким образом, диаметр окружности D равен расстоянию от точки $A(1;2)$ до прямой l_1:

$$D = d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}\,(ед.\ дл.),$$

а радиус окружности $R = \frac{1}{2}D = \frac{9}{2\sqrt{13}}(ед.\ дл.)$. Найдём координаты центра окружности точки $O(x_0;y_0)$, которая делит отрезок AB пополам. Вначале составим уравнение прямой AB и вычислим координаты точки $B(x_B;y_B)$. $\underline{AB}$: перейдём от общего уравнения прямой l_2 к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$:

$$2x - 8 = -3y \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow k_1 = -\frac{2}{3}.$$

Так как прямая $AB \perp l_2$, то её угловой коэффициент $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{2}$. Прямая AB проходит через точку $A(1;2)$, следовательно, $y_A = k_2x_A + b_2$. Отсюда находим параметр $b_2 = 2 - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$ и уравнение прямой

$$\underline{AB}:\ y = k_2x + b_2 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Найдём координаты точки $\underline{\underline{B}}$, которая является пересечением прямых AB и l_1, т.е. решим *СЛАУ*, составленную из уравнений прямых AB и l_1 (см. п. 7.3, <u>**7**</u>):

$$\underline{\underline{B}}:\ \begin{cases} AB: y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ l_1: y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Подставим выражение для переменной y из второго уравнения в первое, получим $x_B = \frac{-5}{13}$. Подставив это значение во второе уравнение системы, найдём $y_B = \frac{-1}{13}$, т.е. $B\left(\frac{-5}{13};\frac{-1}{13}\right)$. Для вычисления координат точки O применим <u>***формулы деления отрезка пополам***</u> (см. п. 4.7, <u>**4**</u>):
$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$, в этой формуле $x = x_O$, $y = y_O$ (координаты точки O), $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ (координаты точки A), $x_2 = -\frac{5}{13}$ и $y_2 = -\frac{1}{13}$ (координаты

точки B), следовательно, $O:\begin{cases} x_O = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{5}{13}\right)=\dfrac{4}{13} \\ y_O = \dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{13}\right)=\dfrac{25}{26} \end{cases}$, т.е. координаты точки $O\left(\overset{x_0}{\dfrac{4}{13}};\ \overset{y_0}{\dfrac{25}{26}}\right)$. Таким образом, уравнение искомой окружности имеет вид:

$$\left(x-\frac{4}{13}\right)^2+\left(y-\frac{25}{26}\right)^2=\frac{49}{52}.$$

8.2. *Эллипс*

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух выделенных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами эллипса***, есть величина постоянная и равная $2a > 2c$.

Выберем декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала отсчёта (рис. 12).

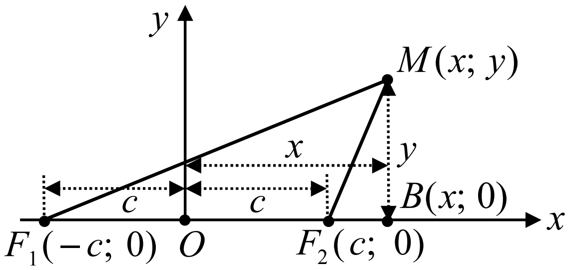


Рис. 12. *Вывод уравнения эллипса.*

Пусть точка $M(x; y)$ лежит на эллипсе, фокусы которого имеют координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Расстояние между фокусами (***фокусное расстояние***) равно $F_1F_2 = 2c$. Согласно определению эллипса, имеем

$$F_1M + MF_2 = 2a.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\underline{F_1BM}$:

катет $F_1B = OB + F_1O = x + c$; катет $BM = y - 0 = y$; по ***<u>теореме Пифагора</u>*** квадрат гипотенузы $(F_1M)^2 = (x+c)^2 + y^2$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\underline{\underline{F_2BM}}$:

катет $F_2B = OB - OF_2 = x - c$; катет $BM = y - 0 = y$; по ***<u>теореме Пифагора</u>*** квадрат гипотенузы $(F_2M)^2 = (x-c)^2 + y^2$.

Согласно определению, имеем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

Возведём обе части равенства в квадрат, получим

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\,.$$

Перенося квадратный корень в левую часть, а всё остальное в правую часть равенства, находим

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+(x-c)^2-(x+c)^2\,.$$

Раскроем разность квадратов

$$(x-c)^2-(x+c)^2=(x-c+x+c)(x-c-x-c)=-4cx\,.$$

Подставим найденное выражение в уравнение и сократим обе части равенства на 4, тогда оно перейдёт в уравнение

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx\,.$$

Вновь возведём обе части равенства в квадрат

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2\,.$$

Раскрывая все скобки в правой части уравнения, получим

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2\,.$$

Соберём неизвестные в левой части, а все известные величины перенесём в правую часть уравнения, получим

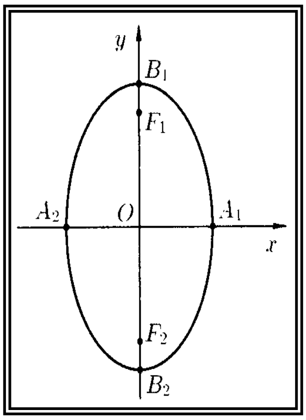
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\,.$$

Введём обозначение для разности, стоящей в скобках,

$$\boxed{a^2-c^2=b^2}.$$

Уравнение принимает вид $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Разделив все члены уравнения на произведение a^2b^2, получим ***каноническое уравнение эллипса***: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$.

Если фокусы расположены на оси абсцисс Ox, то $\boxed{a>b}$ и эллипс ***вытянут вдоль оси*** Ox. Если $a>b$, то параметр a называется ***большой***, а параметр b – ***малой полуосями*** эллипса.



○ При расположении фокусов на оси ординат Oy выполняется противоположное неравенство ($\boxed{b>a}$, параметр b – ***большая***, а параметр a – ***малая полуоси*** эллипса) эллипс ***вытянут вдоль оси*** Oy. ○

○ При параметрическом задании текущих координат точек эллипса x и y он определяется системой равенств: $\boxed{\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}}$, где параметр $t\in[0;\,2\pi)$. ○

Исследуем *каноническое уравнение эллипса*. Если точка $M(x;y)$ лежит на эллипсе, то ему принадлежат также точки $M_1(-x;y)$, $M_2(x;-y)$ и $M_3(-x;-y)$, так как текущие координаты x и y точек эллипса входят в его уравнение в чётной степени. Следовательно, эллипс симметричен относительно координатных осей, называемых ***осями симметрии*** эллипса. Точка O называется ***центром*** эллипса.

Найдём координаты точек пересечения эллипса с декартовыми осями:

$Ox: y=0; \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\mp a$, т.е. точками пересечения эллипса с осью абсцисс будут точки $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$;

$Oy: x=0; \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\mp b$, т.е. точками пересечения эллипса с осью ординат будут точки $B_1(0;-b)$ и $B_2(0;b)$.

Найденные точки называются ***вершинами*** эллипса.

Координаты точек эллипса удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} -a \le x \le a \\ -b \le y \le b \end{cases},$$

т.е. лежат *внутри прямоугольника со сторонами* $2a$ и $2b$ (рис. 13).

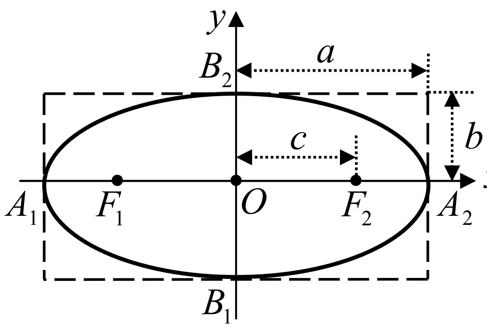


Рис. 13. *Вершины, фокусы и параметры эллипса* $\boxed{c^2=a^2-b^2}$ (при $a>b$) *или* $\boxed{c^2=b^2-a^2}$ (при $b>a$).

Форма эллипса зависит от отношения полуосей a и b, например, при их равенстве ($a=b=R$) эллипс вырождается в окружность с центром в начале координат ($\boxed{x^2+y^2=R^2}$).

Эксцентриситетом эллипса ε называется отношение половины фокусного расстояния к большой полуоси эллипса $\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}}$ (при расположении фокусов на оси ординат Oy: $\boxed{\varepsilon=\frac{c}{b}}$).

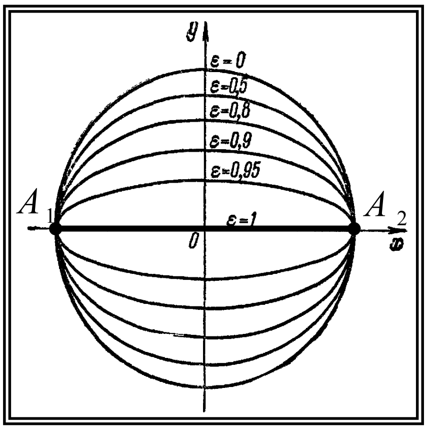
Из определения эксцентриситета эллипса следует, что он удовлетворяет двойному неравенству

$$\boxed{0<\varepsilon<1},$$

так как половина фокусного расстояния удовлетворяет неравенству

$$0<c<a.$$

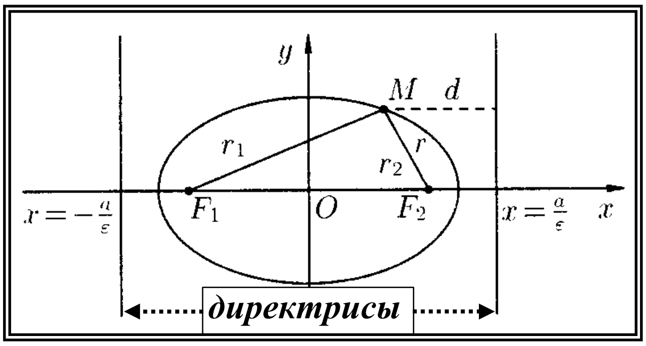
Этот параметр определяет форму эллипса. Для демонстрации данного факта рассмотрим квадрат отношения малой полуоси эллипса к большой полуоси



$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=1-\varepsilon^2.$$

Если эксцентриситет эллипса $\varepsilon\to 0$ (стрелочка $\to$ означает *стремится к*), то $b\to a$, эллипс вырождается в окружность. Если $\varepsilon\to 1$, то $b\to\to 0$, и эллипс вырождается в отрезок A_1A_2.

Эксцентриситет эллипса ε определяет положения двух прямых $\boxed{x=\pm\frac{a}{\varepsilon}}$, которые называются *директрисами* эллипса. Отношение расстояния r от точки эллипса M до его фокуса F_2 к расстоянию d от данной точки до директрисы равно эксцентриситету эллипса.



Пример 4. Составить уравнение *эллипса*, если его большая полуось $a=5$, а его эксцентриситет $\varepsilon=0{,}6$.

Исходя из понятия эксцентриситета, найдём абсциссу фокуса, т.е. параметр c: $\varepsilon=\frac{c}{a}=0{,}6\ \Rightarrow\ c=a\varepsilon=5\cdot 0{,}6=3$. Зная параметр c, можно вычислить малую полуось эллипса $b^2=a^2-c^2=25-9=16$. Следовательно, каноническое уравнение заданного эллипса имеет вид:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1.$$

Пример 5. Найти площадь треугольника, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $4x^2+3y^2=48$, а третья вершина – в центре окружности $x^2+10x+y^2-2y=0$.

Для определения координат фокусов эллипса и центра окружности преобразуем их уравнения к каноническому виду.

$$\textit{Эллипс}:\ 4x^2+3y^2=48\,\Big|\div(48)\ \Rightarrow\frac{4x^2}{48}+\frac{3y^2}{48}=1\ \Rightarrow\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1.$$

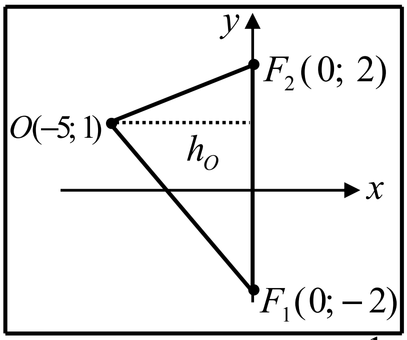
Следовательно, *большая полуось* эллипса $b^2=16$, а *малая полуось* – $a^2=12$. Так как $b>a$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат Oy, т.е. эллипс вытянут вдоль этой оси. Определим расположение фокусов данного эллипса $c = \mp\sqrt{b^2 - a^2} = \mp\sqrt{16 - 12} = \mp 2$. Итак, $F_1(0; -2)$ и $F_2(0; 2)$.

$$\textit{Окружность}: \ x^2 + 10x + y^2 - 2y = 0.$$

Выделим полные квадраты по переменным x и y

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 25 + 1 \Rightarrow (x+5)^2 + (y-1)^2 = 26.$$

Следовательно, центр окружности находится в точке $O(-5; 1)$.



Построим в декартовой системе координат треугольник OF_1F_2. Согласно школьной формуле, площадь треугольника OF_1F_2 равна $S = \frac{1}{2} h_O \cdot F_1F_2$. Высота $h_O = |x_O| = 5$, а основание $F_1F_2 = 4$. Следовательно, площадь треугольника OF_1F_2 равна: $S = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 = 10$ (*ед. пл.*).

8.3. *Гипербола*

Гиперболой называется геометрическое место точек абсолютное значение разности расстояний от которых до двух выделенных точек F_1 и F_2, называемых ***фокусами*** гиперболы, есть величина постоянная и равная $2a < 2c$.

Выберем декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 были расположены на оси абсцисс Ox симметрично относительно начала отсчёта. Пусть точка $M(x; y)$ лежит на гиперболе, фокусы которой имеют координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ (рис. 14):

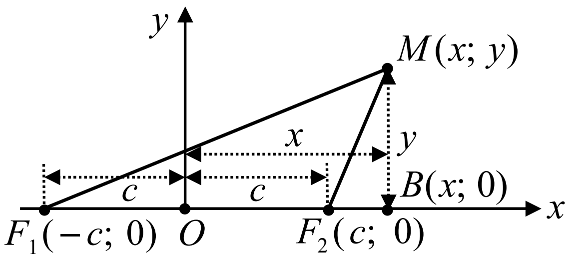


Рис. 14. *Вывод уравнения гиперболы.*

Расстояние между фокусами (***фокусное расстояние***) равно

$$F_1F_2 = 2c.$$

Согласно определению гиперболы, имеем $|F_1M - MF_2| = 2a$. Из треугольников F_1BM и F_2BM (см. выше п.2) по <u>***теореме Пифагора***</u> найдём $(F_1M)^2 = (x+c)^2 + y^2$ и $(F_2M)^2 = (x-c)^2 + y^2$, соответственно. Следовательно,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Выполнив преобразования, которые были показаны в предыдущем *п.2*, получим

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)\,.$$

Введём обозначение для разности, стоящей в скобках

$$\boxed{c^2-a^2=b^2}.$$

Получим $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$. Разделив все члены уравнения на величину a^2b^2, получим ***каноническое уравнение гиперболы***:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

○ Если фокусы расположены на оси абсцисс Ox, то гипербола ***вытянута вдоль оси*** Ox. Параметр a называется ***действительной***, а параметр b – ***мнимой полуосями*** гиперболы. При расположении фокусов на оси ординат параметр b называется ***действительной***, а параметр a – ***мнимой полуосями*** гиперболы, она ***вытянута вдоль оси*** Oy, а её уравнение имеет вид:

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1}.\ ○$$

Если точка $M\,(x;\ y)$ принадлежит гиперболе, то ей принадлежат и симметричные точки $M_1(-x;\,y)$, $M_2(x;\,-y)$ и $M_3(-x;\,-y)$, так как текущие координаты x и y точек гиперболы входят в её уравнение в чётной степени. Следовательно, гипербола симметрична относительно координатных осей, которые в данном случае будут называться ***осями симметрии*** гиперболы (рис. 15).

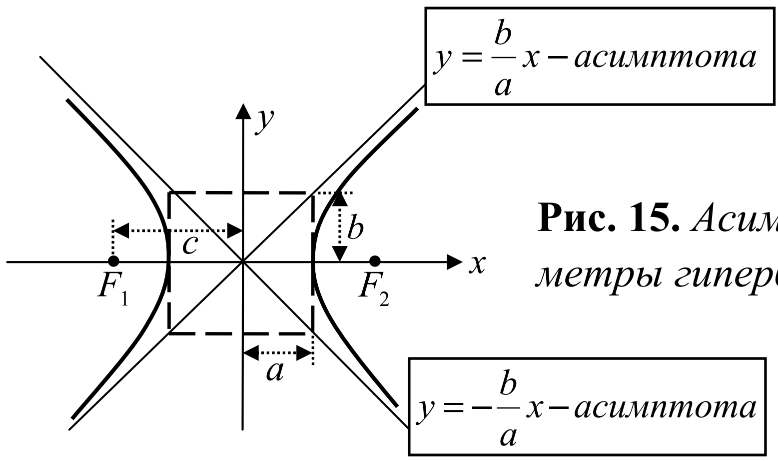
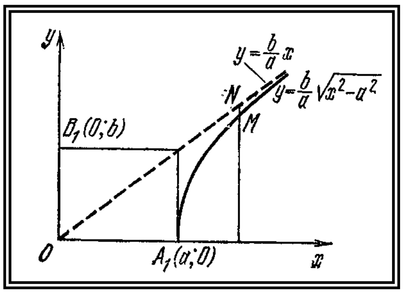


Рис. 15. *Асимптоты и параметры гиперболы* $\boxed{c^2=a^2+b^2}$.

Найдём координаты точек пересечения гиперболы с декартовыми осями:

$Ox: y=0; \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \mp a$, т.е. точками пересечения гиперболы с осью абсцисс будут точки $A_1(-a;\,0)$ и $A_2(a;\,0)$, которые называются *вершинами* гиперболы;

$Oy: x=0; \Rightarrow y^2 = -b^2, y \notin R$, т.е. гипербола не пересекает ось ординат.



Докажем, что при неограниченном возрастании (убывании) текущей координаты x гипербола сколь угодно близко приближается к прямым $y = \pm\frac{b}{a}x$, не пересекая эти прямые. Из уравнения гиперболы находим, что

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

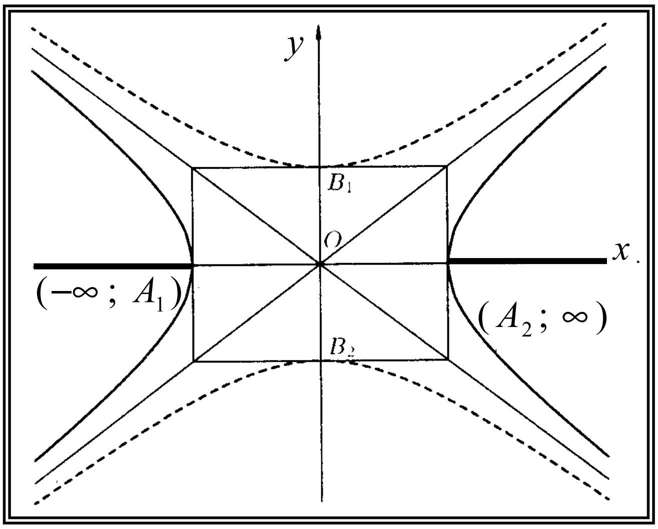
При неограниченном росте (убывании) аргумента x величина $\frac{a}{x} \to 0$, а гипербола неограниченно приближается к прямым $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$, которые называются ***асимптотами*** гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение половины фокусного расстояния к действительной полуоси гиперболы

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}.$$

○ Из определения эксцентриситета гиперболы следует, что он удовлетворяет неравенству $\boxed{\varepsilon > 1}$, так как половина фокусного расстояния удовлетворяет неравенству $c > a$. Кроме того, эта характеристика описывает форму гиперболы и определяет положение директрис гиперболы. Рассмотрим квадрат отношения мнимой полуоси гиперболы к действительной полуоси $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \varepsilon^2 - 1$. Если эксцентриситет $\varepsilon \to 1$, то $b = 0$, и гипербола вырождается в два полубесконечных отрезка $(-\infty; A_1)$ и $(A_2; \infty)$. Если $\varepsilon = \sqrt{2}$, то $b = a$ и гипербола становится равносторонней. ○

○ В параметрическом виде уравнение гиперболы имеет вид (см. п. 0.6, <u>***0***</u>): $\boxed{\begin{cases} x = a\,ch t \\ y = b\,sh t \end{cases}}$ (для сопряжённой гиперболы $\boxed{\begin{cases} x = a\,sh t \\ y = b\,ch t \end{cases}}$), где параметр $t \in (-\infty;\, +\infty)$. ○



○ На данном рисунке показаны: *сплошной линией* гипербола, которая описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а *пунктирной линией* – уравнением

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Эти гиперболы называются ***сопряжёнными***. ○

Пример 6. Составить уравнение гиперболы, у которой мнимая полуось $b=5$ и она проходит через точку $M(4;\,5)$.

Для решения задачи воспользуемся каноническим уравнением гиперболы, подставив в него все известные величины:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{a^2}-\frac{25}{25}=1 \Rightarrow \frac{16}{a^2}=2 \Rightarrow a^2=8.$$

Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{25}=1.$$

Пример 7. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $x^2+6y^2=12$.

Для определения координат фокусов и вершин эллипса преобразуем его уравнение к каноническому виду.

$$\text{\textit{Эллипс}}:\ x^2+6y^2=12\ \Big|\div(12) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{12}+\frac{6y^2}{12}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Следовательно, *большая полуось* эллипса $a^2=12$, а *малая полуось* – $b^2=2$. Итак, *вершины эллипса* расположены на оси Ox: $A_1(-2\sqrt{3};\,0)$ и $A_2(2\sqrt{3};0)$; на оси Oy: $B_1(0;-\sqrt{2})$ и $B_2(0;\sqrt{2})$. Так как $a>b$, то эллипс вытянут вдоль оси абсцисс Ox. Определим расположение фокусов данного эллипса $c=\mp\sqrt{a^2-b^2}=\mp\sqrt{12-2}=\mp\sqrt{10}$. Итак,

$$F_1(-\sqrt{10};\,0) \text{ и } F_2(\sqrt{10};\,0).$$

Согласно условию задачи (см. рис. 16): $a_{гип}=c_{элл}=\sqrt{10}$; $c_{гип}=a_{элл.}=2\sqrt{3}$. Вычислим длину мнимой полуоси $b^2_{гип.}=c^2_{гип.}-a^2_{гип.}=12-10=2$. Уравнение гиперболы имеет вид: $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

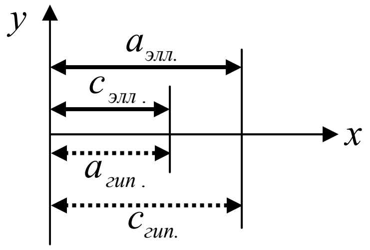


Рис. 16. *Параметры эллипса и гиперболы.*

8.4. *Парабола*

Параболой называется геометрическое место точек равноудалённых от выделенной точки F, называемой ***фокусом*** параболы, и прямой l, называемой ***директрисой***. Расстояние от фокуса F до директрисы l называется ***параметром параболы*** p.

Выберем декартову систему координат так, чтобы фокус F лежал на оси абсцисс Ox, а директриса l проходила бы через точку, расположенную симметрично фокусу F, перпендикулярно к оси абсцисс Ox (рис. 17).

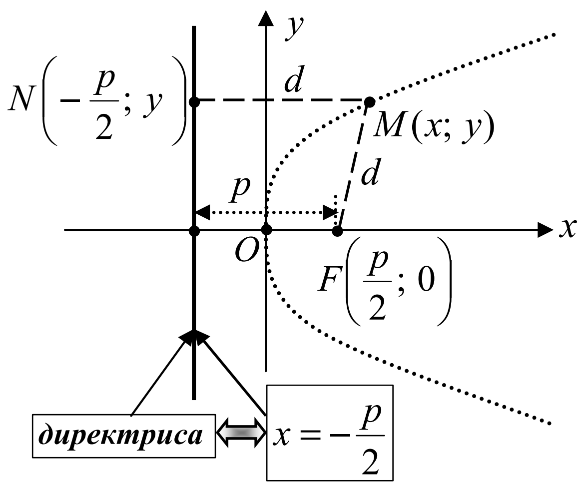


Рис. 17. *Парабола (уравнение директрисы* $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$*).*

Пусть точка $M(x;\, y)$ принадлежит параболе. Вычислим расстояния от точки $M(x;\, y)$ до фокуса и директрисы

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}\,;\quad NM = x + \frac{p}{2}\,.$$

По определению параболы эти расстояния равны, следовательно,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Раскрывая разность квадратов, стоящую в правой части уравнения, получим ***каноническое уравнение параболы***:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

(а также аналогичные ему, см. рис. 18 и рис. 19).

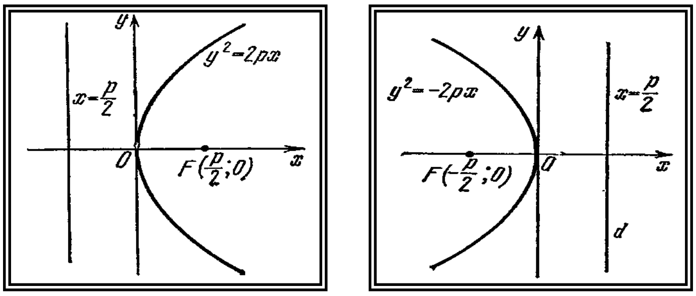


Рис. 18. *Параболы и их уравнения* (вдоль оси Ox).

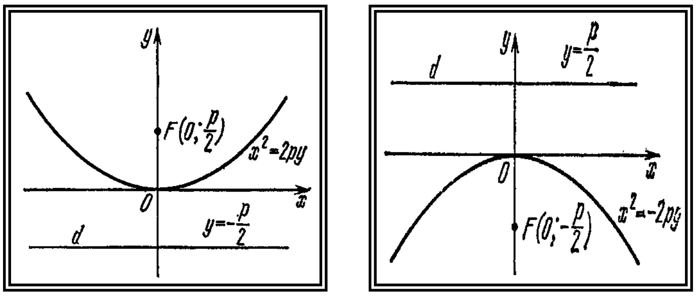


Рис. 19. *Параболы и их уравнения* (вдоль оси Oy).

Найдём координаты точек пересечения параболы с декартовыми осями:

Ox: $y=0;\ \Rightarrow\ x=0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения параболы с осью абсцисс;

Oy: $x=0;\ \Rightarrow\ y=0$, т.е. $O(0;\,0)$ – точка пересечения параболы с осью ординат.

Точка $O(0;\,0)$ называется ***вершиной*** параболы.

Исследуем уравнение параболы $\boxed{y^2 = 2px}$. Если точка $M(x;y)$ принадлежит параболе, то ей принадлежат и точка $M_1(x;-y)$, так как текущая координата y переменной точки параболы входит в уравнение в чётной степени, следовательно, парабола симметрична относительно оси абсцисс Ox. В данном случае ось Ox называется ***осью симметрии параболы***.

Пример 8. Дано уравнение параболы $y^2 = 6x$. Определить координаты фокуса параболы и уравнение ***директрисы***.

Так как из уравнения параболы $y^2 = 6x$ следует, что $2p = 6$, следовательно, $p=3$. Таким образом, фокус параболы лежит в точке $F\left(\frac{3}{2};\,0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид $x=-\frac{p}{2}=-\frac{3}{2}$.

Пример 9. Составить *каноническое уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $3x^2-5y^2=15$ до её асимптоты.

Для определения координат фокусов гиперболы преобразуем её уравнение к каноническому виду.

Гипербола: $3x^2-5y^2=15\,\big|\div(15)\Rightarrow \dfrac{3x^2}{15}-\dfrac{5y^2}{15}=1$ или $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

Следовательно, действительная полуось гиперболы $a=\sqrt{5}$, а мнимая полуось – $b=\sqrt{3}$. Гипербола вытянута вдоль оси абсцисс Ox. Определим расположение фокусов данной гиперболы

$$c=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{5+3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,.$$

Итак, $F_1(-2\sqrt{2};\,0)$ и $F_2(\,2\sqrt{2};\,0)$. Вычислим расстояние от фокуса $F_2(2\sqrt{2};\,0)$ до асимптоты $y=\dfrac{b}{a}x=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,x$, которое равно параметру параболы p (см. п. 7.3, 7):

$$p=d=\frac{\left|k\,x_{F_2}-y_{F_2}+b\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\left|\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cdot 2\sqrt{2}-0+0\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2+1}}=\sqrt{3}\,(\textit{ед. дл.})\,.$$

Следовательно, каноническое уравнение параболы, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат имеет вид: $y^2=-2\sqrt{3}\,x$.

Пример 10. Составить каноническое уравнение параболы, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+8y^2=16$. Написать уравнение директрисы.

Для определения координат фокусов эллипса преобразуем его уравнение к каноническому виду.

Эллипс: $4x^2+8y^2=16\,\big|\div(16)\Rightarrow\dfrac{4x^2}{16}+\dfrac{8y^2}{16}=1$ или $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Следовательно, большая полуось эллипса $a=2$, а малая полуось – $b=\sqrt{2}$. Так как $a>b$, то эллипс вытянут вдоль оси абсцисс Ox. Определим расположение фокусов данного эллипса $c=\mp\sqrt{a^2-b^2}=\mp\sqrt{4-2}=\mp\sqrt{2}$. Итак, $F_1(-\sqrt{2};\,0)$ и $F_2(\sqrt{2};\,0)$. Так как фокус параболы $F\left(\dfrac{p}{2};\,0\right)$ совпадает с одним из фокусов $F_1(-\sqrt{2};\,0)$ или $F_2(\sqrt{2};\,0)$ эллипса, то параметр p найдём из равенства $\frac{p}{2}=\mp\sqrt{2} \Rightarrow p=\mp 2\sqrt{2}$, *уравнение параболы* имеет вид

$$x^2=\mp 2py=\mp 4\sqrt{2}\,y.$$

Директриса определяется уравнением $x=-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{2}$.

9 “***Преобразования декартовой системы координат. Полярная система координат***”

9.1. ***Параллельный перенос и поворот системы координат***

Переход от одной системы координат к какой-либо другой называется *преобразованием системы координат*. Рассмотрим параллельный перенос начала отсчёта и поворот координатных осей относительно общего начала отсчёта:

1. ***Параллельный перенос системы координат***. Пусть на плоскости даны две декартовые системы координат, причём соответствующие оси параллельны и сонаправлены (рис. 20).

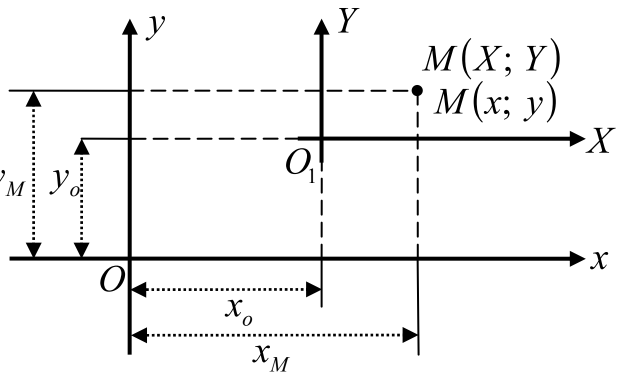


Рис. 20. *Параллельный перенос одной системы координат относительно другой системы.*

Систему координат xOy назовём ***старой***, а систему XO_1Y – ***новой***.

Пусть начало координат O_1 новой системы в старой системе имеет координаты $(x_0;y_0)$. Из рис. 20 видно, что точка $M(x;\,y)$ в новой системе координат будет иметь координаты $M(X;\,Y)$, которые связаны со старыми координатами равенствами

$$\boxed{\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases}}.$$

Эти формулы определяют переход от старых координат точки M к новым. Обратное преобразование (переход от новых координат точки M к старым) задаётся формулами

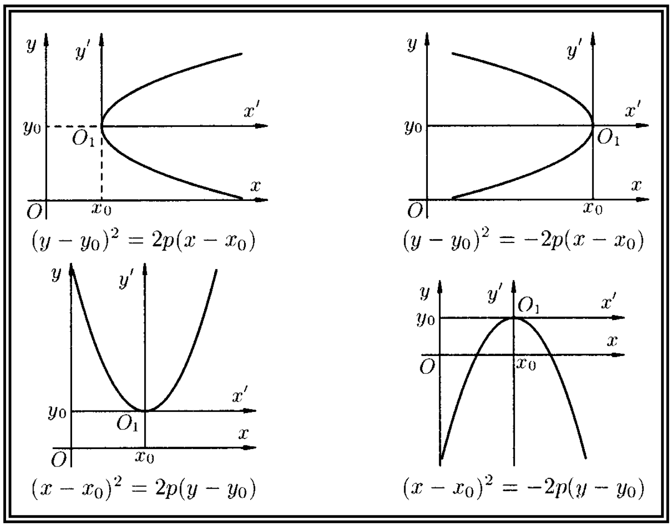
$$\boxed{\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}}.$$

Полученные формулы определяют ***параллельный перенос*** одной системы координат относительно другой.

Параллельный перенос одной системы координат относительно другой позволяет записать уравнения кривых второго порядка в каноническом виде. Если в старой системе координат, например, уравнение параболы имеет вид:

$$y = ax^2 + bx + c\,,$$

то после *параллельного переноса* системы координат (см. рисунки) её уравнение принимает канонический вид (при необходимости выполняют *поворот системы координат вокруг общего начала отсчёта*).



Пример 1. Дана точка $M(3;\,2)$ в старой системе координат и начало новой системы координат $O_1(-1;\,3)$. Вычислить положение точки M в новой системе координат.

Используя формулы, определяющие *параллельный перенос* одной системы координат относительно другой, получим $\begin{cases} X = 3-(-1) = 4 \\ Y = 2-3 = -1 \end{cases}$, т.е. точка M в *новой системе* имеет координаты $M(4;\,-1)$.

2. *<u>Поворот системы координат</u>*. Пусть даны две системы координат (*старая* и *новая*), имеющие общее начало отсчёта и повёрнутые относительно друг друга на угол α (рис. 21):

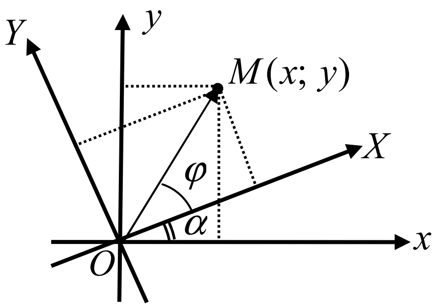


Рис. 21. *Поворот одной системы координат относительно другой системы вокруг общего начала координат двух систем.*

Получим формулы, связывающие *старые* и *новые* координаты произвольной точки $M(x;\,y)$. Из рисунка видно, что в новой системе координаты точки $M(X;\,Y)$ равны $\begin{cases} X = OM\cos\varphi \\ Y = OM\sin\varphi \end{cases}$, а координаты этой точки в старой системе:

$$\begin{cases} x = OM\ \cos(\varphi + \alpha) = OM\ \cos\varphi\cos\alpha - OM\ \sin\varphi\sin\alpha = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = OM\ \sin(\varphi + \alpha) = OM\ \sin\varphi\cos\alpha + OM\ \cos\varphi\sin\alpha = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}.$$

Таким образом, формулы перехода от *новых* координат произвольной точки M к её *старым* координатам имеет вид:

$$\boxed{\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}}.$$

В матричном виде эти равенства можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

где матрица перехода

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдём обратное преобразование системы координат, для чего вычислим матрицу A^{-1} обратную к матрице A (см. *п.2*, **Лекция № 2**):

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Найдём алгебраические дополнения всех элементов

$$A_{11} = M_{11} = \cos\alpha, \qquad A_{21} = -M_{21} = \sin\alpha,$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\sin\alpha, \qquad A_{22} = M_{22} = \cos\alpha.$$

Запишем обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Таким образом, имеем $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Следовательно, формулы перехода от *старой* системы координат к *новой* имеют вид:

$$\boxed{\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}}.$$

Пример 2. Найти координаты точки $M\,(1;\,2)$ в новой системе координат, повёрнутой относительно старой системы на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

Воспользуемся полученными формулами

$$\begin{cases} X = 1\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2 \\ Y = -1\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases},$$

т.е. в новой системе координат точка имеет координаты $M(2;\,-1)$.

Рассмотрим применение *преобразования координат*:

а) Преобразовать уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$ к каноническому виду. Проведём *параллельный перенос* системы координат

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases},$$

получим $Y + y_0 = aX^2 + 2ax_0X + ax_0^2 + bX + bx_0 + c$. Выберем начало отсчёта новой системы координат так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} 2ax_0 + b = 0 \qquad \Rightarrow \; x_0 = -\dfrac{b}{2a} \\ ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 \Rightarrow \; y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases},$$

тогда уравнение принимает вид $Y = a\,X^2$. Выполним *поворот* системы координат на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, тогда

$$\begin{cases} X = X'\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - Y'\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -Y' \\ Y = X'\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + Y'\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = X' \end{cases}.$$

Подставим найденные соотношения в уравнение параболы

$$X' = a(Y')^2 \Rightarrow (Y')^2 = \frac{1}{a}X' = 2pX',$$

где параметр параболы $p = \dfrac{1}{2a}$.

Пример 3. Преобразовать уравнение параболы $y = 2x^2 - 8x + 11$ к каноническому виду.

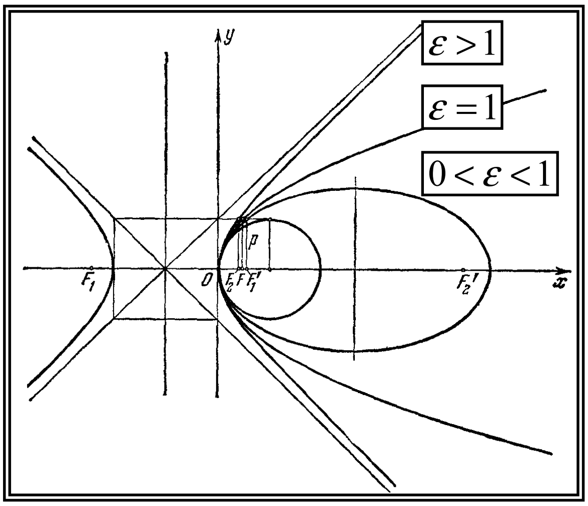
Найдём начало отсчёта новой системы координат после *параллельного переноса* $\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2\cdot 2} = 2 \\ y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{(-8)^2 - 4\cdot 2\cdot 11}{4\cdot 2} = 3 \end{cases}$, т.е. точка $O_1(2;\ 3)$ – начало координат *новой* системы отсчёта. В этой системе уравнение параболы имеет вид $Y = 2\cdot X^2$. Проведём поворот системы отсчёта на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $X' = 2(Y')^2 \Rightarrow (Y')^2 = \dfrac{X'}{2}$, следовательно, параметр параболы $p = \dfrac{1}{4}$.

б) Выяснить, какую кривую описывает функция $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{c}{d}$.

Проведём преобразование вида $y=\left(\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}\right)+\frac{a}{c}$ или $y-\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$. Производя *параллельный перенос* системы координат, вводя обозначение $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ и новые координаты $\begin{cases} X=x+\frac{d}{a} \\ Y=y-\frac{a}{c} \end{cases}$, получим уравнение $Y=\frac{k}{X}$, которое описывает равностороннюю гиперболу.

◉ Если в качестве новой системы координат выбрать систему, в которой новая ось ординат проходит через левую вершину эллипса и координатные оси сонаправлены осям старой системы координат, то можно показать, что в новой системе координат канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы имеют один и тот же вид

$$\boxed{Y^2=2pX+(\varepsilon^2-1)\,X^2},$$



где $p=\frac{b^2}{a}$ – ***фокальный параметр***, ε – ***эксцентриситет кривой***. При определённых значениях эксцентриситета ε уравнение описывает:

а) $\boxed{0<\varepsilon<1}$ – ***эллипс***; б) $\boxed{\varepsilon=1}$ – ***параболу***; в) $\boxed{\varepsilon>1}$ – ***гиперболу***.

Поэтому выбранная вышеуказанным способом новая система координат называется *канонической*. ◉

9.2. *Полярная система координат*

Полярная система координат задаётся точкой O, называемой ***полюсом***, лучом Op, называемым ***полярной осью***, и единичным вектором $\boldsymbol{e}_\text{p}$ в направлении полярной оси.

Пусть *полярная ось* совпадает с осью абсцисс Ox декартовой системы координат, а *полюс* совпадает с началом координат (рис. 22).

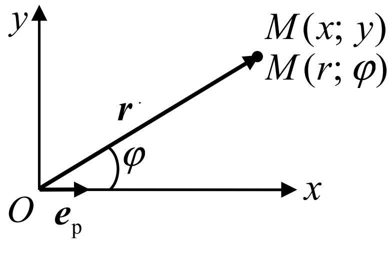


Рис. 22. *Полярная система координат.*

Вектор, соединяющий начало отсчёта декартовой системы координат с точкой $M(x;\,y)$, называется ***радиус-вектором*** точки $M(x;\,y)$.

Обозначение r.

Положение точки $M(x;\,y)$ в полярной системе координат определяется длиной радиус-вектора $r=|r|$ и углом φ между радиус-вектором и полярной осью (напомним, что угол берётся со знаком “+”, если он отсчитывается против часовой стрелки). Длина радиус-вектора r изменяется в пределах $[0;\,\infty)$, а ***главными значениями угла*** φ являются значения, лежащие в интервале $[0;\,2\pi)$ (или $(-\pi;\,\pi]$). Величины r и φ называются ***полярными координатами*** точки M, т.е. пишут

$$M(r;\,\varphi)\ (r\ -\textit{полярный радиус},\ \varphi\ -\textit{полярный угол}).$$

Из рис. 22 видно, что прямоугольные (декартовые) и полярные координаты связаны формулами $\boxed{\begin{cases}x=r\cdot\cos\varphi\\ y=r\cdot\sin\varphi\end{cases}}$ и $\boxed{\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ tg\varphi=\dfrac{y}{x}\end{cases}}$.

При определении полярного угла φ по знакам координат x и y точки $M(x;\,y)$ определяют четверть (см. п. 4.4, <u>***4***</u>), в которой лежит угол φ, и учитывают, что $\varphi\in(-\pi;\,\pi]$.

В полярной системе координат канонические уравнения эллипса, параболы и правой ветви гиперболы имеют вид:

$$\boxed{r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}}.$$

Пример 4. Дана точка $M(-\sqrt{3};\,1)$. Найти координаты точки в полярной системе координат.

По условию задачи дана точка $M\,(\overset{x}{-\sqrt{3}};\,\overset{y}{1})$. Вычислим полярные координаты точки:

$$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2\\ tg\varphi=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}\end{cases}.$$

Так как величины $x<0$ и $y>0$, то угол φ лежит во второй четверти (см. п. 4.4, <u>***4***</u>). Решим второе уравнение системы (см. п. 0.4, <u>***0***</u>):

$$\varphi=-arctg(\sqrt{3})+\pi n,\ n\in Z\ \text{или}\ \varphi=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

В силу того, что угол лежит в четверти 2, то $n=1$, следовательно,

$$\varphi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Итак, в полярной системе координат $M\left(2;\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Рассмотрим некоторые линии в *полярной системе координат*.

1. *Спираль Архимеда* $\boxed{r = a\varphi}$, где число $a > 0$ (рис. 23). Для построения кривой в полярной системе координат, разобьём декартову плоскость лучами с шагом по углу $\dfrac{\pi}{8}$ и на каждом луче отложим ему соответствующее значение r.

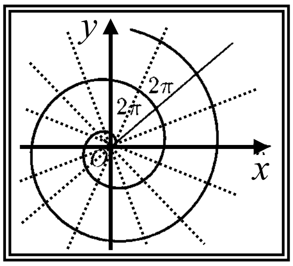


Рис. 23. *Спираль Архимеда.*

При значениях $a < 0$ *спираль Архимеда* закручивается в противоположную сторону (рис. 24)

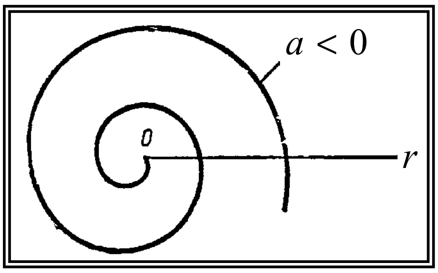


Рис. 24. *Спираль Архимеда при* $a<0$.

2. Уравнение *окружности*: уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ описывает окружность с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом R (рис. 25). В полярной системе координат уравнение принимает вид $\boxed{r = R}$:

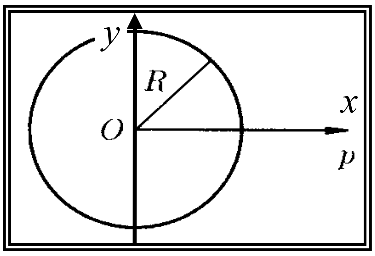


Рис. 25. *Окружность с центром в точке* $O(0;\ 0)$ *и радиусом* R.

3. Уравнение *окружности*: уравнение $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ описывает окружность с центром в точке $A(R;\ 0)$ и радиусом R (рис. 26). В полярной системе координат уравнение принимает вид $\boxed{r = 2R\cos\varphi}$:

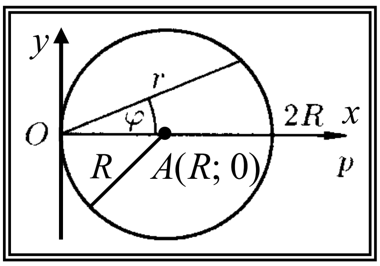


Рис. 26. *Окружность с центром в точке* $A(R;\ 0)$ *и радиусом* R.

4. Уравнение $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ описывает <u>*окружность*</u> с центром в точке $A(0; R)$ и радиусом R (рис. 27). В полярной системе координат уравнение принимает вид $\boxed{r = 2R\sin\varphi}$:

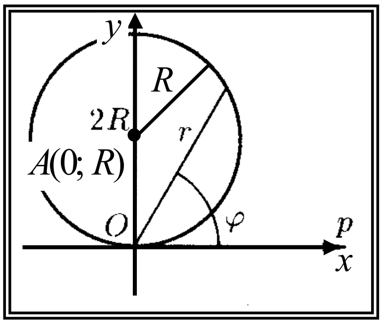
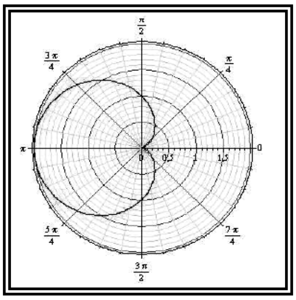


Рис. 27. *Окружность с центром в точке* $A(0; R)$ *и радиусом* R.

5. <u>*Кардиоиды*</u>:



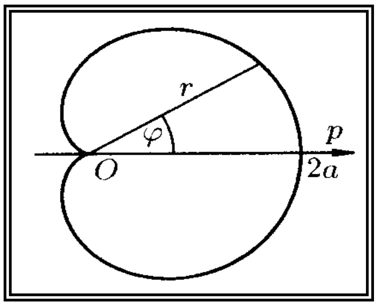


Рис. 28. *Кардиоида* $\boxed{r = a(1 - \cos\varphi)}$. **Рис. 29.** *Кардиоида* $\boxed{r = a(1 + \cos\varphi)}$.

Аналогично выглядят *кардиоиды* $\boxed{r = a(1 - \sin\varphi)}$ и $\boxed{r = a(1 + \sin\varphi)}$, но они вытянуты вдоль оси абсцисс Oy.

9.3. *Параметрически заданные линии*

Если линия задана системой уравнений $\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}}$ (t – параметр), то говорят, что она определена ***параметрическим способом***.

1. <u>*Петля*</u>: $\boxed{\begin{cases} x = t\left(a - t^2\right) \\ y = t^2 \end{cases}}$, пусть $a > 0$.

Величина $x = t(a - t^2)$ равна нулю при $t_1 = 0$ и $t_{2,3} = \mp\sqrt{a}$. Для первого корня $y = 0$, а для второго и третьего – $y = a$. Следовательно, петля имеет вид (рис. 30):

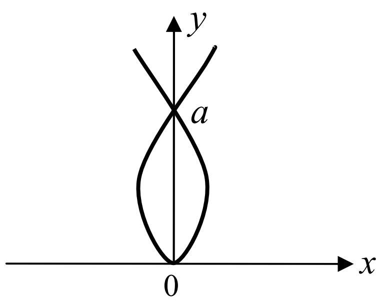


Рис. 30. *Петля*.

2. <u>*Циклоида*</u>: $\boxed{\begin{cases} x = a\left(t - \sin\ t\right) \\ y = a(1 - \cos\ t) \end{cases}}$, где $a > 0$ (рис. 31). Циклоида – это линия, которую описывает фиксированная точка на катящемся колесе без проскальзывания по неподвижной прямой.

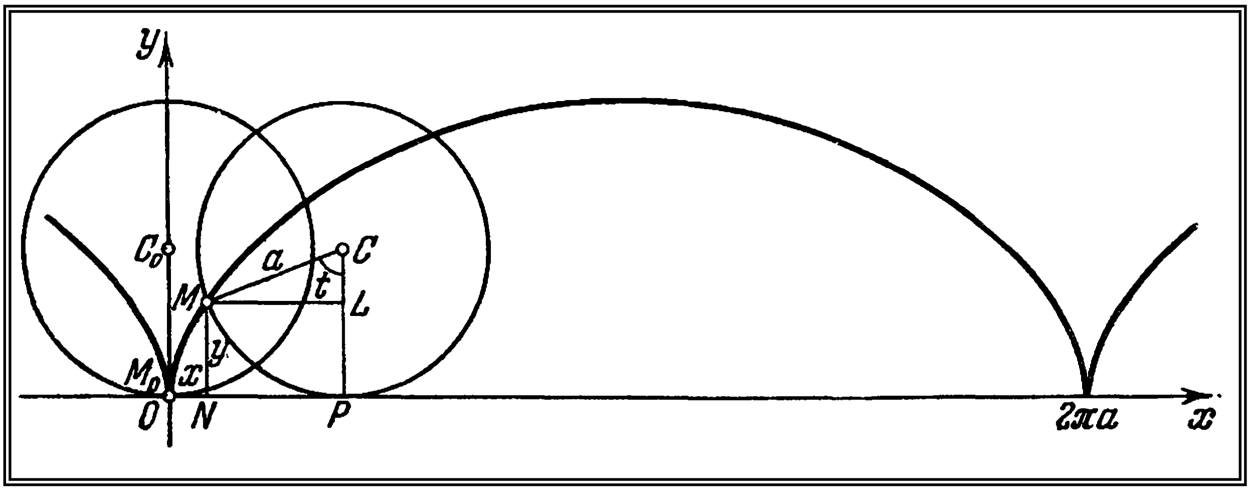


Рис. 31. *Циклоида*.

3. <u>*Астроида*</u>: $\boxed{\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}}$, где $a \in R$ (рис. 32). В прямоугольной системе координат уравнение *астроиды* имеет вид: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

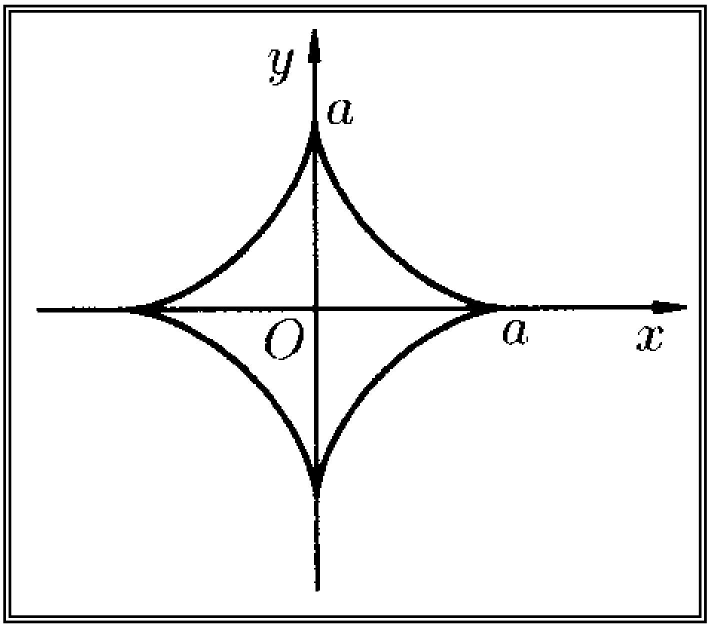
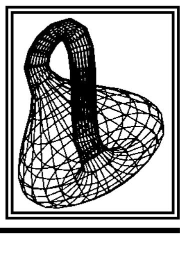


Рис. 32. *Астроида*.



Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 1

1. Даны вершины треугольника $A(2;4)$, $B(-3;1)$ и $C(4;0)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(2;4)$, прямая линия $l: x+3y-2=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых l_1: $3x-y+4=0$ и l_2: $3x-y=0$, причём одной из них в точке $A(0;0)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2 : 7x^2+9y^2=63$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-16x+y^2+4y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $9x^2+7y^2=63$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $5x^2-7y^2=35$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $9x^2+5y^2=90$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 2

1. Даны вершины треугольника $A(1;2)$, $B(3;4)$ и $C(-1;3)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-3;1)$, прямая линия $l: 2x-y+1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1 : x-y=0$ и $l_2 : 2x-2y+3=0$, причём одной из них в точке $A(1;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 4x^2+5y^2=36$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-2x+y^2+6y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $5x^2+8y^2=40$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $4x^2-9y^2=36$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $5x^2+4y^2=20$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 3

1. Даны вершины треугольника $A(3;\,0)$, $B(2;-2)$ и $C(1;\,3)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-2;3)$, прямая линия $l: x+3y-1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 2x+y-3=0$ и $l_2: 2x+y=0$, причём одной из них в точке $A(1;-2)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 6x^2+4y^2=24$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+4x+y^2-2y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $4x^2+3y^2=12$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $4x^2-5y^2=20$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $6x^2+5y^2=30$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 4

1. Даны вершины треугольника $A(-3;2)$, $B(2;1)$ и $C(-1;3)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(2;-1)$, прямая линия $l: 6x-y+4=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x+y+4=0$ и $l_2: 3x+3y-12=0$, причём одной из них в точке $A(-2;-2)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 2x^2+5y^2=10$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+6x+y^2+4y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $3x^2+y^2=12$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $4x^2-5y^2=20$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+7y^2=28$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 5

1. Даны вершины треугольника $A(-3;1)$, $B(2;-3)$ и $C(4;0)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(1;2)$, прямая линия $l: x+3y+1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x+3y+1=0$ и $l_2: x+3y-5=0$, причём одной из них в точке $A(2;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 6x^2+8y^2=48$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-4x+y^2+8y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $2x^2+4y^2=16$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $5x^2-y^2=15$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+y^2=8$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 6

1. Даны вершины треугольника $A(-1;\,2)$, $B(3;\,2)$ и $C(0;\,4)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-3;1)$, прямая линия $l: 2x-y+4=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 3x+y+2=0$ и $l_2: 3x+y-4=0$, причём одной из них в точке $A(1;\,-5)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 2x^2+8y^2=16$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-2x+y^2+4y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $x^2+3y^2=9$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $2x^2-8y^2=24$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+2y^2=20$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 7

1. Даны вершины треугольника $A(-1;1)$, $B(3;0)$ и $C(0;2)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-1;1)$, прямая линия $l: x-y+4=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 4x+y+2=0$ и $l_2: 4x+y-8=0$, причём одной из них в точке $A(1;4)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 3x^2+4y^2=24$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+2x+y^2+4y+1=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $3x^2+y^2=9$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $3x^2-4y^2=12$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $x^2+3y^2=9$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 8

1. Даны вершины треугольника $A(-2;1)$, $B(4;1)$ и $C(3;2)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(2;4)$, прямая линия $l: x+y-1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x+3y-1=0$ и $l_2: x+3y-4=0$, причём одной из них в точке $A(-2;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2 : 4x^2 + y^2 = 8$, а третья – в центре окружности l_1 : $x^2-4x+y^2+2y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $3x^2+5y^2=15$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $8x^2-3y^2=24$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $5x^2+4y^2=20$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 9

1. Даны вершины треугольника $A(-1;1)$, $B(2;3)$ и $C(-1;3)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(2;-1)$, прямая линия $l: x-3y+2=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 2x+2y+1=0$ и $l_2: 2x+2y-4=0$, причём одной из них в точке $A(1;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 3x^2+2y^2=12$, а третья – в центре окружности l_1: $l_1: x^2+y^2-6y-2x=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $x^2+5y^2=25$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $4x^2-7y^2=28$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+5y^2=20$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант **10**

1. Даны вершины треугольника $A(0;-3)$, $B(-1;2)$ и $C(3;4)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(3;-1)$, прямая линия $l: x+6y-1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x+2y-6=0$ и $l_2: 2x-4y=0$, причём одной из них в точке $A(-2;4)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 3x^2+5y^2=15$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+4x+y^2-4y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $2x^2+4y^2=8$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $5x^2-6y^2=30$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $2x^2+5y^2=10$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 11

1. Даны вершины треугольника $A(2;\,0)$, $B(4;2)$ и $C(-3;2)$. Требуется найти:

а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(4;1)$, прямая линия $l: 3x - y + 2 = 0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 3x - y + 3 = 0$ и $l_2: 3x - y - 1 = 0$, причём одной из них в точке $A(0;\,-1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 4x^2 + 2y^2 = 16$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $6x^2 + 7y^2 = 42$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $9x^2 - y^2 = 9$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $9y^2 + 2x^2 = 18$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант **12**

1. Даны вершины треугольника $A(3;-2)$, $B(2;-3)$ и $C(1;1)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(3;-2)$, прямая линия $l: x+y-1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 2x-y+8=0$ и $l_2: 2x-y-1=0$, причём одной из них в точке $A(0;8)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 5x^2+6y^2=30$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+4x+y^2-6y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $6x^2+5y^2=30$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $x^2-2y^2=8$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $x^2+5y^2=25$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 13

1. Даны вершины треугольника $A(2;3)$, $B(-1;4)$ и $C(0;-2)$. Требуется найти:

а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;

б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;

в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;

г) *координаты точки пересечения* медиан;

д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;

е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;

ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(2;-1)$, прямая линия $l: 2x-y+8=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x-y+8=0$ и $l_2: x-y-5=0$, причём одной из них в точке $A(2;-3)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 7x^2+2y^2=14$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-2x+y^2-2y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $2x^2+7y^2=14$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $5x^2-3y^2=15$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $x^2+4y^2=16$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант **14**

1. Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(-1;3)$ и $C(2;-4)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(1;1)$, прямая линия $l: 5x - y + 1 = 0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x - 6y = 0$ и $l_2: x - 6y + 5 = 0$, причём одной из них в точке $A(1;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 7x^2 + 8y^2 = 56$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2 - 10x + y^2 + 2y = 0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $9x^2 + y^2 = 9$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $x^2 + 7y^2 = 7$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 15

1. Даны вершины треугольника $A(-3;0)$, $B(0;-1)$ и $C(3;2)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(3;2)$, прямая линия $l: x-3y+2=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x-3y-5=0$ и $l_2: x-3y+1=0$, причём одной из них в точке $A(2;-1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: x^2+9y^2=9$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-2x+y^2+6y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $5x^2+9y^2=45$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $9x^2-3y^2=18$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $12x^2+5y^2=60$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 16

1. Даны вершины треугольника $A(3;2)$, $B(-1;-1)$ и $C(-1;3)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(1;-1)$, прямая линия $l: x+6y-3=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x+6y+2=0$ и $l_2: 6y+x=0$, причём одной из них в точке $A(6;-1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 8x^2+y^2=16$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+6x+y^2-8y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $x^2+2y^2=4$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $6x^2-3y^2=18$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $8x^2+4y^2=16$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 17

1. Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(-2;3)$ и $C(0;2)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-2;3)$, прямая линия $l{:}6x-y+2=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x-y-3=0$ и $l_2: x-y-5=0$, причём одной из них в точке $A(4;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 4x^2+8y^2=64$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-2x+y^2+6y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $8x^2+3y^2=24$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $6x^2-4y^2=12$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+2y^2=8$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант **18**

1. Даны вершины треугольника $A(3;-3)$, $B(-2;1)$ и $C(2;0)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(3;-3)$, прямая линия $l{:}x-2y+4=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x-2y-1=0$ и $l_2: x-2y+9=0$, причём одной из них в точке $A(3;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 4x^2+6y^2=24$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+4x+y^2+4y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $3x^2+4y^2=12$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $6x^2-5y^2=60$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $x^2+4y^2=16$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант **19**

1. Даны вершины треугольника $A(2;-1)$, $B(3;2)$ и $C(-1;0)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(3;\,2)$, прямая линия $l: 2x-5y+1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 2x-5y-1=0$ и $l_2: 2x-5y-2=0$, причём одной из них в точке $A(1;\,0)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 9x^2+2y^2=18$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+2x+y^2-2y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $2x^2+9y^2=18$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $3x^2-7y^2=21$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $9x^2+4y^2=36$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 20

1. Даны вершины треугольника $A(-1;4)$, $B(0;-1)$ и $C(2;1)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-1;4)$, прямая линия $l: 5x-2y+3=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 5x-2y+2=0$ и $l_2: 5x-2y-3=0$, причём одной из них в точке $A(0;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 6x^2+5y^2=30$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+4x+y^2-6y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $5x^2+6y^2=30$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $4x^2-5y^2=20$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $8x^2+4y^2=32$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 21

1. Даны вершины треугольника $A(-2;-3)$, $B(3;0)$ и $C(1;2)$. Требуется найти:

а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-2;-3)$, прямая линия $l{:}2x+4y-1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 2x-4y+7=0$ и $l_2: x-2y+4=0$, причём одной из них в точке $A(2;3)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 6x^2+7y^2=42$, а третья – в центре окружности $l_1:\ x^2+10x+y^2-8y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $6x^2+3y^2=36$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $9x^2-6y^2=54$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+5y^2=40$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 22

1. Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;3)$ и $C(0;4)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(-2;3)$, прямая линия $l: x+4y-1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x-4y+1=0$ и $l_2: x-4y+2=0$, причём одной из них в точке $A(2;1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 5x^2+6y^2=30$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-8x+y^2+2y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $4x^2+8y^2=32$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $8x^2-4y^2=16$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+7y^2=28$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 23

1. Даны вершины треугольника $A(2;-3)$, $B(1;4)$ и $C(-1;2)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(3;1)$, прямая линия $l: 2x+4y-5=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x-3y+2=0$ и $l_2: x+3y-7=0$, причём одной из них в точке $A(1;2)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 4x^2+2y^2=8$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+8x+y^2-2y+1=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $3x^2+4y^2=12$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $5x^2-4y^2=20$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $7x^2+2y^2=14$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант **24**

1. Даны вершины треугольника $A(4;1)$, $B(2;3)$ и $C(-1;-3)$. Требуется найти:
а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;
б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;
в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;
г) *координаты точки пересечения* медиан;
д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;
е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;
ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(2;1)$, прямая линия $l: 2x+3y+1=0$ является касательной к окружности.

3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: 2x+3y+8=0$ и $l_2: 2x+3y-8=0$, причём одной из них в точке $A(-1;-2)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 4x^2+3y^2=48$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2+10x+y^2-2y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $x^2+6y^2=24$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $3x^2-5y^2=15$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $4x^2+8y^2=16$. Написать уравнение директрисы.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант 25

1. Даны вершины треугольника $A(1;5)$, $B(-1;1)$ и $C(3;4)$. Требуется найти:

а) *уравнение* и *длину высоты*, проведенной из вершины C;

б) *уравнение медианы*, проведенной из вершины B;

в) *координаты точки пересечения* высот треугольника;

г) *координаты точки пересечения* медиан;

д) *уравнение прямой*, проходящей через вершину A параллельно стороне BC;

е) *уравнение прямой*, проходящей через вершину B под углом $\frac{\pi}{4}$ к стороне BC;

ж) *координаты точки* P, симметричной к точке C относительно прямой линии AB.

2. Найти *уравнение окружности*, центр которой совпадает с точкой $M(3;5)$, прямая линия $l: x-y-6=0$ является касательной к окружности.

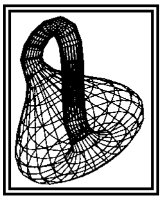
3. Составить *уравнение окружности*, касающейся двух параллельных прямых $l_1: x+y+2=0$ и $l_2: x+y-5=0$, причём одной из них в точке $A(-1;-1)$.

4. Найти *площадь треугольника*, две вершины которого находятся в фокусах эллипса $l_2: 16x^2+9y^2=144$, а третья – в центре окружности l_1: $x^2-2x+y^2-4y=0$.

5. Составить *уравнение гиперболы*, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $4x^2+25y^2=100$.

6. Составить *уравнение параболы*, фокус которой лежит на оси Ox слева от начала координат, а параметр p равен расстоянию от фокуса гиперболы $9x^2-4y^2=36$ до её асимптоты.

7. Составить *уравнение параболы*, фокус которой совпадает с одним из фокусов эллипса $x^2+4y^2=16$. Написать уравнение директрисы.



Тема: *Аналитическая геометрия в пространстве*

<u>10</u> "*Плоскость в пространстве*"

10.1. *Общее уравнение плоскости*

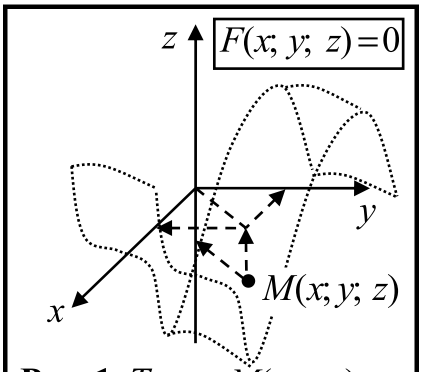


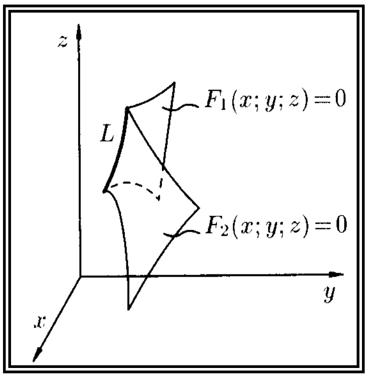
Рис. 1. *Точка* $M(x;y;z)$ *на поверхности.*

Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют соотношению вида $\boxed{F(x;\ y;\ z)=0}$, имеющему смысл на множестве действительных чисел, называют ***поверхностью*** в пространстве. Переменные x, y и z в уравнении поверхности $\boxed{F(x;\ y;\ z)=0}$ называют ***текущими координатами точки***, *лежащей на поверхности*. Координаты точек, *лежащих на поверхности*, *удовлетворяют соотношению* $\boxed{F(x;\ y;\ z)=0}$, а точки *вне поверхности – не удовлетворяют*.

○ Отметим, что ***не любое*** *уравнение* $\boxed{F(x;\ y;\ z)=0}$ *определяет поверхность*, например, уравнение $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}+\dfrac{(z+3)^2}{25}=0$ определяет точку $A(-1;2;-3)$, а уравнению $|x|+|y|+|z|+2=0$ не отвечает никакой геометрический образ в пространстве. ○

○ Для того чтобы установить принадлежность точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ поверхности, заданной уравнением $F(x;y;z)=0$, надо подставить её координаты в это уравнение. Если $F(x_M;\ y_M;\ z_M)\equiv 0$ (знак "$\equiv$" означает *обращение уравнения в тождество*), то точка $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ принадлежит плоскости. В противном случае, когда $F(x_M;\ y_M;\ z_M)\neq 0$, точка $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ лежит *вне* данной поверхности. ○

Порядок поверхности определяется *по высшему показателю степени переменных* x, y *и* z, *или по сумме показателей степени в произведении этих величин*.



Пересечение двух поверхностей определяет ***линию*** в пространстве, т.е. линию задают в виде системы уравнений:

$$\boxed{L:\begin{cases}F_1(x;\ y;\ z)=0\\ F_2(x;\ y;\ z)=0\end{cases}}.$$

Линия отображает *траекторию движения точки* в пространстве, поэтому её можно задать в виде параметрической зависимости радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\mathrm{t})$, которая в координатной форме имеет вид

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}}$$

и определяет ***параметрические уравнения линии***.

Простейшей поверхностью является ***плоскость***, которая описывается уравнением вида

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0},$$

получившим название ***общее уравнение плоскости***, причём коэффициенты $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Рассмотрим его частные случаи:

1. $D = 0$; $Ax + By + Cz + D = 0$. Из уравнения видно, что точка $O(0;0;0)$ удовлетворяет этому уравнению, следовательно, это уравнение описывает плоскость, проходящую через начало координат (рис. 1).

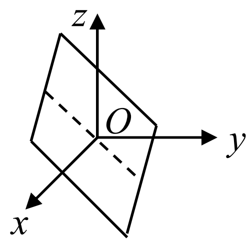


Рис. 1. *Плоскость, проходящая через начало координат.*

2. $C = 0$; $Ax + By + D = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любое значение переменной z, поэтому данное уравнение описывает плоскость, которая параллельна оси аппликат (рис. 2).

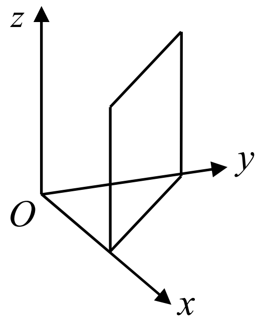


Рис. 2. *Плоскость, проходящая параллельно оси аппликат.*

$B = 0$; $Ax + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси ординат;

$A = 0$; $By + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси абсцисс.

○ *Отсутствие в уравнении плоскости одной из переменных величин* x, y *или* z говорит о том, что *плоскость параллельна соответствующей координатной оси*. ○

3. $C = 0$; $D = 0$; $Ax + By = 0$ – плоскость проходит через начало координат параллельно оси аппликат (рис. 3).

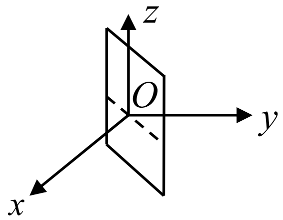


Рис. 3. *Плоскость, проходящая через начало координат параллельно оси аппликат.*

$B=0$; $D=0$; $Ax+Cz=0$ – плоскость проходит через начало координат параллельно оси ординат;

$A=0$; $D=0$; $By+Cz=0$ – плоскость проходит через начало координат параллельно оси абсцисс.

4. $B=C=0$; $Ax+D=0$ – плоскость проходит через точку $x=-\frac{D}{A}$ параллельно плоскости yOz (рис. 4).

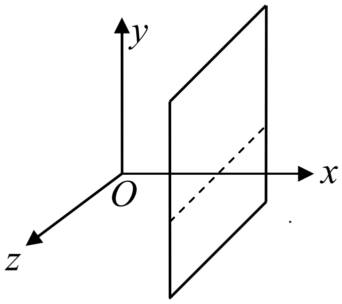


Рис. 4. *Плоскость, проходящая параллельно координатной плоскости* yOz.

$A=C=0$; $By+D=0$ – плоскость проходит через точку $y=-\frac{D}{B}$ параллельно плоскости xOz;

$A=B=0$; $Cz+D=0$ – плоскость проходит через точку $z=-\frac{D}{C}$ параллельно плоскости xOy.

5. $B=C=D=0$; $Ax=0 \Rightarrow x=0$ – уравнение описывает плоскость yOz (рис. 5).

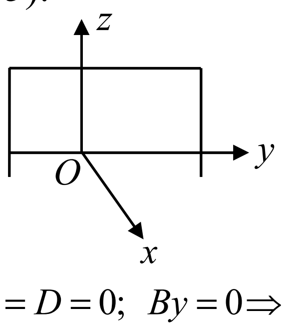


Рис. 5. *Координатная плоскость* yOz.

$A=C=D=0$; $By=0 \Rightarrow y=0$ – уравнение описывает плоскость xOz;

$A=B=D=0$; $Cz=0 \Rightarrow z=0$ – уравнение описывает плоскость xOy.

10.2. *Другие уравнения плоскости*

1. ***Уравнение плоскости в отрезках***. Пусть в уравнении

$$Ax+By+Cz+D=0$$

коэффициент $D\neq 0$, тогда выполним следующие преобразования

$$Ax+By+Cz=-D;\,\Big|\div(-D)\ \Rightarrow\ \left(-\frac{A}{D}\right)x+\left(-\frac{B}{D}\right)y+\left(-\frac{C}{D}\right)z=1\,.$$

Введём следующие обозначения $a=-\dfrac{D}{A};\ b=-\dfrac{D}{B};\ c=-\dfrac{D}{C}$, тогда уравнение примет вид

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1},$$

которое называется ***уравнением плоскости в отрезках***.

Найдём точки пересечения плоскости с координатными осями:

$$Ox: y=0;\ z=0;\Rightarrow x=a\ \Rightarrow M(a;\,0;\,0);$$

$$Oy: x=0;\ z=0;\Rightarrow y=b\ \Rightarrow\ N(0;\,b;\,0);$$

$$Oz: x=0;\ y=0;\Rightarrow z=c\ \Rightarrow\ P(0;\,0;\,c)\,.$$

Откладывая на координатных осях точки M, N и P, соединяя их прямыми, получим изображение данной плоскости (для определённости принято, что параметры a, b, c положительные) (рис. 6):

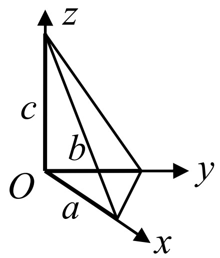


Рис. 6. *Отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях.*

Из рис. 6 видно, что числа a, b и c определяют длины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, считая от начала координат.

2. ***Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно к заданному вектору***. Пусть дана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через которую проходит плоскость, перпендикулярно к заданному вектору $\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\,\mathrm{B};\,\mathrm{C})$. Вектор $\boxed{\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\,\mathrm{B};\,\mathrm{C})}$ называется ***нормальным вектором плоскости***, если он перпендикулярен любой паре ненулевых и неколлинеарных векторов, лежащих на плоскости. Возьмём на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и образуем вектор $\boldsymbol{a}$, соединяющий точку M_0 с точкой M (рис. 7). Тогда $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_0M}\,(x-x_0;\,y-y_0;\,z-z_0)$.

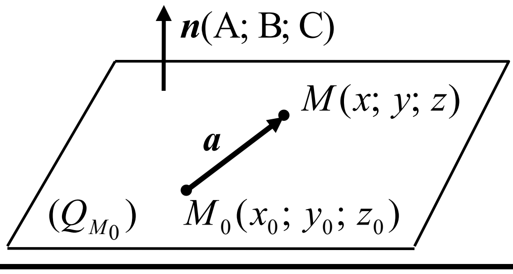


Рис. 7. *Плоскость, проходящая через заданную точку перпендикулярно к нормальному вектору.*

В силу того, вектор $\boldsymbol{a}$ лежит в плоскости, то он перпендикулярен нормальному вектору $\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\ \mathrm{B};\ \mathrm{C})$. Используя ***условие перпендикулярности векторов*** (см. п. 5.2, **5**) $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$ в координатной форме, получим ***уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно к нормальному вектору***:

$$Q_{M_0}:\ \boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}.$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(0;\ 1;\ 2)$ параллельно плоскости $Q:\ 3x-y+4z+8=0$.

Так как искомая плоскость параллельна плоскости Q, то нормальный вектор этой плоскости

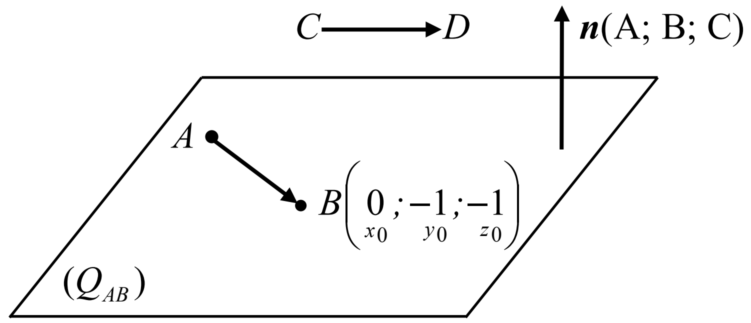
$$\boldsymbol{n}(\underset{A}{3};\ \underset{B}{-1};\ \underset{C}{4})$$

(см. коэффициенты при переменных величинах x, y и z в уравнении плоскости Q) перпендикулярен к искомой плоскости и может быть взят в качестве нормального вектора этой плоскости. Используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно к данному вектору, получаем:

$$3(x-0)+(-1)(y-1)+4(z-2)=0 \Rightarrow 3x-y+4z-7=0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{A}(-1;1;2)$ и $\mathrm{B}(0;-1;-1)$ параллельно вектору $\boldsymbol{CD}(0;0;-2)$.

Построим на искомой плоскости вектор $\boldsymbol{AB}(1;-2;-3)$ и вычислим нормальный вектор плоскости $\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\mathrm{B};\mathrm{C})$ как векторное произведение векторов $\boldsymbol{CD}(0;0;-2)$ и $\boldsymbol{AB}(1;-2;-3)$:



$$\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\ \mathrm{B};\ \mathrm{C})=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{CD}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & -2\end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -2\end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-4\,\boldsymbol{i}-2\,\boldsymbol{j}+0\,\boldsymbol{k}=\left(\underset{\mathrm{A}}{4};\ \underset{\mathrm{B}}{2};\ \underset{\mathrm{C}}{0}\right).$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $B\left(\underset{x_0}{0};\ \underset{y_0}{-1};\ \underset{z_0}{-1}\right)$

перпендикулярно к данному вектору $\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\mathrm{B};\mathrm{C})=\Big(\underset{\mathrm{A}}{4};\ \underset{\mathrm{B}}{2};\ \underset{\mathrm{C}}{0}\Big)$, имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ \Rightarrow$$
$$4\cdot(x-0)+2\cdot(y+1)+0\cdot(z+1)=0\ \Rightarrow$$
$$4x+2y+2=0\ \Big|\div 2\ \ \Rightarrow\ 2x+y+1=0\,.$$

○ Отметим, что при выборе точки, через которую проходит искомая плоскость в данном пункте безразлично, какую из точек

$$A\Big(\underset{x_0}{-1};\ \underset{y_0}{1};\ \underset{z_0}{2}\Big)\ \text{или}\ B\Big(\underset{x_0}{0}\,;\ \underset{y_0}{-1};\ \underset{z_0}{-1}\Big)$$

брать как точку, через которую проходит эта плоскость. ○

3. ***Уравнение плоскости, проходящей через 3 данные точки.*** Пусть плоскость проходит через три данные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$. Возьмём произвольную точку плоскости $M(x;\ y;\ z)$, образуем векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{M_1M}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{M_1M_3}$ (рис. 8):

$$\boldsymbol{a}\ (x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1),\ \ \boldsymbol{b}\ (x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)\ \ \text{и}\ \ \boldsymbol{c}\ (x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1).$$

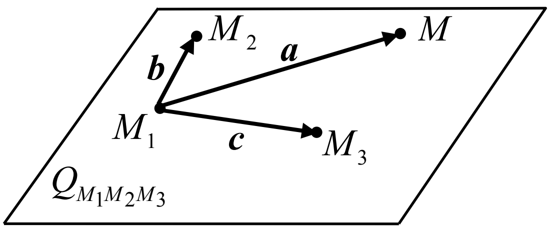


Рис. 8. *Плоскость, проходящая через три заданные точки.*

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарные, поэтому воспользуемся ***условием компланарности векторов*** (см. п. 6.4, ***6***)

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c})=0},$$

получим ***уравнение плоскости, проходящей через 3 известные точки***:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}.$$

○ *Определитель третьего порядка* раскрывают по элементам первой строки:

$$\overset{A}{\overline{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}}}\cdot(x-x_1)-\overset{B}{\overline{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}}}\cdot(y-y_1)+\overset{C}{\overline{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}}}\cdot(z-z_1)=0.$$ ○

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1;\ 0;\ -2)$, $M_2(2;\ -1;\ 1)$ и $M_3(3;\ 2;\ -1)$.

Составим определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Раскроем определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (z+2) = 0.$$

Вычислим определители второго порядка: $-7(x-1)+5y+4(z+2)=0$. Умножив уравнение на (–1) и раскрыв скобки, получим окончательный ответ: $7x-5y-4z-15=0$.

10.3. *Основные задачи о плоскости в пространстве*

1. *Угол между пересекающимися плоскостями*. Пусть даны две пересекающиеся плоскости Q_1 и Q_2, которые имеют нормальные векторы $\boldsymbol{n}_1(\mathrm{A}_1;\mathrm{B}_1;\mathrm{C}_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(\mathrm{A}_2;\mathrm{B}_2;\mathrm{C}_2)$. Линия пересечения плоскостей определяется прямой L. Из одной точки этой прямой проведём два перпендикулярных к прямой вектора $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Меньший угол между этими векторами определяет угол между плоскостями (рис. 9):

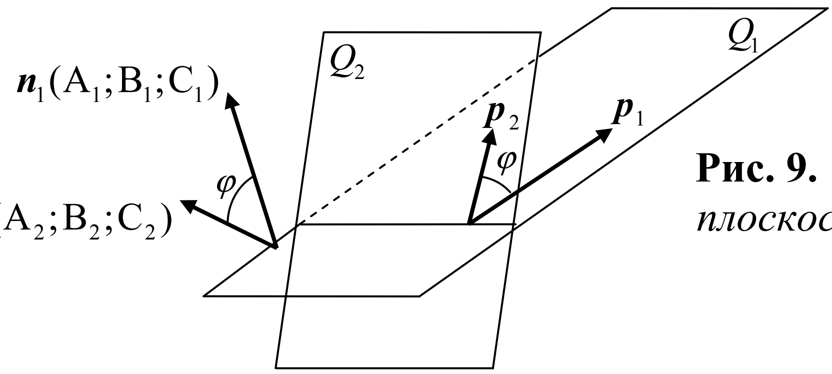


Рис. 9. *Угол между плоскостями.*

В силу того, что $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{n}_2 \perp \boldsymbol{p}_2$, то угол между нормальными векторами равен углу между векторами $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Из векторной алгебры известно, что угол между векторами определяется формулой (см. п. 5. 2, **5**):

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}{\sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2 + \mathrm{C}_1^2} \cdot \sqrt{\mathrm{A}_2^2 + \mathrm{B}_2^2 + \mathrm{C}_2^2}}}.$$

а) Если плоскости *перпендикулярны* ($\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$), то ***условием перпендикулярности плоскостей*** является равенство

$$\boxed{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 + \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2 = 0}.$$

б) Если плоскости *параллельны*, то нормальные векторы коллинеарные, следовательно, ***условие параллельности плоскостей***

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}.$$

2. *Расстояние от данной точки до заданной плоскости*. Расстояние от данной точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до заданной плоскости

$$Q: Ax+By+Cz+D=0$$

определяется по формуле: $\boxed{d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$.

Пример 4. На каком расстоянии от плоскости $Q:\ x-3y+2z-5=0$ находится точка $M_0(2;-2;\ 3)$.

Воспользуемся вышеприведенной формулой

$$d=\frac{|2-3\cdot(-2)+2\cdot 3-5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{14}}=\frac{9\cdot\sqrt{14}}{14}\ (ед.\ дл.).$$

11 "*Прямая в пространстве*"

11.1. *Общее уравнение прямой*

1. ***Прямая в пространстве*** может быть задана как пересечение двух плоскостей:

$$\boxed{L:\begin{cases}Q_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ Q_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}}. \qquad (*)$$

Геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих системе уравнений (*), называется ***прямой в пространстве***, а система уравнений (*) называется ***общим уравнением прямой***.

○ Для того чтобы система уравнений (*) определяла прямую в пространстве, необходимо и достаточно, чтобы нормальные векторы плоскостей, определяющих прямую, $\boldsymbol{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ были неколлинеарными, т.е. выполнялось бы одно из неравенств:

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\ \text{или}\ \frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.\ ○$$

2. Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{S}\,(m;n;p)$, который называется ***направляющим вектором прямой*** (см. п. 7.2, 7), тогда её уравнения называют ***каноническими*** и они имеют вид: $\boxed{\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}}$.

○ Если в канонических уравнениях прямой одна из проекций направляющего вектора равна нулю, то и соответствующий числитель дроби тоже равен нулю, а *прямая перпендикулярна соответствующей координатной оси*. ○

Пример 1. Как расположена прямая $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z}{3}$ относительно координатных осей.

Прямая перпендикулярна осям абсцисс и ординат (параллельна оси аппликат) и будет проходить через точку $M_0(1;-2;0)$.

3. Приравняв каждую дробь канонических уравнений прямой параметру t, получим ***параметрические уравнения прямой***:

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \\ z=z_0+p\cdot t \end{cases}}.$$

Пример 2. Записать канонические уравнения прямой

$$L:\ \frac{x+2}{-1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-4}{5}$$

в параметрическом виде.

Приравняем каждую дробь к параметру t: $\begin{cases} \frac{x+2}{-1}=t \\ \frac{y+4}{2}=t \\ \frac{z-4}{5}=t \end{cases} \Rightarrow\ L:\begin{cases} x=-2-t \\ y=-4+2t \\ z=4+5t \end{cases}.$

4. Если прямая проходит через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то её уравнения имеют вид (см. п. 7.2, 7)

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

и называются ***уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки***.

Пример 3. Составить канонические и параметрические уравнения прямых, которые проходят через две данные точки $\mathrm{A}(-1;1;2)$, $\mathrm{B}(0;-1;-1)$ и $\mathrm{C}(1;0;-1)$, $\mathrm{D}(1;0;1)$.

Составим канонические уравнения прямой линии, проходящей через точки $\mathrm{A}(-1;1;2)$ и $\mathrm{B}(0;-1;-1)$:

$$AB:\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ \Rightarrow\ \frac{x+1}{0+1}=\frac{y-1}{-1-1}=\frac{z-2}{-1-2}\ \Rightarrow\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-3}.$$

Запишем параметрические уравнения прямой AB:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1}=t \\ \dfrac{y-1}{-2}=t \\ \dfrac{z-2}{-3}=t \end{cases} \text{ или } AB: \begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t+1. \\ z=-3t+2 \end{cases}$$

Составим канонические уравнения прямой, проходящей через точки $\mathrm{C}(1;\,0;\,-1)$ и $\mathrm{D}(1;\,0;\,1)$:

$$CD: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow \frac{x-1}{1-1}=\frac{y-0}{0-0}=\frac{z+1}{1+1} \Rightarrow \frac{x-1}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{2}.$$

Запишем параметрические уравнения прямой CD:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{0}=t \\ \dfrac{y}{0}=t \\ \dfrac{z+1}{2}=t \end{cases} \quad \text{или } CD: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2t-1 \end{cases}.$$

11.2. *Основные задачи о прямой в пространстве*

1. *Переход от общего уравнения прямой к её каноническим уравнениям*. Пусть прямая задана общим уравнением

$$\mathrm{L}: \begin{cases} \mathrm{Q}_1:\ \mathrm{A}_1\mathrm{x}+\mathrm{B}_1\mathrm{y}+\mathrm{C}_1\mathrm{z}+\mathrm{D}_1=0, & \boldsymbol{n}_1(\mathrm{A}_1;\mathrm{B}_1;\,\mathrm{C}_1) \\ \mathrm{Q}_2:\mathrm{A}_2\mathrm{x}+\mathrm{B}_2\mathrm{y}+\mathrm{C}_2\mathrm{z}+\mathrm{D}_2=0, & \boldsymbol{n}_2(\mathrm{A}_2;\mathrm{B}_2;\mathrm{C}_2) \end{cases}.$$

Для того чтобы перейти от этого уравнения прямой к каноническим уравнениям, поступают следующим образом:

– находят координаты любой точки, удовлетворяющие приведенной системе, для чего одну из переменных величин, например z, полагают равной нулю и решают систему линейных алгебраических уравнений относительно оставшихся переменных величин;

– направляющий вектор $\boldsymbol{S}\ (m;n;p)$ прямой находят как векторное произведение нормальных векторов данных плоскостей $\boxed{\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2}$;

– зная координаты точки, через которую проходит прямая, и направляющий вектор прямой записывают канонические уравнения прямой.

Пример 4. Записать уравнение прямой

$$L: \begin{cases} Q_1:\ 3x-2y+z-3=0 \\ Q_2:\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

в каноническом и параметрическом видах.

Положив $x=0$, получим *СЛАУ* $\begin{cases}-2y+z=3\\ \quad y-z=1\end{cases}$. Складывая уравнения, найдём $y=-4$. Подставив это значение переменной y во второе уравнение системы, получим $z=-5$. Таким образом, прямая проходит через точку $M_0(0;\,-4;\,-5)$. Найдём направляющий вектор прямой как векторное произведение нормальных векторов данных плоскостей:

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}=(\overset{m}{1};\ \overset{n}{4};\ \overset{p}{5}).$$

Запишем канонические $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+5}{5}$ и параметрические уравнения прямой: $\begin{cases}x=t\\ y=4t-4\\ z=5t-5\end{cases}$.

2. *Угол между пересекающимися прямыми*. Угол между двумя пересекающимися прямыми определяется как угол между их направляющими векторами. Если прямые L_1 и L_2 имеют направляющие векторы $\boldsymbol{S}_1(m_1;n_1;p_1)$ и $\boldsymbol{S}_2(m_2;n_2;p_2)$, соответственно, то угол между прямыми определяется по формуле:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2}{|\boldsymbol{S}_1|\cdot|\boldsymbol{S}_2|}=}\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

а) Если прямые *перпендикулярны* ($\boldsymbol{S}_1\perp\boldsymbol{S}_2\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{2}$), то ***условием перпендикулярности прямых*** является равенство

$$\boxed{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0}.$$

б) Если прямые *параллельны*, то направляющие вектора коллинеарны, следовательно, ***условие параллельности прямых***

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}}.$$

3. *Координаты точки пересечения прямой и плоскости*. Пусть прямая L задана общим уравнением $L:\begin{cases}Q_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ Q_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$, а плоскость Q уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Так как точка пересечения прямой и плоскости принадлежит одновременно обоим этим объектам, то её координаты находят из решения системы уравнений

$$\begin{cases} Q_1: & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ Q_2: & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ Q: & Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}.$$

Если прямая L задана *каноническими уравнениями*

$$L:\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}},$$

а плоскость Q – уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то поступают по следующей схеме:

– переходят от канонических к параметрическим уравнениям прямой L, т.е. записывают уравнение в виде $L:\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$;

– полученные выражения подставляют в уравнение заданной плоскости Q и находят параметр t: $\boxed{t_{пер.}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}}$.

Рассмотрим возможные случаи:

1) если выполняются условия $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}$, то прямая не пересекает плоскость (прямая параллельна плоскости);

2) при условиях $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$ прямая лежит на плоскости;

3) если $Am+Bn+Cp\neq 0$, прямая пересекает плоскость в одной точке.

– вычисляют координаты точки пересечения, подставив найденное значение $t_{пер.}$ в параметрические уравнения прямой

$$\boxed{\begin{cases} x_{пер.}=x_0+m\cdot t_{пер.} \\ y_{пер.}=y_0+n\cdot t_{пер.} \\ z_{пер.}=z_0+p\cdot t_{пер.} \end{cases}}.$$

Пример 5. Найти координаты точки пересечения прямой L, заданной уравнением $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$, и плоскости Q: $2x-y+3z-4=0$.

Перепишем уравнение прямой L в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}.$$

Подставим найденные величины в уравнение плоскости Q, получим $2\cdot(1+2t)-(-2-t)+3\cdot(3+2t)-4=0 \Rightarrow 11\cdot t=-9 \Rightarrow t_{пер.}=-\frac{9}{11}$. Найденное значение параметра $t_{пер.}$ подставим в параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x_{пер.} = 1+2\cdot\left(-\frac{9}{11}\right) = -\frac{7}{11} \\ y_{пер.} = -2-\left(-\frac{9}{11}\right) = -\frac{13}{11} \\ z_{пер.} = 3+2\cdot\left(-\frac{9}{11}\right) = \frac{15}{11} \end{cases}$$

. Таким образом, прямая пересекает заданную плоскость в точке $M\left(-\frac{7}{11};\ -\frac{13}{11};\ \frac{15}{11}\right)$.

4. *Угол между прямой и плоскостью*. Пусть дана плоскость Q с нормальным вектором $\boldsymbol{n}(\mathrm{A};\mathrm{B};\mathrm{C})$ и пересекающая её прямая L с направляющим вектором $\boldsymbol{S}\,(m;n;p)$ (рис. 10).

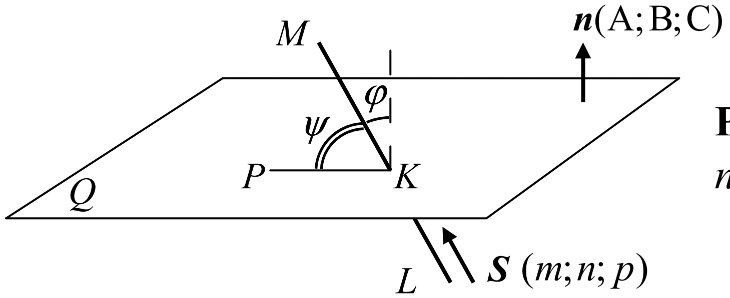
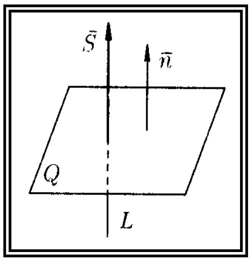


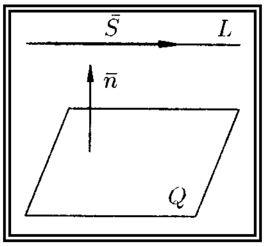
Рис. 10. *Угол между прямой и плоскостью.*

Угол $MKP=\psi$ является углом между прямой L и плоскостью Q. Угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой обозначим через φ. Из рис. 10 видно, что $\varphi=\frac{\pi}{2}-\psi$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) = \boxed{\sin\psi = \frac{\vec{\mathrm{S}}\cdot\vec{\mathrm{n}}}{\left|\vec{\mathrm{S}}\right|\cdot\left|\vec{\mathrm{n}}\right|} = \frac{\mathrm{A}m+\mathrm{B}n+\mathrm{C}p}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}.$$



а) Если прямая *перпендикулярна* плоскости ($\boldsymbol{S} \parallel \boldsymbol{n} \Rightarrow \Rightarrow \psi=\frac{\pi}{2}$), то ***условие перпендикулярности прямой*** L ***и плоскости*** Q имеет вид: $\boxed{\frac{m}{\mathrm{A}}=\frac{n}{\mathrm{B}}=\frac{p}{\mathrm{C}}}$.

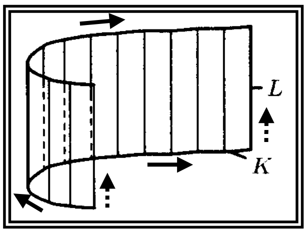


б) Если прямая *параллельна* плоскости ($\psi = 0$), то направляющий вектор $\boldsymbol{S}$ прямой и нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ плоскости перпендикулярны ($\boldsymbol{S} \perp \boldsymbol{n}$), следовательно, ***условие параллельности прямой и плоскости***:

$$\boxed{m\text{A} + n\text{B} + p\text{C} = 0}.$$

12 "*Сведения о поверхностях второго порядка*"

12.1. *Цилиндры и конусы*



Параллельный перенос в пространстве прямой L вдоль некоторой линии K (или линии K вдоль прямой L) порождает некоторую ***цилиндрическую поверхность*** или ***цилиндр***. Прямая L называется ***образующей***, а линия K – ***направляющей цилиндра***.

Рассмотрим цилиндр, направляющая K которого лежит в одной из координатных плоскостей прямоугольной системы координат, а его образующая L параллельна одной из координатных осей, перпендикулярной к плоскости (для определённости выберем, что направляющая K лежит на плоскости xOy (см. п. 10.1, ***10***), а образующая L параллельна оси аппликат, рис. 11):

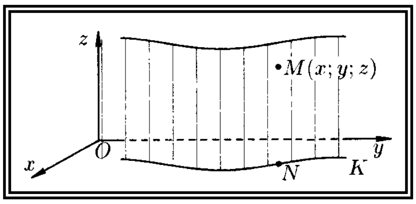


Рис. 11. *Цилиндр с образующей $L \parallel Oz$ и направляющей K на плоскости xOy.*

Так как направляющая K лежит на плоскости xOy, то она описывается некоторым соотношением $\boxed{F(x; y) = 0}$. Из рис. 11 видно, что проекцией точки $M(x; y; z)$ на пл. xOy является точка $N(x; y; 0) \in K$. Следовательно, её координаты также будут удовлетворять уравнению $F(x; y) =$ $= 0$. В силу произвольности выбранной точки $M(x; y; z)$ координаты любой точки цилиндрической поверхности будут удовлетворять уравнению $\boxed{F(x; y) = 0}$, которое называется ***уравнением цилиндра***.

◯ Если направляющая K лежит на плоскости yOz, а образующая L параллельна оси абсцисс Ox, то цилиндрическая поверхность описывается уравнением $\boxed{F(y; z) = 0}$. Если направляющая K лежит на плоскости xOz, а образующая L параллельна оси ординат Oy, то цилиндр описывается уравнением $\boxed{F(x; z) = 0}$. ◯

Цилиндры называют в соответствии с названием направляющей

K. Например, если направляющей K является эллипс (см. п. 10.2, **10**), лежащий на плоскости xOy, то поверхность называется ***эллиптическим цилиндром*** (рис. 12).

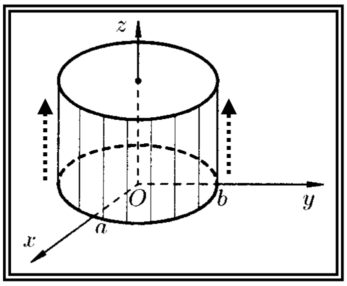
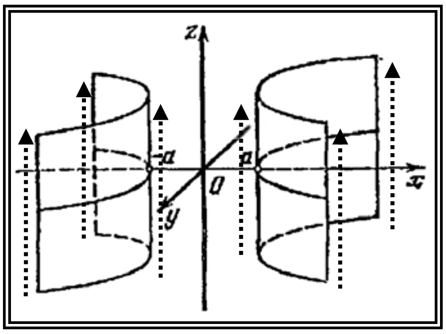


Рис. 12. *Эллиптический цилиндр* ($K : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$).

Частным случаем *эллиптического цилиндра* является ***круговой цилиндр***, направляющей которого является окружность с центром в начале координат ($K : x^2 + y^2 = R^2$, п. 10.1, **10**). На рис. 13 показан ***гиперболический цилиндр***, направляющей которого является гипербола (п. 10.3, **10**), а на рис. 14 – ***параболический цилиндр*** с направляющей параболой (п. 10.4, **10**).



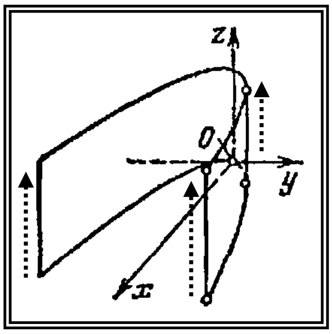


Рис. 13. *Гиперболический цилиндр* ($K : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$).

Рис. 14. *Параболический цилиндр* ($K : y^2 = 2px$).

Описанные поверхности относятся к ***поверхностям второго порядка***, так как уравнения их направляющих содержат старшие степени, равные двум.

Пусть линия L лежит на плоскости yOz. При её вращении вокруг оси аппликат Oz получают ***поверхность вращения*** (рис. 15).

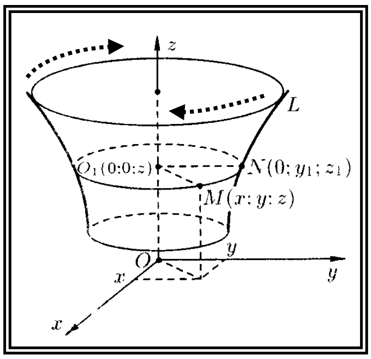


Рис. 15. *Поверхность вращения.*

Произвольная точка $M(x;y;z)$ *поверхности вращения* лежит на окружности с центром в точке $O_1(0;0;z)$. Окружность проходит через точку $N(0;y_1;z_1)\in L$ $(z_1=z)$. Радиус этой окружности равен:

$$R = O_1M = \sqrt{x^2+y^2} = O_1N = |\,y_1|$$

или

$$y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Так как точка $N(0;y_1;z_1)$ лежит на линии L, то её координаты удовлетворяют её уравнению $F(y_1;z_1)=0$, следовательно, ***уравнение поверхности вращения*** имеет вид: $\boxed{F(\pm\sqrt{x^2+y^2};z)=0}$.

Если линия L лежит на плоскости xOy и её вращают вокруг оси абсцисс, то ***поверхность вращения*** описывается уравнением

$$\boxed{F(x;\,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0}.$$

При вращении линии L вокруг оси ординат *поверхность вращения* описывается уравнением $\boxed{F(\pm\sqrt{x^2+z^2};\,y)=0}$.

Вращение прямых, проходящих через начало координат и лежащих на какой-либо из координатных плоскостей, приводит к возникновению ***конических поверхностей*** (***конусов***). Например, вращение прямой $y=z$ вокруг оси аппликат порождает ***конус***, показанный на рис. 16. ***Уравнение конуса*** имеет вид:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=z \text{ или } \boxed{x^2+y^2=z^2}.$$

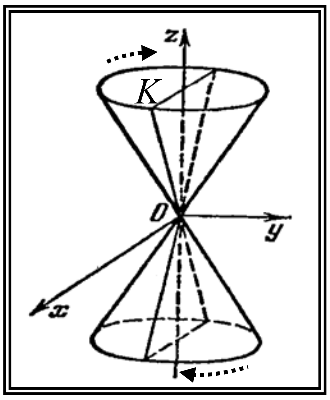
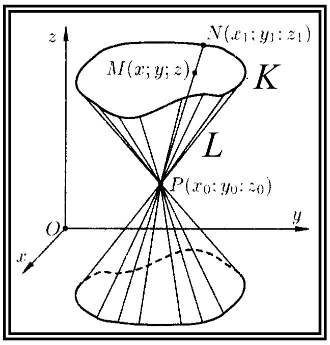


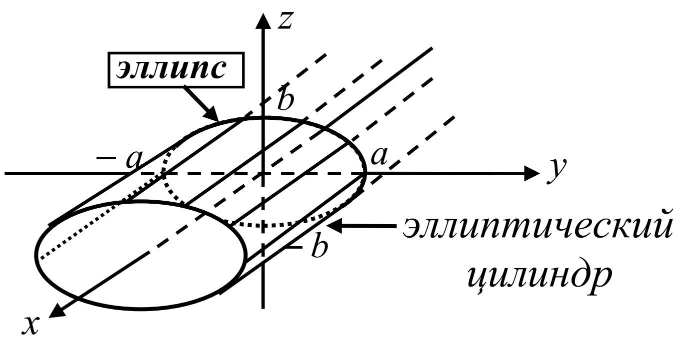
Рис. 16. *Конус* ($\boxed{x^2+y^2=z^2}$).



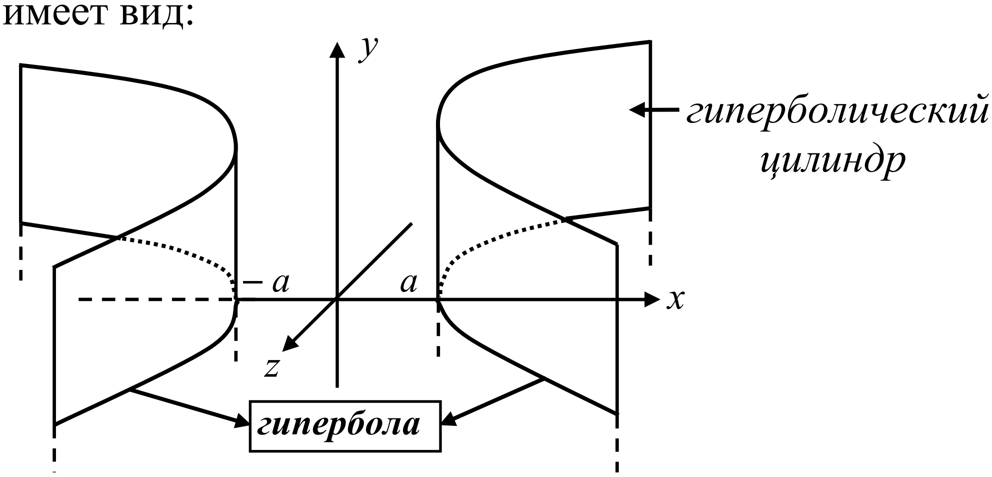
Если направляющая K представляет собой произвольную замкнутую линию, а образующая L – прямую, то коническая поверхность будет иметь вид, показанный на рисунке (точка пересечения образующих $P(x_0;y_0;z_0)$ называется ***вершиной конуса***). В частности, коническая поверхность с направляющей в виде эллипса описывается уравнением $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0}$. ○

Пример 1. Определить тип поверхностей и отобразить их графически:
а) $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$; **б**) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$; **в**) $z^2=2py$; **г**) $x^2+z^2=y^2$.

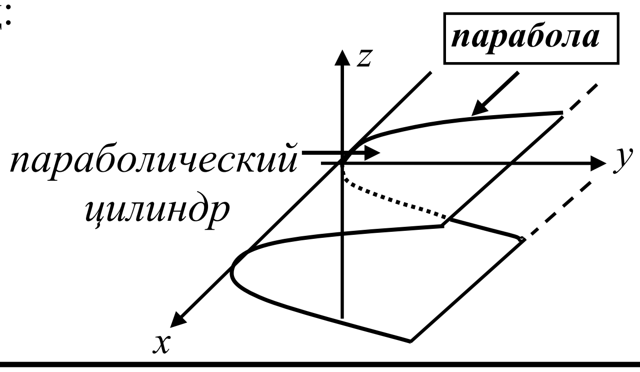
а) $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ – *эллиптический цилиндр*, так как в плоскости yOz заданное уравнение отображает эллипс с полуосями a и b. Эта поверхность имеет вид:



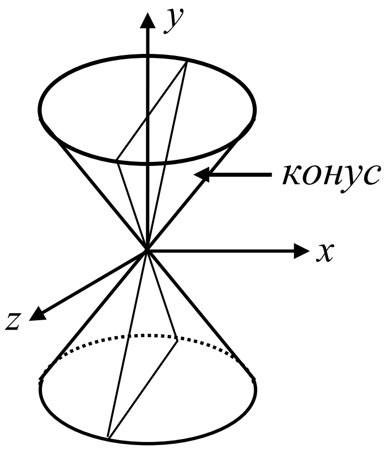
б) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ – *гиперболический цилиндр*, так как в плоскости xOz заданное уравнение отображает гиперболу с полуосями a и b. Эта поверхность имеет вид:



в) $z^2=2py$ – *параболический цилиндр*, так как в плоскости xOz заданное уравнение отображает параболу с параметром p. Эта поверхность имеет вид:

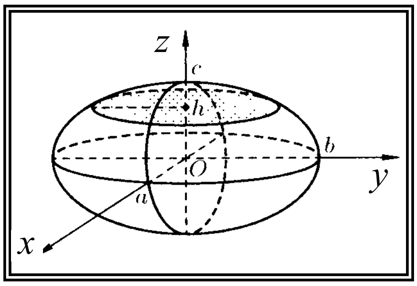


г) $x^2 + z^2 = y^2$ – *конус* вдоль оси Oy. Эта поверхность имеет вид:



12.2. *Канонические поверхности второго порядка*

Если прямоугольную систему координат выбрать определённым образом, то уравнение поверхности второго порядка можно привести к каноническому виду (преобразования проводятся также, как для кривых второго порядка, см. **8**). Анализ канонических уравнений поверхности второго порядка проводят *методом сечений*: поверхность разрезается плоскостью, которая параллельна одной из координатных плоскостей (см. п. 10.1, **10**), и исследуется кривая второго порядка, которая возникает при пересечении поверхности с плоскостью разреза.

1. 

Эллипсоид $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1}$.

Зафиксируем аппликату, т.е. положим $z=h$ (h – любое действительное число, плоскость разреза параллельна координатной плоскости xOy), получим $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}$. В плоскости разреза получаем линию L, которая описывается уравнениями $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$. При значениях $|h|>c>0$ правая часть первого уравнения системы отрицательна, а левая часть – положительна или равна нулю, поэтому приведенная система уравнений не отображает никакого геометрического образа. При значениях $|h|=c>0$ система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=\pm c \end{cases}.$$

Первое уравнение отображает сумму неотрицательных слагаемых, которая обращается в нуль только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, т.е. $x=0$ и $y=0$. Следовательно, плоскость разреза касается эллипсоида в точках $(0;0;-c)$ и $(0;0;c)$. При значениях $|h|<c$ разделим первое равенство, определяющее линию L на величину $1-\dfrac{h^2}{c^2}>0$, найдём, что в плоскости, которая параллельна координатной плоскости xOy, линия L описывается уравнением эллипса $\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$ с полуосями $a_1=a\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{c}\right)^2}$ и $b_1=b\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{c}\right)^2}$ (рис. 17).

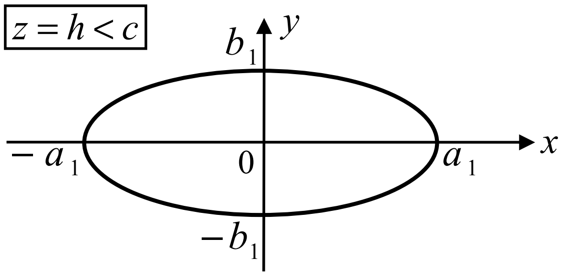
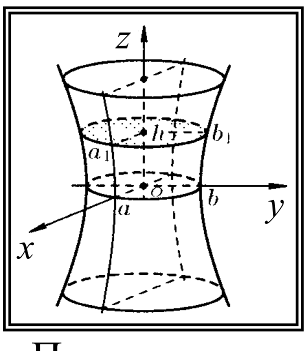


Рис. 17. *Сечение эллипсоида при* $z=h<c$.

Полуоси эллипса достигают своих наибольших значений при $h=0$, т.е. на плоскости xOy. Аналогично исследуют форму эллипсоида, рассекая его плоскостями, параллельными координатным плоскостям. *Эллипсоид* симметричен относительно координатных плоскостей. Величины a, b и c называют ***полуосями эллипсоида***. Если эти величины не равны между собой, то эллипсоид называется ***трёхосным***. При совпадении значений любых двух из полуосей, он называется ***эллипсоидом вращения***. Равенство всех трёх полуосей приводит к вырождению эллипсоида в ***сферу*** (см. п. 0.5, **0**).

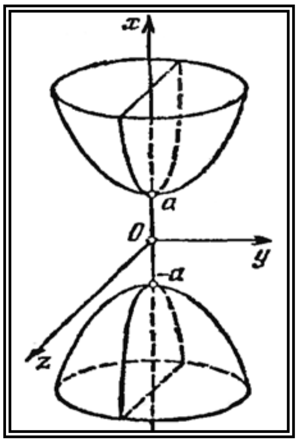
2. 

Однополостный гиперболоид $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1}$ (ось Oz).

Применяя метод сечений, легко показать, что в плоскостях, параллельных плоскости xOy ($z=h\in R$), линией пересечения является эллипс. При рассечении однополостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, линиями пересечения будут гиперболы. ***Однополостный гиперболоид*** симметричен относительно координатных плоскостей и представляет собой расширяющиеся трубки от координатной плоскости xOy. Уравнения вида

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \text{ (ось } Oy\text{) и } \boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \text{ (ось } Ox\text{)}$$

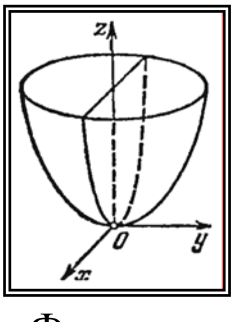
также описывают однополостные гиперболоиды.

3. 

Двуполостный гиперболоид $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$ (ось Ox).

Двуполостный гиперболоид симметричен относительно координатных осей. Точки с координатами $(-a;0;0)$ и $(a;0;0)$ называются его ***вершинами***. Другие ***двуполостные гиперболоиды*** описываются уравнениями:

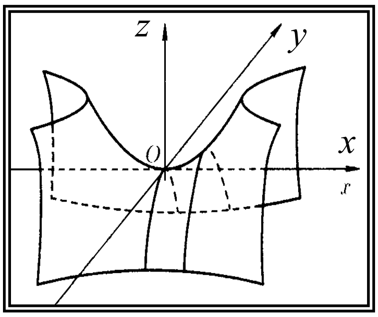
$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1} \text{ (ось } Oy\text{) и } \boxed{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \text{ (ось } Oz\text{).}$$

4. 

Эллиптический параболоид $\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z}$ (ось Oz, для определённости будем считать, что $p>0$ и $q>0$).

Фигура симметрична относительно координатных плоскостей xOz и yOz. В этих координатных плоскостях линиями разреза являются параболы $\frac{x^2}{p}=2z$ и $\frac{y^2}{q}=2z$, соответственно. ***Эллиптическими парабалоидами*** являются поверхности, определяемые уравнениями:

$$\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y} \text{ (ось } Oy\text{) и } \boxed{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x} \text{ (ось } Ox\text{).}$$

5. 

Гиперболический параболоид $\boxed{\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z}$ (ось Oz, для определённости будем считать, что $p>0$ и $q>0$).

В плоскостях $x=h\in R$ линиями сечения являются параболы с ветвями, направленными вниз. В плоскостях $y=h\in R$ линиями сечения также являются параболы с ветвями, направленными вверх. При сечении гиперболического параболоида плоскостями $z=h\in R$ линией пересечения является гипербола.

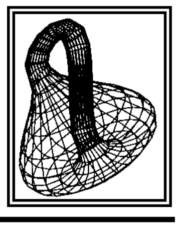
Фигура симметрична относительно плоскостей xOz и yOz, а по форме напоминает седло. Другие гиперболические параболоиды описываются уравнениями:

$$\boxed{\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x}\ (\text{ось } Ox)\quad \boxed{\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y}\ (\text{ось } Oy),$$

а также вышеуказанными уравнениями при одновременной замене параметров p и q на отрицательные величины $-p$ и $-q$. Эта замена приводит к смене направлений ветвей парабол.

К каноническим поверхностям второго порядка относятся также эллиптические конусы, которые описываются уравнениями:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0},\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0},\quad \boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0}.$$



Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **1**

Даны четыре точки $A(0;1;2)$, $B(-1;0;1)$, $C(1;-1;-1)$ и $D(2;\ 0;\ 1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой* AB.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 2

Даны четыре точки $A(2;0;1)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;-2)$ и $D(1;1;0)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\mathbf{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\mathbf{AC}$ и $\mathbf{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\mathbf{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой* AB.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 3

Даны четыре точки $A(1;2;0)$, $B(0;1;1)$, $C(0;\ 1;\ 2)$ и $D(0;1;-1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 4

Даны четыре точки $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;0)$, $C(1;-1;0)$ и $D(0;1;1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **5**

Даны четыре точки $A(0;2;-1)$, $B(0;\,1;\,-1)$, $C(-1;\,0;\,1)$ и $D(-1;\,0;\,2)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 6

Даны четыре точки $A(2;\,-1;\,0)$, $B(1;1;0)$, $C(-1;\,2;\,0)$ и $D(1;\,-1;\,1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 7

Даны четыре точки $A(1;1;0)$, $B(2;\ -1;\ 0)$, $C(0;1;-1)$ и $D(0;\ 1;\ -2)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 8

Даны четыре точки $\mathrm{A}(0;1;1)$, $\mathrm{B}(1;-1;0)$, $\mathrm{C}(1;0;2)$ и $\mathrm{D}(-1;-1;0)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки* D *до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки* D *до прямой* AB.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой* AB *и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку* D_1 *симметричную к точке* D *относительно прямой* AB.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 9

Даны четыре точки $A(-1;1;0)$, $B(-1;-1;1)$, $C(0;-1;1)$ и $D(1;0;2)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 10

Даны четыре точки $A(-1;\ 0;\ 1)$, $B(1;-1;-2)$, $C(1;-1;0)$ и $D(1;\ 0;\ -1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **11**

Даны четыре точки $A(1;-1;0)$, $B(0;-2;-1)$, $C(-1;-1;0)$ и $D(0;1;-1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 12

Даны четыре точки $A(0;2;1)$, $B(-1;0;-1)$, $C(0;\ 1;\ 2)$ и $D(1;\ 0;\ -1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **13**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(2;1;0)$, $\mathrm{B}(0;\ 1;\ -1)$, $\mathrm{C}(1;\ 0;\ -1)$ и $\mathrm{D}(-1;\ 0;\ 1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки* D *до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки* D *до прямой* AB.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой* AB *и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку* D_1 *симметричную к точке* D *относительно прямой* AB.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **14**

Даны четыре точки $A(-1;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 0;\ 1)$, $C(-2;\ 1;\ 0)$ и $D(0;\ -1;\ 1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 15

Даны четыре точки $A(-1;\ 1;\ 0)$, $B(2;-1;1)$, $C(-2;-1;1)$ и $D(1;1;-1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 16

Даны четыре точки $A(0;2;1)$, $B(1;-1;0)$, $C(1;2;1)$ и $D(0;1;-1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\mathbf{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\mathbf{AC}$ и $\mathbf{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\mathbf{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **17**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(1;-1;0)$, $\mathrm{B}(0;\ 2;\ 1)$, $\mathrm{C}(1;\ 0;\ 1)$ и $\mathrm{D}(1;\ -1;\ 1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 18

Даны четыре точки $A(-1;-1;-1)$, $B(1;\ 0;\ 2)$, $C(-1;1;1)$ и $D(1;0;-2)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

***Вариант* <u>19</u>**

Даны четыре точки $\mathrm{A}(-1;-1;-2)$, $\mathrm{B}(1;\ 2;\ 1)$, $\mathrm{C}(0;-1;0)$ и $\mathrm{D}(1;\ 0;\ -1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 20

Даны четыре точки $A(-1;-1;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;0;-1)$ и $D(2;1;1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **21**

Даны четыре точки $A(0;-1;-1)$, $B(0;1;1)$, $C(-1;-2;0)$ и $D(0;-1;1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 22

Даны четыре точки $A(2;0;1)$, $B(-1;1;-1)$, $C(0;1;1)$ и $D(-1;-1;0)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **23**

Даны четыре точки $A(-1;0;-1)$, $B(1;\ 2;\ 0)$, $C(1;\ -1;\ 0)$ и $D(0;\ 1;\ 1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки* D *до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки* D *до прямой* AB.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой* AB *и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку* D_1 *симметричную к точке* D *относительно прямой* AB.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант 24

Даны четыре точки $A(-1;1;2)$, $B(0;-1;-1)$, $C(1;0;-1)$ и $D(1;\ 0;\ 1)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A,B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Задания для самостоятельного решения

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант **25**

Даны четыре точки $\mathrm{A}\left(2;-1;\,1\right)$, $\mathrm{B}\left(1;\ 2;\ 1\right)$, $\mathrm{C}\left(-1;\ 2;\ 1\right)$ и $\mathrm{D}\left(1;\,1;\,-1\right)$:

1. Составить *уравнение плоскости*, проходящей:
а) через точку A и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{BC}$;
б) через точку B параллельно векторам $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{AD}$;
в) через точки A и B параллельно вектору $\boldsymbol{CD}$;
г) через точки A, B и C;
д) через точку D параллельно плоскости, проходящей через точки A, B и C;
е) через точки C и D перпендикулярно к плоскости, проходящей через точки A, B и C.

2. Вычислить *расстояние от точки D до плоскости*, проходящей через точки A, B и C.

3. Найти *угол между плоскостями*, проходящими через точки A, B, C и B, C, D.

4. Составить *канонические* и *параметрические уравнения прямых*, проходящих через точки A, B и точки C, D.

5. Если прямые AB и CD *пересекаются*, то найти *координаты точки пересечения*.

6. Определить *расстояние от точки D до прямой AB*.

7. Найти *точку пересечения* с плоскостью ABC прямой, которая проходит через точку D перпендикулярно к этой плоскости.

8. Определить *угол между прямой AB и плоскостью*, которая проходит через точки B, C, D.

9. Найти *точку D_1 симметричную к точке D относительно прямой AB*.

Список использованных источников

1. Делоне Р.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. – Т.1. – Москва-Ленинград: Изд-во техн-теор. лит-ры. – 1948. – 456 с.
2. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1964. – 683 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – Москва: Наука. – 1967. – 736 с.
4. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. – Москва: Наука. – 1968. – 911 с.
5. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. – Москва: Наука. – 1968. – 176 с.
6. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – Москва: МГУ. – 1969. – 698 с.
7. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – Москва: Наука. – 1973. – 640 с.
8. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – Москва: Наука. – 1976. – 384 с.
9. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Москва: Наука. – 1979. – 512 с.
10. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. – Москва: Наука. – 1980. – 496 с.
11. Кайгородов В.Р. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Казань: Изд-во Казанского университета. – 1985. – 238 с.
12. Зайцев И.А. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1991. – 400 с.
13. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – Санкт-Петербург: “Специальная литература”. – 1998. – 200 с.
14. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – Москва: Наука. – 1999. – 224 с.
15. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел). – Москва: Высшая школа. – 1999. – 511 с.
16. Замятин А.П., Булатов А.А., Верников Б.М. Алгебра и геометрия. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та. – 2001. – 458 с.
17. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Москва: Дрофа. – 2004. – 288 с.

18. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – Московская область: ЗАО “Оптимизационные системы и технологии”. – 2004. – 368 с.
19. Высшая математика для экономистов /Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И. М. Тришин, М.Н. Фридман. – Москва: ЮНИТИ. – 2004. – 471 с.
20. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 240 с.
21. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 304 с.
22. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Ч. 1. – Москва: Айрис-пресс. – 2005. – 288 с.
23. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю.М. Смирнова. – Москва: Логос. – 2005. – 376 с.
24. Высшая математика. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие для экономических и инженерных специальностей вузов / Н.С. Коваленко, Т.И. Чепелева. – Минск: Юнипресс. – 2006. – 208 с.
25. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: учебное пособие / В.И. Антонов, М.В. Лагунова, Н.И. Лобкова и др. – Москва: Проспект. – 2011. – 144 с.
26. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. – Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.

Терехов С.В.

Варюхин В.Н.

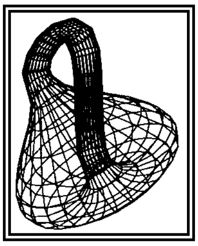
Математическая библиотечка студента-физика

Том 1

(*часть* II)

Решение задач

по теории пределов, дифференциальному исчислению, исследованию функций

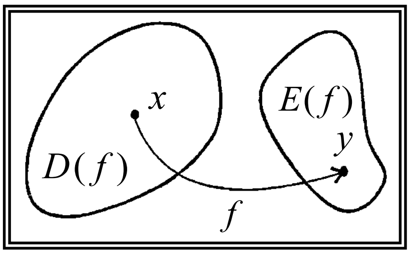


<u>II</u>. *Пределы*. *Дифференциальное исчисление*

Тема: *Пределы и непрерывность функции*

<u>*13*</u> “*Теория пределов*”

13.1. *Функция и способы её задания*



Закон, по которому из множества $\boxed{D\,(\,f\,)}$ каждому значению независимой переменной x, называемой ***аргументом***, ставится в соответствие из множества $\boxed{E\,(\,f\,)}$ единственное значение зависимой переменной y, называется ***однозначной функцией*** или просто ***функцией***: $\boxed{y=f(x)}$, где f – закон соответствия (***<u>Н.И. Лобачевский</u>***).

○ Если каждой упорядоченной паре $(x;y)$, тройке $(x;y;z)$, … чисел ставится в соответствие одно значение функции u, то говорят, что задана ***функция от двух*** $u=f(x;y)$, ***трёх*** $u=f(x;y;z)$ и более переменных. ○

Пример 1. Различные функции: $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$.

Областью определения функции (обозначение: $\boxed{D(f)}$) называется множество допустимых значений аргумента x, при которых функция y имеет смысл в области действительных чисел; множество значений, которые при этом принимает функция, называется её ***областью значений*** (обозначение: $\boxed{E(f)}$).

Геометрическое место точек, абсциссы которых равны значению аргумента x, а ординаты – значению функции y, называется ***графиком функции***.

Если выполняется равенство $\boxed{f(-x)=f(x)}$, то функция называется ***чётной***, а при выполнении равенства $\boxed{f(-x)=-f(x)}$ – ***нечётной***. Если функция не удовлетворяет ни одному из вышеприведенных равенств, то она называется ***функцией общего вида***.

Пример 2. $y=x^2;\ \ x^4;\ \ x^6;\ \ \cos x$ – *чётные* функции;

$y=x;\ \ x^3;\ \ x^5;\ \ \sin x;\ \ tgx;\ \ ctgx$ – *нечётные* функции;

$y=a^x;\ \ \log_a x;\ \ 2x-4$ – функции *общего вида*.

○ Произведение *двух чётных или нечётных функций представляет собой чётную функцию*, а *произведение чётной функции на нечётную является нечётной функцией*. ○

График чётной функции *симметричен относительно оси ординат* Oy, а *график* нечётной функции – *относительно начала координат*. Примеры *графиков* чётной $\boxed{y = x^2 + 1}$ и нечётной $\boxed{y = x^3}$ функций приведены на рис. 1 и 2.

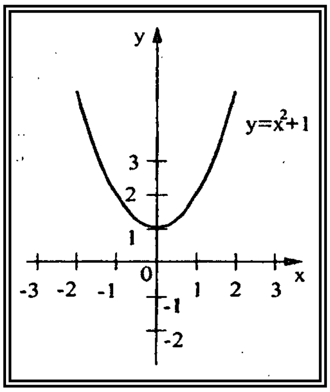


Рис. 1. *График чётной функции* $\boxed{y = x^2 + 1}$.

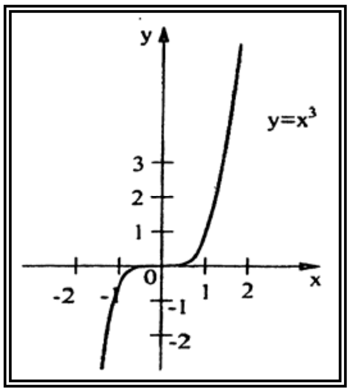


Рис. 2. *График нечётной функции* $\boxed{y = x^3}$.

В дальнейшем будем использовать ряд символов (см. табл. 1), которые называются кванторами:

Таблица 1.

Кванторы, их обозначение и словесное описание

Символ	Значение символа
$\Rightarrow$	«следует»; «выполняется»
$\Longleftrightarrow$	равносильность утверждений, стоящих по разные стороны от символа; «необходимо и достаточно»; «тогда и только тогда»
$\forall$	«для каждого»; «для любого»; «для всякого»; «каждый»; «любой»; «всякий»
$\exists$	«существует»; «найдется»

Функция называется ***периодической***, если существует такое действительное число $\exists T > 0$, что $\forall x \in D(f)$ выполняется равенство

$$\boxed{f(x) = f(x + kT)},$$

где $k \in Z$. Число T, при котором выполняется указанное равенство, называется ***периодом*** функции.

Пример 3. Показать, что функция $y = \cos x$ имеет период $T = 2\pi$.

Так как $y(x+T) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = y(x)$, то число $T = 2\pi$ является периодом данной функции.

Функция называется ***возрастающей*** (***неубывающей***, $\boxed{f(x)\uparrow}$) на отрезке $[a;\, b]$, если *бóльшему значению аргумента* соответствует *бóльшее* (*не меньшее*) значение функции, т.е. *при* $\boxed{x_2 > x_1}$ *выполняется неравенство* $\boxed{f(x_2) > f(x_1)}$ ($\boxed{f(x_2) \geq f(x_1)}$, рис. 3).

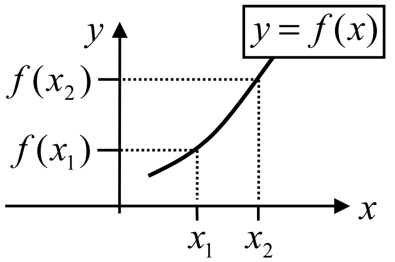


Рис. 3. *Пример возрастающей на отрезке функции (при* $\boxed{x_2 > x_1}$ *выполняется неравенство* $\boxed{f(x_2) > f(x_1)}$).

Функция называется ***убывающей*** (***невозрастающей***, $\boxed{f(x)\downarrow}$) на интервале $[a; b]$, если *бóльшему значению аргумента* соответствует *мéньшее* (*не большее*) значение функции, т.е. *при* $\boxed{x_2 > x_1}$ *выполняется неравенство* $\boxed{f(x_2) < f(x_1)}$ ($\boxed{f(x_2) \le f(x_1)}$, рис. 4).

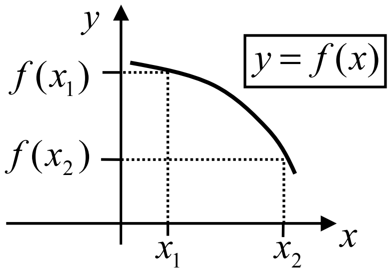
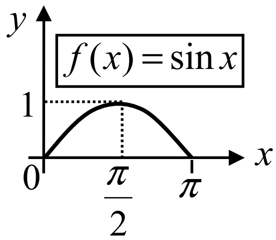


Рис. 4. *Пример убывающей на отрезке функции (при* $\boxed{x_2 > x_1}$ *выполняется неравенство* $\boxed{f(x_2) < f(x_1)}$).

Возрастающие (*неубывающие*) и *убывающие* (*невозрастающие*) на отрезке $[a; b]$ функции объединяются под общим названием ***строго монотонные*** (***монотонные***) функции.

Пример 4. Указать интервалы монотонности функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$.



Из рисунка видно, что $f(x) \uparrow \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $f(x) \downarrow \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Если на отрезке $[a; b]$ функция не меняет своего значения, то она называется ***постоянной*** (рис. 5).

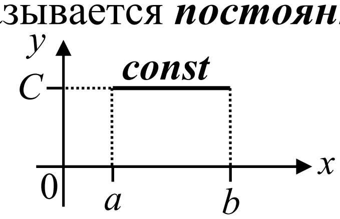
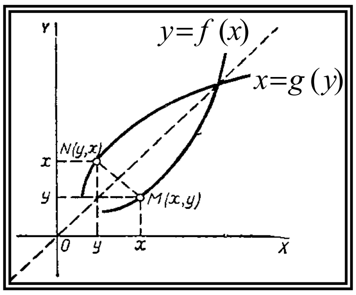


Рис. 5. *Постоянная функция.*

Пусть задана функция $y = f(x)$. Если график этой функции пересекает ось абсцисс (Ox) в единственной точке, то можно найти такой закон, по которому каждому значению переменной y будет поставлено в соответствие единственное значение переменной x, т.е. $x = g(y)$. Закон соответствия

$$\boxed{x = g\,(y)}$$

называется ***обратной функцией***.



○ График обратной функции симметричен графику исходной функции относительно прямой $y = x$ (см. рис.). ○

Пример 5. Найти функцию, обратную к функции $y = 8x + 5$.

Выразим переменную x из заданного равенства, найдём обратную функцию $x = \frac{y-5}{8}$.

Если функция задана в виде соотношения $\boxed{F(x;y)=0}$ ($F(x;y)$ – функция двух переменных), из которого нельзя получить явные зависимости $y=f(x)$ или $x=g(y)$, то говорят, что функция задана ***неявным образом***.

Пусть дана функция $y = f(u)$, где функция $u = g(x)$. Функция вида

$$\boxed{y = f(g(x))}$$

называется ***сложной функцией***, а операция её образования – ***взятием функции от функции***. Функция $\boxed{u}$ называется ***внутренней***, а функция $\boxed{f}$ – ***внешней*** функциями.

Пример 6. Указать внутреннюю и внешнюю функции: $y = \sin(x^2)$.
В данном примере *внутренней* функцией является $u = x^2$, а *внешней* функцией будет $f = \sin$.

Пример 7. Указать внутреннюю и внешнюю функции: $y = \sin^2 x$.
Внутренней функцией будет $u=\sin x$, а *внешней* функцией является возведение в квадрат.

Для задания функции используют один из следующих способов:
– *аналитический*, т.е. в виде формулы (например, $y = x^3$); *мультианалитический* (*словесный*), т.е. функция задаётся на интервалах разными аналитическими формулами, например, $f(x) = \begin{cases} -1, \forall x < 0 \\ 0, \quad x = 0 \\ 1, \forall x > 0 \end{cases}$;

– *графический*, т.е. в виде *графика* для всех значений аргумента x из $D(f)$;

– *табличный*, т.е. в виде *таблицы*

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

.

13.2. *Предел последовательности*

Если область определения функции представляет собой ряд натуральных чисел (область $D(f):1,2,3,...,n,...$), то область значений функции $E(f)$, расположенная в порядке возрастания номера n, т.е. y_1, y_2, …, y_n, … ($\boxed{y_n = f(n)}$ – ***общий член*** последовательности), называется ***последовательностью***.

Обозначение: $\boxed{\{y_n\} = y_1,\, y_2,\, y_3, ...,\, y_n = f(n),\, ...}$.

Пример 8. Различные последовательности и их развёрнутое представление: $\{n\} = 1,2,3,...,n,...$; $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\} = 1,\, \dfrac{1}{4},\, \dfrac{1}{9},\, \dfrac{1}{16}, ..., \dfrac{1}{n^2}, ...$

Число A называется ***пределом последовательности*** $\{y_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|y_n - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\boxed{y_n \underset{n\to\infty}{\to} A}$ или $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A}$.

Символ $\lim$ является сокращением латинского слова limes, которое означает “*предел*”. Запись под словом $\lim$, т.е. выражение $n\to\infty$, указывает на то, что $n\in N$ неограниченно возрастает от 1 до ∞.

Выражение $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A}$ читают так: предел ($\lim$) последовательности y_n при n, стремящемся ($\to$) к бесконечности (∞), равен A.

Приведенное в определении неравенство с модулем можно преобразовать к виду $-\varepsilon < y_n - A < \varepsilon$ или $A-\varepsilon < y_n < A+\varepsilon$. Выясним геометрический смысл предела A. Если A – предел последовательности $\{y_n\}$, то существует такое число $N(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$), начиная с которого все последующие значения последовательности попадают в полосу, ограниченную прямыми $y = A-\varepsilon$ и $y = A+\varepsilon$, каким бы малым не было бы число ε. Отметим, что уменьшение числа ε до значения ε_1 приводит к более узкой полосе, внутрь которой попадают члены последовательности, начиная с номера $N(\varepsilon_1)$ (рис. 6).

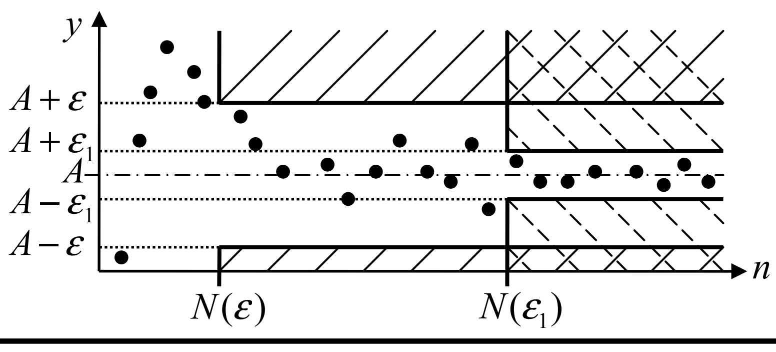


Рис. 6. *Предел последовательности.*

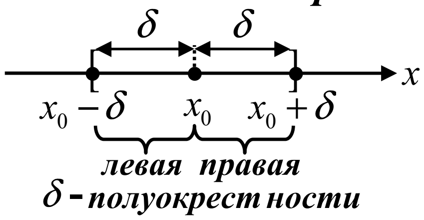
Пример 9. Дана последовательность $\{y_n\} = \left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$. Доказать, что пределом этой последовательности является число $A = \frac{1}{2}$.

Возьмём произвольное сколь угодно малое положительное число ε. Найдём такой номер $N(\varepsilon)$, чтобы $\forall\, n > N$ выполнялось неравенство $\left| y_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, т.е. $\left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ или $\left|\frac{1}{2n}\right| < \varepsilon$. Так как $n \geq 1$, то знак модуля можно снять $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, отсюда $n>\frac{1}{2\varepsilon}=N(\varepsilon)$. Если положить $\varepsilon = 0{,}01$, то $N = 50$, т.е. начиная с номера $n \geq 50$ все члены данной последовательности будут попадать в полосу $0{,}5-0{,}01< y_{n\geq 50} <0{,}5+0{,}01$ или окончательно $0{,}49 < y_{n \geq 50} < 0{,}51$.

13.3. *Предел функции*

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.

Интервал, симметричный относительно точки x_0 ($(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $[x_0 - \delta;\ x_0 + \delta]$ и т.д.), называется её ***δ-окрестностью***:



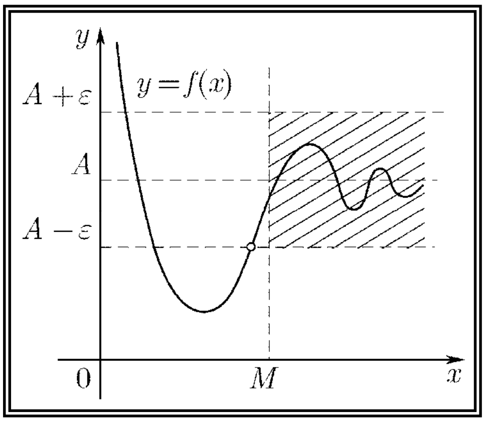
Пусть функция $f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0.*

Число A называется ***пределом*** (при условии его существования) функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$ из выполнения неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует выполнение неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A}$, или $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A}$.

○ В качестве точки x_0 может выступать и бесконечно удалённая точка ($-\infty$, $+\infty$ или ∞). ○

○ <u>***Функция Дирихле***</u> $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$ определена на всей числовой оси. В точке $x_0 = 0$ существуют пределы по подмножествам рациональных и иррациональных чисел, равны $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in Q}} f(x)=1}$ и $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in I}} f(x)=0}$, соответственно. Однако на всей числовой оси предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.



Число A называется ***пределом*** (при условии его существования) функции $y=$ $=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует число $M>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M$, выполняется неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Обозначение: $\boxed{f(x)\underset{x\to\infty}{\to} A}$, или $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A}$.

Пример 10. Найти предел функции $f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$ при $x\to\infty$.

Перепишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$ и построим её график при $x>0$ (рис. 7).

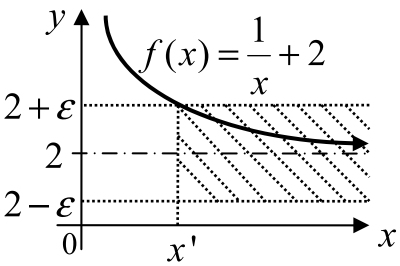
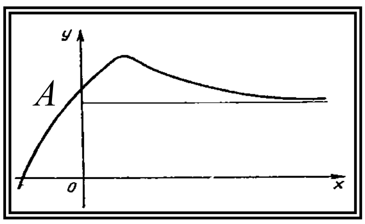
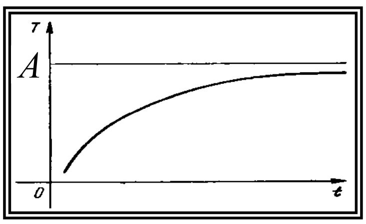


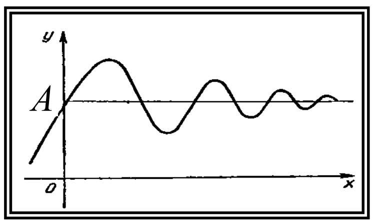
Рис. 7. *График функции* $f(x)=\dfrac{1+2x}{x}$ *при* $x\to\infty$.

Из рис. 7 видно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$, т.е. при $x\to\infty$ выполняется неравенство $|f(x)-2|<\varepsilon$. Следовательно $\left|\dfrac{1+2x}{x}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$, отсюда получаем $|x|<\dfrac{1}{\varepsilon}=\dfrac{1}{M}$. Итак, если $|x|>M$, то $|f(x)-2|<\varepsilon$. Из рис. 7 также видно, что, начиная с некоторого значения x', все значения функции $f(x)$ лежат в интервале $[2-\varepsilon;\, 2+\varepsilon]$.

График функции $f(x)$ может приближаться к своему пределу A сверху, снизу или совершая колебания вокруг прямой $y=A$:







.

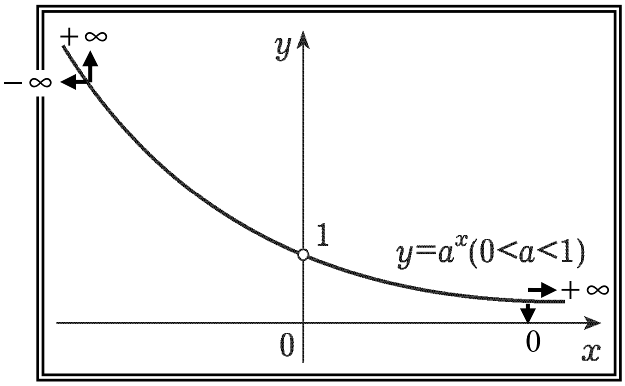
При вычислении пределов от функций следует помнить их графики, а также предельные значения, например, для *степенной функции* имеем:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 < x < 1 \\ 1, \text{ если } x = 1 \\ \infty, \text{ если } x > 1 \end{cases}}.$$

Если <u>*основание*</u>:

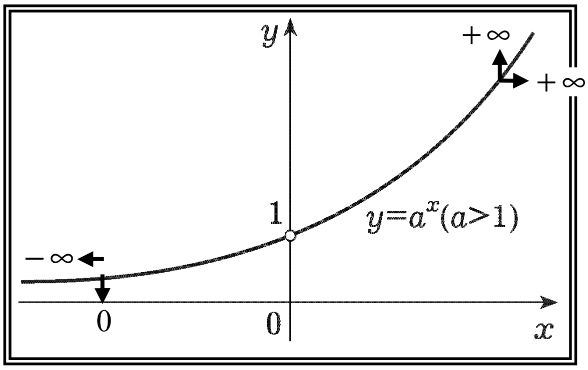
а) *показательной функции* $y = a^x$ (см. п. 0.6, <u>***0***</u>)

$0 < a < 1$, то $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty}$ и $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = 0}$:



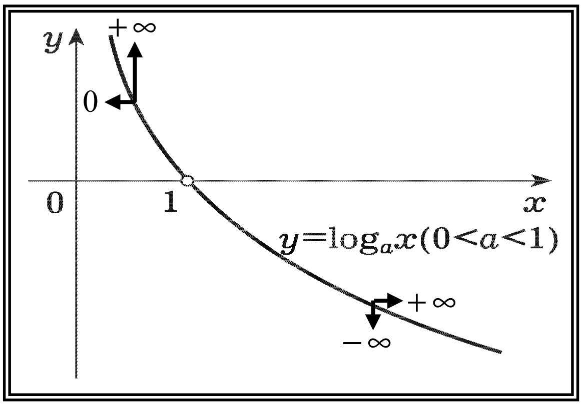
если же основание

$a > 1$, то $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = 0}$ и $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty}$.

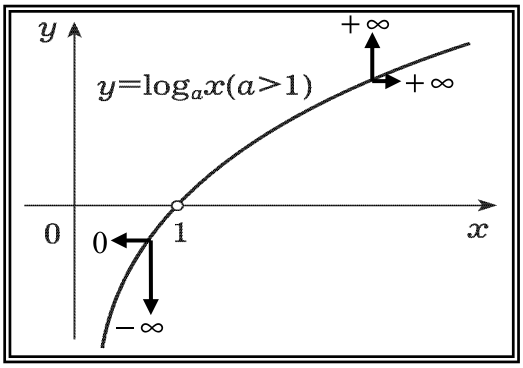


б) *логарифмической функции* $y = \log_a x$:

$0 < a < 1$ – $\boxed{\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty}$ и $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty}$;

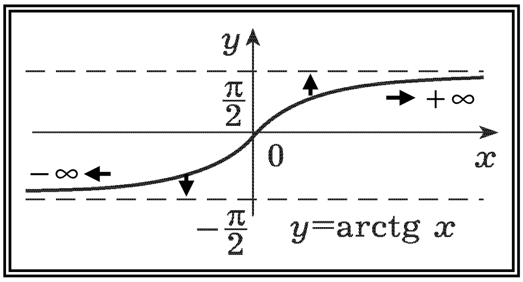


$a>1$ – $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty}$ и $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty}$.

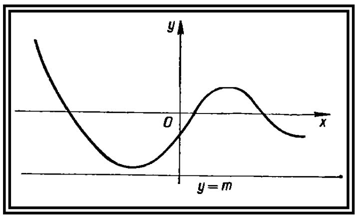


В практических приложениях встречаются также пределы вида

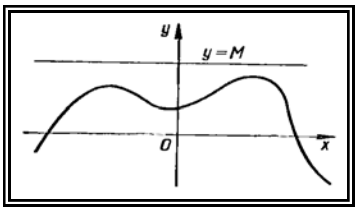
$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} arctg\, x=-\frac{\pi}{2}}$ и $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} arctg\, x=+\frac{\pi}{2}}$



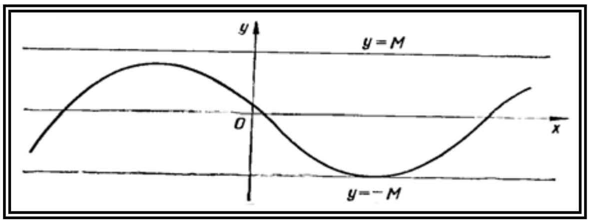
.



Функция $f(x)$ называется ***ограниченной снизу***, если $\exists m\in R$ такое, что $\forall x\in D(f)$ (квантор $\exists$ означает “существует”, а квантор $\forall$ означает “для всех”) выполняется неравенство $\boxed{f(x)\geq m}$.



Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху***, если $\exists M\in R$ такое, что $\forall x\in D(f)$ выполняется неравенство $\boxed{f(x)\leq M}$.



Функция $f(x)$ называется ***ограниченной***, если существует $\exists\, M>0$ такое, что $\forall x\in D(f)$ выполняется неравенство $\boxed{|f(x)|\leq M}$.

Всякая *возрастающая* (*убывающая*) *ограниченная* функция (*последовательность*) *имеет предел*.

Пример 11. Ограничена ли функция $f(x)=\sin x$?

Так как $|\sin x|\leq 1\ \forall x\in(-\infty;\infty)$, то функция ограниченная, причём число $M=1$.

Пример 12. Найти предельное значение функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to\pm\infty$.

Построим график заданной функции (рис. 8):

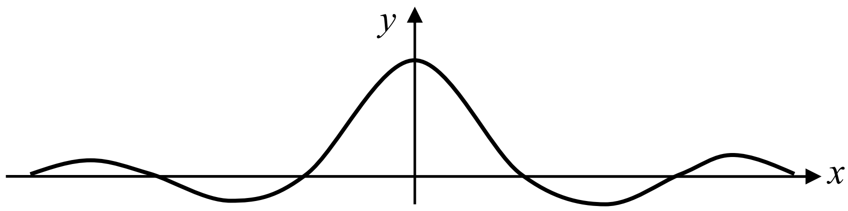
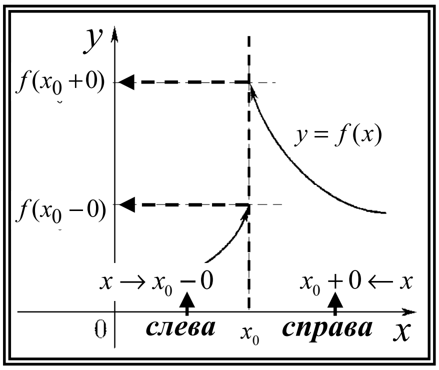


Рис. 8. *График функции* $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ *при* $x\to\pm\infty$.

Из рис. 8 видно, что при $x\to\pm\infty$ отношение ограниченной функции ($\sin x$) к возрастающей по модулю функции x стремится к нулю, следовательно, предельное значение данной функции $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

13.4. *Односторонние пределы*



Число $\boxed{f(x_0-0)}$ называется ***левосторонним пределом*** функции $f(x)$ при стремлении x к x_0 *слева* ($x\to x_0-0$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что $\forall x\in(x_0-\delta;\, x_0)$ выполняется неравенство $\left|f(x)-f(x_0-0)\right|<\varepsilon$ или $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)}$.

Число $\boxed{f(x_0+0)}$ называется ***правосторонним пределом*** функции $f(x)$ при стремлении x к x_0 справа ($x\to x_0+0$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что $\forall x\in(x_0;\, x_0+\delta)$ выполняется неравенство $\left|f(x)-f(x_0+0)\right|<\varepsilon$ или

$$\boxed{\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)}.$$

Пример 13. Найти односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

С учётом определения модуля (см. п. 0.1, ***0***) данную функцию можно записать в виде $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ \textit{не определена}, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$. Построим график этой функции (рис. 9), т.е. левосторонний предел $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{|x|}{x}=-1$, а правосторонний предел $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x}=1$.

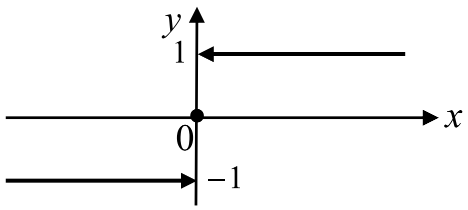


Рис. 9. График функции $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

Пример 14. Вычислить односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ при $x\to 2$.

При $x\to 2-0$ (слева) знаменатель дроби стремится к малой отрицательной величине, следовательно, сама дробь стремится к $-\infty$. При $x\to 2+0$ (справа) знаменатель дроби стремится к малой положительной величине, следовательно, сама дробь стремится к ∞. Таким образом, левосторонний предел $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{5}{x-2}=-\infty$, а правосторонний предел $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{5}{x-2}=+\infty$.

Пример 15. Найти лево- и правосторонние пределы $f(x)=e^{\frac{x+1}{x+3}}$ при $x\to -3$.

При $x\to -3-0$ (слева) знаменатель дроби, стоящей в показателе степени экспоненты, стремится к малой отрицательной величине (числитель дроби равен -2), следовательно, сама дробь стремится к $+\infty$. Если аргумент показательной функции с основанием большим единицы стремится к $+\infty$, то сама функция $f(x)\to\infty$ (см. *график показательной функции* в п. 0.6, ***0***). При $x\to -3+0$ (справа) знаменатель дроби, стоящей в показателе степени экспоненты, стремится к малой положительной величине (числитель дроби равен -2), следовательно, сама дробь стремится к $-\infty$. Если аргумент показательной функции (основание больше единицы) стремится к $-\infty$, то сама функция $f(x)\to 0$ (см. *график показательной функции* в п. 0.6, ***0***). Таким образом, левосторонний предел равен $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to -3-0}e^{\frac{x+1}{x+3}}=+\infty$, а правосторонний предел – $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to -3+0}e^{\frac{x+1}{x+3}}=0$. Поведение функции вблизи точки $x=-3$ показано на рис. 10:

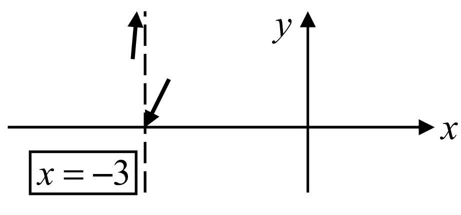


Рис. 10. *График функции* $f(x)=e^{\frac{x+1}{x+3}}$ *в окрестности точки* $x=-3$.

13.5. *Единственность предела*

Докажем единственность предела последовательности (аналогичная теорема имеет место и для предела функции).

Теорема 1. Если последовательность $\{y_n\}$ имеет предел A, то он единственный.

Док-во: Предположим, что последовательность $\{y_n\}$ имеет два предела A и A', причём $A' \neq A$. По определению предела для любого сколь угодно малого положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства $|y_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|y_n - A'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|A' - A| = |A' - y_n + y_n - A| \le |A' - y_n| + |y_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. В силу того, что число ε можно выбрать сколь угодно малым, то выполняется равенство $A' = A$, что свидетельствует о единственности предела последовательности.

14 "*Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах*"

14.1. *Бесконечно малые величины (б.м.в.) и действия над ними*

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой величиной*** при $x \to x_0$ ($\pm\infty$, $x_0 \pm 0$), если *её предел равен нулю*, т.е. $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0}$.

Пример 1. $y = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая величина при $x \to \pm\infty$; $y = x$ – бесконечно малая величина при $x \to 0$.

Рассмотрим ***действия*** *с бесконечно малыми величинами* (*б.м.в.*):

1. *Сумма* (*разность*) *конечного числа* бесконечно малых величин есть б.м.в.

Док-во: Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две *б.м.в.* при $x \to x_0$. Это означает, что для любого сколь угодно малого положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдутся такие δ_1- и δ_2-окрестности точки x_0, что будут выполняться неравенства $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Полученное неравенство справедливо в меньшей из δ_1- и δ_2-окрестностей точки x_0. Кроме того, полученное неравенство свидетельствует о том, сумма двух бесконечно малых величин есть *б.м.в.*

○ Используя метод математической индукции можно доказать утверждение свойства **1.** *для любого <u>конечного</u> числа* n слагаемых бесконечно малых величин. ○

Пример 2. Является ли сумма бесконечно малых величин $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^3}$ и $\beta(x)=\dfrac{1}{x^5}$ при $x\to\pm\infty$ бесконечно малой величиной?

Да, является, так как их сумма $\omega(x)=\alpha(x)+\beta(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}$ стремится к нулю при $x\to\pm\infty$.

<u>2</u>. *Произведение <u>конечного</u> числа* бесконечно малых величин есть *б.м. в.*

○ При вычислении отношения двух бесконечно малых величин возникает неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. ○

<u>3</u>. Если функция $f(x)$ имеет при $x\to x_0$ конечный предел $A\neq 0$, то частное от деления бесконечно малой величины на функцию $f(x)$ есть *б.м. в.*

<u>4</u>. Если функция $f(x)$ имеет при $x\to x_0$ конечный предел A, то в некоторой δ-окрестности точки x_0 её можно представить в виде суммы предельного значения A и бесконечно малой в этой окрестности величины $\alpha(x)$, т.е.

$$\boxed{f(x)=A+\alpha(x)}.$$

<u>5</u>. (*обратное к* **<u>4</u>**). Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы предельного значения A и бесконечно малой величины $\alpha(x)$, т.е.

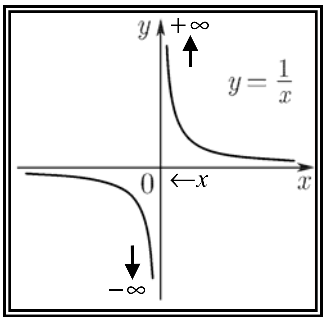
$$\boxed{f(x)=A+\alpha(x)},$$

то число A является пределом функции $f(x)$.

○ Если функция $f(x)$ имеет при $x\to x_0$ *конечный предел* A, то в некоторой δ-окрестности точки x_0 она *ограничена*. Если $A\neq 0$, то в той же окрестности будет *ограничена* и функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$. ○

<u>6</u>. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию есть *б.м.в.*

14.2. *Бесконечно большие величины* (*б.б.в.*) *и операции над ними*



Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой величиной*** при $x \to x_0$, если её предел равен $-\infty$, $+\infty$, или функция неограниченно убывает (возрастает), т.е. $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty}$, или $\boxed{|f(x)| > M}$.

Примером неограниченной функции, которая определяется бесконечно большой величиной является функция целочисленного аргумента $f(n) = (-1)^n n$ при $n \to \infty$. При чётных значениях аргумента n функция стремится к $+\infty$, а при нечётных – к $-\infty$.

○ Функция $f(x)$ может быть неограниченной, но не быть бесконечно большой величиной. Примером такой функции является функция целочисленного аргумента $f(n) = n^{(-1)^n}$. ○

Пример 3. Доказать, что функция $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ является бесконечно большой величиной при $x \to 1 \pm 0$, а $y = \dfrac{1}{x+2}$ – при $x \to -2 \pm 0$.

Построим график функции $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ в некоторой окрестности точки $x_0 = 1$ (рис. 11):

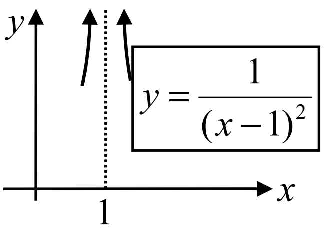


Рис. 11. *График функции* $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ *в малой окрестности точки* $x_0 = 1$.

Из рис. 11 видно, что в малой δ-окрестности точки $x_0 = 1$ функция $y = \dfrac{1}{(x-1)^2} \underset{x\to 1\pm 0}{\longrightarrow} +\infty$, т.е. является бесконечно большой величиной.

Функция $y = \dfrac{1}{x+2}$ является б.б.в. при $x \to -2 \pm 0$. Покажем поведение функции в некоторой окрестности точки $x_0 = -2$ (рис. 12):

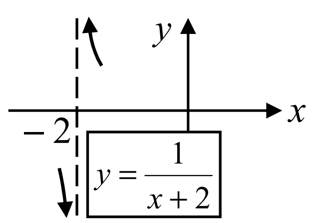


Рис. 12. *График функции* $y = \dfrac{1}{x+2}$ *в малой окрестности точки* $x_0 = -2$.

Пример 4. Доказать, что функция $y_n = (-1)^n n$ является бесконечно большой величиной при $n \to \infty$.
Для любого наперёд заданного положительного числа M существует такой номер $N(M)$, что для всех $n \geq N(M)$ будет выполняться неравенство $|y_n| = \left|(-1)^n n\right| > M$, $\forall n \geq N(M)$.

Рассмотрим ***действия*** *с бесконечно большими величинами* (*б.б.в.*):
1. Сумма бесконечно больших величин одного знака при $x \to x_0$ есть *б.б.в.* того же знака.
○ Разность бесконечно больших величин *одного знака* является неопределённостью $[\infty - \infty]$. ○
2. Сумма (разность) бесконечно большой величины и ограниченной функции есть *б.б.в.*
3. Произведение бесконечно больших величин есть *б.б.в.*
○ Произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую величину при $x \to x_0$ приводит к неопределённости $[0 \cdot \infty]$. ○
○ Отношение бесконечно больших величин является неопределённостью $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. ○

4. Произведение бесконечно большой величины на ограниченную функцию с пределом, отличным от нуля, есть *б.б.в.*

Теорема 1. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой величиной*, не равной нулю, то в той же окрестности функция $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}}$ будет *бесконечно большой величиной*.

Теорема 2. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является *бесконечно большой величиной*, то в той же окрестности функция $\boxed{\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}}$ будет *бесконечно малой величиной*.

14.3. *Основные теоремы о пределах*

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B}.$$

Док-во: Согласно действию **4.** для бесконечно малых величин, в некоторой δ-окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ можно представить в виде: $f(x) = A + \alpha(x)$ и $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые величины при $x \to x_0$. Найдём сумму (*разность*) функций $f(x)$ и

$g(x)$, имеем $f(x)\pm g(x)=A\pm B+\alpha(x)\pm\beta(x)$. По действию **1.** для бесконечно малых величин функция $\alpha(x)\pm\beta(x)$ является бесконечно малой величиной, следовательно, по действию **5.** для бесконечно малых величин получим $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

○ ***Теорему 3*** можно сформулировать так: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы A и B, то *предел от суммы* (*разности*) *функций равен сумме* (*разности*) *пределов от этих функций*, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$ ○

Теорема 4. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B}.$$

Док-во: По действию **4.** для бесконечно малых величин в некоторой δ-окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ можно представить в виде: $f(x)=A+\alpha(x)$ и $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ две бесконечно малые величины при $x\to x_0$. Найдём произведение функций $f(x)$ и $g(x)$, имеем $f(x)\cdot g(x)=A\cdot B+\alpha(x)\cdot B+\beta(x)\cdot A+\alpha(x)\cdot\beta(x)$. По действию **2.** для бесконечно малых величин функция $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ является бесконечно малой величиной. С учётом действий **1.** и **6.** для бесконечно малых величин функция $\alpha(x)\cdot B+\beta(x)\cdot A+\alpha(x)\cdot\beta(x)$ является б.м.в., следовательно, по действию **5.** для б.м.в. получим $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.

○ ***Теорему 4*** можно сформулировать так: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы A и B, то *предел от произведения функций равен произведению пределов от этих функций*, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$ ○

Теорема 5. Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $f(x)$ постоянна и равна C ($C\in R$), то её предел равен C, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} C=C}.$$

Следствия из ***Теорем 4*** и **5**:

а) если $g(x)=C$, то $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot C]=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. *постоянный множитель можно выносить за знак предела*;

б) предел степени функции $f(x)$ равен степени предела этой функции, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^n}.$$

<u>Теорема 6.</u> Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B\neq 0$. Тогда

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}}.$$

<u>Док-во:</u> По действию **<u>4</u>.** для б.м.в. в некоторой δ-окрестности точки x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ можно представить в виде: $f(x)=A+\alpha(x)$ и $g(x)=$ $=B+\beta(x)$ $(B\neq 0)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две б.м.в. при $x\to x_0$. Рассмотрим выражение $\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}$ в δ-окрестности точки x_0. С учётом вышесказанного имеем $\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{\alpha(x)\cdot B-\beta(x)\cdot A}{B^2+\beta(x)\cdot B}$. В числителе дроби стоит бесконечно малая величина (действие **<u>1</u>.** для б.м.в.), а в знаменателе дроби стоит ограниченная функция. По действию **<u>7</u>.** для б.м.в. дробь в целом представляет собой бесконечно малую величину $\gamma(x)$. Следовательно, в δ-окрестности точки x_0 отношение функций $f(x)$ и $g(x)$ может быть представлено в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+\gamma(x).$$

Отсюда по действию **<u>5</u>.** для б.м.в. получим, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$.

○ Сформулируем ***<u>Теорему 6</u>*** иначе: если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы A и $B\neq 0$, то *предел от отношения функций равен отношению пределов от этих функций*:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}}.$$ ○

14.4. *Вычисление пределов и раскрытие неопределённостей*

Вычисление пределов *начинают с подстановки предельного значения аргумента x_0 в подлимитную функцию $f(x)$. Если получают число, то это число и будет пределом данной функции.*

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-1}{x+5}$.

Подставим в функцию значение $x_0=2$, получим $f(2)=\frac{2^2+2\cdot 2-1}{2+5}=\frac{7}{7}=1$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-1}{x+5}=1$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x+7}{x+1}$.

Если подставить в функцию предельное значение $x_0=-1$, то числитель дроби стремится к $2\cdot(-1)^2-(-1)+7=10$, а знаменатель дроби стремится к $-1+1=0$, т.е. в некоторой δ-окрестности точки x_0 знаменатель дроби является бесконечно малой величиной. Воспользуемся ***Теоремой 1***: функция обратная к бесконечно малой величине есть бесконечно большая величина, предел которой равен бесконечности. Следовательно,

$$\lim_{x\to -1}\frac{\overset{\to 10}{2x^2-x+7}}{\underset{\to 0}{x+1}}=+\infty .$$

Если при подстановки предельного значения аргумента x_0 в подлимитную функцию возникают выражения вида

$$\boxed{\left[\frac{0}{0}\right],\ [0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ \left[0^0\right],\left[\infty^0\right],\ \left[1^\infty\right]}$$

(при условии, что в последнем выражении единица является предельным значением подлимитной функции) и им подобные, то говорят о наличии ***неопределённости***. Процесс вычисления пределов, которые содержат неопределённость, называется ***раскрытием неопределённостей***.

а) ***Неопределённость типа*** $\boxed{\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]}$, возникающая при вычислении предела от отношения двух полиномов при $x\to\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{P_n(x)}{P_m(x)}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]},$$

раскрывается *путём деления числителя и знаменателя на аргумент в высшей степени* и *использования* ***Теоремы 2*** *о связи б.б.в. с б.м.в.*

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-5x^2+4x+11}{2x^3+3x^2+2x}$.

При $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, поэтому имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Высший показатель степени равен 4 и находится в числителе дроби. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^4, получим

высший показатель степени

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^{4}-5x^{2}+4x+11}{2x^{3}+3x^{2}+2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{\div x^{4}}{\overset{\div x^{4}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{6-\frac{5}{x^{2}}+\frac{4}{x^{3}}+\frac{11}{x^{4}}}^{\to 6}}{\underbrace{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^{2}}+\frac{2}{x^{3}}}_{\to 0}}.$$

Все дроби по ***<u>Теореме 2</u>*** при $x\to\infty$ стремятся к 0, следовательно, числитель стремится к **6**, а знаменатель – к **0**. Используя ***<u>Теорему 1</u>*** о связи б.м.в. с б.б.в., предел которой равен ∞, окончательно получим, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^{4}-5x^{2}+4x+11}{2x^{3}+3x^{2}+2x}=+\infty.$$

Для запоминания связи бесконечно малой величины с бесконечно большой величиной (и обратной связи) используют мнемонические правила (для определённости C выбрано положительным):

$$\boxed{\frac{C}{0}=\infty},\ \boxed{\frac{-C}{0}=-\infty},\ \boxed{C\cdot(\pm\infty)=\pm\infty},\ \boxed{-C\cdot(\pm\infty)=\mp\infty}\ \text{и}\ \boxed{\frac{\pm C}{\pm\infty}=0}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^{2}-2x+3}{7x^{2}+5x-9}$.

При $x\to\infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, поэтому имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Высший показатель степени равен 2 и находится в числителе и знаменателе дроби. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^{2}, получим

высший показатель степени

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{2}-2x+3}{7x^{2}+5x-9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{\div x^{2}}{\overset{\div x^{2}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^{2}}}^{\to 4}}{\underbrace{7+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^{2}}}_{\to 7}}.$$

Все дроби по ***<u>Теореме 2</u>*** при $x\to\infty$ стремятся к 0, следовательно, числитель стремится к **4**, а знаменатель – к **7**. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{2}-2x+3}{7x^{2}+5x-9}=\frac{4}{7}.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^{2}}{x^{3}+3x}$.

При $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, поэтому имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Высший показатель степени равен **3** и находится в знаменателе дроби. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x-x^2}{x^3+3x}\ \underset{\div x^3}{\overset{\div x^3}{=}}\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{1+\frac{3}{x^2}}_{\to 1}}.$$

высший показатель степени

Все дроби по ***Теореме 2*** при $x\to\infty$ стремятся к **0**, следовательно, числитель стремится к **0**, а знаменатель – к **1**, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x-x^2}{x^3+3x}=0$.

Отсюда следует ***вывод***: $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{P_m(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}\infty, & n>m\\ \dfrac{a_n}{a_m}, & n=m\\ 0, & n<m\end{cases}}.$$

б) ***Неопределённость вида*** $\boxed{\left[\frac{0}{0}\right]}$, возникающая при вычислении предела от отношения двух полиномов при $x\to x_0\neq\pm\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left[\frac{P_n(x)}{P_m(x)}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]},$$

раскрывается путём разложения полиномов на простые множители и дальнейшего сокращения числителя и знаменателя дроби на обнуляющий их множитель $x-x_0$, при этом используются формулы

$$\boxed{(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2},\quad \boxed{a^3\pm b^3=(a\pm b)\cdot(a^2\mp ab+b^2)}$$

и другие.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-3x-2}$.

Подстановка предельного значения аргумента $x_0=2$ в подлимитную функцию приводит к обнулению числителя и знаменателя дроби. Следовательно, дробь приводится к неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости разложим числитель и знаменатель дроби на простые множители, для чего решим следующие уравнения:

$$x^2-5x+6=0 \text{ и } 2x^2-3x-2=0\,.$$

По теореме Виета (см. п. 0.4, ***0***) находим $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1\cdot x_2=6 \end{cases}$. Следовательно, $x_1=2$; $x_2=3$, а разложение полинома имеет вид:

$$x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)\,.$$

Решим уравнение:

$$2x^2-3x-2=0;\ D=9+16=25;\ x_1=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{3+5}{4}=2\,.$$

Следовательно, разложение этого полинома на простые множители будет иметь вид:

$$2x^2-3x-2=2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)=(2x+1)\cdot(x-2)\,.$$

Подставим найденные разложения полиномов в исходный предел, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-3x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)}{(2x+1)\cdot\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x+1}\,.$$

Подставляя вместо переменной x её предельное значение $x_0=2$, установим ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-3x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{2x+1}=-\dfrac{1}{5}$.

в) ***<u>Неопределённость типа</u>*** $\boxed{\left[\frac{0}{0}\right]}$, возникающая при вычислении предела, содержащего квадратные корни, при $x\to x_0$ раскрывается с использованием формулы, определяющей разность квадратов

$$\boxed{(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2}\,.$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9x+16}-4}{x}$.

Подстановка предельного значения аргумента $x_0=0$ в подлимитную функцию приводит к обнулению числителя и знаменателя дроби. Следовательно, дробь приводится к неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{9x+16}+4$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9x+16}-4}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9x+16}-4)\cdot(\sqrt{9x+16}+4)}{x\cdot(\sqrt{9x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9x+16-16}{x\cdot(\sqrt{9x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{x\cdot(\sqrt{9x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{9}{\sqrt{9x+16}+4}=\frac{9}{8}\,.$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Устремляя x к 4, получим неопределённость типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x}+2$, а знаменатель и числитель дроби на выражение $\sqrt{2x+1}+3$:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-(2)^2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-(3)^2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x+1-9)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}==\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2\,\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

Устремляя x к бесконечности, получим неопределённость $[\infty-\infty]$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

(знаменатель дроби стремится к бесконечности, следовательно, дробь в целом по ***<u>Теореме 2</u>*** стремится к 0 при $x\to\infty$).

<u>15</u> "*Первый и второй стандартные пределы. Сравнение бесконечно малых величин*"

15.1. *Признак существования предела функции* (*теорема о двух полицейских*)

<u>Теорема 1.</u> Если значения функции $f(x)$ заключены между соответствующими значениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (выполняются неравенства $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$) и пределы ограничивающих функций равны $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Рассмотрим геометрический смысл данной теоремы (рис. 13).

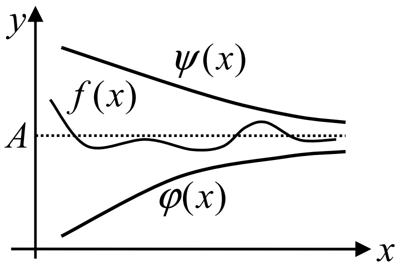
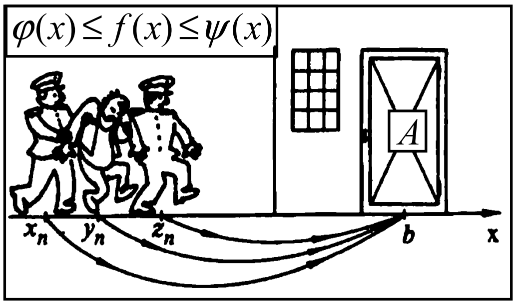


Рис. 13. *Иллюстрация теоремы о “двух полицейских”.*



Из рис. 13 видно, что в случае, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ стягиваются к прямой $y=A$, то они “вынуждают” функцию $f(x)$ также приближаться к той же самой прямой (“куда идут два полицейских, ведущие арестованного, туда идёт и сам арестованный”).

<u>Док-во:</u> В некоторой δ_1-окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $A-\varepsilon<\varphi(x)<A+\varepsilon$. В δ_2-окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|\psi(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $A-\varepsilon<\psi(x)<A+\varepsilon$. Так как значения $f(x)$ заключены между значениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то в некоторой δ-окрестности точки x_0, меньшей из δ_1- и δ_2-окрестностей будет выполняться неравенство

$$A-\varepsilon<\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)<A+\varepsilon.$$

Отсюда следует, что выполняется неравенство

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x)-A|<\varepsilon \text{ или } \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

15.2. *Первый стандартный предел*

Предел отношения синуса какого-либо аргумента $\alpha(x)$ к этому аргументу при стремлении аргумента к нулю равен единице, т.е.

$$\boxed{\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1},$$

и называется ***первым стандартным пределом***.

Пример 1. Пределы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\ln x)}{\ln x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}=1$ являются *первыми стандартными пределами*.

<u>Док-во:</u> Для вывода формулы первого стандартного предела построим окружность с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $R=1$. Выберем угол α в первой координатной четверти и сравним площади трёх фигур: треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOD (рис. 14):

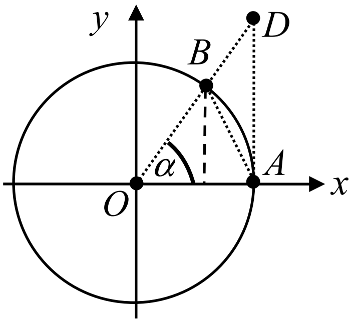


Рис. 14. *Иллюстрация вывода формулы первого стандартного предела.*

Из рис. 14 видно, что площади указанных фигур связаны соотношением: $S_{\Delta AOB} < S_{сект.\ AOB} < S_{\Delta AOD}$. Вычислим эти площади

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\alpha = (OA = OB = R) = \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha\,;$$

$$S_{сект.\ AOB} = \frac{1}{2} R^2 \alpha\,;$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AD = (OA = R;\ AD = R \cdot tg\alpha) = \frac{1}{2} R^2\, tg\alpha\,.$$

Следовательно, вышеприведенное неравенство приводится к виду

$$\frac{1}{2} R^2 \sin\alpha < \frac{1}{2} R^2 \alpha < \frac{1}{2} R^2\, tg\alpha \text{ или}$$

$$\sin\alpha < \alpha < tg\alpha\,.$$

В силу того, что $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, получаем $\sin\alpha > 0$. Разделим полученное неравенство на $\sin\alpha > 0$, знак всех неравенств не изменится:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}\,.$$

Переходя к обратным неравенствам, получим $1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$ или в силу того, что $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} \cos\alpha = 1$, то по теореме о двух милиционерах $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1}$. Аналогично проводится доказательство теоремы для любого значения угла α.

○ Наличие в пределе, сводящемся к неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$, тригонометрических функций может указывать на первый стандартный предел. ○

При вычислении первого стандартного предела применяют следующие формулы:

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}},\ \boxed{\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}},$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}, \quad \boxed{ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}},$$

$$\boxed{\arcsin(\sin\alpha) = \alpha}, \quad \boxed{\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \boxed{1-\cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]\cos\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]}, \quad \boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]\sin\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]},$$

а также таблицы:

Таблица 2.

Значения синуса и косинуса на интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

α	$0\ (0^0)$	$\frac{\pi}{6}\ (30^0)$	$\frac{\pi}{4}\ (45^0)$	$\frac{\pi}{3}\ (60^0)$	$\frac{\pi}{2}\ (90^0)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Таблица 3.

Формулы приведения

α \ *Функция*	sin	cos	*tg*	*ctg*
$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$
$\pi \pm \alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$
$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$
$2\pi \pm \alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(20x)}{x^2}$.

При подстановке предельной величины переменной x имеем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся формулой

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 1-\cos(20x) = 2\sin^2(10x),$$

и преобразуем данный предел следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(20x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(10x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\overbrace{\frac{\sin(10x)}{(10x)}}^{1}(10\cancel{x})\,\overbrace{\frac{\sin(10x)}{(10x)}}^{1}(10\cancel{x})}{\cancel{x^2}}=200.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(4+x)-\sin(4-x)}{x}$.

При подстановке предельного значения переменной x имеем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся формулой

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right]\cos\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\Rightarrow$$

$$\sin(4+x)-\sin(4-x)=2\sin\left(\frac{4+x-(4-x)}{2}\right)\cos\left(\frac{4+x+4-x}{2}\right)=2\sin x\cos 4$$

тогда данный предел равен:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4+x)-\sin(4-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos 4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{1}\cancel{x}\cos 4}{\cancel{x}}=2\cos 4.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x)}{3x}$.

При подстановке предельного значения переменной x возникает неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$. Введём замену

$$2x=\sin\alpha\ \Rightarrow\ x=\frac{\sin\alpha}{2}$$

(при $x\to 0$ и $\alpha\to 0$) и воспользуемся формулой $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$. Предел преобразуется к виду:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{3x}=\left(x=\frac{\sin\alpha}{2}\right)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin(\sin\alpha)}{3\frac{\sin\alpha}{2}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\cancel{\alpha}}{3\underbrace{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}_{1}\cancel{\alpha}}=\frac{2}{3}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x\ tg(2x)}$.

При подстановке предельного значения переменной x имеем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся формулами

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ и } tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\cos(3x)-1=-(1-\cos(3x))=-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right),\ tg(2x)=\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)},$$

получим:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{x\,tg(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{x\,\dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)\cos(2x)}{x\,\sin(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cancel{2}\,\overbrace{\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)}}^{1}\left(\frac{3\cancel{x}}{2}\right)\overbrace{\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)}}^{1}\left(\frac{3\cancel{x}}{2}\right)\overbrace{\cos(2x)}^{\cos 0=1}}{\cancel{x}\,\underbrace{\frac{\sin(2x)}{(2x)}}_{1}\,(\cancel{2x})}=-\frac{9}{4}.$$

15.3. *Второй стандартный предел*

При вычислении пределов вида

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}}$$

поступают следующим образом:

а) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B\neq\pm\infty$, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=A^B};$$

б) если $0<\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A<1$, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=-\infty\\ 0, & \text{если } \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty\end{cases}};$$

в) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>1$, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\begin{cases}0, & \text{если } \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=-\infty\\ +\infty, & \text{если } \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty\end{cases}};$$

г) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty$, то полагают $f(x)=1+\alpha(x)$ (в соответствии с действием **4.** для б.м.в., где $\alpha(x)$ – б.м.в. в некоторой δ-окрестности точки x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$) и преобразуют предел к виду

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)\cdot\varphi(x)}}.$$

Используя обобщённый бином Ньютона

$$\boxed{(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...+\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}x^k+...},$$

можно показать, что при $x=\dfrac{1}{n}$, $n\ge 2$ и с учётом неравенства

$$\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}}\ \ (k!=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1)$$

предел $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e}$ (см. таблицу)

n	1	2	10	100	1000	10000	$\cdots$
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	2,000	2,250	2,594	2,705	2,717	**2,718**	$\cdots$

Таким образом, предел можно переписать в виде

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)\cdot\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[(f(x)-1)\cdot\varphi(x)]}}.$$

Вторым стандартным пределом называется предельное равенство

$$\boxed{\lim_{W(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{W(x)}\right)^{W(x)}=\left[1^\infty\right]=e}\ \text{(\textbf{\textit{первая}} \textit{форма})}$$

$$\boxed{\lim_{V(x)\to 0}\left(1+V(x)\right)^{\frac{1}{V(x)}}=\left[1^\infty\right]=e}\ \text{(\textbf{\textit{вторая}} \textit{форма})},$$

где иррациональное число $\boxed{e\approx 2{,}718281828459045...}$ (см. также п. 0.6, <u>***0***</u>).

○ Первая форма второго стандартного предела переходит во вторую с помощью замены $V(x)=\dfrac{1}{W(x)}$ при учёте теоремы о связи *б.б.в.* с *б.м.в.* (см. п. 14.2, <u>***14***</u>). ○

○ Наличие неопределённости $[1^\infty]$ указывает на второй стандартный предел, т.е. если пределы функций $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=[1^\infty]$$

указывает на второй стандартный предел. ○

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{3x-5}\right)^{x+3}$.

(см. ***Пример** 7* из п. 14.2, ***14***)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{3x-5}\right)^{x+3}=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{б.б.ф.}\right)=0$$

где $\dfrac{x+4}{3x-5}\to\dfrac{1}{3}$, $x+3\to\infty$ (б.б.в.) – ***не второй стандартный предел*** (см. график *показательной* функции в п. 0.6, ***0***).

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{x^2-1}$.

При подстановке предельного значения переменной x не возникает неопределённости $[1^\infty]$.

(см. ***Пример** 7* из п. 14.2, ***14***)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{x^2-1}=\left((2)^{б.б.ф.}\right)=\infty$$

где $\dfrac{2x-1}{x+1}\to 2$, $x^2-1\to\infty$ (б.б.в.) – ***не второй стандартный предел*** (см. график *показательной* функции в п. 0.6, ***0***).

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{x+5}$.

При подстановке предельного значения переменной x имеем неопределённость $[1^\infty]$. Проведём преобразование подлимитной функции:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{x+5}=[1^\infty]=$(– ***первая форма*** второго стандартного предела, преобразуем данное выражение под вид второго стандартного предела)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\underline{\frac{5x-1}{5x+3}-1}\right)^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\underline{\frac{5x-1-5x-3}{5x+3}}\right)^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\underline{\frac{-4}{5x+3}}\right)^{x+5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\underline{\frac{1}{\frac{5x+3}{-4}}}\right)^{x+5}=$$ (роль функции $W(x)$ играет выражение $\underline{\dfrac{5x+3}{-4}}$, возведём круглую скобку в эту степень, а за квадратной скобкой возведём в обратную степень для тождественности проводимых преобразований, получим)

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x+3}{-4}}\right)^{\frac{5x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{5x+3}\cdot(x+5)} =$$

(выражение в квадратных скобках стремится к числу e, а показатель степени – к числу $-\frac{4}{5}$ (см. ***Пример*** *7* из п. 14.2, ***14***, поэтому окончательный ответ имеет вид) $= e^{-\frac{4}{5}}$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{x-1}}$.

При подстановке предельного значения переменной x возникает неопределённость $[1^{\infty}]$. Проведём преобразование подлимитной функции:

$$\lim_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{x-1}} = [1^{\infty}] =$$

(***вторая форма*** второго стандартного предела, преобразуем данное выражение под вид второго стандартного предела)

$$= \lim_{x\to 1}(1+(2-2x))^{\frac{x}{x-1}} =$$

(роль $V(x)$ играет выражение $(2-2x)$)

$$= \lim_{x\to 1}\left[(1+(2-2x))^{\frac{1}{2-2x}}\right]^{(2-2x)\cdot\frac{x}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left[(1+(2-2x))^{\frac{1}{2-2x}}\right]^{-2(x-1)\cdot\frac{x}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[(1+(2-2x))^{\frac{1}{2-2x}}\right]^{-2x} =$$

(выражение в квадратных скобках стремится к числу e, а показатель степени – к числу -2 (подставить в показатель степени вместо переменной x её предельное значение 1), поэтому окончательный ответ имеет вид) $= e^{-2}$.

Существуют и другие стандартные пределы, которые используют при вычислении пределов с неопределённостями, например,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1}, \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1}, \ \ldots$$

15.4. *Сравнение бесконечно малых величин*

Сравнить две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ означает ***вычислить предел***

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K}.$$

а) Бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***несравнимыми между собой***, если *предел* K *не существует*.

Пример 10. Пусть $\alpha(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ и $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ – две бесконечно малые величины при $x\to\infty$. Доказать, что эти бесконечно малые величины *несравнимые между собой*.

Для доказательства вычислим предел $K=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\cos x}{x}\div\dfrac{1}{x}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ – данный предел не существует, так как нельзя указать предельное значение для подлимитной функции $\cos x$ на бесконечности.

б) Если <u>предел</u> K <u>равен нулю</u>, то бесконечно малая величина $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малая величина*** $\beta(x)$.

Пример 11. Пусть $\alpha(x)=x^3$ и $\beta(x)=x^2$ – две бесконечно малые величины при $x\to 0$. Доказать, что бесконечно малая величина $\alpha(x)$ является *бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малая величина* $\beta(x)$.

Для доказательства вычислим предел

$$K=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Следовательно, при $x\to 0$ бесконечно малая величина $\alpha(x)$ является *бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малая величина* $\beta(x)$.

в) Если <u>предел</u> K <u>равен</u> ∞, то бесконечно малая величина $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой величиной более низкого порядка малости, чем бесконечно малая величина*** $\beta(x)$.

Пример 12. Пусть $\alpha(x)=(x+3)^2$ и $\beta(x)=(x+3)^3$ – две бесконечно малые величины при $x\to -3$. Доказать, что бесконечно малая величина $\alpha(x)$ является *бесконечно малой величиной более низкого порядка малости, чем бесконечно малая величина* $\beta(x)$.

Для доказательства вычислим предел

$$K = \lim_{x\to-3}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to-3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)^3} = \lim_{x\to-3}\frac{1}{x+3} = \infty.$$

Следовательно, при $x\to-3$ бесконечно малая величина $\alpha(x)$ является *бесконечно малой величиной более низкого порядка малости*, *чем бесконечно малая величина* $\beta(x)$.

г) Если <u>*предел*</u> K <u>*равен числу*</u> $A\neq 0$, $A\neq 1$ и $A\neq\infty$, то бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми величинами одного порядка малости***.

Пример 13. Пусть $\alpha(x)=\sin 2x$ и $\beta(x)=x$ – две бесконечно малые величины при $x\to0$. Доказать, что бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются *бесконечно малыми величинами одного порядка малости*.
Вычислим предел

$$K = \lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{2x} = 2\,.$$

Следовательно, при $x\to0$ бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются *бесконечно малыми величинами одного порядка малости*.

д) Если <u>*предел*</u> K <u>*равен* **1**</u>, то бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***.

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\Leftrightarrow\beta(x)$.

Пример 14. Пусть $\alpha(x)=tgx$ и $\beta(x)=x$ – две бесконечно малые величины при $x\to0$. Доказать, что бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются *эквивалентными*.
Вычислим предел

$$K = \lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Следовательно, бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются *эквивалентными* при $x\to0$.

<u>***Теорема 2.***</u> Для того чтобы бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были *эквивалентными*, необходимо и достаточно, чтобы разность бесконечно малых величин $\omega(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ была бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

<u>***Док-во:***</u> <u>***Необходимость.***</u> Пусть бесконечно малая величина

$$\omega(x)=\alpha(x)-\beta(x)$$

является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, т.е. пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\omega(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\omega(x)}{\beta(x)}=0.$$

Докажем, что бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны. Преобразуем первый из этих пределов

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\omega(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, т.е. бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны. Аналогично преобразуется второй предел.

<u>Достаточность.</u> Пусть бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются *эквивалентными*, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Докажем, что разность двух бесконечно малых величин $\omega(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Преобразуем данный предел следующим образом:

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\omega(x)}{\beta(x)}.$$

Отсюда следует, что функция $\omega(x)$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малая величина $\beta(x)$. Аналогично доказывается, что функция $\omega(x)$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем бесконечно малая величина $\alpha(x)$.

○ При вычислениях пределов с бесконечно малыми величинами одна бесконечно малая величина заменяется на эквивалентную бесконечно малую величину. Например, при $\boxed{x\to 0}$ функции:

$$\sin x\sim x;\quad tgx\sim x;$$

$$\arcsin x\sim x;$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

$$\ln(1+x)\sim x;\quad e^x-1\sim x;$$

$$\sqrt{1\pm x}-1\sim\pm\frac{x}{2},\ \ldots$$ ○

<u>*16*</u> "*Непрерывность функций и точки разрыва*"

16.1. *Непрерывность функции*

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:
– она *определена* в этой точке и её некоторой δ-окрестности;
– *существуют конечные лево- и правосторонние пределы* от функции в этой точке и *они равны между собой*, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \pm\infty};$$

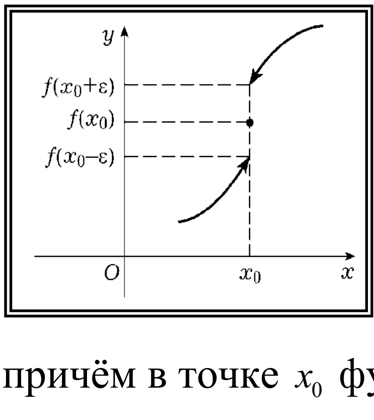
– *предел функции в точке* x_0 *равен значению функции в исследуемой точке*, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}.$$

Пример 1. Найти область непрерывности функции $f(x)=x^3$.
Данная функция непрерывна $\forall x\in(-\infty;\infty)$, так как *в каждой точке указанного интервала функция определена, в каждой точке существуют конечные и равные между собой лево- и правосторонние пределы*, а *предел функции в каждой точке равен значению функции в этой точке*.

16.2. *Точки разрыва*

Точки, в которых не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции, называются ***точками разрыва***.
Различают точки разрыва первого и второго родов.



Точкой разрыва первого рода называется точка x_0, в которой функция имеет конечные лево($f(x_0-0)\neq\pm\infty$)- и право($f(x_0+0)\neq\pm\infty$)-сторонние пределы, но в этой точке

а) $\boxed{f(x_0-0)\neq f(x_0+0)}$;

б) $\boxed{f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)}$,

причём в точке x_0 функция $f(x)$ может быть не определена.

Пример 2. Доказать, что функция $f(x)=\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$ в точке $x_0=0$ имеет разрыв первого рода.
Нарисуем график функции в окрестности нуля (рис. 15):

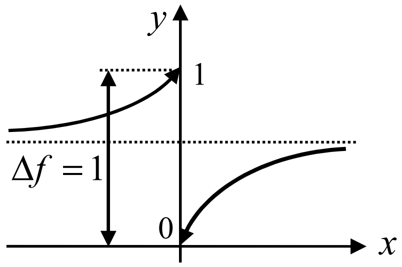
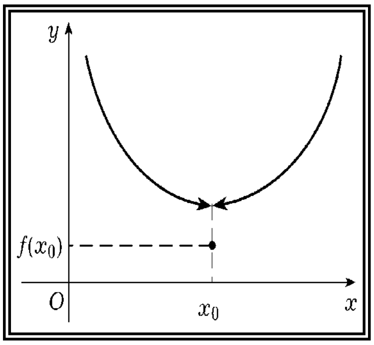


Рис. 15. *График функции* $f(x) = \left(1 + 2^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$.

Область определения функции: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, т.е. точка $x_0 = 0$ является точкой подозрительной на разрыв. Вычислим лево- и правосторонние пределы в этой точке: $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$. Следовательно, в изучаемой точке данная функция терпит *разрыв первого рода*.

В *точке разрыва первого рода функция испытывает конечный скачок* (на рис. 15 скачок равен 1).



Точка, подозрительная на разрыв, называется ***точкой устранимого разрыва***, если в этой точке *левосторонний предел равен правостороннему*: $\boxed{f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)}$.

Пример 3. Доказать, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ устранимый разрыв.

В точке $x_0 = 0$ функция не определена ($\left[\frac{0}{0}\right]$), поэтому эта точка является точкой, подозрительной на разрыв. Вычислив в этой точке лево- и правосторонний пределы $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x}$, убеждаемся, что данная точка является *точкой устранимого разрыва*.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ в точке $x_0 = 2$.

При подстановке $x_0 = 2$ в заданную функцию $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ получаем неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$, т.е. функция в этой точке не определена. Легко видеть, что числитель $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ и знаменатель $x - 2$ дроби можно в других точках сократить на общий множитель $x - 2 \neq 0$. Вычислим односторонние пределы в точке $x_0 = 2$: левосторонний предел $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to 2-0} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = -1$, а правосторонний предел

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=-1$. Так как односторонние пределы равны между собой, то точка $x_0=2$ – *точка устранимого разрыва*.

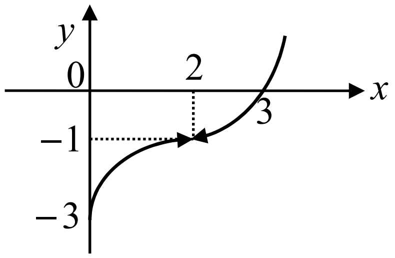


Рис. 16. *График функции* $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ *в окрестности точки* $x_0=2$.

Все остальные точки разрыва называются ***точками разрыва второго рода***.

Для точек разрыва второго рода характерен тот факт, что хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$ $(-\infty)$, или хотя бы один из них не существует, т.е. в такой точке функция терпит бесконечный разрыв или не существует.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=5^{\frac{3}{x-2}}$.

Найдём область определения этой функции: $D(f)=(-\infty;\,2)\cup(2;\,\infty)$, т.е. точка $x_0=2$ является точкой подозрительной на разрыв. Вычислим лево- и правосторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 2-0}5^{\frac{3}{x-2}}=0\neq\lim_{x\to 2+0}5^{\frac{3}{x-2}}=\infty .$$

Так как левосторонний предел конечен, а правосторонний предел бесконечен, то в исследуемой точке данная функция терпит *разрыв второго рода*.

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+5}$.

Найдём область определения этой функции: $D(y)=(-\infty;\,-5)\cup(-5;\,\infty)$, т.е. точка $x_0=-5$ является точкой подозрительной на разрыв. Вычислим лево- и правосторонние пределы в этой точке

$$\lim_{x\to -5-0}\frac{2x+1}{x+5}=\infty\neq\lim_{x\to -5+0}\frac{2x+1}{x+5}=-\infty .$$

Так как левосторонний и правосторонний пределы бесконечны, то в изучаемой точке данная функция терпит *разрыв второго рода*.

16.3. ***Операции над непрерывными функциями***

1. *Сумма* (*разность*) конечного числа непрерывных функций в некоторой точке x_0 есть непрерывная функция в этой точке.

Докажем приведенное утверждение для суммы двух функций $f(x)$ и

$g(x)$, которые определены в некоторой δ-окрестности точки x_0, в которой лево- и правосторонние пределы равны между собой. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в некоторой δ-окрестности точки x_0, то выполняются равенства: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. В силу того, что существуют конечные пределы обеих функций, то по теореме о пределе суммы двух функций (см. п. 14.3, ***14***) имеем, что

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=f(x_0)+g(x_0).$$

2. *Произведение* конечного числа непрерывных функций в некоторой точке x_0 есть непрерывная функция в этой точке.

3. *Отношение* двух непрерывных в некоторой точке x_0 функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при условии, что в этой точке функция $g(x_0)\neq 0$, есть непрерывная функция в этой точке.

4. Сложная функция, составленная из конечного числа непрерывных функций в некоторой точке x_0, есть непрерывная функция в этой точке.

5. Функция, обратная к монотонной и непрерывной функции, непрерывна.

16.4. *Схема исследования функции на непрерывность*

Исследование функции на непрерывность проводят по следующей *схеме*:

– находят область определения функции; точки, в которых функция не определена, являются точками подозрительными на разрыв; если функция задана мультианалитическим способом, т.е. описывается разными формулами на разных интервалах, то точками подозрительными на разрыв являются точки, определяющие границы интервалов;

– исследуют подозрительные на разрыв точки, для чего вычисляют лево- и правосторонние пределы; классифицируют точки разрыва;

– при наличии точек разрыва строят график функции в малой δ-окрестности точки x_0.

Пример 7. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{5}{x+3}$.

Согласно *схеме исследования функции на непрерывность*, имеем:

– О.О.Ф.: $D(f)=(-\infty;\,-3)\cup(-3;\,\infty)$; точка $x_0=-3$ является точкой подозрительной на разрыв.

– вычислим левосторонний и правосторонний пределы:

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{5}{x+3}=-\infty \quad \lim_{x\to -3+0}\frac{5}{x+3}=+\infty;$$

так как пределы бесконечные, то точка $x_0=-3$ является точкой разрыва второго рода;

– построим график функции в небольшой окрестности точки разрыва (рис. 17).

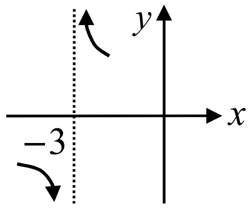


Рис. 17. *Поведение графика функции* $f(x)=\dfrac{5}{x+3}$ *в малой окрестности точки разрыва II рода* $x_0=-3$.

Из рис. 17 видно, что график функции $f(x)=\dfrac{5}{x+3}$ неограниченно приближается к вертикальной прямой $x=-3$, нигде не пересекая эту прямую.

16.5. *Свойства функций, непрерывных на отрезке* $[a;b]$

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она *непрерывна справа в точке* a, *в каждой точке интервала* $(a;b)$ *и слева в точке* b.

Число $\boxed{M=\max\limits_{x\in[a;b]}f(x)}$ называется ***наибольшим значением функции*** $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для произвольного $x\in[a;b]$ выполняется неравенство $\boxed{f(x)\le M}$ и $\exists c\in[a;b]$ такое, что $f(c)=M$.

Число $\boxed{m=\min\limits_{x\in[a;b]}f(x)}$ называется ***наименьшим значением функции*** $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для произвольного $x\in[a;b]$ выполняется неравенство $\boxed{f(x)\ge m}$ и $\exists c\in[a;b]$ такое, что $f(c)=m$.

Рассмотрим основные теоремы о функциях, непрерывных на отрезке $[a;b]$:

<u>Теорема 1</u> (*теорема Вейерштрасса*)**.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена.

<u>Теорема 2.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает хотя один раз своего наименьшего ($m=\min\limits_{x\in[a;b]}f(x)$) и наибольшего ($M=\max\limits_{x\in[a;b]}f(x)$) значений во внутренних точках отрезка $[a;b]$ или на его концах.

Пример 8. Привести примеры графиков функций, удовлетворяющих условиям ***<u>Теоремы 2</u>*** (см. рис. 18).

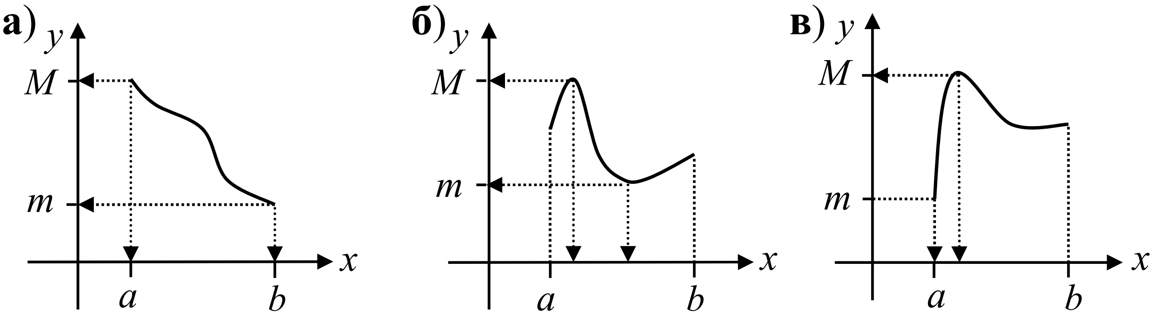


Рис. 18. *Графики функций, удовлетворяющих условиям* ***Теоремы 2***.

На графиках:

а) функция достигает своего наименьшего ($m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$) и наибольшего ($M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$) значений на концах отрезка $[a;\,b]$;

б) функция достигает своего наименьшего ($m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$) и наибольшего ($M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$) значений во внутренних точках отрезка $[a;\,b]$;

в) функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения ($m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$) на левом конце отрезка $[a;\,b]$, а наибольшего значения ($M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$) во внутренней точке отрезка $[a;\,b]$.

Теорема 3 (*теорема Больцано-Коши*)**.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$ и на его концах принимает значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$ (для определённости примем $A < B$), то для любого вещественного числа C, удовлетворяющего неравенству $A < C < B$, найдётся, хотя бы одна точка $x_C \in [a;\,b]$, такая, что $f(x_C) = C$.

○ Из ***Теоремы 3*** следует: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$, принимает два разных значения A и B, то она принимает и все промежуточные значения между ними. ○

Пример 9. Изобразить графики функций, удовлетворяющих условиям ***Теоремы 3*** (рис. 19).

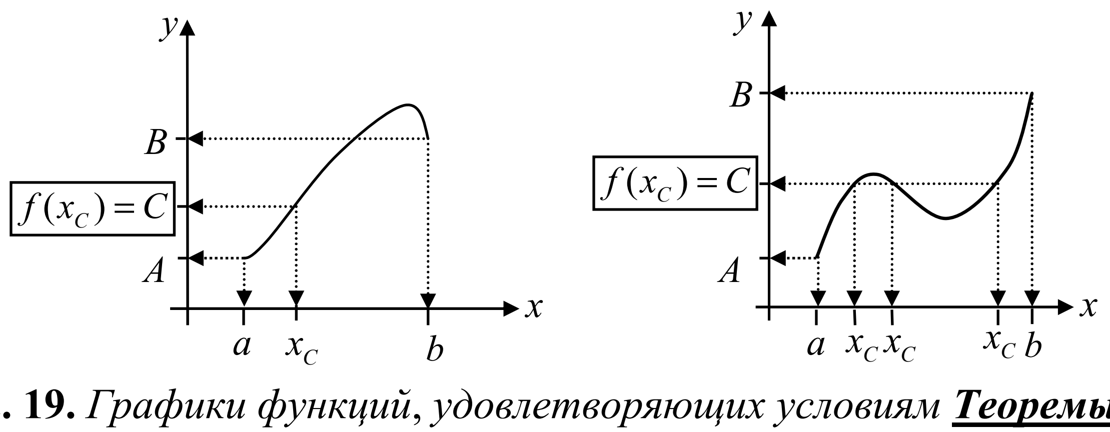


Рис. 19. *Графики функций, удовлетворяющих условиям* ***Теоремы 3***.

<u>Теорема 4</u> (частный случай ***<u>Теоремы 3</u>***). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и на его концах a и b принимает значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков (например, $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$), то существует хотя бы одна точка $x_0 \in (a;\, b)$ такая, что $f(x_0) = 0$.

Пример 10. Изобразить графики функций, удовлетворяющих условиям ***<u>Теоремы 4</u>*** (рис. 20).

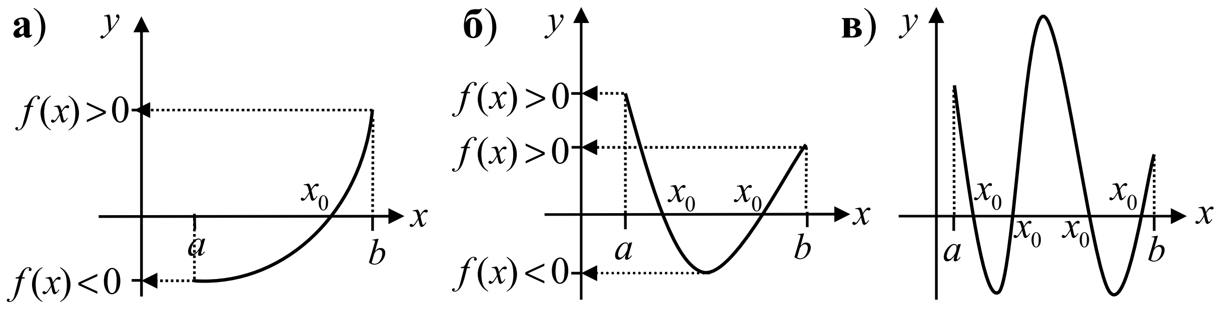


Рис. 20. *Графики функций, удовлетворяющих условиям* ***<u>Теоремы 4</u>***.

На графиках:

а) существует единственная точка, в которой выполняются условия ***<u>Теоремы 3</u>***;

б) таких точек две;

в) таких точек четыре.

В случаях **б**) и **в**) для удовлетворения условий теоремы надо разбивать отрезок на отдельные интервалы.

II

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 1

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+2+4x^2}{5+x+8x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-7x^2+2x+1}{3x^3-8x+9}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+7x+3}$;

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2(4x)}{x\,\sin(3x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to2}(7-3x)^{\frac{x}{2x-4}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ в точках $x_{01}=-1$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 2

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-5x^2+4x+11}{2x^3+3x^2+2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+8}{7x^3+2x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{2x^2+5x-18}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9x+16}-4}{5x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos(5x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin x\; ctg^2(2x)\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{2x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-3}\right)^{5x}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=9^{\frac{1}{1-x}}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=4$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 3

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+x}{2x^3+x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-2x^3+3}{x^6+3x^2+9}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-\sqrt{4x-3}}{x-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(6x)}{x\,\sin(5x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+7}{x-1}\right)^{2x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+1}\right)^{5x}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$ в точках $x_{01}=0$ и $x_{02}=1$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 4

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^2}{x^3+3}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+3}{6x^3-3x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(5x)}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin(5x^2)}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{x}{x-1}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=5^{\frac{x}{x^2-4}}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 5

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x-x^4+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-7x^2+2x+1}{3x^3-8x+9}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-125}{3x^2-14x-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(7x)-\cos(3x)}{x\ tg(8x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin(5x)}{3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x-1}\right)^{x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=6^{\frac{1}{x^2-1}}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 6

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^4+4x+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+10}{x+10^{10}}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos(7x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3(2x)}{tg^2(4x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^x$;

10) $\lim\limits_{x\to1}(5x-4)^{\frac{3x}{x-1}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=5^{\frac{1}{4x}}$ в точках $x_{01}=0$ и $x_{02}=4$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 7

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^2+2x+5}{x^3+2x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-3}{3x^3+2x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$;

4) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-9x+14}{2x^2-13x-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x+28}-5}{x(x+1)}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x\ tgx}$;

8) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{3x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+1}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x+1}{x+4}$ в точках $x_{01}=-4$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции*.

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 8

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x^2-3x^3}{1-3x+6x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+2}{7x^4-3x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$;

4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x-1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4-\sqrt{3x+13}}{1-\sqrt{3x-2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(8x)}{3x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x\ tg(2x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+2}\right)^{x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2+2}\right)^{3x^2-1}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x-3}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=3$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции*.

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант <u>9</u>

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+5}{3x^4-2x^2+x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(9x)}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin(5x)}{\sin(8x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+7}{10x-2}\right)^{4x}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=3^{\frac{1}{2-x}}$ в точках $x_{01}=0$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант <u>10</u>

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+x^3}{2x^3+2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^3+1}{3x^3-2x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{3-4x^2-4x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{x-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(7x)}{2x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+2)-\sin(2-x)}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x-2}\right)^{x+1}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=9^{\frac{1}{x+1}}$ в точках $x_{01}=-1$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 11

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+x^4-7x^3}{x^2+x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-6x+8}{12x^2-5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2+x-6}{x^2+4x-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{4-\sqrt{3x-32}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(4x)}{tg\left(3x^2\right)}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(10x)}{x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+2}\right)^{3x-1}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=2^{\frac{x}{x-2}}$ в точках $x_{01}=6$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 12

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+4x-5}{x^2+x^3-x^4}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-2x+1}{x^3+2x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{3x^2-x-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+11}-4}{x-5}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(12x)}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\ln x-\ln\alpha}{x-\alpha}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{x+1}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+2x-3}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=3$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

***Вариант* <u>13</u>**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{3x^3-2x^2+2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-3x^2}{3x^5-2x^3-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+3)(x-1)}-x\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(4x)}{\sin(6x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-2x}\right)^{5x+1}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{5x^2+1}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=5^{\frac{1}{7-x}}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=7$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

***Вариант* <u>14</u>**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+6x^5+2x^2+1}{3x^6-4x^3+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{4x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{3x^2-7x-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{5x+1}-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(12x)}{2x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{4+x}\right)^{\frac{x+3}{2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin(3x)}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=5^{\frac{1}{x+3}}$ в точках $x_{01}=-3$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант **15**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+10x^2-9x+9}{5x^2+5x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-2}{x^4+3x+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin\left(x^2\right)}{\sin^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(7x)-\cos(3x)}{x\ tg(8x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{5x^2+x-6}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-5}{7x+1}\right)^{2x-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{13+3x}}{x+3}$; 10) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{3}{x^2-4}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-7x+12}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=3$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант **16**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x+x^3}{1-2x-x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+1)(x+3)}-x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^5+3}{x^2-2x-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(16x)}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sqrt{(1-\cos x)^3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-4}\right)^{10x^2+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{0.5x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x-1}\right)^{\frac{x+5}{x-1}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=2^{\frac{x}{9-x}}$ в точках $x_{01}=9$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 17

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-x^2-1}{3x^2+4x+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^3+4x^2-3x}{3x^2-2x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2-50}{x^2+8x+15}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(17x)}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{2x+1}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=3^{\frac{1}{x+5}}$ в точках $x_{01}=-5$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 18

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-5x+1}{1-2x-x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-4x^2}{7x^3-x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-9x+14}{2x^2-13x+18}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{4x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(19x)}{2x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+tgx}-1}{2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-1}\right)^{2x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=10^{\frac{x}{10-x}}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=10$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 19

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x+2}{x^4+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-2x^3+x^2-2}{4x^3-x+5}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-7x-9}{2x^2-13x-15}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4\sqrt{9+x}-8}{x+5}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos(5x)-1}$;

8) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\cos ecx-\cos ec\alpha}{x-\alpha}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+2}\right)^{x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 5}(2x-9)^{\frac{x}{x-5}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=2^{\frac{1}{3-x}}$ в точках $x_{01}=3$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант 20

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x+2}{2x^4-7x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+1}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+3x+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(20x)}{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(2x)}{3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2+4}\right)^{x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{x}{2x-4}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x^2+5}{1-x}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=4$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант **21**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+18x^2}{3x^2-2x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-3}{6x^4+3x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{3x^2-x-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5}\right)^{2x^2-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=2^{-\frac{3}{x-4}}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=4$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант **22**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-24x^3}{x^3-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x^2+2x-2}{7x^2+3x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x+28}-5}{x(x+1)}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)+tg^2x}{x\sin x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(23x)}{x^3}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^{2x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x^4}{x+1}$ в точках $x_{01}=-1$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант **23**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-14x}{1+3x-7x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x-4}{8x^4-3x^2+2x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{5x-1}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(3x)-1}{x\,tg(2x)}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-5}\right)^{x+1}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\left(ctg(2x)-\dfrac{1}{\sin(2x)}\right)$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$ в точках $x_{01}=1$ и $x_{02}=4$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант **24**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x^2+2x+3}{7x^2+4x+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2-8x+1}{5x^2+14x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-1-x}{0.2\,x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x+28}-5}{x(x+1)}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(4+x)-\sin(4-x)}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(20x)}{x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+4x+2}\right)^{x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x^4}{x+7}$ в точках $x_{01}=-7$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Задания для самостоятельного решения

Пределы и непрерывность функции

Вариант **25**

I. Вычислить *пределы*:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+x^3-1}{3x^4-2x^2+x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-2x^3-5}{2x^5-8x^4+1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{2\,x\,tg\,(3x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2(4x)}{x\sin(3x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2+x-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+4}\right)^{3x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{13+3x}}{x+3}$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{x-1}}$.

II. Исследовать на *непрерывность* функцию $f(x)=\dfrac{x^4}{x+7}$ в точках $x_{01}=-7$ и $x_{02}=2$. *В окрестности точки разрыва построить схематичный график функции.*

Список использованных источников

1. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Ч.1. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1959. – 466 с.
2. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1964. – 683 с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – Москва: Наука. – 1967. – 736 с.
4. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – Москва: Наука. – 1967. – 704 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – Москва: Наука. – 1969. – 608 с.
6. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1972. – 640 с.
7. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. – Минск: Вышэйшая школа. – 1973. – 350 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. – Москва: Наука. – 1974. – 479 с.
9. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г. Математический анализ. Введение в анализ: Учеб. пособие для студентов-заочников I курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – Москва: Просвещение. – 1983. – 191 с.
10. Высшая математика / П.Ф. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Киев: Вища шк. – 1987. – 552 с.
11. Зайцев И.А. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1991. – 400 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. – Санкт-Петербург: Мифрил. – 1996. – 416 с.
13. Морозова В.Д. Введение в анализ. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1996. – 408 с.
14. Шипачев В.С. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1998. – 479 с.
15. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. школа. – 1999. – 695 с.
16. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 592 с.
17. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики.– Москва: ООО “Издательство Астрель”; ООО “Издательство АСТ”. – 2001. – 656 с.
18. Гурова З.И., Каролинская С.Н., Осипова А.П. Математический ана-

лиз. Начальный курс с примерами и задачами. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 352 с.

19. Клевчихин Ю.А. Введение в математический анализ (лекции). – Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та. – 2002. – 107 с.

20. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч.2. Основы математического анализа. – Минск: Амалфея. – 2003. – 352 с.

21. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.

22. Геворкян П.С. Высшая математика. Основы математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 240 с.

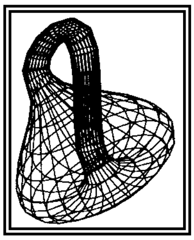
23. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 648 с.

24. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 400 с.

25. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Ч. 1. – Москва: Айрис-пресс. – 2005. – 288 с.

26. Курс высшей математики: Учебное пособие для студентов заочной (дистанционной) формы обучения. Т.1/ В.Г. Зубков, В.А. Ляховский, А.И. Мартыненко, В.Б. Миносцев.– Москва: МИИР. – 2007. – 440 с.

27. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.



<u>II</u>. *Пределы. Дифференциальное исчисление*

Тема: *Дифференциальное исчисление*

***<u>17</u>* “*Дифференциальное исчисление. Понятие производной*”**

17.1. *Приращения аргумента и функции*

Пусть дан график *непрерывной* функции $f(x)$.

Разность между конечным и начальным значениями аргумента называется его ***приращением***, т.е. $\boxed{\Delta x = x - x_0}$, при этом ***функция получает приращение*** $\boxed{\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$ (рис. 1).

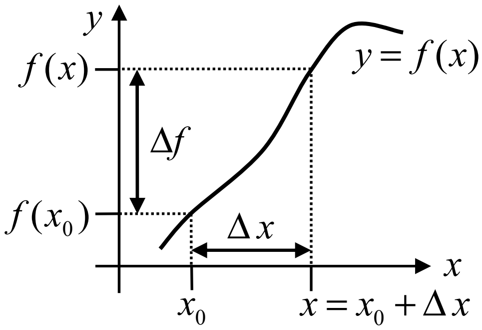


Рис. 1. *Приращения аргумента и функции.*

<u>Теорема 1.</u> Если $\boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0}$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

<u>Док-во:</u> Приращение функции

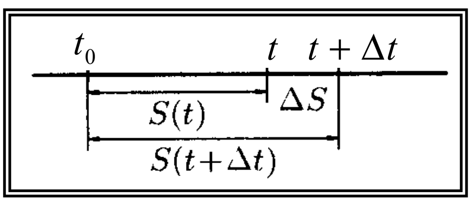
$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

следовательно, функция $f(x)$ определена как в самой точке x_0, так и в её Δx -окрестности. При $\Delta x \to 0$ аргумент $x = x_0 + \Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\to} x_0$, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} f(x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0)$, следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

17.2. *Задачи*, *приводящие к понятию производной*



<u>Физика</u>. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, где $S(t)$ – путь, который проходит точка за время t. Требуется определить скорость движения точки в момент времени $t = t_0$. Обозначим через ΔS путь, пройденный за время Δt. Очевидно, что $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$. Средняя скорость, с которой движется точка, определяется как

$$V_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Для того чтобы определить мгшовенную скорость в момент времени $t = t_0$, вычислим предел $\boxed{V_{мгн.} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}}$ (при условии, что он существует и конечен).

<u>Геометрия</u>. Пусть дан график *непрерывной* функции $f(x)$. Требуется найти такую прямую линию, которая касается графика функции $f(x)$ только в заданной точке x_0.

Касательной называется предельное положение секущей прямой M_0M при стремлении точки M к точке M_0 ($M \to M_0$) произвольным образом (рис. 2).

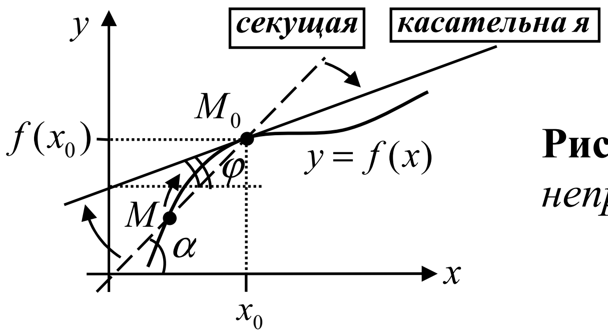


Рис. 2. *Касательная к графику непрерывной функции* $f(x)$.

Вычислим тангенс угла наклона секущей $tg\,\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Следовательно, тангенс угла касательной к положительному направлению оси абсцисс будет равен предельному значению приведенной выше величины

$$\boxed{tg\,\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

(при условии, что предел существует и конечен).

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется *предел* (если он существует и конечен) *отношения приращения функции* Δf *к приращению аргумента* Δx *при стремлении последней величины к нулю произвольным образом*, т.е.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

Нахождение конечной производной от непрерывной функции $f(x)$ называется ***дифференцированием***.

○ В силу того, для каждого значения аргумента x первая производная функции $f(x)$ имеет определённое значение, то производная является *функцией* (необязательно непрерывной) *переменной* x и от неё можно повторно брать производную (см. п. 19.3, ***19***).

Из рассмотренных выше задач следует, что *с точки зрения механики производная определяет мгновенную скорость движения*

$$\boxed{f'(t) = V_{мгн.}},$$

а *с геометрической точки зрения производная функции равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс в заданной точке* $\boxed{f'(x_0) = tg\,\varphi = k}$, а тангенс угла наклона касательной равен её угловому коэффициенту k.

Левой (***правой***) ***производной функции*** $f(x)$ в точке x_0 называется *предел* (если он существует) *отношения приращения функции* Δf *к приращению аргумента* Δx *при стремлении последней величины к нулю слева* (*справа*)

$$\boxed{f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}} \left(\boxed{f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}\right).$$

Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *равные между собой левую и правую производные*, то *в этой точке она имеет производную*:

$$\boxed{f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)}.$$

Если в точке x_0 существуют левая и правая производные, но они <u>не равны</u> *между собой* $\boxed{f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)}$, то *функция* $f(x)$ *в точке* x_0 *не имеет производной*.

Пример 1. Имеет ли функция $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ производную.

По определению модуля (см. п. 0.1, ***0***), функция $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ +x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Изобразим график данной функции (рис. 3):

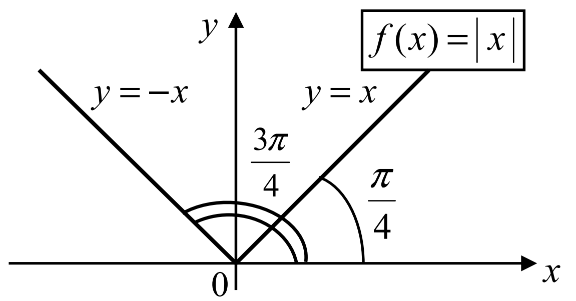
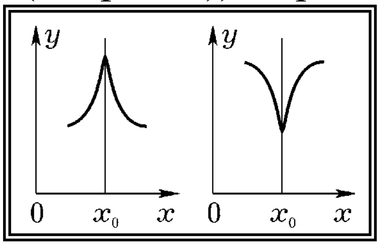
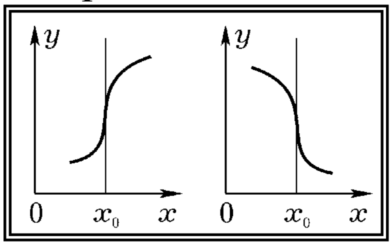


Рис. 3. График функции $f(x) = |x|$.

В точке $x_0 = 0$ данная функция $f(x) = |x|$ определена, имеет равные лево- и правосторонние пределы (пределы равны нулю), которые равны значению функции в этой точке, следовательно, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x_0 = 0$. Однако в этой точке производная не существует, так как слева $f'(0-0) = tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$, а справа $f'(0+0) = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. В силу того, что $f'(0-0) \neq f'(0+0)$, то в точке $x_0 = 0$ функция $f(x) = |x|$ *производной не имеет* ($x_0 = 0$ *– точка излома графика функции*).

○ Если в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ графика *непрерывной* функции левая производная $f'(x_0 - 0) = -\infty$ $(+\infty)$, а правая производная $f'(x_0 + 0) = +\infty$ $(-\infty)$, то говорят, что в этой точке функция не имеет производной, а её график имеет ***заострение*** (***острый экстремум***, см. рис. а)). Если в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ графика *непрерывной* функции $f(x)$ односторонние производные бесконечны и имеют одинаковый знак ($f'(x_0 - 0) = +\infty(-\infty)$ и $f'(x_0 + 0) = +\infty(-\infty)$), то через эту точку проходит ***вертикальная касательная*** (см. рис. б)), параллельная оси ординат.





а) *заострение*; **б**) *вертикальная касательная*. ○

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную, то она называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Функцию $f(x)$ называют ***дифференцируемой на интервале*** $(a; b)$, если она дифференцируема в каждой точке интервала. Если в точке a существует правая производная $f'(a+0)$, функция $f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a; b)$ и в точке b *существует левая производная* $f'(b-0)$, то функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой на отрезке*** $[a; b]$.

17.3. *Уравнение касательной и нормали в заданной точке графика функции* $f(x)$

Пусть дан график функции $f(x)$ (рис. 4). Требуется составить уравнения *касательной* и *нормали* в точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Для составления уравнения *касательной* воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ (см. п. 7.2, см. **4**, *7*): $\boxed{y - f(x_0) = k_1(x - x_0)}$.

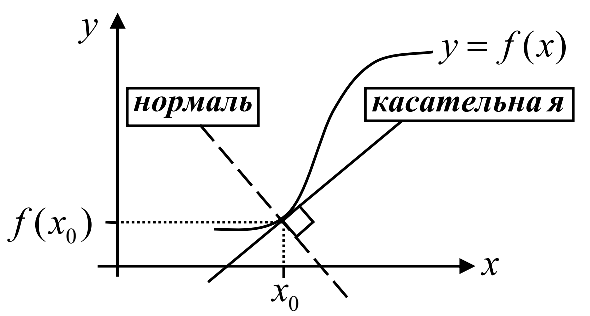
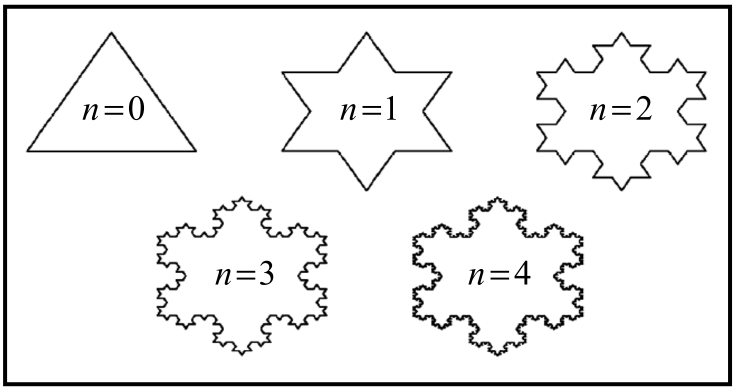


Рис. 4. *Касательная и нормаль.*

В силу того, что угловой коэффициент касательной $k_1 = tg\varphi = f'(x_0)$, то ***уравнение касательной*** имеет вид: $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$.

○ Касательную к графику функции $f(x)$ можно провести не во всех точках. Точки, в которых нельзя провести касательную к графику функции $f(x)$, называют ***особыми***: точки заострения; точки излома (точки, в которых не существует первая производная функции); точки самопересечения кривой и другие. Кроме того, существуют такие кривые, к которым ни в одной точке нельзя провести касательную. Например, такой кривой является "***снежинка***" ***Коха***, которую строят на сторонах правильного многоугольника (равносторонний треугольник, квадрат и т.д.):



В результате бесконечной итерации (число шагов $n\to\infty$) возникает замкнутая, без самопересечений, симметричная, самоподобная, бесконечно изломанная фигура похожая на снежинку ("***остров***" ***Коха*** по ***Мандельброту***). Граница "***снежинки***" ***Коха*** имеет *бесконечную длину*, несмотря на то, что *она ограничивает конечную площадь*. ○

○ Если $f'(x_0)=0$, то уравнение касательной $\boxed{y=f(x_0)}$, и она параллельна оси Ox. Если $f'(x_0)=\infty$, то уравнение касательной $\boxed{x = x_0}$, и она параллельна оси Oy. ○

Нормалью называют прямую, которая проходит через точку $M_0(x_0; f(x_0))$ перпендикулярно к касательной, проведенной в этой точке.

Так как *нормаль* перпендикулярна к *касательной*, то её угловой коэффициент k_2 связан с угловым коэффициентом *касательной* соотношением: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ (см. п. 7.3, 7). Следовательно, ***уравнение нормали*** имеет вид: $\boxed{y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)}$.

Пример 2. Найти угловой коэффициент касательной в точке $x_0 = 1$ к графику функции $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+2}$.

Так как $k_1 = f'(x_0)$, то вычислим производную функции, используя <u>*определение производной*</u>

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+2};$$

$$f(x+\Delta x) = \frac{2\cdot(x+\Delta x)+1}{3\cdot(x+\Delta x)+2};$$

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{2\cdot(x+\Delta x)+1}{3\cdot(x+\Delta x)+2} - \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{\Delta x}{(3x+2)(3x+3\Delta x+2)};$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{(3x+2)(3x+3\Delta x+2)};$$

следовательно, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(3x+2)(3x+3\Delta x+2)} = \frac{1}{(3x+2)^2}$.

Вычислим значение производной в точке $x_0 = 1$ и угловой коэффициент касательной в заданной точке $k_1 = f'(1) = \frac{1}{(3\cdot 1+2)^2} = \frac{1}{25}$.

Пример 3. Составить уравнение *касательной* для функции из ***Примера 2***.

Уравнение *касательной* имеет вид $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$. Вычислим значение функции $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ в точке $x_0 = 1$: $f(x_0) = f(1) = \frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+2} = \frac{3}{5}$.

Значение производной $f'(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$ в точке $x_0 = 1$ вычислено в ***Примере 2***, оно равно $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{25}$. Таким образом, уравнение *касательной* принимает вид $y = \frac{3}{5} + \frac{1}{25}\cdot(x-1) = \frac{3}{5} + \frac{x}{25} - \frac{1}{25} = \frac{x}{25} + \frac{14}{25}$.

17.4. *Дифференцируемость непрерывных функций*

<u>Теорема 2.</u> Если функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0, то в этой точке функция $f(x)$ *непрерывна*.

<u>Док-во:</u> Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует конечный предел $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Используя действие **<u>4</u>** для бесконечно малых величин (см. п. 14.1, ***<u>14</u>***), можно записать, что $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина в Δx-окрестности точки x_0, т.е.

$$\Delta f = [f'(x_0) + \alpha(\Delta x)] \cdot \Delta x .$$

Вычислим предел этого выражения при $\Delta x \to 0$. Так как при $\Delta x \to 0$ функция $\alpha(\Delta x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, как бесконечно малая величина, а производная остаётся неизменной, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f'(x_0) + \alpha(\Delta x)] \cdot \Delta x = 0$. По ***Теореме 1*** получаем, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. В силу произвольности точки x_0 функция $f(x)$ будет непрерывна в любой точке своей области определения.

Утверждение, обратное к рассмотренному в ***Теореме 2***, что *всякая непрерывная в точке* x_0 *функция будет в этой точке дифференцируема*, *будет верным не во всех случаях*, т.е. *не всякая непрерывная функция является дифференцируемой*.

Пример 4. Дифференцируема ли функция $f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 0$?

В точке $x_0 = 0$ данная функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна (доказать *самостоятельно*). Производная функции равна

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Следовательно, в точке $x_0 = 0$ производная $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \infty$ бесконечна, и функция не дифференцируема.

17.5. *Правила дифференцирования*

Как видно из ***Примера 1***, вычисление производной, согласно определению, является трудоёмкой задачей. В связи с этим были получены следующие ***правила дифференцирования***:

1. *Производная от суммы* (*разности*) *двух функций равна сумме* (*разности*) *производных от этих функций*, т.е.

$$\boxed{[U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x)}.$$

Док-во: Пусть $f(x) = U(x) + V(x)$, тогда в приращённой точке функция равна $f(x+\Delta x) = U(x+\Delta x) + V(x+\Delta x) = U(x) + \Delta U + V(x) + \Delta V = f(x) + \Delta U + \Delta V$. Приращение функции будет равно: $\Delta f = \Delta U + \Delta V$, а значит производная от данной функции

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U + \Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta U}{\Delta x} + \frac{\Delta V}{\Delta x}\right] = U'(x) + V'(x) .$$

○ *Производная от суммы (разности) любого числа функций равна сумме (разности) производных от этих функций.* ○

2. *Производная от произведения двух функций равна*

$$\boxed{(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V'}.$$

Док-во: Пусть $f(x)=U(x)\cdot V(x)$, тогда в приращенной точке функция равна $f(x+\Delta x)=U(x+\Delta x)\cdot V(x+\Delta x)=U\cdot V+V\cdot\Delta U+U\cdot\Delta V+\Delta U\cdot\Delta V$. Приращение функции будет равно: $\Delta f=V\cdot\Delta U+U\cdot\Delta V+\Delta U\cdot\Delta V$, а значит производная от данной функции

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V\cdot\Delta U+U\cdot\Delta V+\Delta U\cdot\Delta V}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[V\cdot\frac{\Delta U}{\Delta x}+U\cdot\frac{\Delta V}{\Delta x}+\frac{\Delta U}{\Delta x}\cdot\Delta V\right]=$$

(так функции непрерывны, то при $\Delta x\to 0$ и приращение $\Delta V\underset{\Delta x\to 0}{\to}0$)

$=U'\cdot V+U\cdot V'$.

○ Производная от произведения трёх, четырёх и более функций вычисляется по аналогичным формулам

$$(U\cdot V\cdot W)'=U'\cdot V\cdot W+U\cdot V'\cdot W+U\cdot V\cdot W';$$

$$(U\cdot V\cdot W\cdot P)'=U'\cdot V\cdot W\cdot P+U\cdot V'\cdot W\cdot P+U\cdot V\cdot W'\cdot P+U\cdot V\cdot W\cdot P';$$

………………………………………………………………………………….. ○

3. *Производная от частного двух функций равна* ($V\neq 0$)

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}\right)'=\frac{U'\cdot V-U\cdot V'}{V^2}}$$

(доказать *самостоятельно*).

4. *Производная от обратной функции* $x(y)$ *равна* ($y'_x\neq 0$)

$$\boxed{x'_y=\frac{1}{y'_x}}.$$

Док-во: Так как $y'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=$(при $\Delta x\to 0$ и приращение функции $\Delta y\underset{\Delta x\to 0}{\to}0$, следовательно,) $=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\dfrac{1}{x'_y}$ или $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ ($y'_x\neq 0$).

5. *Производная от сложной функции* $y=f(U(x))$ *равна* $\boxed{y'_x=f'_U(U)\cdot U'_x}$.

Док-во: Так как $y'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta U}\cdot\dfrac{\Delta U}{\Delta x}=$(при $\Delta x\to 0$ и приращение $\Delta U\underset{\Delta x\to 0}{\to}0$, следовательно,)$=\lim\limits_{\Delta U\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta U}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta U}{\Delta x}=\ y'_U(U)\cdot U'_x$.

<u>18</u> "*Производная от элементарных, параметрически и неявно заданных функций*"

18.1. *Производная от основных элементарных функций*

<u>1</u>. *<u>Постоянная функция</u>* $f(x)=C$. Вычислим приращение постоянной функции $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$. Отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$. Следовательно,

$$(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$

т.е. производная от постоянной величины равна нулю: $\boxed{(C)'=0}$.

а) При вычислении производной от произведения константы C на функцию $U(x)$ получаем $(C\cdot U(x))'=C'U+CU'=CU'$, т.е. ***постоянный множитель можно выносить за знак производной*** $\boxed{(C\cdot U)'=C\cdot U'}$.

○ Полученное правило выноса постоянной за знак производной совместно с правилом взятия производной от суммы (разности) функций можно объединить в единое правило: *производная от линейной комбинации функций равна той же самой линейной комбинации производных от данных функций*:

$$\boxed{\left(C_1\cdot f_1(x)+C_2\cdot f_2(x)+...+C_n\cdot f_n(x)\right)'=C_1\cdot f_1'(x)+C_2\cdot f_2'(x)+...+C_n\cdot f_n'(x)}.$$ ○

б) Аналогично поступают при вычислении производной от отношения

$$\boxed{\left(\frac{U}{C}\right)'=\frac{U'C-\overset{0}{\overset{\|}{C'}}U}{C^2}=\frac{U'C}{C^2}=\frac{1}{C}U'}\ \text{или}\ \boxed{\left(\frac{C}{V}\right)'=\frac{\overset{0}{\overset{\|}{C'}}V-CV'}{V^2}=-C\frac{V'}{V^2}}.$$

<u>2</u>. *<u>Логарифмическая функция</u>* $f(x)=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$. Используя определение производной, находим

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left[\overset{e}{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}}\right]^{\frac{1}{x}}\right)=$$

(выражение в квадратных скобках стремится к числу e по второму стандартному пределу)$=\log_a e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\log_a e=\dfrac{1}{x\ln a}$ ($\log_a e=\dfrac{1}{\log_e a}=\dfrac{1}{\ln a}$).

а) Производная от *сложной логарифмической функции* равна

$$\boxed{(\log_a U(x))' = \frac{U'}{U\ln a}},\ U(x) > 0.$$

б) Если основание логарифма $a = e$, то $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$ ($\boxed{(\ln|U(x)|)' = \frac{U'}{U}}$ – *логарифмическая производная*).

<u>3</u>. *<u>Степенная функция</u>* $f(x) = x^n$. Для нахождения производной от этой функции воспользуемся методом логарифмического дифференцирования, т.е. $(\ln U(x))' = \frac{U'}{U}$. Возьмём натуральный логарифм от степенной функции ($f(x) > 0$)

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x^n)' = (n\ln x)' = n(\ln x)' = \frac{n}{x}.$$

Отсюда находим $f'(x) = \frac{n}{x} f(x)$. Таким образом,

$$\boxed{(x^n)' = \frac{n}{x} x^n = n\,x^{n-1}}.$$

а) Для *сложной функции* эта формула имеет следующий вид

$$\boxed{(U^n(x))' = nU^{n-1}U'}.$$

б) Наиболее распространенными являются случаи:

$$\alpha)\ n = -1:(x^{-1})' = \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}};$$

$$\beta)\ n = \frac{1}{2}:\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}};$$

$$\gamma)\ n = 1:\boxed{(x)' = 1}.$$

<u>4</u>. *<u>Показательная функция</u>* $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$. Воспользуемся логарифмическим дифференцированием

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln a^x)' = (x\ln a)' = \ln a.$$

Отсюда находим $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$.

а) Для *сложной функции* эта формула имеет следующий вид

$$\boxed{(a^{U(x)})' = U'a^{U(x)}\ln a}.$$

б) Если основание показательной функции $a = e$, то

$$\boxed{(e^x)' = e^x}\ (\boxed{(e^{U(x)})' = U'e^{U(x)}}).$$

<u>5</u>. *<u>Тригонометрические функции</u>*:

1) $f(x)=\sin x$. Вычислим производную от $\sin x$

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\cos x\,.$$

Следовательно, $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$ (при выводе формулы был использован первый стандартный предел, см. п. 15.2, ***<u>15</u>***).

а) Для *сложной функции* производная равна $\boxed{(\sin U(x))'=U'\cos U}$.

б) *Самостоятельно* получить формулы для других тригонометрических функций:

2) $f(x)=\cos x$. $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$; $\boxed{(\cos U(x))'=-U'\sin U}$.

3) $f(x)=\mathrm{tg}x$. $\boxed{(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}}$; $\boxed{(\mathrm{tg}\,U(x))'=U'\frac{1}{\cos^2 U}}$.

4) $f(x)=\mathrm{ctg}x$. $\boxed{(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}}$; $\boxed{(\mathrm{ctg}U(x))'=-U'\frac{1}{\sin^2 U}}$.

<u>6. Обратные тригонометрические функции</u>:

1) $f(x)=\arcsin x$. Вычислим производную от $\arcsin x$, для чего от обеих частей равенства возьмём функцию синус, то есть найдём обратную функцию $x=\sin f(x)$. Беря производную от обеих частей равенства с учётом того факта, что функция, стоящая справа, является сложной, получим $1=f'(x)\cos f(x)$. Отсюда находим, что

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 f(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \boxed{(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

а) Для *сложной функции* $\boxed{(\arcsin U(x))'=U'\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}}$.

б) *Самостоятельно* получить формулы для других обратных тригонометрических функций:

2) $f(x)=\arccos x$; $\boxed{(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$; $\boxed{(\arccos U(x))'=-U'\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}}$.

3) $f(x)=\mathrm{arctg}x$; $\boxed{(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}}$; $\boxed{(\mathrm{arctg}\,U(x))'=U'\frac{1}{1+U^2}}$.

4) $f(x)=\mathrm{arcctg}x$; $\boxed{(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}}$; $\boxed{(\mathrm{arcctg}U(x))'=-U'\frac{1}{1+U^2}}$.

7. *Гиперболические функции*:

1) $f(x)=\mathrm{sh}x$. Так как по определению $\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$, то вычислим производную от $\mathrm{sh}x$, применив правила дифференцирования

$$(\mathrm{sh}x)'=\left(\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})'=\frac{1}{2}((\mathrm{e}^{x})'-(\mathrm{e}^{-x})')=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}(-x)')=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}(-1))=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x.$$

Следовательно, $\boxed{(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x}$.

а) В случае *сложной функции* $\boxed{(\mathrm{sh}(U(x)')=U'\mathrm{ch}U}$.

б) *Самостоятельно* доказать нижеприведенные формулы для других гиперболических функций:

2) $f(x)=\mathrm{ch}x$. $\boxed{(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x}$; $\boxed{(\mathrm{ch}U(x))'=U'\mathrm{sh}U}$.

3) $f(x)=\mathrm{th}x$. $\boxed{(\mathrm{th}x)'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^{2}x}}$; $\boxed{(\mathrm{th}U(x))'=U'\dfrac{1}{\mathrm{ch}^{2}U}}$.

4) $f(x)=\mathrm{cth}x$. $\boxed{(\mathrm{cth}x)'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^{2}x}}$; $\boxed{(\mathrm{cth}U(x))'=-U'\dfrac{1}{\mathrm{sh}^{2}U}}$.

Производные от элементарных функций показаны в табл.1.

***Таблица 1*.**

Производные от элементарных функций

№ п/п	*Функция*	*Производная* ***элементарной*** *функции* $f(x)$	*Производная* ***сложной*** *функции* $f(U(x))$
1	C	$(C)'=0$	$(C)'=0$
2	x^{n}	$(x^{n})'=n\,x^{n-1}$	$(U^{n})'=nU'U^{n-1}$
	$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$	$\left(\dfrac{1}{U}\right)'=-\dfrac{U'}{U^{2}}$
	$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{U})'=\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
	$x=x^{1}$	$(x^{1})'=1$	$(U)'=U'$
3	a^{x}	$(a^{x})'=a^{x}\ln a$	$(a^{U})'=U'a^{U}\ln a$
	e^{x}	$(e^{x})'=e^{x}$	$(e^{U})'=e^{U}U'$
4	$\log_{a}x$	$(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_{a}U)'=\dfrac{U'}{U\ln a}$

	$\ln x$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$
5	$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin U)' = U' \cos U$
	$\cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos U)' = -U' \sin U$
	$\mathrm{tg} x$	$(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$(\mathrm{tg} U)' = \dfrac{U'}{\cos^2 U} = U' \sec^2 U$
	$\mathrm{ctg} x$	$(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$	$(\mathrm{ctg} U)' = -\dfrac{U'}{\sin^2 U} = -U' \mathrm{cosec}^2 U$
6	$\arcsin x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin U)' = \dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
	$\arccos x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos U)' = -\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
	$\mathrm{arctg} x$	$(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg} U)' = \dfrac{U'}{1+U^2}$
	$\mathrm{arcctg} x$	$(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg} U)' = -\dfrac{U'}{1+U^2}$
7	$\mathrm{sh} x$	$(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x$	$(\mathrm{sh} U)' = U' \mathrm{ch} U$
	$\mathrm{ch} x$	$(\mathrm{ch} x)' = -\mathrm{sh} x$	$(\mathrm{ch} U)' = -U' \mathrm{sh} U$
	$\mathrm{th} x$	$(\mathrm{th} x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$(\mathrm{th} U)' = \dfrac{U'}{\mathrm{ch}^2 U}$
	$\mathrm{cth} x$	$(\mathrm{cth} x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$(\mathrm{cth} U)' = -\dfrac{U'}{\mathrm{sh}^2 U}$

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемые функции. Вычисление первой производной от показательно-степенной функции

$$f(x) = [U(x)]^{W(x)}$$

проводится с использованием логарифмического дифференцирования $\ln f(x) = \ln\left\{[U(x)]^{W(x)}\right\} = W(x) \cdot \ln U(x)$ и правила взятия производной от произведения $(U(x) \cdot V(x))' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$ (ниже аргумент функций будем опускать до вывода окончательной формулы)

$$(\ln f)' = (W \cdot \ln U)' \Rightarrow \frac{f'}{f} = W' \cdot \ln U + W \cdot \frac{U'}{U} \Rightarrow f' = f \cdot \left(W' \cdot \ln U + W \cdot \frac{U'}{U} \right)$$

или $\boxed{\left([U(x)]^{W(x)}\right)' = [U(x)]^{W(x)} \cdot \left(W'(x) \cdot \ln U(x) + W(x) \cdot \dfrac{U'(x)}{U(x)} \right)}$.

Пример 1. Найти производную функции $y = \ln\left(4^x\right)$.

По правилу дифференцирования сложной функции и с учётом выражений для производных от логарифмической и показательной функций имеем $y'=\frac{(4^x)'}{4^x}=\frac{4^x\ln 4}{4^x}=\ln 4$. Если воспользоваться свойствами логарифмической функции, то заданную функцию можно переписать в виде

$y=x\ln 4$, а $y'=(x\ln 4)'=(x)'\ln 4=1\cdot\ln 4=\ln 4$.

Пример 2. Найти производную функции $y=\sin\left(x^2\right)$.

В данном случае производная $y'=\left(\sin\left(x^2\right)\right)'=\left(x^2\right)'\cos\left(x^2\right)=2x\cos\left(x^2\right)$.

Пример 3. Найти производную функции $y=\ln\left(\cos\left(e^{arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)\right)$.

По правилу дифференцирования сложной функции $y'_t=f'_U(U)\cdot U'_t$ и с учётом выражения для производной от логарифмической функции

$$\left(\ln U(t)\right)'=\frac{U'(t)}{U(t)}$$

$\left(U(t)=\cos\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)\right.$ – в данном примере аргументом является переменная t) имеем

$$y'=\left(\ln\left(\cos\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)\right)\right)'=\frac{\left(\cos\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)\right)'}{\cos\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)}=$$

(воспользуемся формулой для косинуса $(\cos U(x))'=-U'(x)\sin\left(U(x)\right)$, где

$U(t)=e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}$) $=\frac{-\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)'\sin\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)}{\cos\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)}=\left(\left(e^{U(x)}\right)'=U'(x)\,e^{U(x)}\right.$, где

внутренняя функция $U(t)=\arccos\left(\sqrt{t}\right)$)

$$=-e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\left(\arccos\left(\sqrt{t}\right)\right)'tg\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)=$$

(производная от сложной функции $\left(\arccos U(x)\right)'=-U'(x)\frac{1}{\sqrt{1-U^2(x)}}$,

где $U(t)=\sqrt{t}$) $=-e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\frac{\left(\sqrt{t}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{t}\right)^2}}tg\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right)=$ (производная берётся

от элементарной функции $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$)

$$=-e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}tg\left(e^{\arccos\left(\sqrt{t}\right)}\right).$$

Пример 4. Найти производную функции $y=\ln\left(\sin(2x)\right)-\frac{\cos^2(3x)}{2}$.

По правилу дифференцирования $[U(x)-V(x)]'=U'(x)-V'(x)$ и правила взятия производной от произведения константы C на функцию $U(x)$

$(C\cdot U(x))'=CU'(x)$ получаем: $y'=\left(\ln\left(\sin\left(2x\right)\right)\right)'-\dfrac{1}{2}\left(\cos^2\left(3x\right)\right)'=$

(дальнейшие действия проводятся так, как показано в ***Примере 3***):

$$=\frac{\left(\sin\left(2x\right)\right)'}{\sin(2x)}-\frac{1}{2}\,2\cos(3x)\left(\cos(3x)\right)'=\frac{\left(2x\right)'\cos(2x)}{\sin(2x)}-\cos(3x)\left(-\sin(3x)\right)(3x)'=$$

$$=\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}+\cos(3x)\sin\left(3x\right)3=2ctg(2x)+\frac{3}{2}\sin(6x).$$

Пример 5. Найти производную функции $y=8^{3-2t}\sqrt{\cos\left(\dfrac{t}{6}\right)}$.

По правилу дифференцирования произведения двух функций

$$(U(x)\cdot V(x))'=U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x).$$

В результате действий, показанных в ***Примере 3***, получаем:

$$y'=\left(8^{3-2t}\right)'\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}+8^{3-2t}\left(\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}\right)'=8^{3-2t}(3-2t)'\ln 8\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}+$$

$$+8^{3-2t}\,\frac{\left(\cos\left(\frac{t}{6}\right)\right)'}{2\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}}=8^{3-2t}(-2)\ln 8\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}+8^{3-2t}\,\frac{-\sin\left(\frac{t}{6}\right)\left(\frac{t}{6}\right)'}{2\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}}=$$

$$=-2\cdot 8^{3-2t}\ln 8\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}-8^{3-2t}\,\frac{\sin\left(\frac{t}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}}{2\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}}=$$

$$=-2\cdot 8^{3-2t}\ln 8\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}-8^{3-2t}\,\frac{\sin\left(\frac{t}{6}\right)}{12\sqrt{\cos\left(\frac{t}{6}\right)}}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y=\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right)^{\ln(8x)}$.

По условию задачи дана показательно-степенная функция

$$y=\left(U(x)\right)^{V(x)}.$$

Для отыскания производной от данной функции воспользуемся *логарифмическим дифференцированием* с применением формулы:

$$\ln y=\ln\left(U(x)\right)^{V(x)}=V(x)\ln\left(U(x)\right),$$

и правилом дифференцирования произведения функций

$$\ln y = \ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right)^{\ln(8x)} \quad \Rightarrow$$

$$\ln y = \ln(8x)\cdot\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right) \quad \Rightarrow$$

$$(\ln y)' = (\ln(8x))'\cdot\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right) + \ln(8x)\cdot\left(\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right)\right)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(8x)'}{8x}\cdot\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right) + \ln(8x)\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right)'}{\sqrt[4]{3-x^3}};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{8}{8x}\cdot\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right) + \ln(8x)\cdot\frac{\frac{1}{4}\left(3-x^3\right)^{-3/4}\left(3-x^3\right)'}{\sqrt[4]{3-x^3}};$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right) + \ln(8x)\cdot\frac{-3x^2}{4\sqrt[4]{\left(3-x^3\right)^3}\,\sqrt[4]{\left(3-x^3\right)}};$$

$$y' = y\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right) - \frac{3}{4}\ln(8x)\cdot\frac{x^2}{3-x^3}\right);$$

$$y' = \left(\sqrt[4]{3-x^3}\right)^{\ln(8x)}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right) - \frac{3}{4}\ln(8x)\cdot\frac{x^2}{3-x^3}\right).$$

18.2. *Производная от параметрически и неявно заданных функций*

Если функция $y = f(x)$ задана в виде системы уравнений $\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}}$, то говорят, что ***функция задана в параметрическом виде***.

Чтобы продифференцировать параметрически заданную функцию, надо из первого уравнения системы найти обратную функцию $t(x)$ и подставить её во второе уравнение системы. В результаты этих действий получается сложная функция, производная от которой равна $y'_x = y'_t\cdot t'_x$. Так как производная от обратной функции связана с производной исходной функции равенством $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, то формула для производной от *параметрически заданной функции* принимает вид:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}} \; (x'_t \neq 0).$$

Пример 7. Найти производную функции $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = 2^t \end{cases}$.

Вычислим производные от заданных функций по параметру t:

$y'_t = 2^t \ln 2$; $x'_t = \ln t + t\dfrac{1}{t} = \ln t + 1$. Следовательно, $\begin{cases} x = t\ln t \\ y'_x = \dfrac{2^t \ln 2}{1+\ln t} \end{cases}$.

Если функция $y = f(x)$ задана в виде соотношения $F(x, y) = 0$, из которого нельзя явно выразить переменную y через x или наоборот, то говорят, что ***функция задана в неявном виде***.

Дифференцирование таких функций осуществляется с учётом того, что переменная y является функцией другой переменной, т.е. зависит от переменной x.

Пример 8. Найти производную функции $xe^y + ye^x = 5$.

Продифференцируем данное соотношение с учётом вышеизложенного материала получим $e^y + xe^y y' + y'e^x + ye^x = 0$. Отсюда находим, что $y' = -\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$. С учётом исходного равенства полученное выражение определяет производную от неявно заданной функции:

$$\begin{cases} xe^y + ye^x = 5 \\ y' = -\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x} \end{cases}.$$

<u>19</u> "*Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков*"

19.1. *Дифференциал функции. Его свойства и геометрический смысл*

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой Δx-окрестности точки x, т.е. существует конечный предел $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \neq 0$. Так как предел конечен, то приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f = f'(x)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x\,,$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция в изучаемой окрестности данной точки. Сравним первое и второе слагаемые с бесконечно малой функцией Δx. Для первого слагаемого имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, т.е. оно является *бесконечно малой величиной того же порядка малости*, что и величина Δx. Для второго слагаемого получаем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{\Delta x} = 0,$$

т.е. оно является *бесконечно малой величиной более высокого порядка малости*, чем величина Δx. Это означает, что первое слагаемое является ***главной частью*** указанной суммы.

Главная часть приращения функции Δf, линейная относительно приращения аргумента Δx, называется ***дифференциалом*** функции:

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,\Delta x}.$$

Если $f(x) = x$, то её дифференциал $dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Следовательно, ***дифференциал аргумента равен его приращению***: $\boxed{dx = \Delta x}$. Поэтому дифференциал функции можно записать в виде

$$\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}.$$

Таким образом, для производной можно ввести формулу

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx}}.$$

Такая форма записи производной очень удобна для вывода различных формул.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = 2x^2$.

Используя определение, находим $dy = \left(2x^2\right)' \Delta x = 4x\Delta x$.

Пример 2. Получить формулу производной от сложной функции

$$y = f(U(x)).$$

Используя формулу для производной от функции, записанную в дифференциалах, найдём $f'(U(x)) = \dfrac{d\,f(U(x))}{d\,x} = \dfrac{d\,f}{d\,U}\dfrac{d\,U}{d\,x} = f'_U\,U'_x$.

Выясним геометрический смысл дифференциала функции (рис. 5):

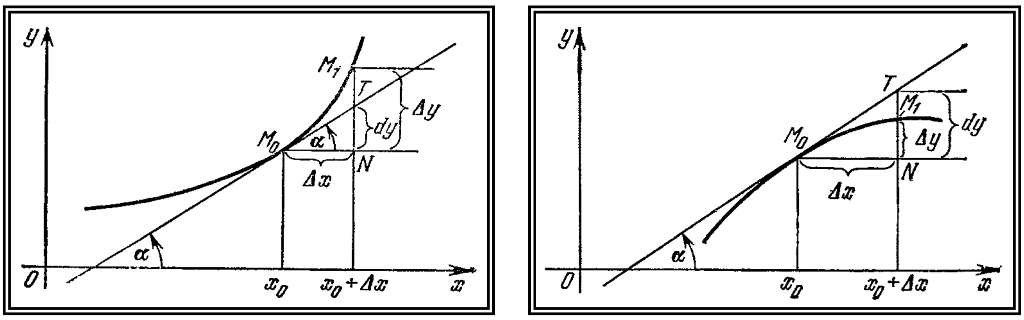


Рис. 5. *Геометрический смысл дифференциала.*

Из рис. 5 видно, что дифференциал функции с геометрической точки зрения описывает приращение ординаты точки касательной при приращении аргумента Δx. Он может быть как меньше приращения функции, так и больше этой величины.

Дифференциал функции обладает следующими ***свойствами***:

1. $d(U \pm V) = dU \pm dV$; **2.** $d(UV) = V\,dU + U\,dV$; **3.** $d\left(\dfrac{U}{V}\right) = \dfrac{V\,dU - U\,dV}{V^2}$;

4. ***Дифференциал от сложной функции*** $df(U(x)) = f'_U\,dU = f'_U\,U'_x\,dx$.

19.2. *Применение дифференциала функции*

Пусть дана функция $y = f(x)$, тогда при приращении аргумента Δx функция получает приращение

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \approx f'(x)\Delta x = df\ .$$

Это приближённое равенство позволяет по виду функции и известному значению функции в данной точке вычислить значение функции в приращённой точке: $f(x+\Delta x) \approx f(x) + df = f(x) + f'(x)\Delta x$.

○ Полученное приближённое равенство даёт значение функции в приращённой точке тем точнее, чем меньше приращение аргумента. ○

Пример 3. Вычислить $\sqrt{4{,}01}$.

В данном примере задана функция $f(x) = \sqrt{x}$. В качестве точки x выбираем значение $x = 4$, из которого легко извлекается квадратный корень: $\sqrt{4} = 2$. Приращённой точкой является точка $x + \Delta x = 4{,}01$. Таким образом, приращение аргумента равно $\Delta x = 4{,}01 - 4 = 0{,}01$. Производная от данной функции, согласно таблице производных (см. п. 18.1, ***18***), равна $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно, $\sqrt{4{,}01} \approx 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}01 = 2{,}0025$.

Пример 4. Вычислить $arctg(1{,}05)$.

В этом примере

$$x = 1;\ \ x + \Delta x = 1{,}05;\ \ \Delta x = 0{,}05;\ \ f(x) = arctg x;\ \ arctg 1 = \frac{\pi}{4};\ \ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно, $arctg(1{,}05) \approx \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{1+1^2} \cdot 0{,}05 = 0{,}810$.

19.3. *Дифференциалы и производные высших порядков*

Пусть дана функция $y = f(x)$, тогда, согласно определению, её дифференциал равен $df(x) = f'(x)dx$. Дифференциал аргумента dx равен его приращению и не зависит от переменной x. Однако производная функции $f'(x)$, в общем случае, является функцией аргумента x. В связи с этим дифференциал функции является функцией аргумента x. Следовательно, можно поставить вопрос о дифференцируемости дифференциала функции.

Дифференциал от первого дифференциала функции называется ***вторым дифференциалом функции***:

$$d^2 f(x) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x))'(dx)^2 = f''(x)(dx)^2 .$$

Производная от первой производной функции называется ***второй производной функции***, т.е. $\boxed{(f'(x))' = f''(x)}$.

Пример 5. Вывести *<u>формулу второй производной от параметрически заданной функции</u>*.

Воспользуемся формулой, полученной в п. 18.2, ***<u>18</u>***:

$$y''_x = \left(y'_x\right)'_x = \left(y'_x\right)'_t t'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3} .$$

Вторая производная от параметрически заданной функции определяется системой

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y''_x = \dfrac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3} \end{cases}}.$$

Аналогично вводятся дифференциалы и производные высших порядков: $d^3 f(x) = f'''(x)(dx)^3$; $d^4 f(x) = f^{(4)}(x)(dx)^4$; и так далее.

○ Отметим, что обозначение производной, начиная с четвёртой, берётся в скобки. ○

○ *<u>Производные высших порядков</u>* записывают в виде

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}; \quad f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \text{ и т.д. } ○$$

Пример 6. Найти второй дифференциал функции $y = \sin x$.

Используя формулу для второго дифференциала, найдём вторую производную от данной функции $(\sin x)' = \cos x$; $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$. Следовательно, второй дифференциал равен $d^2 y = -\sin x\,(dx)^2$.

Пример 7. Найти n-ую производную от функции $y = x^n$.

Вычислим последовательно все производные

$$y' = n\,x^{n-1},\ y'' = n\,(n-1)\,x^{n-2},\ y''' = n\,(n-1)(n-2)\,x^{n-3},\ \ldots$$

При последовательном дифференцировании n-ая производная от функции $y = x^n$ равна $y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Произведение чисел от 1 до n, обозначаемое $n!$, называется ***<u>факториалом</u>***:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... 3 \cdot 2 \cdot 1} \ (\boxed{0! = 1! = 1}).$$

Пример 8. Найти n-ую производную от функции $y = e^x$.
Вычислим последовательно первую $y' = e^x$, вторую $y'' = e^x$ и третью производные $y''' = e^x$, т.е. n-ая производная от функции $y = e^x$ равна самой функции, т.е. $y^{(n)} = e^x$.

20 “*Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя*”

20.1. *Теоремы Ролля и Ферма*

Теорема 1. Пусть дана функция $f(x)$, которая *непрерывна* на отрезке $[a; b]$; *дифференцируема* на открытом интервале $(a; b)$; *на концах отрезка принимает равные значения* $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in [a; b]$ такая, что $\boxed{f'(c) = 0}$.
Док-во: Геометрический смысл ***теоремы Ролля*** состоит в том, что внутри интервала $[a; b]$ есть, по крайней мере, одна такая точка c, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси абсцисс Ox, так как в этой точке производная $f'(c) = tg\varphi = 0$ (рис. 6).

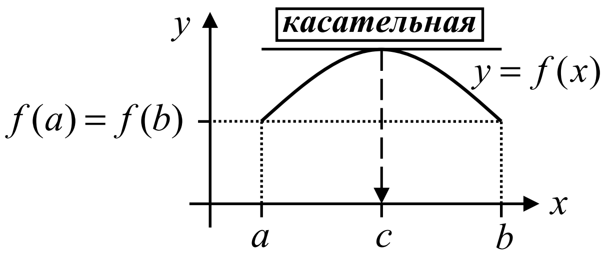
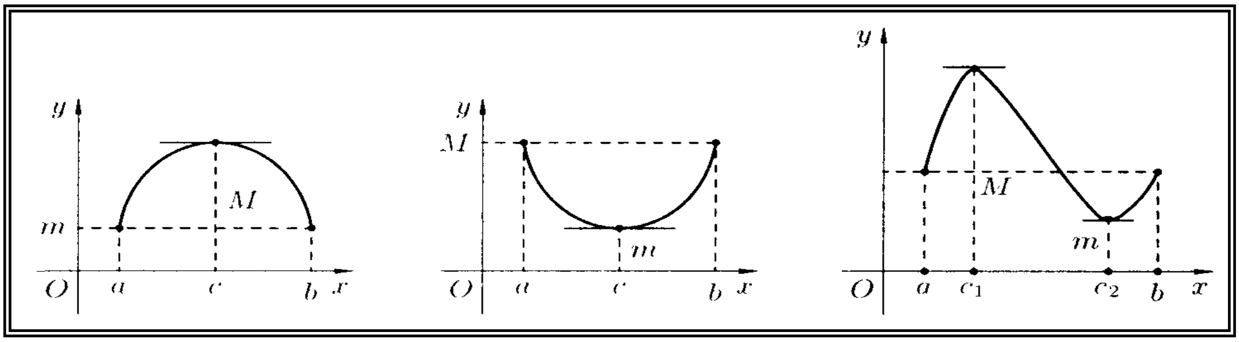


Рис. 6. *Геометрический смысл* ***теоремы Ролля***.

В силу того, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a; b]$, то по теоремам о непрерывных функциях (см. п. 16.5, ***16***) она достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений на этом интервале. Рассмотрим два возможных случая:
а) наименьшее и наибольшее значения функции совпадают $m = M$. В этом случае функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a; b]$ и для всех точек этого интервала производная будет равна нулю, так как производная от константы равна нулю (см. п. 18.1, ***18***).
б) пусть $m \neq M$. Это означает, что внутри отрезка $[a; b]$ или на его концах существуют точки, в которых функция достигает наибольшего и наименьшего значений. Пусть в точке c функция достигает наибольшего значения $f(c) = M$, тогда в Δx-окрестности этой точки выполняются неравенства:



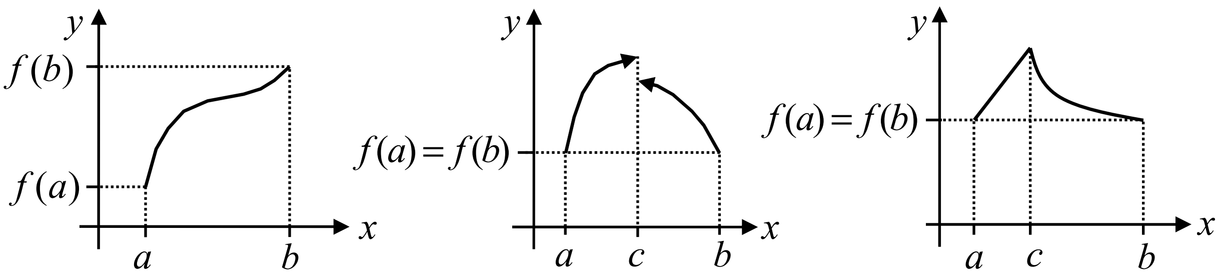
$$\begin{cases} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0, \; при \;\; \Delta x<0 \\ \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0, \; при \;\; \Delta x>0 \end{cases}.$$

Вычисляя пределы от полученных неравенств при $\Delta x \to 0$, получим

$$\begin{cases} f'(c) \geq 0, \quad при \;\; \Delta x \to 0-0 \\ f'(c) \leq 0, \quad при \;\; \Delta x \to 0+0 \end{cases}.$$

Так как производная функции в точке c не может быть одновременно и положительной, и отрицательной, то в этой точке она равна нулю, т. е. $f'(c)=0$. Аналогично теорема доказывается, если в точке c функция достигает наименьшего значения.

○ Для выполнения ***теоремы Ролля*** важны все три вышеперечисленных условия. Приведём примеры нарушения одного из условий ***теоремы Ролля*** (рис. 7):



а) **б)** **в)**

Рис. 7. *Примеры нарушения одного из условий* ***теоремы Ролля***.

В случаях:

а) значения функции на концах не равны между собой;

б) функция терпит разрыв первого рода в точке c;

в) функция не дифференцируема в точке c. ○

Теорема 2 (*теорема Ферма*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на открытом интервале $(a; b)$ и достигает наибольшего (наименьшего) значения в точке $x \in (a; b)$. Тогда в этой точке первая производная функции $f(x)$ обращается в нуль, т.е.

$$\boxed{f'(x)=0}.$$

20.2. *Теоремы Лагранжа и Коши*

Теорема 3 (*теорема Лагранжа*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на открытом интервале $(a;b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a;\, b)$ такая, что

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$

Док-во: Геометрический смысл ***теоремы Лагранжа*** состоит в том, что внутри интервала $[a;\, b]$ есть, по крайней мере, одна такая точка c, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна секущей, соединяющей крайние точки графика функции (рис. 8):

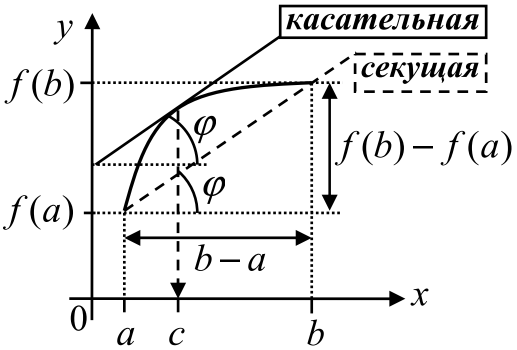


Рис. 8. *Геометрический смысл* ***теоремы Лагранжа***.

Составим уравнение секущей AB, угловой коэффициент которой равен $k=tg\,\varphi=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (рис. 8). Так как эта прямая проходит через точку $A(a;\, f(a))$, то её уравнение имеет вид $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$. Составим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-y=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

В силу того, что эта функция составлена из непрерывных на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемых на открытом интервале $(a;b)$ функций, следовательно, функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на открытом интервале $(a;\, b)$. Кроме того, легко видеть, что на концах интервала $[a;\, b]$ она принимает равные значения, т.е. имеем $F(a)=F(b)=0$. Отсюда находим, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям ***теоремы Ролля***. Следовательно, существует, по крайней мере, одна точка $c\in[a;\, b]$, в которой $F'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. Откуда следует утверждение ***теоремы Лагранжа***

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}.$$

Обобщением ***теоремы Лагранжа*** является ***теорема Коши***, которая связывает отношение приращений двух функций с отношением их производных.

Теорема 4 (*теорема Коши*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на открытом интервале $(a;b)$, причём первая производная $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\in(a;b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c\in(a;b)$ такая, что

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}.$$

○ Доказательство ***теоремы Коши*** аналогично доказательству ***теоремы Лагранжа***. ***Теорема Коши*** совпадает с ***теоремой Лагранжа*** в частном случае, когда $g(x)=x$. ○

20.3. *Правило Лопиталя*

Теорема 5. Пусть дифференцируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to x_0$ (или $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$) одновременно стремятся к нулю или бесконечности ($f(x)\to 0\ (\to\infty)$ и $g(x)\to 0(\to\infty)$, $g(x_0)\neq 0$). Тогда для раскрытия неопределённости $\boxed{\left[\frac{0}{0}\right]\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)}$ применяется формула

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}},$$

при условии, что $g'(x_0)\neq 0$, и существует предел отношения производных указанных функций.

Док-во: Докажем случай, когда при $x\to x_0$ функции $f(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0$ и $g(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}$ $\underset{x\to x_0}{\to}0$. Доопределим значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 нулевыми значениями, т.е. $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=$(по ***теореме Коши***) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=$ (при $x\to x_0$ $c\to x_0$) $=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (при условии существования пределов).

○ Более общее доказательство ***правила Лопиталя*** основано на применении ***теоремы Коши*** (см. п. 20.2, ***20***). ○

Теорема Лопиталя применяется ***только для раскрытия неопределённостей вида*** $\left[\frac{0}{0}\right]$ ***или*** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия других типов неопределённостей, они должны, *путём тождественных преобразований*, вначале приведены к одной из двух указанных неопределённостей, после чего можно применять ***правило Лопиталя***. Например, неопределённость вида $[0\cdot\infty]$, возникающая в случае, когда в произведении $f(x)\cdot$ $\cdot g(x)$ функция $f(x)\underset{x\to x_0}{\to}0$, а функция $g(x)\underset{x\to x_0}{\to}\infty$, преобразуется к виду

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\underset{x\to x_0}{\to}\left[\frac{0}{0}\right].$$

При применении ***правила Лопиталя производная берётся отдельно от числителя и отдельно от знаменателя дроби***.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3}$.

Так как $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3}=\left[\frac{0}{0}\right]$=(применим ***правило Лопиталя***)$=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{3a^2}$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

При необходимости ***правило Лопиталя*** *применяется повторно*, т.е.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}$.

В данном примере имеем дело с неопределённостью $[0^0]$. Предположим, что данный предел существует и равен A, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}=A$.

Возьмём натуральный логарифм от обеих частей равенства

$$\ln A=\ln\left(\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tg\,x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(\sin x)^{tg\,x}=\lim_{x\to 0}tgx\ln(\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{ctg\,x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

(применим ***правило Лопиталя***)$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x\cos x)=0$. Отсюда находим предельное значение заданной функции

$$\ln A=0\Rightarrow A=e^0=1.$$

***<u>21</u>* "*Формула Тейлора и её применение*"**

21.1. *Формула Тейлора для функции* $f(x)$

<u>Теорема 1.</u> Если функция $f(x)$ на интервале дифференцируема $n+$ $+1$ раз в некоторой окрестности точки x_0, то её можно представить в виде

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}}.$$

Последнее слагаемое в ***<u>формуле Тейлора</u>*** R_{n+1} называется остаточным членом, вид которого установил ***<u>Лагранж</u>***: $\boxed{R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$,

где величина $\xi\in(x_0;x)$. В этой формуле неизвестной является только величина ξ, причём в указанном интервале, согласно ***<u>теореме Лагранжа</u>***, такая точка всегда присутствует, хотя бы в единственном числе. При $x_0=0$ ***<u>формула Тейлора</u>*** переходит в ***<u>формулу Маклорена</u>***:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}}.$$

Пример 1. Представить по ***<u>формуле Маклорена</u>*** функцию $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, ограничившись $n=2$.

Вычислим три первых производных заданной функции:

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2};\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3};\quad f'''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}.$$

При $x=0$ получим $f(0)=1;\ f'(0)=-1;\ f''(0)=2$. Остаточный член имеет вид $R_{n+1}^{(2)}=-\dfrac{6}{(1+\xi)^4}$. Следовательно, при $n=2$ данная функция по ***<u>формуле Маклорена</u>*** имеет вид: $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dfrac{x^3}{(1+\xi)^4}$, где $\xi\in(0;x)$. Отметим, что полученное выражение справедливо при $x>-1$. Решим найденное равенство относительно величины ξ:

$$\frac{x^3}{(1+\xi)^4}=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}.$$

Отсюда получаем $(1+\xi)^4=1+x$. Следовательно, $\xi_{1,2}=-1\pm\sqrt[4]{1+x}$. Так как выражение под корнем четвёртой степени должно быть неотрицательным и $x\neq-1$, то $x>-1$. Таким образом, из двух корней ***<u>теореме</u>***

Тейлора удовлетворяет только корень $\xi_1 = -1 + \sqrt[4]{1+x}$, который действительно лежит между нулём и x.

При $n = 0$ ***формула Тейлора*** даёт формулу конечных приращений:

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

(см. ***теорему Лагранжа***, п. 20.2, **20**). При $n = 1$ получаем

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2.$$

Если положить $a = x$ и $b = x + \Delta x$, то получим формулу

$$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x = \frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2 \quad \text{или} \quad \Delta f - df = \frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2.$$

21.2. *Применение формулы Тейлора*

Если известны величины $f(a), f'(a), f''(a), \ldots$, то ***формула Тейлора*** позволяет вычислить значение функции в некоторой точке x. В зависимости от требуемой степени точности вычислений достаточно бывает вычислить два, три или несколько первых слагаемых в ***формуле Тейлора***. Для оценки погрешности вычислений необходимо помнить, что величина ξ в остаточном члене в ***форме Лагранжа*** лежит в пределах от a до x.

Пример 2. Представить функцию $f(x) = e^x$ по ***формуле Маклорена***.

Так как $f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$; $f'''(x) = e^x$; ...; $f^{(n)}(x) = e^x$, то

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Следовательно,

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!}},$$

где $\xi \in (0; x)$. Отсюда следует, $e^0 < e^{\xi} < e^x$.

Пример 3. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Так как основание $2 < e < 3$, то $\sqrt{e} < 2$. Следовательно, при $x = \frac{1}{2}$ остаточный член равен $|R_{n+1}| < \frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!\, 2^n}$. При $n = 3$: остаточный член $|R_4| < \frac{1}{4!\, 2^3} \approx 0{,}0051 > \varepsilon$; $n = 4$: $|R_5| < \frac{1}{5!\, 2^4} \approx 0{,}00051 < \varepsilon$. Следовательно, удерживая пять первых слагаемых в ***формуле Маклорена***, получим с требуемой точностью, что

$$\sqrt{e} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=1{,}649\,.$$

Пример 4. Вычислить число e с точностью $\varepsilon = 0{,}0005$.

Согласно результатам, полученным в предыдущем примере, для достижения требуемой точности, подсчитаем остаточный член ***формулы Маклорена*** в ***форме Лагранжа*** $\left|R_{n+1}\right| < \dfrac{3}{(n+1)!}$. При $n = 6$ получаем $|R_7| < \dfrac{3}{7!} \approx 0{,}00059 > \varepsilon$, а при $n = 7$ имеем $|R_8| < \dfrac{3}{8!} \approx 0{,}00007 < \varepsilon$. Итак,

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!} = 2{,}7183\ .$$

Если вычислять значение числа e с точностью $\varepsilon = 5\cdot 10^{-9}$, то потребуется взять 13 первых слагаемых, при этом $e \approx 2{,}71828183$. Аналогично ***формула Маклорена-Тейлора*** применяется для вычисления и других функций. Например, для вычисления натуральных логарифмов используется формула:

$$\boxed{\ln(1+x) \approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}}},$$

причём $\xi \in (0;\, x)$.

Пример 5. Вычислить $\ln(0{,}9)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

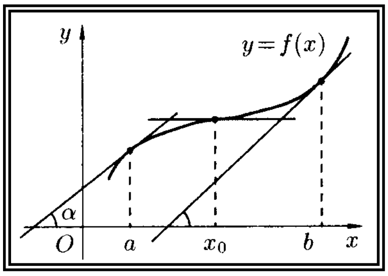
В данном примере $x = -0{,}1$. Так как $\xi \in (0;\, x)$, то $1+\xi > 0{,}9$, следовательно, остаточный член $\left|R_{n+1}\right| < \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{0{,}1}{0{,}9}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{9^{n+1}(n+1)}$. При $n=1$ получаем $|R_2| < 0{,}006 > \varepsilon$. Следовательно, достаточно взять первый член в ***формуле Маклорена-Тейлора*** $\ln(0{,}9) \approx -0{,}1$.

22 “*Исследование функций с помощью производных: Возрастание и убывание функций. Экстремумы. Необходимое и достаточные условия существования экстремума*”

22.1. *Необходимое условие возрастания и убывания функции*

Из определений возрастающей и убывающей функций (см. п. 13. 1, ***13***) следует *необходимое условие возрастания и убывания функции*.

Теорема 1. Если дифференцируемая на отрезке $[a;\, b]$ функция $f(x)$ не убывает ($\boxed{f(x)\uparrow}$), то $\forall x \in (a;\, b)$ её первая производная $\boxed{f'(x) \geq 0}$. Ес-

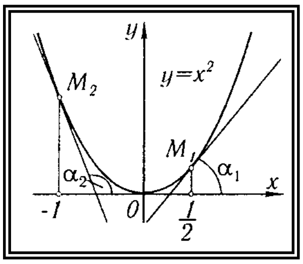


ли дифференцируемая функция $f(x)$ не возрастает ($\boxed{f(x)\downarrow}$) на интервале $[a;\, b]$, то $\forall x \in (a;\, b)$ её первая производная $\boxed{f'(x) \le 0}$.

<u>Док-во:</u> Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ не убывает на интервале $[a;\, b]$. Возьмём произвольную точку $x \in (a;\, b)$ и дадим ей приращение $\Delta x > 0$. Тогда в силу не убывания функции $f(x)$ её приращение $\Delta f \ge 0$. Отсюда следует, что величина $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0$. Совершая предельный переход в этом неравенстве при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \ge 0$. Аналогично теорема доказывается и в случае, когда функция $f(x)$ убывает на интервале $[a;\, b]$.

○ С геометрической точки зрения возрастающая на интервале $[a;\, b]$ функция $f(x)$ в каждой точке графика характеризуется касательной, которая образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол. Если функция $f(x)$ убывает на интервале $[a; b]$, то касательная образует с положительным направлением оси абсцисс тупой угол. ○

Пример 1. Определить интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^2$.



Из графика функции видно, что $f(x)\downarrow\ \forall x \in (-\infty;\, 0)$ и $f(x)\uparrow\ \forall x \in (0;\, \infty)$. Согласно необходимому признаку возрастания и убывания функции $f(x)$, вычислим её первую производную: $f'(x) = 2x$. Эта производная будет отрицательной $\forall x \in (-\infty; 0)$ (угол α_2 тупой) и положительной $\forall x \in (0; \infty)$ (угол α_1 острый) величиной. Следовательно, в полном соответствии с графиком функции

$$f(x)\downarrow\ \forall x \in (-\infty; 0) \text{ и } f(x)\uparrow\ \forall x \in (0; \infty).$$

22.2. *Достаточное условие возрастания и убывания функции*

<u>Теорема 2.</u> Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Если её первая производная $\boxed{f'(x) > 0}$ $\forall x \in (a; b)$, то функция ***возрастает*** ($\boxed{f(x)\uparrow}$) на отрезке $[a; b]$. Если её первая производная $\boxed{f'(x) < 0}$ $\forall x \in (a; b)$, то функция ***убывает*** ($\boxed{f(x)\downarrow}$) на отрезке $[a;\, b]$.

<u>Док-во:</u> Пусть первая производная функции $f'(x) > 0\ \forall x \in (a; b)$. Возьмём из этого интервала две любые точки x_1 и x_2 (для определённости примем, что $x_2 > x_1$). Тогда по ***<u>теореме Лагранжа</u>*** (см. п. 20.2, ***<u>20</u>***) на интервале $[x_1;\, x_2]$ найдётся хотя бы одна точка x такая, что

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1).$$

Так как на интервале $f'(x) > 0\ \ \forall x \in (a; b)$ и $x_2 - x_1 > 0$, следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$. Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[x_1; x_2]$. В силу произвольности выбранных точек x_1 и x_2 полученное утверждение справедливо для всего интервала $[a; b]$. Достаточное условие убывания функции $f(x)$ на интервале $[a;b]$ доказать *самостоятельно*.

22.3. *Условия постоянства функции на отрезке* $[a; b]$

<u>Теорема 3.</u> Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Если её первая производная $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a; b)$, то функция *постоянна* на интервале $[a; b]$.

<u>Док-во:</u> Пусть первая производная функции $f'(x) = 0\ \forall x \in (a;b)$. Возьмём произвольную точку $x \in (a;b)$ и рассмотрим интервал $[a; x]$. На этом отрезке выполняются все условия ***<u>теоремы Лагранжа</u>***, следовательно, $f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x - a)$, где $c \in [a; x]$. Так как по условию теоремы $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a; b)$, то и в точке c первая производная функции обращается в 0. Отсюда получаем, что $f(x) = f(a)$. В силу произвольности точки x полученное равенство выполняется $\forall x \in [a; b]$, т.е. функция постоянна на отрезке $[a; b]$.

<u>Теорема 4.</u> Пусть $f(x)$ и $g(x)$ − непрерывные функции на отрезке $[a; b]$ и для всех внутренних точек отрезка $[a; b]$ имеют равные первые производные ($f'(x) = g'(x)\ \ \forall x \in (a; b)$). Тогда разность этих функций постоянна, т.е. $f(x) - g(x) = C$.

<u>Док-во:</u> Введём вспомогательную функцию $y = f(x) - g(x)$, производная которой $y' = f'(x) - g'(x) = 0\ \ \forall x \in (a; b)$. Следовательно, по ***<u>Теореме 3</u>*** функция $y = f(x) - g(x) = C$.

Пример 2. Доказать, что $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$.

Обозначим $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[-1; 1]$ и для всех внутренних точек отрезка $[-1; 1]$ имеют равные первые производные

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = g'(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)'.$$

Согласно ***<u>Теореме 4</u>***, функция $f(x) - g(x) = \arcsin x - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = C$ $\forall x \in (-1;1)$. Полученное равенство выполняется, в том числе, и при $x = 0$, т.е. $\arcsin 0 - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos 0\right) = C$. Так как $\arcsin 0 = 0$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, то константа $C = 0$, следовательно, $\boxed{\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x}$.

22.4. *Минимум и максимум* (*экстремумы*) *функции*

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x_0.

Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет ***строгий минимум*** ($\min$), если существует δ-окрестность точки x_0 такая, что $\forall x \in [x_0 - \delta;\, x_0 + \delta]$ значение функции в любой другой точке $x \neq x_0$ из δ-окрестности точки x_0 превышает значение функции в самой точке x_0, т.е. выполняется неравенство $\boxed{f(x) > f(x_0)}$ (рис. 9).

Обозначение $\boxed{f_{\min}(x_{\min})}$.

Функция $f(x)$ в точке x_0 имеет ***строгий максимум*** ($\max$), если существует δ-окрестность точки x_0 такая, что $\forall x \in [x_0 - \delta;\, x_0 + \delta]$ значение функции в любой другой точке $x \neq x_0$ из δ-окрестности точки x_0 меньше значения функции в самой точке x_0, т.е. выполняется неравенство $\boxed{f(x) < f(x_0)}$ (рис. 10).

Обозначение $\boxed{f_{\max}(x_{\max})}$.

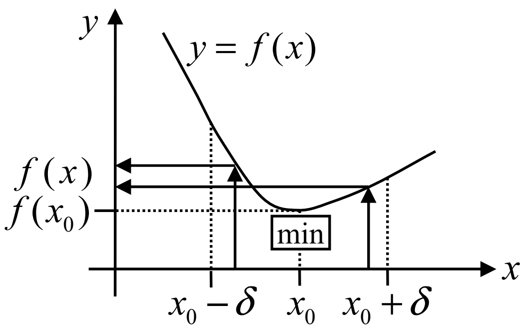


Рис. 9. *Минимум функции* $f(x)$.

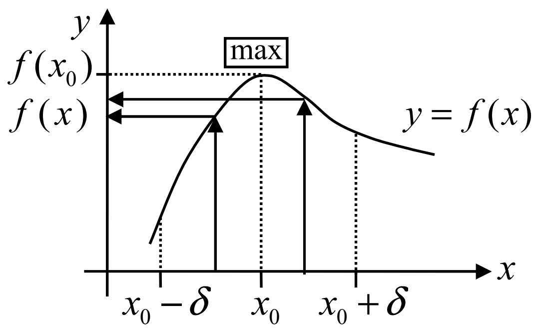
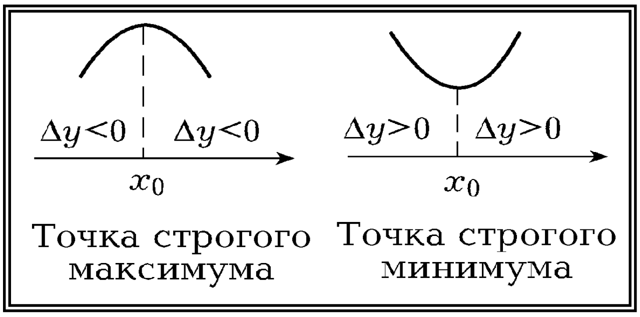


Рис. 10. *Максимум функции* $f(x)$.

● В δ-окрестности точки строгого максимума x_0 приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, а в δ-окрестности точки строгого максиму-



ма x_0 приращение функции

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) > 0.$$

Точки строгого минимума и максимума объединяются под общим названием ***точки строгого*** (***локального***) ***экстремума***.

Пример 3. Найти на данном графике (рис. 11) точки строгого экстремума.

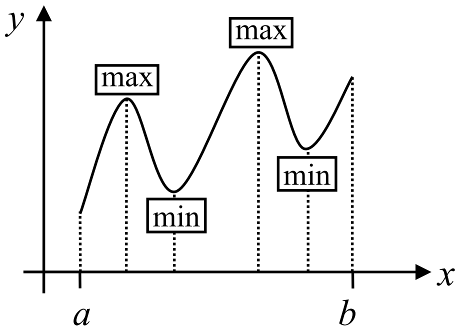


Рис. 11. *Максимумы и минимумы заданной функции.*

Точки экстремума всегда являются внутренними точками области определения функции.

Не следует путать ***минимальное значение*** $f_{\min}(x_{\min})$ (локальный минимум) ***функции с наименьшим значением*** $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ (глобальный минимум) ***функции на отрезке*** $[a;\,b]$, ***а максимальное значение*** $f_{\max}(x_{\max})$ (*локальный* максимум) ***функции – с наибольшим значением*** $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ (*глобальный* максимум) ***функции на отрезке*** $[a;\,b]$.

Из определения экстремума следует, что в точке минимума выполняется неравенство $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) > 0$, а в точке максимума – $\Delta f > 0$ в некоторой малой Δx-окрестности точки x_0.

22.5. *Необходимое условие существования экстремума функции*

<u>Теорема 5.</u> Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный экстремум*, то её *<u>первая производная в этой точке равна нулю</u>*, т.е. $\boxed{f'(x_0)=0}$ (*<u>бесконечности</u>* или *<u>не существует</u>*).

<u>Док-во:</u> Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *максимум*. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует её приращение аргумента $\Delta x<0$, а приращение функции $\Delta f<0$, следовательно, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\ge 0$. При стремлении $\Delta x\to 0+0$ (справа) приращение аргумента $\Delta x>0$, а приращение функции $\Delta f<0$, следовательно, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\le 0$. Так как производная в точке x_0 не может одновременно быть и отрицательной и положительной, то в этой точке она равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$. Случай, когда в точке x_0 наблюдается минимум, доказать *самостоятельно*.

○ *Обращение в нуль первой производной функции в точке x_0 является необходимым*, ***но не достаточным условием существования экстремума в этой точке***. В этом случае говорят об “***острых***” экстремумах (первая производная функции обращается в *бесконечность*, или *не существует*). ○

Пример 4. Доказать, что функция $f(x)=|x|$ имеет “острый” экстремум в точке $x_0=0$.

Из рис. 4 п. 17.4, ***17*** видно, что в точке $x_0=0$ функция определена и непрерывна, её первая производная

$$f'(x)=\begin{cases} tg\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-1, при\ \ x<0 \\ tg\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1, \quad при\ \ x>0 \end{cases},$$

т.е. в точке $x_0=0$ первая производная функции *не существует*. Однако по графику функции видно, что в точке $x_0=0$ заданная функция имеет “***острый***” экстремум.

Точки, в которых ***первая производная функции обращается в 0***, ***равна бесконечности*** или ***не существует***, называются ***критическими*** (*стационарными* или *подозрительными на экстремум*).

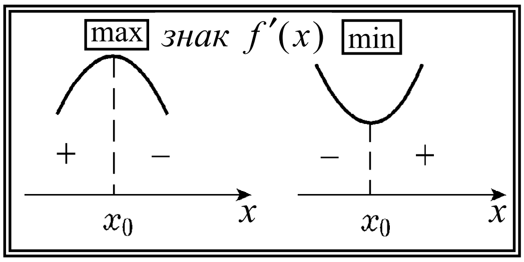
○ *Всякая точка экстремума является критической точкой*, *однако не любая критическая точка будет экстремумом*. ○

Пример 5. Доказать, что функция $f(x)=x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0=0$.

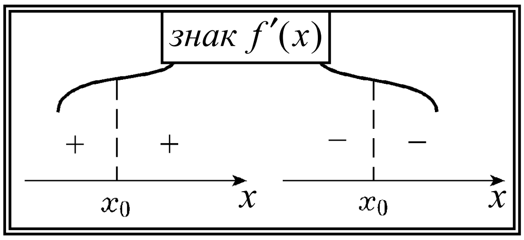
В точке $x_0=0$ первая производная функции $f'(x_0)=3x^2\big|_{x=0}=0$. Однако из графика кубической параболы видно (график *кубической параболы* см. п. 0.6, ***0***), что в точке $x_0=0$ она экстремума не имеет. Следовательно, исследуемая точка является *критической точкой*, но *не точкой экстремума*.

22.6. *Первый и второй достаточные признаки существования экстремума*

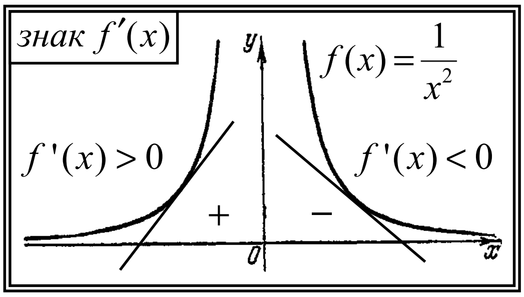
Первый достаточный признак существования экстремума:



Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и её некоторой Δx-окрестности. Если *при переходе через точку* x_0 *слева направо* её *первая производная меняет свой знак с* “+” *на* “–”, то *в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет максимум*, а если её *первая производная меняет свой знак* с “–” *на* “+”, то *в точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет минимум*.

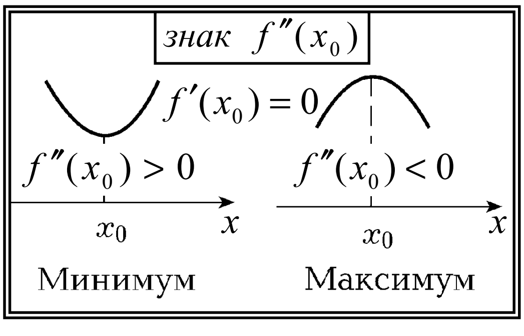


Если при переходе через точку x_0 *первая производная не меняет свой знак*, то в этой точке *экстремума нет*.



○ Требование “дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 и её некоторой Δx-окрестности” является существенным для обеспечения непрерывности функции как в точке x_0, так и её некоторой Δx-окрестности. В противном случае по изменению знака первой производной нельзя судить о наличии экстремума в точке x_0. Примером может служить, например, график функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. ○

Второй достаточный признак существования экстремума:



Теорема 7. Если в точке x_0 *первая производная функции* $f(x)$ *обращается в 0* ($\boxed{f'(x_0)=0}$), а *вторая производная существует*, непрерывна в некоторой окрестности этой точки и *отлична от 0 в точке* x_0 ($\boxed{f''(x_0)\neq 0}$), то *в точке* x_0 *наблюдается экстремум*. Если при этом $\boxed{f''(x_0)>0}$, то x_0 является точкой ***минимума***, а при $\boxed{f''(x_0)<0}$ – точкой ***максимума***.

○ Если в точке x_0 *вторая производная функции* $f(x)$ *обращается в 0* $\boxed{f''(x_0)=0}$, то вычисляют производную следующего порядка $k=3,4,...,n$, которая отлична от нуля в точке x_0. Если n – чётное число, то при $\boxed{f^{(n)}(x_0)>0}$ в точке x_0 наблюдается (строгий) *минимум*, а при $\boxed{f^{(n)}(x_0)<0}$ – (строгий) *максимум*. Для нечётного числа n точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$. ○

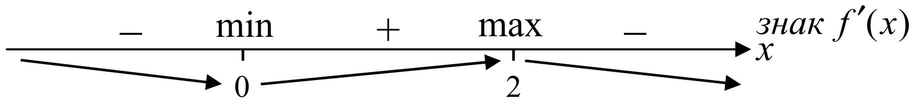
○ Если точка x_0 является концевой точкой открытого интервала или отрезка, то при исследовании этой точки на экстремум необходимо использовать понятия односторонних производных. ○

Пример 6. Определить тип экстремумов функции $f(x)=x^2e^{-x}$.

Вычислим первую производную функции и приравняем её к нулю с целью отыскания критических точек:

$$f'(x)=2x\,e^{-x}-x^2\,e^{-x}=e^{-x}x(2-x)=0.$$

Так как показательная функция $e^{-x}>0\ \forall x\in R$, то $x(2-x)=0$. Отсюда находим критические точки $x_1=0$ и $x_2=2$. Отложим эти точки на числовой оси и на каждом интервале определим знак первой производной функции, т.е. применим *первый достаточный признак существования экстремума*:



При переходе слева направо через точку $x_1=0$ первая производная функция меняет свой знак с “–” на “+”, следовательно, в этой точке наблюдается минимум. При переходе слева направо через точку $x_2=2$ первая производная функция меняет свой знак с “+” на “–”, следовательно, в данной точке наблюдается максимум. Применим *второй достаточный признак существования экстремума*, для чего вычислим вторую производную функции:

$$f''(x)=e^{-x}(x^2-4x+2).$$

Вычислим значение второй производной функции в точке $x_1=0$:

$$f''(0)=2>0,$$

следовательно, в этой точке функция имеет минимум. Вычислим значение второй производной функции в точке $x_2=2$:

$$f''(2)=-2e^{-2}<0,$$

следовательно, в этой точке функция имеет максимум.

<u>23</u> "*Исследование функций с помощью производных: Выпуклость и вогнутость графика функции. Асимптоты*"

23.1. *Наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке* $[a; b]$

Пусть функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, на этом интервале имеет конечное число точек экстремума. Если наибольшее значение функция достигает внутри отрезка, то очевидно, что это будет один из максимумов (аналогично для наименьшего значения – один из минимумов). Однако возможны варианты, когда функция достигает своих наименьшего и наибольшего значений на концах данного отрезка. Для отыскания этих значений применяют следующую ***схему***:

<u>1</u>. Находят область определения функции и убеждаются в том, что данный отрезок входит в эту область, т.е. является интервалом непрерывности функции $f(x)$.

<u>2</u>. Находят критические точки, для чего решают уравнение $f'(x)=0$, и точки, в которых первая производная функции не существует.

<u>3</u>. Вычисляют значения функции в критических точках, принадлежащих заданному интервалу; в точках, в которых первая производная функции не существует и на концах данного отрезка.

<u>4</u>. Из полученных чисел выбирают наименьшее $m = \min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$ и наибольшее $M = \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$.

Пример 1. Определить наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^3-3x$ на отрезке $[0; 5]$.

Действуя, согласно вышеприведенной *схеме*, находим:

<u>1</u>. $D(f(x)):R$; $[0;\,5]\subset R$. Следовательно, функция определена и непрерывна на заданном отрезке.

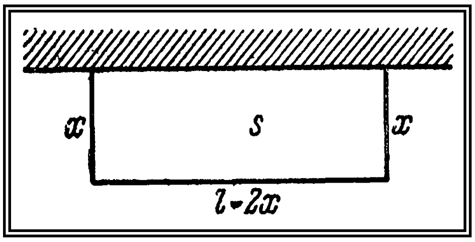
<u>2</u>. Вычислим первую производную $f'(x)=3x^2-3$. Производная существует на всей числовой оси, поэтому найдём критические точки $3x^2-3=$ $=0$. Отсюда находим, что $x_1=-1\notin[0;\,5]$ и $x_2=1\in[0;\,5]$.

<u>3</u>. Вычислим значение функции в критических точках и на концах заданного отрезка:

$$f(0)=0^3-3\cdot 0=0;\ f(1)=1^3-3\cdot 1=-2;\ f(5)=5^3-3\cdot 5=110.$$

<u>4</u>. Из полученных чисел выбираем наименьшее $m=f(1)=-2$ и наибольшее $M=f(5)=110$ числа, которые определяют наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^3-3x$ на отрезке $[0;\,5]$.

Пример 2. Найти наименьшую длину забора, с помощью которого можно огородить участок в форме прямоугольника с заданной площадью s, примыкающего к стене дома.



Обозначим одну из сторон прямоугольника через x, тогда площадь прямоугольника равна $s = x\cdot(l-2x)$. Отсюда находим искомую функцию $l(x) = 2x + \frac{s}{x}$ при $x \in (0;\infty)$.

Функция $l(x)$ непрерывна $\forall x \in (0;\infty)$, при $x \to 0$ и $x \to \infty$ она стремится к бесконечности ($l(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\to\infty}}{\to} \infty$). Следовательно, функция $l(x)$ достигает своего наименьшего значения внутри указанного интервала изменения аргумента x. Вычислим первую производную заданной функции $l(x)$: $l'(x) = 2 - \frac{s}{x^2}$. Функция $l'(x)$ непрерывна для всех значений аргумента x из полубесконечного интервала $(0;\infty)$. Поэтому она существует во всех точках этого интервала и обращается в нуль в точках $x_1 = -\sqrt{\frac{s}{2}} \notin (0;\infty)$ и $x_2 = \sqrt{\frac{s}{2}} \in (0;\infty)$. При переходе через точку x_2 слева направо первая производная $l'(x)$ меняет свой знак с “–” на “+”, следовательно, в этой точке наблюдается минимум. Таким образом, $l_{\min}(x_2) = 2\sqrt{2s}$.

23.2. *Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба*

График дифференцируемой функции $f(x)$ называется ***выпуклым*** на отрезке $[a;b]$, если *он лежит ниже любой касательной* (за исключением точки касания), *проведенной к графику этой функции на данном интервале* (рис. 12).

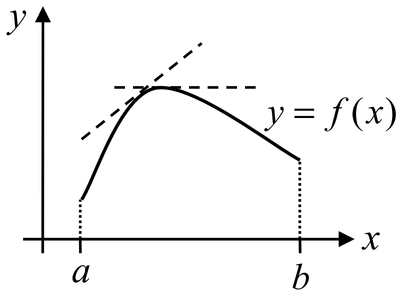


Рис. 12. *Выпуклый график функции* $f(x)$.

График дифференцируемой функции $f(x)$ называется ***вогнутым*** на отрезке $[a;b]$, если *он лежит выше любой касательной* (за исключением точки касания), *проведенной к графику этой функции на данном* *интервале* (рис. 13).

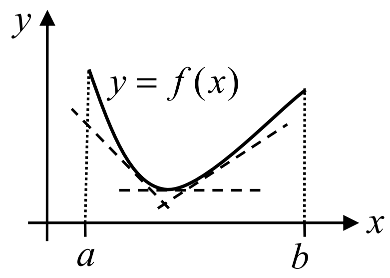


Рис. 13. *Вогнутый график функции* $f(x)$.

<u>Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции</u> на заданном интервале определяются теоремой:

<u>Теорема 1.</u> Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ существует и *положительна* ($f''(x) > 0$), то на этом интервале график функции $f(x)$ будет ***вогнутым***. Если вторая производная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ существует и *отрицательна* ($f''(x) < 0$), то на этом интервале график функции $f(x)$ будет ***выпуклым***.

Пример 3. Определить интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $f(x) = e^x$.

Найдём вторую производную заданной функции: $f''(x) = e^x$. В силу того, что $f''(x) = e^x > 0\ \forall x \in R$, то график функции $f(x) = e^x$ будет вогнутым на всей числовой оси.

Пример 4. Определить интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $f(x) = x^3$.

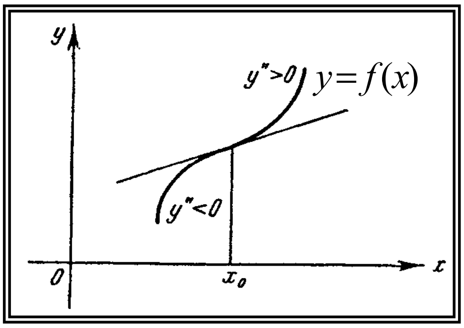
Найдём вторую производную данной функции $f''(x) = 6x$. В силу того, что $f''(x) = \begin{cases} < 0, \ \textit{при}\ x < 0 \\ > 0, \ \textit{при}\ x > 0 \end{cases}$, то график функции $f(x) = x^3$ будет выпуклым при отрицательных значениях аргумента и вогнутым − при положительных значениях независимой переменной (см. рис. 2, п. 13.1, ***<u>13</u>***).

Точка x_0, *отделяющая вогнутую часть графика функции от выпуклой* (или *выпуклую часть графика функции от вогнутой*), называется ***точкой перегиба*** (*критической точкой II рода*, рис. 14).

23.3. ***Необходимое и достаточное условия существования точки перегиба***

Рассмотрим необходимое условие существования точки перегиба.

<u>Теорема 2.</u> Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором интервале, содержащем точку перегиба x_0, то *в*



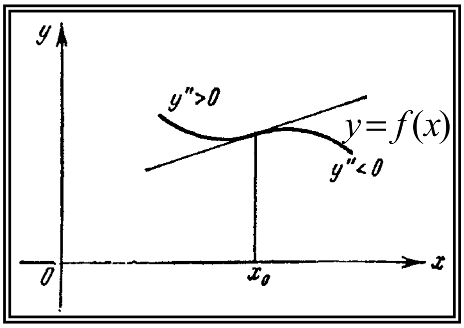


Рис. 14. *Точки перегиба функции* $f(x)$.

точке перегиба (*критической точке II рода*) *вторая производная равна нулю*, т.е. $\boxed{f''(x_0)=0}$ (*бесконечности* или *не существует*).

○ *Обращение в нуль второй производной функции в точке перегиба является* ***необходимым***, ***но не достаточным условием существования такой точки на графике функции***, так как в точке перегиба вторая производная функции может быть равна *бесконечности* или *не существовать* (например, в случае вертикальной асимптоты). ○

Пример 5. Доказать, что точка $x_0 = 0$ не является точкой перегиба графика функции $f(x) = x^4$.

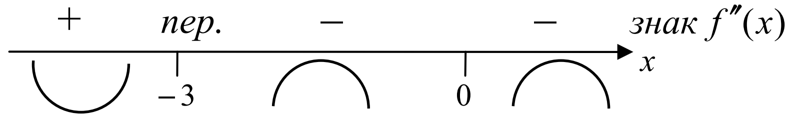
Если вычислить вторую производную данной функции, то она будет равна $f''(x) = 12x^2$. Если приравнять это выражение к нулю, то получим, что точка $x_0 = 0$ должна быть точкой перегиба графика функции $f(x) = x^4$. Однако график этой функции (см. п. 0.6, ***0***) на всей числовой оси является вогнутым, т.е. точка $x_0 = 0$ не является точкой перегиба графика функции $f(x) = x^4$.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором интервале, вторая производная которой в точке x_0, принадлежащей этому интервалу, *обращается в нуль* ($\boxed{f''(x_0) = 0}$) (*бесконечность* или *не существует*). Если при переходе через точку x_0 ***вторая производная функции меняет свой знак***, то ***точка*** x_0 ***определяет точку перегиба графика функции*** $f(x)$.

Пример 6. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$.

Найдём вторую производную заданной функции $f''(x) = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$

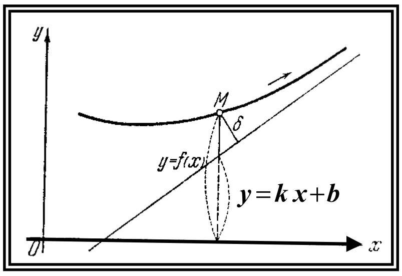
(найти *самостоятельно*). Найдём точки подозрительные на перегиб: а) $f''(x) = 0 \Rightarrow x \notin R$; б) $f''(x)$ – не существует $\Rightarrow$ знаменатель дроби обращается в нуль при $x_1 = 0$ и $x_2 = -3$. Отложим точки на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале:



Из рисунка видно, что точка $x_2 = -3$ является точкой перегиба, так как при переходе через неё вторая производная изменяет свой знак. Точка $x_1 = 0$ не является точкой перегиба, так как при переходе через эту точку вторая производная не изменяет своего знака.

23.4. *Асимптоты графика функции* $f(x)$

В большинстве практических случаев необходимо знать поведение функции при неограниченном росте (убыли) аргумента. Одним из наиболее интересных случаев, которые возникают при таком исследовании, является случай, когда график функции неограниченно приближается к некоторой прямой.



Прямая l: $\boxed{y = kx + b}$ называется ***асимптотой графика функции*** $f(x)$, если расстояние δ от переменной точки M графика до этой прямой стремится к нулю при стремлении аргумента $x \to \pm\infty$, т.е. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left| f(x) - y \right| = 0$.

График функции может приближаться к асимптоте сверху, снизу, слева, справа или совершая колебания возле этой прямой (см. рисунки в п. 13.3, ***13***).

Различают *вертикальные*, *горизонтальные* и *наклонные асимптоты*.

Прямая $\boxed{x = x_0}$ называется ***вертикальной асимптотой***, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен бесконечности ($-\infty$ или $+\infty$), при этом точка x_0 – точка острого экстремума или точкой разрыва II рода.

Прямая $\boxed{y = b}$ называется ***горизонтальной асимптотой***, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

Прямая $\boxed{y = kx + b}$ называется ***наклонной асимптотой***, если её параметры, определяемые по формулам

$$\boxed{k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}} \text{ и } \boxed{b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - k \cdot x)},$$

(при условии существования указанных пределов, в противном случае наклонных асимптот нет) отличаются от $\pm\infty$ и $k \neq 0$.

Если $k=0$, то наклонная асимптота вырождается в ***горизонтальную асимптоту*** $y=b$, при условии, что $b\neq\pm\infty$. Если параметр $b=\pm\infty$, то асимптот нет.

○ График функции $f(x)$ имеет одну асимптоту, если параметры k и b имеют одни и те же значения как при $x\to-\infty$, так и при $x\to+\infty$. Если они принимают разные значения, то график функции $f(x)$ имеет две различные асимптоты: одну – при $x\to-\infty$, а другую – при $x\to+\infty$. ○

Пример 7. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x-1}$.

Областью определения заданной функции $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x-1}$ является множество $D(f): x\in R,\ x\neq 1$ (*нельзя делить на нуль*, поэтому знаменатель дроби $x-1\neq 0\Rightarrow x\neq 1$). Следовательно, точка $x_0=1$ является точкой подозрительной на разрыв. Вычислим лево- и правосторонние пределы (см. п. 13.4, ***13***) в этой точке:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\overset{\nearrow 4}{2x^2-x+3}}{\underset{\searrow -0}{x-1}}=-\infty;\quad f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{\overset{\nearrow 4}{2x^2-x+3}}{\underset{\searrow +0}{x-1}}=+\infty$$

В силу того, что односторонние пределы равны бесконечности, то прямая $x=1$ является ***вертикальной асимптотой***. Для нахождения наклонной асимптоты $\boxed{y=kx+b}$ вычислим параметры этой прямой

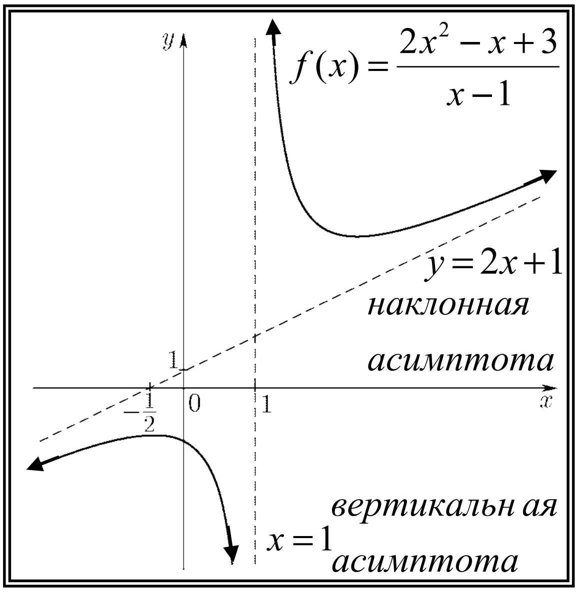
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\begin{matrix}\div x^2\\ = \\ \div x^2\end{matrix}\text{(см. п. 14.4, }\textbf{\textit{14}}\text{)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overset{\nearrow 2}{2-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}}+\overset{\nwarrow}{\frac{3}{x^2}}}}{\underset{\searrow 1}{1-\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x}}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-x+3}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{2x^2}-x+3-\cancel{2x^2}+2x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+3}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\begin{matrix}\div x\\ = \\ \div x\end{matrix}\text{(см. п. 14.4, }\textbf{\textit{14}}\text{)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overset{\nearrow 1}{1+\frac{3}{x}}}{\underset{\searrow 1}{1-\frac{1}{x}}}=1.$$

Таким образом, прямая $\boxed{y=kx+b=2x+1}$ представляет собой наклонную асимптоту для графика функции $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x-1}$ (см. рис.)



23.5. *Полная схема исследования функции с помощью производных*

Из изложенного в **_22_** и **_23_** материала следует ***схема*** *исследования функции с помощью производных*:

1. Находят область определения функции. При наличии точек разрыва II рода изучают поведение функции в их малой окрестности, т.е. вычисляют лево- и правосторонние пределы. При задании функции $f(x)$ мультианалитическим способом вычисляют лево- и правосторонние пределы для граничных точек интервалов, на которых функция описывается разными формулами.

2. Находят точки пересечения с координатными осями.

3. Определяют чётная, нёчетная или общего вида данная функция.

4. Определяют периодическая или непериодическая данная функция.

5. Находят критические точки, решая уравнение $\boxed{f'(x)=0}$, и определяют точки, в которых первая производная функции не существует. Точки откладывают на числовой оси и определяют знак первой производной на каждом интервале, определяя тем самым интервалы возрастания ($\boxed{f'(x)>0}$) и убывания ($\boxed{f'(x)<0}$) функции. Используя первый достаточный признак существования экстремума, находят точки экстремума и вычисляют значение функции в этих точках.

6. Находят точки подозрительные на перегиб путём решения уравнение $\boxed{f''(x)=0}$; определяют точки, в которых вторая производная функции не существует. Точки откладывают на числовой оси и определяют знак второй производной на каждом интервале, определяя тем самым интервалы вогнутости ($\boxed{f''(x)>0}$) и интервалы выпуклости ($\boxed{f''(x)<0}$) функции. Используя достаточный признак существования точки перегиба, находят точки перегиба и вычисляют значение функции в этих точках.

7. Находят асимптоты графика функции.

8. Результаты исследования заносят в сводную таблицу (см. ниже ***Пример 8***).

9. По данным таблицы строят схематичный график функции.

○ *При нахождении области определения функции* $f(x)$ *надо помнить о выражениях, которые не имеют смысла на множестве действительных чисел*:

– *нельзя делить на нуль*, поэтому выражение, стоящее в знаменателе дроби, не должно равняться нулю;

– *нельзя извлекать корень чётной степени из отрицательного числа*, поэтому выражение, стоящее под корнем *чётной* степени, должно быть неотрицательным (≥ 0);

– *основание логарифмической функции должно быть строго положительным и не равным единице*;

– *выражение, стоящее под логарифмом*, должно быть *строго положительным*;

– выражение, *стоящее под знаком* $\arcsin$ *или* $\arccos$, *по модулю не должно превышать единицу* (≤ 1). ○

Пример 8. Исследовать и построить схематичный график функции $f(x)=xe^x$.

Используя *схему исследования графика функции* с помощью производных, найдём:

1. $D(y): x\in R$.

2. Найдём точки пересечения графика функции с координатными осями

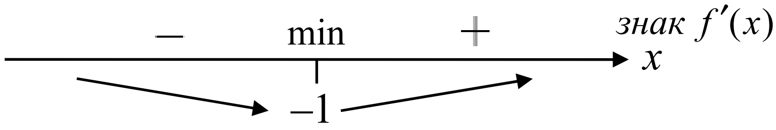
Ox: $f(x)=0 \Rightarrow xe^x=0 \Rightarrow x=0$, т.е. $O(0;0)$ – точка пересечения с осью абсцисс;

Oy: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=0e^0=0$, т.е. $O(0;0)$ – точка пересечения с осью ординат.

3. Вычислим $f(-x)=-xe^{-x}\neq \pm f(x)$ – функция общего вида.

4. Функция непериодическая (*периодическими* среди элементарных функций являются функции: $\sin x$, $\cos x$, tgx и $ctgx$).

5. Найдём первую производную функции $f'(x)=(1+x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдём критические точки, решая уравнение $f'(x)=(1+x)e^x=0 \Rightarrow x=-1$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак первой производной на каждом интервале



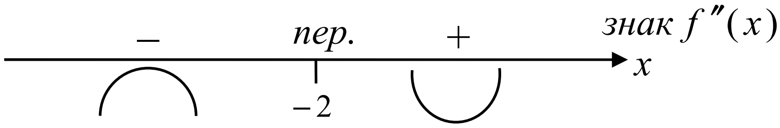
Из рисунка видно, что

$$f(x)\downarrow \forall x\in(-\infty;-1) \text{ и } f(x)\uparrow \forall x\in(-1;\infty).$$

Так как при переходе слева направо через точку $x=-1$ первая производная меняет свой знак с “–” на “+”, то в точке наблюдается минимум. Вычислим значение функции в точке минимума

$$f_{\min}(-1)=-1\cdot e^{-1}\approx -0{,}37\,.$$

6. Найдём вторую производную функции $f''(x)=(2+x)e^x$, которая существует на всей числовой оси, следовательно, найдём точки, подозрительные на перегиб, решая уравнение $f''(x)=(2+x)\,e^x=0 \Rightarrow x=-2$. Отложим найденную точку на числовой оси и определим знак второй производной на каждом интервале



Из рисунка видно, что

$$f(x)\cap \forall x\in(-\infty;-2) \text{ и } f(x)\cup \forall x\in(-2;\infty).$$

Так как при переходе слева направо через точку $x=-2$ вторая производная меняет свой знак, то в этой точке наблюдается перегиб. Вычислим значение функции в точке перегиба $f_{пер}(-2)=-2\cdot e^{-2}\approx -0{,}27$.

7. Найдём асимптоты графика функции, для чего вычислим угловой коэффициент прямой

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\,e^x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^x=\begin{cases}\infty, & при\ \ x\to+\infty\\ 0, & при\ \ x\to-\infty\end{cases}.$$

Таким образом, при $x\to+\infty$ асимптот нет, а при $x\to-\infty$ возможна горизонтальная асимптота. Вычислим параметр

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\,x)=\lim_{x\to-\infty}(x\,e^x-0\cdot x)=0\,.$$

График заданной функции имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

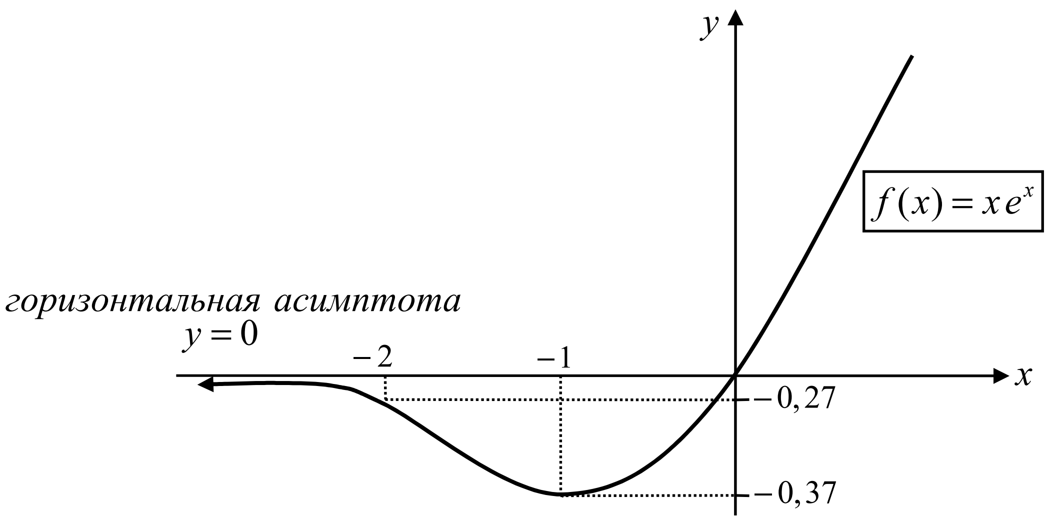
<u>8</u>. Построим сводную таблицу

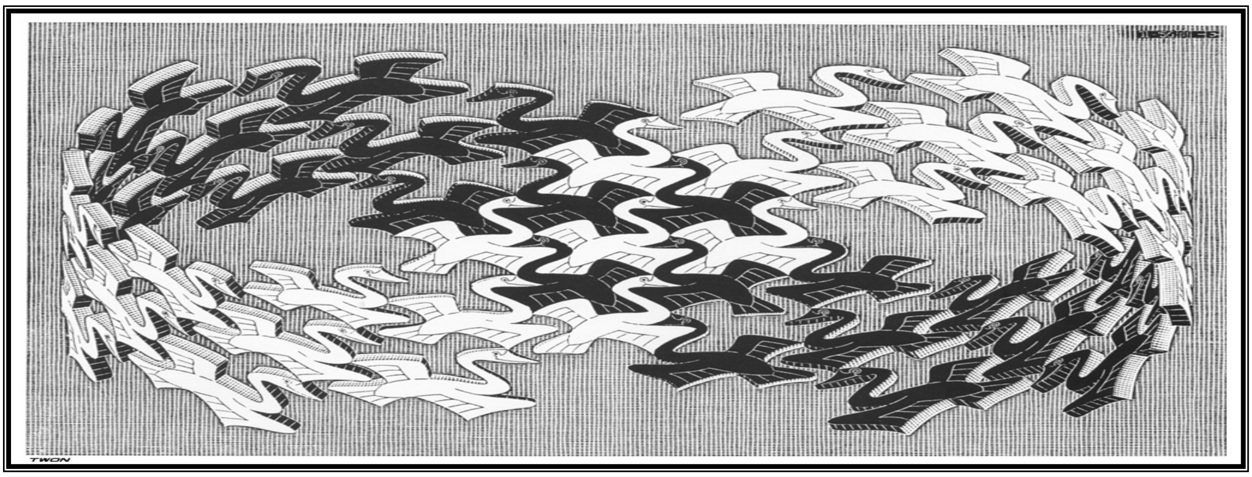
		пер.		min	
Интервал	$-\infty; -2$	-2	$-2; -1$	-1	$-1; \infty$
$f'(x)$	$- < 0$ $\downarrow$		$- < 0$ $\downarrow$	0	$+ > 0$ $\uparrow$
$f''(x)$	$- < 0$ $\cap$	0	$+ > 0$ $\cup$		$+ > 0$ $\cup$
$f(x)$	$\downarrow$ $\cap$	$\approx -0{,}27$	$\downarrow$ $\cup$	$\approx -0{,}37$	$\uparrow$ $\cup$

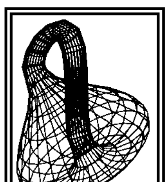
$O(0;\,0)$ – точка пересечения с координатными осями.

$y = 0$ – *горизонтальная асимптота*.

<u>9</u>. Построим схематичный график функции, выбрав по координатным осям разные масштабы измерения:







Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант 1

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\sqrt{3x^2-x}$; б) $f(x)=\ln(x+3)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt[3]{x})$; б) $y=3^{\frac{tg(2x)}{x}}+\arcsin\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$;

в) $y=(3x-1)^{\sqrt[5]{2x}}$; г) $y=e^{x-5x^2}\,ctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$;

д) $y=\sqrt[3]{arctg\left(5t^2-\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)}$; е) $x^2y+xy^2=2$; ж) $\begin{cases} y=e^{3t}\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ x=e^{3t}\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y^2=\dfrac{x^2}{2a-x}$, $x_0=0$; б) $\begin{cases} x=2\sin^3 t \\ y=2\cos^3 t \end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\ln(x+4)$, $x_0=0$; б) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^3 \end{cases}$; в) $y\pm 3x=2^y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin(4x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\ln\left(tg\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(2x))^{-\frac{3}{x^2}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=x^3-3x^2.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант 2

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}$; б) $f(x)=\sin(2x+1)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\frac{a^2}{2}\ln\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; б) $y=2^{\arcsin\sqrt{x}}+\sqrt[5]{\frac{4-x}{2x}}$;

в) $y=\left(x^2+1\right)^{\cos(2x)}$; г) $y=e^{\sqrt{t+1}}\cdot\sqrt[3]{tg\left(\frac{t}{9}\right)}$;

д) $y=\left(\arccos\sqrt{\pi^3-4t^2}\right)^{10}$; е) $xy=arctg\left(\frac{x}{y}\right)$; ж) $\begin{cases} x=t(1-\sin t) \\ y=t\cos t \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=x^3-2x^2+1,\ x_0=2$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\ t_0=\frac{\pi}{3}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\frac{4x+7}{2x+3},\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=e^{-t} \end{cases}$; в) $3y-3x=2^y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(10x)}{e^{x^2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\ln(ctgx))$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-ctgx\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{tg\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{\left(x^2-2\right)^2}{8}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **<u>3</u>**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; б) $f(x)=3\sin(2x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=5\ln^3(ax+b)-\sqrt[5]{(1-3x)^2}$; б) $y=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}+3^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$;

в) $y=(\ln(x+3))^{2x^3}$; г) $y=\sqrt{\cos(3x)}\cdot\ln\left(\dfrac{2x-1}{2}\right)$;

д) $y=\dfrac{\arccos\left(\pi^6-t^2\right)}{t-1}$; е) $arctg(x+y)=x$; ж) $\begin{cases}y=t-arcctgt\\x=\ln\left(1+t^2\right)\end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-6$, $x_0=4$; б) $\begin{cases}x=2t-t^2\\y=3t-t^3\end{cases}$, $t_0=1$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\sin(2x)+\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases}x=t^3-2t\\y=t^2\end{cases}$; в) $\sin y=x+y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\pi}{x\,ctg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(2x)}{\cos(7x)-\cos(3x)}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\ln(1-x)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{4-x}{x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант <u>4</u>

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$; б) $y=5\cos(2x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\sqrt[3]{2e^{x}}-2^{x}+1+\ln^{5}\left(\dfrac{1}{x}\right)$; б) $y=\dfrac{x^{3}}{\sqrt{1+x^{2}}}+4^{\cos^{2}(5x)}$;

в) $y=(tg(2x))^{\sqrt{x^{2}+1}}$; г) $y=\dfrac{arcctg(3t^{2})}{\pi-t}$;

д) $y=(\sin(0.8x))^{3}\cdot\sqrt[5]{3x-2x^{2}}$; е) $e^{y}=x+y$; ж) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\dfrac{t}{t+1} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=x^{2}-3x-1$, $x_{0}=4$; б) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$, $t_{0}=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$, $x_{0}=2$; б) $\begin{cases} x=t^{2} \\ y=t^{3}-8t \end{cases}$; в) $\cos y=x+y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin x)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^{2}-5x}{\sin(3x)}$; в) $\lim\limits_{x\to0}(tg(5x)\ln(tg(5x)))$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to0}(ctg(3x))^{\sin(3x)}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{2x}{x+2}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант <u>5</u>

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *<u>определению производной</u>*: а) $f(x) = 3x^2 + 1$; б) $f(x) = \cos(2x+1)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y = \sin 3x + \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{1+2x}\right)$; б) $y = \dfrac{x-1}{\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)} + 3^{arctg\left(\frac{2}{x}\right)}$;

в) $y = \left(arctg\left(\sqrt{x}\right)\right)^{x^2}$; г) $y = \cos(5x) \cdot \ln(3-2x)$;

д) $y = \sqrt{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2t\right)\arccos\left(t^4\right)}$; е) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = a$; ж) $\begin{cases} y = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ x = \dfrac{at^2}{1+t^3} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y = x^3$, $x_0 = 2$; б) $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y^2 = \dfrac{x^2}{2a-x}$, $x_0 = 1$; б) $\begin{cases} x = 2\sin^3 t \\ y = 2\cos^3 t \end{cases}$; в) $\sin(x+y) = y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tg\,x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x) = \frac{x}{x-2}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант <u>**6**</u>

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=2x^3-x+3$; б) $f(x)=3\sin(5x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\ln(2x-7)+\sqrt{xe^x+x}$; б) $y=\dfrac{x^8}{8\left(1-x^2\right)^4}+4^{ctg\left(\frac{3}{x}\right)}$;

в) $y=(\sin(8x))^{3x-1}$; г) $y=x^2\arcsin(\ln(3x))$;

д) $y=\sqrt[7]{7\,arctg^{\,2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)-t^3\right)}$; е) $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$; ж) $\begin{cases}x=e^{-t}\sin(2t)\\ y=e^{t}\cos(2t)\end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=x^3$, $x_0=1$; б) $\begin{cases}x=2e^{t}\\ y=e^{-t}\end{cases}$, $t_0=0$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\ln(2x+7)$, $x_0=0$; б) $\begin{cases}x=t^2\\ y=2t^3+6\end{cases}$; в) $\cos(x+y)=x+2y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\left(tg(x+1)\ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{tg(2x)}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}+x\right)^{\frac{1}{3x}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x}{8}-\frac{2}{x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант 7

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x) = x^2 - 9x + 2$; б) $f(x) = 2\cos(3x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y = \frac{1}{5}\sqrt{\sin(\sqrt{x}) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)} + \ln(3 - x)$; б) $y = \frac{\sin(ax)}{\cos(\sqrt{bx})} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2-\frac{1}{x}}$;

в) $y = \left(x^3 + 2x\right)^{\sqrt{3x}}$; г) $y = e^{x^2 - x} \cdot arctg^2(13 - 5x)$;

д) $y = \arcsin^5\left(4t^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$; е) $\ln y = \frac{x}{y} - c$; ж) $\begin{cases} x = 2\ln(ctg\, t) + 1 \\ y = tg\, t + ctg\, t \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y = \frac{3}{x}$, $x_0 = -2$; б) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$, $t_0 = 0$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y = \frac{\ln(x-2)}{x-2}$, $x_0 = 1$; б) $\begin{cases} x = 3e^{2t} \\ y = e^{5t} \end{cases}$; в) $arctg\, y = x + y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2 + x - 1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{tg(\pi(2+x))}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}(\sin(x+1)\ln(x+1))$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{5}{tgx}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x - 1\right)}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **<u>8</u>**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *<u>определению производной</u>*: а) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; б) $f(x)=\ln(5x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=5e^{-x}+\cos\left(x^2\right)+\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x}}$; б) $y=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)+\sin(1+2x)$;

в) $y=(3-2x)^{x^3}$; г) $y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right)\cdot arctg\left(\sqrt{x}\right)$;

д) $y=\dfrac{arcctg^2(t-\pi)}{t^2}$; е) $x^2y^2+5xy+4=0$; ж) $\begin{cases} y=\sqrt[3]{t^3-t} \\ x=2+\dfrac{1}{t} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$, $x_0=4$; б) $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $t_0=-\dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=x^3e^{4x+3}$, $x_0=1$; б) $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=2\sin t \end{cases}$; в) $5\arcsin y=x+y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(5x)}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-\cos x}{1-\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\left(4-x^2\right)tg\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **9**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно определе-нию производной: а) $f(x)=\dfrac{4}{x-1}$; б) $f(x)=3\sin(5x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=(3-2\sin(4x))^2+\dfrac{6}{x+\sqrt{x}}$; б) $y=\ln\left(\dfrac{tg\left(\dfrac{x}{2}\right)+1}{3-x}\right)+2^{1-\frac{1}{x}}$;

в) $y=\left(arctg\left(\sqrt{x}\right)\right)^{1-x}$; г) $y=\sqrt[3]{x-\sqrt{8x^2}}\,e^{-x+2}$;

д) $y=\dfrac{\arccos(3\pi-2t)}{\pi t^2}$; е) $2^x=2^{x+y}-2^y$; ж) $\begin{cases} y=tg(2t) \\ x=\cos^2\left(\sqrt{t}\right) \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=\dfrac{1}{2}x^2+1,\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=8\sin^3 t \\ y=8\cos^3 t \end{cases},\ t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=x^5\ln x\ ,\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=2\cos t \end{cases}$; в) $\ln(x+y)=3x$;

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{\ln(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arccos x-\dfrac{\pi}{2}\right)ctgx$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2^x-1}-\dfrac{1}{tgx}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=x-\frac{\pi}{x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **10**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+10}$;

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\dfrac{1}{2x}+\sqrt[3]{4-5x^2}+e^{-x}$; б) $y=\ln\dfrac{1+\sin(x^2)}{1-\sin(x^2)}+5^{\frac{x}{2}}$;

в) $y=\left(1-x^2\right)^{\arccos\left(x^3\right)}$; г) $y=\cos^3(5x)\ln\left(\sqrt{x}\right)$;

д) $y=arctg^6\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+t^2\right)$; е) $y^3+3y+2ax=0$; ж) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{t-1} \\ x=\sqrt{2-t^2} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=x^2-4x+5+1$, $x_0=0$; б) $\begin{cases} x=\sin^2 t \\ y=\cos^2 t \end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=(x+3)\ln(x+3)$, $x_0=1$; б) $\begin{cases} x=tg\,t \\ y=t \end{cases}$; в) $\ln(2x+y)=y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin(3x)\ln\left(tg(3x)\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\,x\right)^{2x-\pi}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x+4}{x-2}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **11**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$; б) $f(x)=\sin(3x+1)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\dfrac{e^x}{x^2}-\sqrt[4]{9x^5-x}$; б) $y=\ln\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{\sin x}{8}}$;

в) $y=\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)^{arctg\ x}$; г) $y=\sin^6(5x-12)\cdot\dfrac{7}{x-1}$;

д) $y=\dfrac{t^2}{arcctg\left(\sqrt{t-\pi^3}\right)}$; е) $x\sin y+\cos 2y=\cos y$; ж) $\begin{cases}x=\ln\left(3-t^2\right)\\ y=t^2+e^{-t}\end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=x^2-4x+5$, $x_0=4$; б) $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$, $t_0=2$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=(2x+1)\cos x$, $x_0=\pi$; б) $\begin{cases}x=\sqrt{t}+3\\ y=t^2\end{cases}$; в) $tg(x+y)=2x$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tgx}{tg(5x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin(\pi x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(2x\ln x)$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=x+\frac{1}{x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **12**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; б) $f(x)=\sin(5x-1)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\sqrt[11]{9+\sqrt[5]{x^9}}+e^{-x+2}$; б) $y=\dfrac{1}{x}(1+\cos(2x))+\ln\left(\sqrt[5]{\dfrac{2}{x^3}}\right)$;

в) $y=(x^2+3)^{\sqrt{x}}$. г) $y=5^{tg(3x-1)}\ln(2x-x^2)$;

д) $y=arcctg\left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)}{\pi^2-t}\right)$; е) $y^2=a\cdot tg^3x\cdot(\cos x)^{-1}$; ж) $\begin{cases}x=e^{-t}+t\\ y=e^{2t}+\sin\left(\sqrt{t}\right)\end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=(2+x)^3$, $x_0=0$; б) $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos(2t)\end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=x\ln^2 x$, $x_0=e$; б) $\begin{cases}x=5\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}$; в) $2x-y=2^y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(tgx)}{\cos(2x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(tgx\ln(\sin x))$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{\sin(2x)}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg\,x)^{\sin x}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{4}{2-x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **13**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=x^3+5x$; б) $f(x)=\cos(2x+3)$;

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=e^{x^2-\sin(3x)+\frac{1}{2}\ln(x^2)}+\sqrt[3]{3-2x}$; б) $y=\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x}\right)+\arcsin\left(\frac{3}{x}\right)$;

в) $y=(ctg(2x))^{x^3}$; г) $y=10^{-b^2t+4}\log_3(t^2-1)$;

д) $y=arcctg^4(\pi^3-x^2)$; е) $ye^x+5=xy$; ж) $\begin{cases} y=\cos^2 t \\ x=t^2 \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y^2=(4+x)^3,\ x_0=-4$; б) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=e^{3t} \end{cases},\ t_0=0$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\cos 2x+\sin x,\ x_0=\pi$; б) $\begin{cases} x=\cos 2t+1 \\ y=\sin 2t \end{cases}$; в) $6x^2+y^2=4-y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg(5x)}{tg(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln(9-2x^2)}{\sin(2\pi x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-ctgx\right)$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{3x-2}{x+1}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **14**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=5x^2-x+1$; б) $f(x)=5\cos(3x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\sin^3\left(x^2+3x+1\right)+\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{8}\ln\left(\dfrac{1+\cos(2x)}{1-\cos(2x)}\right)+7^{3-x}$;

в) $y=(3-x)^{\sqrt[3]{x}}$; г) $y=\sqrt[3]{x^2-4x}\;e^{x^3+1}$;

д) $y=\left(\arcsin\left(\dfrac{\pi^2-2t}{t}\right)\right)^6$; е) $tg\left(\dfrac{y}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$; ж) $\begin{cases} y=t-1 \\ x=tg^2 t \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y^2=4-x,\ y_0=-2$; б) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=2x^3-5^x,\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=arctg\,t \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$; в) $x^2+2x+y^2-8y+3=0$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(5x)}{tg(3x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\,x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{4}{x^2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg\,x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x}{x-4}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **15**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=4x+5$; б) $f(x)=10\ln(2x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)+10^{-\sqrt{x}}$; б) $y=\cos^2\left(\dfrac{x}{5}\right)+\dfrac{\sin(5x)}{1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$;

в) $y=(4-8x)^{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$; г) $y=e^{-3x}\operatorname{cosec}^2(6x)$;

д) $y=arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; е) $x^2y+xy^2+y^3=0$; ж) $\begin{cases} y=t^3+t \\ x=e^{t^2} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y^2=4-x,\ x_0=2$; б) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=1-4t^2 \end{cases},\ t_0=1$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=2^x+x^2,\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=e^t+1 \\ y=e^{3t} \end{cases}$; в) $x^2-8x+y^2-2y=0$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя.*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{e^{3x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$; в) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x\ln x)$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{x-\dfrac{\pi}{2}}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to1}\left(tg\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{4x}{4+x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **16**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=x^2-2x+7$; б) $f(x)=\ln(3x+1)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=3^{tg^4\left(x^2+5x\right)}+\ln\left(\dfrac{2}{x}\right)$; б) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1-x^2}{2x+1}}+\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$;

в) $y=\left(x^2+1\right)^{\sqrt{2x+1}}$; г) $y=\sqrt[3]{\cos(7x)}\,e^{9-x^3}$;

д) $y=\dfrac{arcctg\left(t^2-\pi^3\right)}{\sqrt{\pi}+t^4}$; е) $y^2-2xy+b^2=0$; ж) $\begin{cases} x=\arccos(2t) \\ y=\arcsin(3t+1) \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=4x-x^2$, $x_0=4$; б) $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2-2 \end{cases}$, $t_0=1$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\cos 2x+\sin x$, $x_0=\pi$; б) $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=e^{5t}+3 \end{cases}$; в) $\dfrac{x}{y}+\sqrt{y}=2$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg\,x+3}{tg(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin(5x)-\sin(3x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{8}{x-4}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **17**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$; б) $f(x)=\ln(3x-2)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=5^{\frac{1-2x}{x}}+\sqrt[7]{\dfrac{5}{x^2}}$; б) $y=\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^5+\ln\left(\dfrac{3x}{2}\right)$;

в) $y=\left(x^2+5x\right)^{\sin\left(\sqrt{x}\right)}$; г) $y=tg^3(2x)\cos^2(3x)$;

д) $y=4^{arcctg\left(\sqrt{t^2-1}\right)}$; е) $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$; ж) $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}\,t}{1+t^2} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=4x-x^2,\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=\dfrac{t^3}{3}-t \end{cases},\ t_0=3$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\left(1+x^2\right)arcctgx,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$; б) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^2+1 \end{cases}$; в) $2^x+2^y=y\ln 2$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^{5x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln(\sin x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(1-x^2\right)tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2x-2}-\dfrac{1}{3^{x-1}-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}x^{2x}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x^2}{x-9}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **18**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; б) $f(x)=2\ln(7x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\sqrt{2-x^2+\sqrt{x}}+e^{-x+1}$; б) $y=\dfrac{\sin^3 x}{1+2^x}+\ln\left(\dfrac{1-8x}{3}\right)$;

в) $y=\left(ctg\left(\dfrac{x}{4}\right)\right)^{3-x^2}$; г) $y=10^{\sqrt{x+2x^2}}\cos\left(\dfrac{10}{x}\right)$;

д) $y=arcctg^3\left(\dfrac{3\pi^2+t^2}{\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}\right)$; е) $x^y=y^x$; ж) $\begin{cases} x=a(\cos t-\sin t) \\ y=a(\sin t+\cos t) \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $yx=4,\ x_0=-4$; б) $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases},\ t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=arcctg(5x+1),\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=t^2 \\ y=\ln t \end{cases}$; в) $\sqrt[3]{y}-xy=5$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(4x))}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}((\pi-2x)\,tgx)$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2^{x-1}-1}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=x+\frac{2}{x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **19**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=\dfrac{5}{x+4}$; б) $f(x)=5\cos(3x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\ln\left(\sqrt[3]{4-x^2}+x\right)+2^{1-x}$; б) $y=\dfrac{tg\left(\sqrt{x}\right)}{3-x^2}+ctg^3\left(\dfrac{4}{x}\right)$;

в) $y=\left(x^2+5x\right)^{\ln\left(x^3\right)}$; г) $y=e^{\ln\left(t^2\right)}\sqrt[3]{\cos(8t)}$;

д) $y=\arcsin\left(e^{x^2}\right)$; е) $y\,tgx-ctg(x-y)=0$; ж) $\begin{cases}x=\sin^2 t\\ y=\cos(2t)\end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $yx=4$, $x_0=1$; б) $\begin{cases}x=t\ \cos t\\ y=t\ \sin t\end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=ctg(2x)+tg(2x)$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$; б) $\begin{cases}x=\sqrt[3]{t}\\ y=t^3+1\end{cases}$; в) $e^x+e^y=e^{x+y}$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^{7x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(2x-\pi)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\arcsin(1-x)\,ctg(1-x)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin(2x)\right)^{tg\,x}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x+3}{x+5}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **20**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$; б) $f(x)=2\sin(5x)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\sqrt[5]{\left(1+e^{\sqrt{x}}\right)^3}+tg^2(3x)$; б) $y=\ln\left(\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3-x^2}$;

в) $y=\left(ctg(5x)\right)^{x^2}$; г) $y=a\sqrt{13-12t}\ e^{10-\sqrt{t^6}}$;

д) $y=\ln\left(\arcsin\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)\right)$; е) $xy=e^{2x+y}$; ж) $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=t^3-t\end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=\sin x,\ x_0=\pi$; б) $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases},\ t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\left(x^2+1\right)e^{3x},\ x_0=0$; б) $\begin{cases}x=\cos(3t)\\ y=\sin(3t)\end{cases}$; в) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg(5x)}{tgx+2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{5x}-2^x}{x-\sin(9x)}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\ln x\ \ln(x-1)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{1}{4\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(tg(3x)\right)^{\sin x}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x-3}{x-4}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант <u>21</u>

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=3x^2+x-1$; б) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\left(3-5^x\right)^3+\sqrt{tg\left(\sqrt{x}\right)}$; б) $y=\ln\left(\cos\left(\dfrac{2x+4}{x+1}\right)\right)+\cos\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$;

в) $y=\left(arcctg\left(3x\right)\right)^{x+4}$; г) $y=e^{9-5x}\,\sec^2\left(\dfrac{6x}{7}\right)$;

д) $y=\sqrt[3]{\left(\arccos\left(t^3-\pi^4\right)\right)^4}$; е) $\sin y=x\,y^2$; ж) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t^2-t} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=\dfrac{8}{4+x^2}$, $x_0=2$; б) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\dfrac{\ln\left(x-2\right)}{x+2}$, $x_0=1$; б) $\begin{cases} x=\cos\left(2t\right) \\ y=5\sin\left(2t\right) \end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{4}$; в) $\dfrac{y}{x}+\sqrt{y}=2$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x+1\right)^2}{e^{3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin\left(3x\right)-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{tg\,x}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x^3}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x+2}{x-1}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **<u>22</u>**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно <u>*определению производной*</u>: а) $f(x)=x^3+2x+3$; б) $f(x)=\ln(5x+1)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\sqrt[3]{2-x^6}+\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$; б) $y=\dfrac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1+tg(2x)}}+\sqrt[4]{\dfrac{1-2x}{3}}$;

в) $y=\left(ctg\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{tg\left(3x^2\right)}$; г) $y=8^{3-2t}\sqrt{\cos(t/6)}$;

д) $y=\arcsin\left(\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)$; е) $\cos(xy)=tg(x+y)$; ж) $\begin{cases} y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ x=\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y^2=x^3$, $x_0=1$; б) $\begin{cases} x=1-e^{2t} \\ y=e^t \end{cases}$, $t_0=0$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=(4x+1)\sin x,\ x_0=0$; б) $\begin{cases} x=ctg\,t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$; в) $\ln x+y^3=3xy^2$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\sin x)+1}{\ln(\sin(3x))}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^{7x}}{tg(3x)-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\ ctgx)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{x^2}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^x$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x-5}{2x}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант **23**

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\dfrac{1}{3x+2}$; б) $f(x)=5\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\ln(\sin(2x))-\dfrac{1}{2}\cos^2(3x)$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x}{2-3x^2}+3^{\sqrt{x}}}$;

в) $y=\left(\sqrt[4]{3-x^3}\right)^{\ln(8x)}$; г) $y=e^{\sqrt{1-2t}}\,\dfrac{9}{t-1}$;

д) $y=arctg\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)$; е) $\dfrac{x}{y}=xy^2-b^2$; ж) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y^2=x^3$, $x_0=0$; б) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t^2 \end{cases}$, $t_0=0$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=(2x+1)\sin(3x)$, $x_0=0$; б) $\begin{cases} x=3\sin t \\ y=2tg\,t \end{cases}$; в) $x^4-xy+y^4=1$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos(3x))+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin(3x)-\sin(5x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\,tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos(2x)}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{x+\ln x}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x-3}{4(x+5)}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант 24

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$; б) $f(x)=5\ln(3x+2)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\dfrac{x^3}{3}\,arcctg(2x)-\ln(x^2+1)$; б) $y=\sqrt[5]{\dfrac{2-3x^2}{x}}+10^{-8x+1}$;

в) $y=\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^{2-x^3}$; г) $y=\sqrt[3]{\operatorname{cosec}^2 x}\ \operatorname{tg}\left(\sqrt[3]{2x}\right)$;

д) $y=\ln\left(\cos\left(e^{arccos(\sqrt{t})}\right)\right)$; е) $2xy^2=tg(y-x)$; ж) $\begin{cases} y=e^{2t} \\ x=e^{-t}+\sqrt{t} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=\dfrac{x^3}{3}$, $x_0=-1$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{3}\ \cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\ln^2 x+\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$; б) $\begin{cases} x=arctg\,t \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$; в) $y\sin x=\ln y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln^2(3x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{tgx+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-\cos x)\,ctgx\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\dfrac{\cos x}{x-2\pi}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x^2-1}}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=\frac{x+6}{3x-2}.$$

Задания для самостоятельного решения

Дифференциальное исчисление

Вариант 25

1. Найти *первые производные* указанных функций, согласно *определению производной*: а) $f(x)=x^2-3x$; б) $f(x)=2\cos(x-1)$.

2. *Продифференцировать* функции.

а) $y=\dfrac{1}{2x}+\sqrt[3]{4-5x^2}+e^{-x}$; б) $y=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}+3^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$;

в) $y=\cos^2\left(\dfrac{x}{5}\right)+\dfrac{\sin(5x)}{1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$; г) $y=\sqrt[3]{x-\sqrt{8}x^2}\,e^{-x+2}$;

д) $y=arcctg\left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)}{\pi^2-t}\right)$; е) $y^2-2xy+b^2=0$; ж) $\begin{cases} x=\ln(3-t^2) \\ y=t^2+e^{-t} \end{cases}$.

3. Составить *уравнения касательной* и *нормали* к указанным линиям в указанной точке, или при указанном значении параметра:

а) $y=x^3,\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=2e^{t} \\ y=e^{-t} \end{cases},\ t_0=0$.

4. Найти *производную второго порядка* от функций.

а) $y=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\ x_0=1$; б) $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$; в) $3y-3x=2^y$.

5. Вычислить пределы с помощью *правила Лопиталя*.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin(2\pi x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arccos x-\dfrac{\pi}{2}\right)ctgx$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(ctg(3x))^{\sin(3x)}$.

6. Провести *полное исследование и построить график функции*

$$f(x)=x-\frac{2}{x}.$$

Список использованных источников

1. Бермант А.Ф. Курс математического анализа. Ч.1. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1959. – 466 с.
2. Крейн С.Г., Ушакова В.Н. Математический анализ элементарных функций. – Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры. – 1963. – 168 с.
3. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1964. – 683 с.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – Москва: Наука. – 1967. – 736 с.
5. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – Москва: Наука. – 1967. – 704 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – Москва: Наука. – 1969. – 608 с.
7. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – Москва: Высшая школа. – 1972. – 640 с.
8. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. – Минск: Вышэйшая школа. – 1973. – 350 с.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. – Москва: Наука. – 1974. – 479 с.
10. Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С., Мордкович А.Г. Математический анализ. Дифференциальное исчисление. – Москва: Просвещение. – 1978. – 160 с.
11. Высшая математика / П.Ф. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Киев: Вища шк. – 1987. – 552 с.
12. Зайцев И.А. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1991. – 400 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1. – Санкт-Петербург: Мифрил. – 1996. – 416 с.
14. Шипачев В.С. Высшая математика. – Москва: Высшая школа. – 1998. – 479 с.
15. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1998. – 408 с.
16. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. школа. – 1999. – 695 с.
17. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу. Ч.1. – Москва: МФТИ. – 2000. – 359 с.
18. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2001. – 592 с.
19. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математи-

ки. – Москва: ООО “Издательство Астрель”; ООО “Издательство АСТ”. – 2001. – 656 с.

20. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. – Москва: ООО “ТК Велби”. – 2002. – 592 с.

21. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

22. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. – Москва: МЦНМО. – 2002. – 664 с.

23. Гурова З.И., Каролинская С.Н., Осипова А.П. Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2002. – 352 с.

24. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика. Ч.2. Основы математического анализа. – Минск: Амалфея. – 2003. – 352 с.

25. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. – Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Дрофа. – 2004. – 512 с.

26. Геворкян П.С. Высшая математика. Основы математического анализа. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2004. – 240 с.

27. Шептухина О.М., Рисковец В.В. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. – Оренбург: ГОУОГУ. – 2004. – 108 с.

28. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 648 с.

29. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – Москва: ФИЗМАТЛИТ. – 2005. – 400 с.

30. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. – Ч.1. – Москва: Айрис-пресс. – 2005. – 288 с.

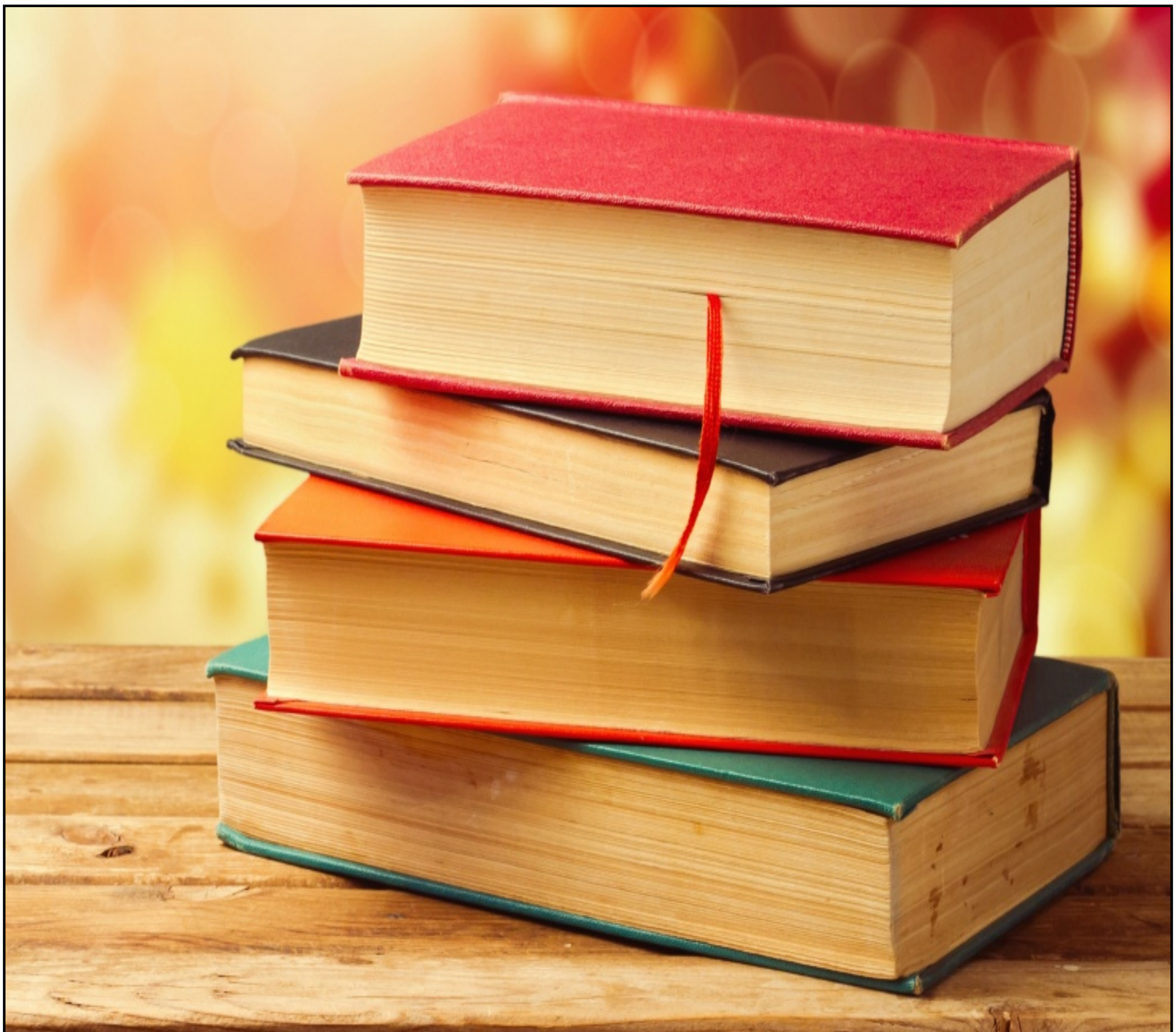
31. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Курс лекций. – Москва: Эксмо. – 2005. – 272 с.

32. Курс высшей математики: Учебное пособие для студентов заочной (дистанционной) формы обучения. Т.1/ В.Г. Зубков, В.А. Ляховский, А.И. Мартыненко, В.Б. Миносцев. – Москва: МИИР. – 2007. – 440 с.

33. Терехов С.В. Фракталы и физика подобия. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 255 с.

34. Терехов С.В., Гусар Г.А. Математический инструментарий для студентов. Т.2. Задачи. – Донецк: Цифровая типография. – 2011. – 511 с.


$E=mc^2$
ГРЫЗТЬ СЮДА
$\lambda = vT$
$S=\int_a^b f(x)dx$
ВЕК ЖИВИ–
ВЕК УЧИСЬ...



Приложение А

Применение математики в физике

В этом дополнении продемонстрируем применение математических методов и приемов для решения задач по физике.

http://electroandi.ru/toe/metod-konturnykh-tokov-reshenie-zadach.html

(Теоретические основы электротехники, *метод контурных токов Кирхгофа*) ***Основные понятия: контурный ток*** − это величина, которая одинакова во всех ветвях заданного контура. Обычно в расчетах они обозначаются двойными индексами, например I_{11}, I_{22} и т.д. ***Действительный ток*** в определенной ветви определяется алгебраической суммой контурных токов, в которую эта ветвь входит. Нахождение действительных токов и есть первоочередная задача метода контурных токов. ***Контурная ЭДС*** − это сумма всех ЭДС, входящих в этот контур. ***Собственным сопротивлением*** контура называется сумма сопротивлений всех ветвей, которые в него входят. ***Общим сопротивлением*** контура называется сопротивление ветви, смежное двум контурам.

Общий план составления уравнений

1 – Выбор *направления действительных токов*.

2 – Выбор *независимых контуров* и *направления контурных токов в них*.

3 – *Определение собственных* и *общих сопротивлений* контуров.

4 – *Составление уравнений* и *нахождение контурных токов*.

5 – *Нахождение действительных токов*

Пример А1. Дана цепь и исходные данные (рис.1).

Выполняем все поэтапно.

1. Произвольно выбираем направления действительных токов I_1-I_6 (рис. 2).

2. Выделяем три контура, а затем указываем направление контурных токов I_{11},I_{22},I_{33}. Мы выберем направление по часовой стрелке (рис. 3).

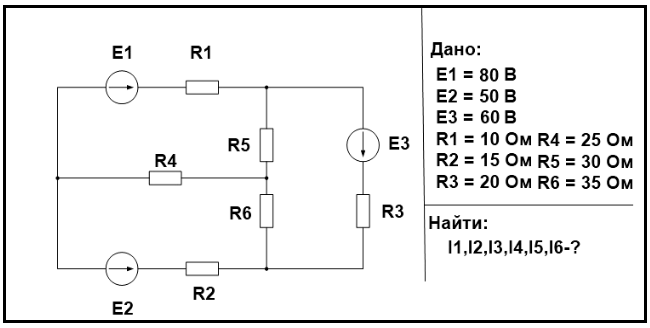


Рис. 1.

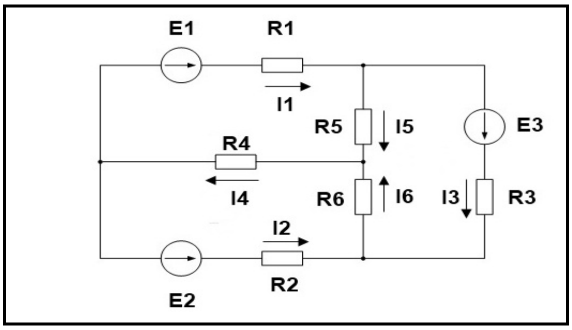


Рис. 2.

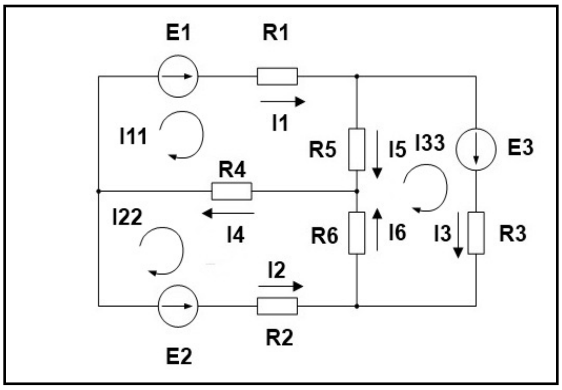


Рис. 3.

3. Определяем собственные сопротивления контуров. Для этого складываем в каждом контуре сопротивления.

$R_{11}=R_1+R_4+R_5=10+25+30= 65$ Ом

$R_{22}=R_2+R_4+R_6=15+25+35 = 75$ Ом.

$R_{33}=R_3+R_5+R_6=20+30+35= 85$ Ом

Затем определяем общие сопротивления, общие сопротивления легко обнаружить, они принадлежат сразу нескольким контурам, например, сопротивление R_4 принадлежит контуру 1 и контуру 2. Поэтому для удобства обозначим такие сопротивления номерами контуров, к которым они принадлежат

$R_{12}=R_{21}=R_4=25$ Ом

$R_{23}=R_{32}=R_6=35$ Ом.

$R_{31}=R_{13}=R_5=30$ Ом

4. Приступаем к основному этапу – составлению системы уравнений контурных токов. Левые части уравнений образованы падениями напряжений в контуре, а в правые − ЭДС источников этого контура. Так как контура у нас три, следовательно, система будет состоять из трех уравнений. Для первого контура уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$I_{11} R_{11}- I_{22} R_{21}- I_{33} R_{31}= E_1.$$

Ток первого контура I_{11}, умножаем на собственное сопротивление R_{11} этого же контура, а затем вычитаем ток I_{22}, умноженный на общее сопротивление первого и второго контуров R_{21} и ток I_{33}, умноженный на общее сопротивление первого и третьего контура R_{31}. Данное выражение будет равняться ЭДС E_1 этого контура. Значение ЭДС берем со знаком “+”, так как направление обхода (по часовой стрелке) совпадает с направление ЭДС, в противном случае нужно было бы брать со знаком “–”. Те же действия проделываем с двумя другими контурами и в итоге получаем систему:

$$\begin{cases} I_{11} R_{11} - I_{22} R_{21} - I_{33} R_{31} = E_1 \\ I_{22} R_{22} - I_{11} R_{12} - I_{33} R_{32} = -E_2 \\ I_{33} R_{33} - I_{11} R_{13} - I_{22} R_{23} = E_3 \end{cases}.$$

В полученную систему подставляем уже известные значения сопротивлений и решаем её (см. **3**, *самостоятельно* решить эту систему любым известным способом).

$$\begin{cases} 65\, I_{11} - 25\, I_{22} - 30\, I_{33} = 80 \\ 75\, I_{22} - 25\, I_{11} - 35\, I_{33} = -50, \\ 85\, I_{33} - 30\, I_{11} - 35\, I_{22} = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{11} = 2{,}726 \\ I_{22} = 1{,}264. \\ I_{33} = 2{,}189 \end{cases}$$

5. Последним этапом находим действительные токи, для этого нужно записать для них выражения. *Контурный ток равен действительному току*, *который принадлежит только этому контуру*. То есть другими словами, если ток протекает только в одном контуре, то он равен контурному току.

$$I_1 = I_{11} = 2{,}726.$$

Но, нужно учитывать направление обхода, например, в данном случае ток I_2 не совпадает с направлением, поэтому берем его со знаком “–”

$$-I_2 = -I_{22} = -1{,}264,$$

$$I_3 = I_{33} = 2{,}189.$$

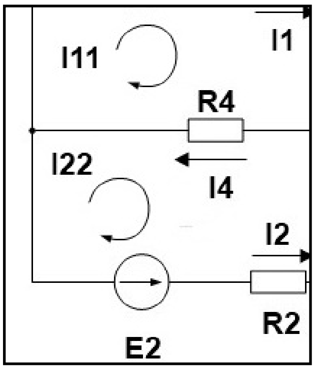


Рис. 4.

Токи, протекающие через общие сопротивления, определяем как алгебраическую сумму контурных токов, учитывая направление обхода. Например, через резистор R_4 протекает ток I_4, его направление совпадает с направлением обхода первого контура и противоположно направлению второго контура (рис. 4). Значит, для него выражение будет выглядеть

$$I_4=I_{11}-I_{22}=1{,}462.$$

А для остальных

$$I_5=I_{11}-I_{33}=0{,}537,$$

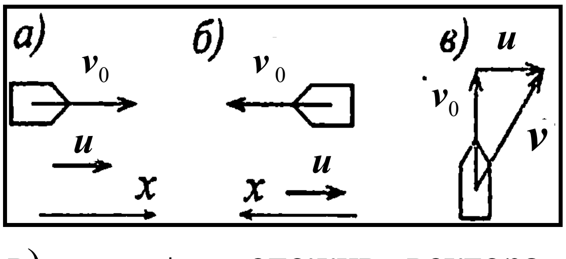
$$I_6=I_{33}-I_{22}=0{,}925.$$

Так решаются задачи *методом контурных токов*.

Все решения к “Сборнику задач по общему курсу физики”
В.С. Волькенштейн. В 2 кн. Кн.1. – М.: Олимп:
ООО “Фирма «Издательство АСТ»”, 1999. – 432 с.

Пример А2. Найти скорость $\boldsymbol{v}$ относительно берега реки: а) лодки, идущей по течению; б) лодки, идущей против течения; в) лодки, идущей под углом $\alpha = 90^\circ$ к течению. Скорость течения реки $\boldsymbol{u} = 1\,\text{м/с}$, скорость лодки относительно воды $\boldsymbol{v}_0 = 2\,\text{м/с}$.

Изобразим в виде рисунка заданные случаи:



а) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u = 3\,\text{м/с}$;

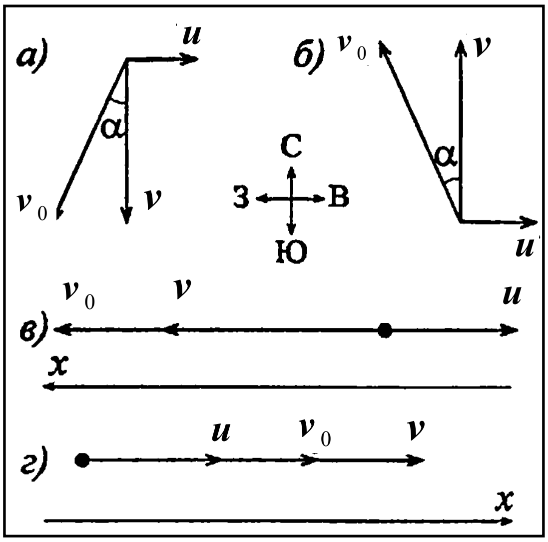
б) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 - u = 1\,\text{м/с}$;

в) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{u}$, сложив вектора по правилу треугольника, получим $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{5}\,\text{м/с} \approx 2{,}24\,\text{м/с}$.

Пример А3. Самолет летит относительно воздуха со скоростью $|\boldsymbol{v}_0| = 800\,\text{км/ч}$. Ветер дует с запада на восток со скоростью $|\boldsymbol{u}| = 15\,\text{м/с}$.

С какой скоростью $v=|\boldsymbol{v}|$ самолет будет двигаться относительно земли и под каким углом α к меридиану держать курс, чтобы перемещение было: а) на юг; б) на север; в) на запад; г) на восток.

Изобразим в виде рисунка заданные случаи:



а) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}$, сложив вектора по правилу треугольника, получим

$$v=\sqrt{v_0^2-u^2}\approx 798{,}18\ \text{км/ч}.$$

где $u=|\boldsymbol{u}|=15\ \text{м/с}=54\ \text{км/ч}$. Из рисунка а) видно, что $v=v_0\cos\alpha$. Отсюда находим

$$\cos\alpha=v/v_0\approx 0{,}998,\ \text{т.е.}\ \alpha\approx 4^{\circ}.$$

Курс на юго-запад.

б) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}$, сложив вектора по правилу треугольника, получим

$$v=\sqrt{v_0^2-u^2}\approx 798{,}18\ \text{км/ч}$$

Из рисунка б) видно, что $v=v_0\cos\alpha$. Отсюда находим

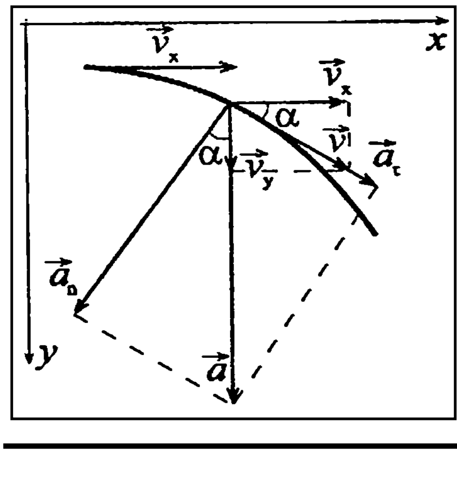
$$\cos\alpha=v/v_0\approx 0{,}998,\ \text{т.е.}\ \alpha\approx 4^{\circ}.$$

Курс на северо-запад.

в) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}$, или в проекции на ось x: $v=v_0-u=746\ \text{км/ч}$. Из рисунка в) видно, что курс на запад.

г) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}$, или в проекции на ось x: $v=v_0+u=854\ \text{км/ч}$. Из рисунка г) видно, что курс на восток.

Пример А4. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x=15\ \text{м/с}$. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения камня через время $t=1\ \text{с}$ после начала движения (см. рис.).



Выбор системы отсчета и направления всех векторов показаны на рисунке. Полное ускорение камня $a=g=9{,}8\ \text{м/с}^2$. По теореме Пифагора полные ускорение $a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$ и скорость $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$. Из рисунка видно, что

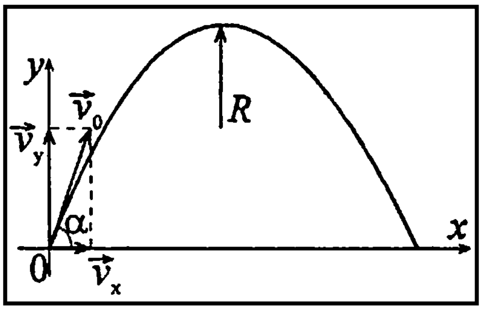
$$\cos\alpha = v_x / v = a_n / g;\quad \sin\alpha = v_y / v = a_\tau / g .$$

Следовательно, с учетом равенства $v_y = g \cdot t$ (t − время)

$$a_n = g v_x / v = g v_x / \sqrt{v_x^2 + (g\cdot t)^2} \approx 8{,}2\ \text{м}/\text{с}^2 ,$$

$$a_\tau = g v_y / v = g^2 t / \sqrt{v_x^2 + (g\cdot t)^2} \approx 5{,}4\ \text{м}/\text{с}^2 .$$

Пример А5. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти скорость v_0 и угол α, если известно высота подъема тела $h =$ $= 3$ м и радиус кривизны траектории тела в верхней точке траектории $R = 3$ м.



Уравнения движения тела по вертикали

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - g\cdot t;$$

$$s_y(t) = (v_0 \sin\alpha)\cdot t - \frac{g\cdot t^2}{2} .$$

В верхней точке траектории движения $v_y(t_1) = 0$, следовательно,

$$v_0 \sin\alpha = g\cdot t_1 \ \Rightarrow\ t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} .$$

Высота подъема

$$h = s_y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad (1)$$

Нормальное ускорение в верхней точке траектории $a_n = g = \frac{v_x^2}{R}$, где горизонтальная скорость $v_x = v_0 \cos\alpha$. Таким образом,

$$g = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{R} \ \Rightarrow\ v_0 = \frac{\sqrt{gR}}{\cos\alpha} . \qquad (2)$$

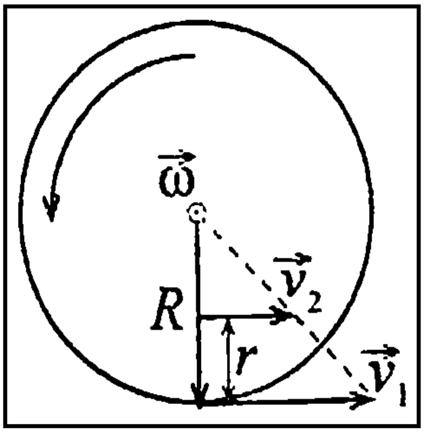
Подставив выражение (2) в равенство (1), получим

$$h = \frac{gR \sin^2\alpha}{2g \cos^2\alpha} = \frac{R}{2}\,\mathrm{tg}^2\alpha ,$$

т.е. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha \approx 60^\circ 30'$. Из уравнения (2) находим

$$v_0 = \frac{\sqrt{gR}}{\cos\alpha} = 9{,}35\ \text{м}/\text{с} .$$

Пример А6. Найти радиус R вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость v_1 точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости v_2 точки, лежащей на расстоянии $r = 5$ см ближе к оси колеса.



Вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен плоскости чертежа, следовательно, в скалярном виде

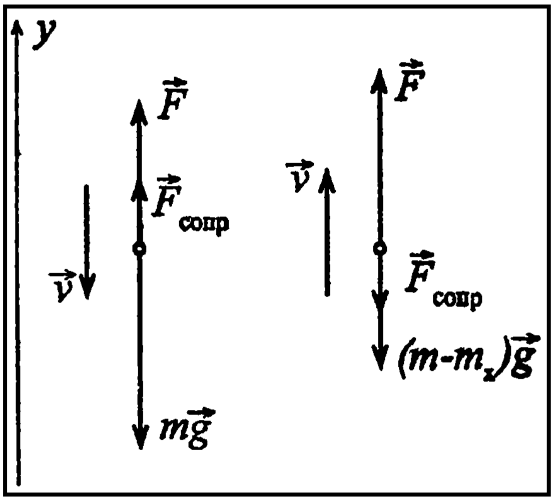
$$v = \omega \cdot r;\ v_1 = \omega \cdot R;\ v_2 = \omega \cdot (R - r).$$

Отсюда находим, что по условию задачи

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega \cdot R}{\omega \cdot (R - r)} = \frac{R}{R - r} = 2{,}5.$$

Решение этого равенства относительно величины $R = 8{,}3$ см.

Пример А7. Какой массы m_x балласт надо сбросить с равномерно опускающегося аэростата, чтобы он начал равномерно подниматься с той же скоростью? Масса аэростата с балластом $m = 1600$ кг, подъемная сила аэростата $F = 12$ кН. Считать силу сопротивления воздуха $F_{сопр}$ одной и той же при подъеме и спуске.



По второму закону Ньютона имеем

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{сопр} = 0 \\ \vec{F} + (m - m_x)\vec{g} + \vec{F}_{сопр} = 0 \end{cases},$$

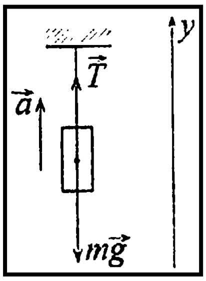
или в проекциях на ось y:

$$\begin{cases} F - mg + F_{сопр} = 0 \\ F - (m - m_x)g - F_{сопр} = 0 \end{cases}.$$

Первое уравнение системы описывает опускающийся аэростат, а второе – поднимающийся. Сложив эти уравнения, получим

$$m_x = \frac{2(mg - F)}{g} = 752 \text{ кг}.$$

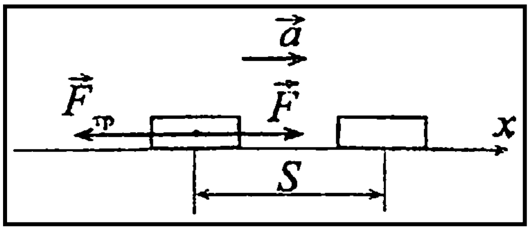
Пример А8. Стальная проволока некоторого диаметра выдерживает силу натяжения $T = 4{,}4$ кН. С каким наибольшим ускорением можно поднимать груз массой $m = 400$ кг, подвешенный на этой проволоке, чтобы она не разорвалась.



По второму закону Ньютона имеем $\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}$, или в проекциях на ось y: $T-mg=ma$. Следовательно,

$$a=\frac{T-mg}{m}=12\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Пример А9. Какую силу F надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон начал двигаться равноускоренно и за время $t=30$ с прошел путь $s=11$ м? Масса вагона $m=16$ т. Во время движения на вагон действует сила трения $F_{\text{тр}}$, равная 0,05 действующей на него силы тяжести mg.



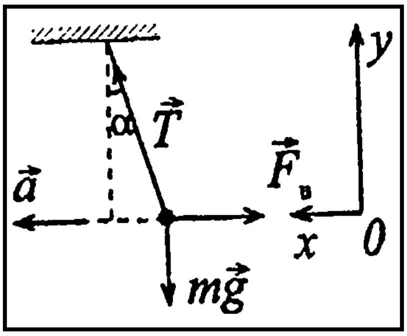
По второму закону Ньютона имеем $\vec{F}+\vec{F}_{\text{тр}}=m\vec{a}$, или в проекциях на ось x:

$$F-F_{\text{тр}}=ma \ \Rightarrow\ F=F_{\text{тр}}+ma.$$

Так как движение равноускоренное и начальная скорость вагона $v_0=0$, то пройденный им путь вычисляется по формуле $s(t)=\frac{at^2}{2}$. Следовательно, $a=\frac{2s}{t^2}$. По условию задачи сила трения $F_{\text{тр}}=0{,}05mg$, тогда искомая сила

$$F-F_{\text{тр}}=ma \ \Rightarrow\ F=0{,}05mg+\frac{2ms}{t^2}=8{,}2\ \text{кН}.$$

Пример А10. Шар на нити подвешен к потолку трамвайного вагона. Вагон тормозится, и его за время $t=3$ с равномерно уменьшается от $v_1=18$ км/ч до $v_2=6$ км/ч. На какой угол отклонится при этом нить с шаром?



Рассмотрим положение шара относительно системы отсчета, связанной с потолком вагона. Поскольку вагон движется с ускорением, то система является неинерциальной. По По второму закону Ньютона находим

$$\vec{T}+m\vec{g}+\vec{F}_{\text{и}}=0, \tag{1}$$

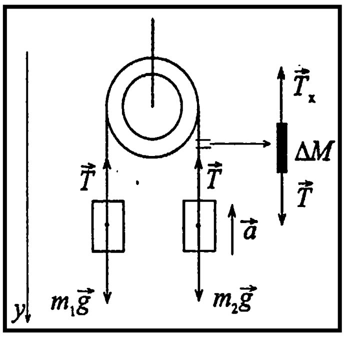
где сила инерции $\vec{F}_{\text{и}}=m\vec{a}$ ($F_{\text{и}}=-ma$). Уравнение (1) в проекциях на координатные оси имеет вид

$$\begin{cases} Ox: T\sin\alpha = ma \\ Oy: T\cos\alpha = mg \end{cases} \qquad (2)$$

Разделив первое уравнение системы (2) на ее второе уравнение, получим $\mathrm{tg}\alpha = a/g$, откуда находим

$$\alpha = \mathrm{arctg}(a/g). \qquad (3)$$

Ускорение вагона определяется формулой $a = \left.\frac{\Delta v}{\Delta t}\right|_{\substack{\Delta v = v_1 - v_2 \\ \Delta t = t}} = 4\ \text{м}/\text{с}^2$, ускорение свободного падения $g = 9{,}81\ \text{м}/\text{с}^2$. Подставив эти числа в (3), получим $\alpha \approx 6^\circ 30'$.



Пример А11. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силу натяжения нити T. Трением в блоке пренебречь.

Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Выберем элемент нити ΔM и запишем уравнение движения в проекциях на ось y: $T - T_x = \Delta M a$. Так как нить невесома, то $\Delta M = 0$ и $T = T_x$, т.е. сила натяжения нити во всех ее точках одинакова. Ускорения движения грузов тоже одинаковы, так как в силу нерастяжимости нити за одно и то же время грузы проходят один путь

$$s_1 = \frac{a_1 t^2}{2} = s_2 = \frac{a_2 t^2}{2},$$

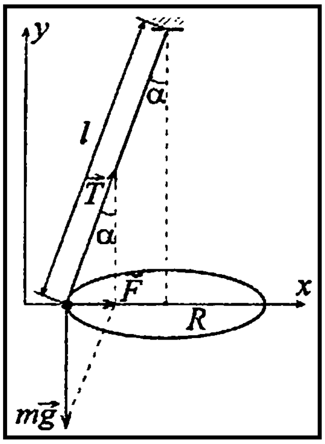
отсюда следует, что $a_1 = a_2$. Отметим, что направления векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ противоположны. Запишем второй закон Ньютона для первой и второй гирь в проекциях на ось y:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 g - T = -m_2 a \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения системы его второе уравнение, найдем $(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g$. Отсюда ускорение $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$. Подставим это выражение в первое уравнение системы, получим $T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$.

Подстановка числовых значений из условия задачи дает $a = 3{,}27$ м/с^2 и $T = 13$ Н.

Пример А12. Гирька массой $m = 50$ г, привязанная к нити длиной $l = 25$ см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гирьки $n = 2$ об/с. Найти силу натяжения нити T.



В горизонтальной плоскости на гирьку действует сила $F = T\sin\alpha$. Тогда по второму закону Ньютона $T\sin\alpha = ma_n$, где $\sin\alpha = \dfrac{R}{l}$. С учетом того, что нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = (2\pi n)^2 R$, запишем

$$T\sin\alpha = ma_n;\ T\frac{R}{l} = m(2\pi n)^2 R.$$

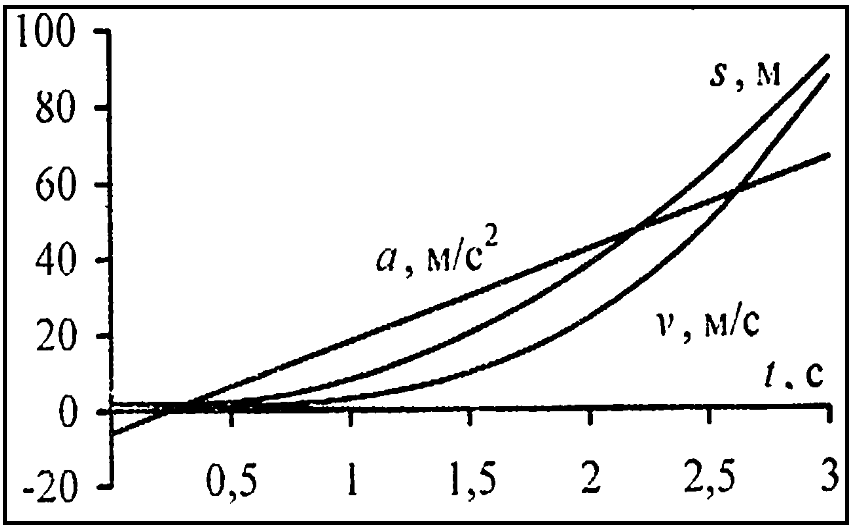
Следовательно, $T = ml(2\pi n)^2 = 1{,}96$ Н.

Пример А13. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s(t) = At - Bt^2 + Ct^3$, где коэффициенты $A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2 и $C = 4$ м/с^3. Найти: а) зависимость скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$ от времени t; б) расстояние s, пройденное телом, скорость v и ускорение a через время $t = 2$ с после начала движения; в) построить графики зависимости пути $s(t)$, скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$ от времени t для интервала $0 \le t \le 3$ с с шагом $\Delta t = 0{,}5$ с.

а) Скорость тела $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = A - 2Bt + 3Ct^2 = 2 - 6t + 12t^2$ м/с, а его ускорение $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -2B + 6Ct = -6 + 24t$ м/с^2.

б) Найдем расстояние, пройденное через время $t = 2$ с после начала движения: $s(t) = 2t - 3t^2 + 4t^3 \Rightarrow s(2) = 2\cdot 2 - 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 = 24$ м; скорость $v(2) = 2 - 6\cdot 2 + 12\cdot 2^2 = 38$ м/с и ускорение $a(2) = -6 + 24\cdot 2 = 42$ м/с^2.

в) построим графики зависимости пути $s(t)$, скорости $v(t)$ и ускорения $a(t)$ от времени t для интервала $0 \le t \le 3$ с с шагом $\Delta t = 0{,}5$ с.



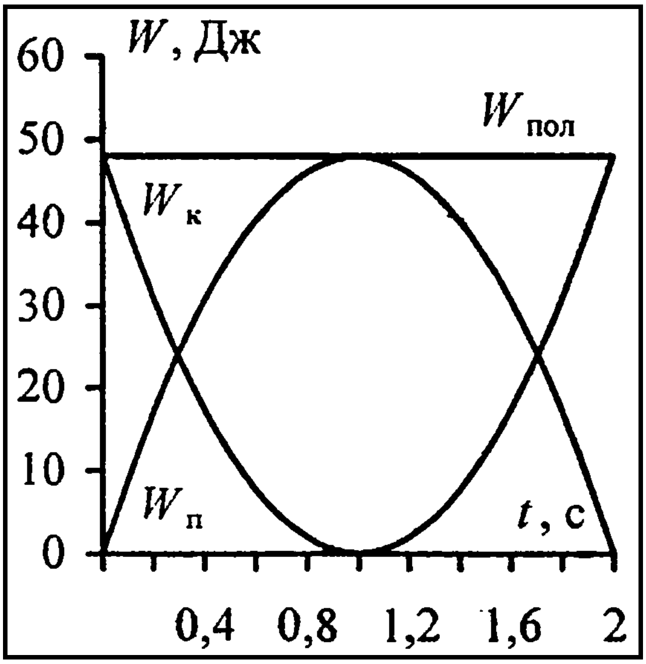
Пример А14. Камень массой $m = 1$ кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 9{,}8$ м/с. Построить график зависимости от времени t кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной $W = W_п + W_к$ энергий камня для интервала времени $0 \le t \le 2$ с.

Кинетическая энергия камня $W_к = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m(v_0 - gt)^2}{2} = \dfrac{(9{,}8 - 9{,}8t)^2}{2}$.

Потенциальная энергия $W_п = mgh = mg\left(v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}\right) = 9{,}8(9{,}8t - 4{,}9t^2)$.

Полная энергия $W = W_п + W_к = 9{,}8(9{,}8t - 4{,}9t^2) + \dfrac{(9{,}8 - 9{,}8t)^2}{2} = \mathrm{const} = 48$ Дж.

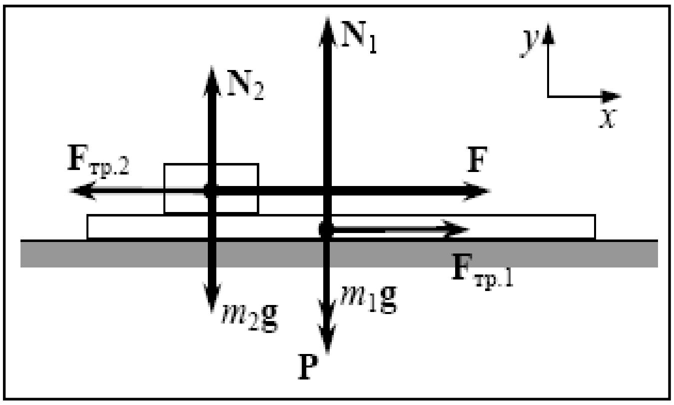
t, с	$W_к$, Дж	$W_п$, Дж
0	48	0
0,2	30,7	17,3
0,4	17,3	30,7
0,6	7,7	40,3
0,8	1,9	46,1
1	0	48
1,2	1,9	46,1
1,4	7,7	40,3
1,6	17,3	30,7
1,8	30,7	17,3
2	48	0



Методические указания к решению задач по курсу “Механика” / Р.Р. Нигматуллин, А.И. Скворцов, О.В. Недопекин. – Казань: КГУ, 2012. – 75 с.

Пример А15. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней брусок массы m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся по закону $F=\alpha t$, где α – постоянная величина. Найти зависимости от t ускорений доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения между доской и бруском равен k. Найти время t_1, при котором ускорения доски и бруска одинаковы.

Анализ задачи и физико-математический этап решения задачи. Этот пример является прямой задачей динамики, когда по заданным силам требуется определить неизвестные силы и ускорения, а траектория движения не определена. Решать задачу будем в инерциальной системе отсчета, связанной с горизонтальной плоскостью



(см. рис.). Физическая система представляет собой два тела: брусок и доску. На брусок действуют: сила тяжести $m_2\boldsymbol{g}$ со стороны Земли, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}_2$, сила трения $\boldsymbol{F}_{тр2}$ со стороны доски и сила $\boldsymbol{F}$, определенная в условии задачи.

На брусок действуют: сила тяжести $m_1\boldsymbol{g}$ со стороны Земли, сила давления $\boldsymbol{P}$, сила реакции $\boldsymbol{N}_1$ со стороны гладкой горизонтальной поверхности и сила трения $\boldsymbol{F}_{тр1}$ со стороны бруска. Запишем уравнения движения для

$$\underline{\text{бруска}}:\ m_2\boldsymbol{a}_2=m_2\boldsymbol{g}+\boldsymbol{N}_2+\boldsymbol{F}_{тр2}+\boldsymbol{F}$$

$$\text{и }\underline{\text{доски}}:\ m_1\boldsymbol{a}_1=m_1\boldsymbol{g}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{F}_{тр1}+\boldsymbol{P}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, выполняются еще два векторных уравнения: $\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{N}_2$ и $\boldsymbol{F}_{тр1}=-\boldsymbol{F}_{тр2}$. С учетом этих равенств и выражения для заданной силы $\boldsymbol{F}$ перепишем уравнения движения доски и бруска в проекциях на оси системы координат

$$\underline{\text{ось } x}\text{:}\ m_2\, a_2 = -F_{\text{тр}2} + \alpha t; \qquad (1)$$

$$m_1\, a_1 = F_{\text{тр}2}; \qquad (2)$$

$$\underline{\text{ось } y}\text{:}\ 0 = -\, m_2\, g + N_2; \qquad (3)$$

$$0 = -\, m_1\, g + N_1 - N_2. \qquad (4)$$

Эта система из четырех уравнений содержит пять неизвестных величин. Для отыскания пятого уравнения воспользуемся известными свойствами сил и кинематическими соотношениями. Известно, что *проявление сил трения зависит как от характера движения*, *так и от других сил*, поэтому надо понимать различия в искомом уравнении в зависимости от величины силы $F = \alpha t$.

Математический этап решения задачи.

Для времен $t \le t_1$ система движется как единое целое с ускорением $a_2 = a_1 = a$. Найдем его, просуммировав уравнения (1) и (2):

$$(m_1 + m_2)\, a = F \;\Rightarrow\; a = \frac{\alpha t}{m_1 + m_2}.$$

Для времен $t \ge t_1$ значение силы трения $F_{\text{тр}2} = k\, N_2$ запишем, найдя из уравнения (3) силу $N_2 = m_2\, g$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$m_2\, a_2 = -k m_2\, g + \alpha t; \qquad (5)$$

$$m_1\, a_1 = k m_2\, g. \qquad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) находим ускорения бруска и доски для времен $t \ge t_1$: $a_1 = k m_2\, g / m_1$, $a_2 = (\alpha t - k m_2\, g)/m_2$. В момент времени $t = t_1$ эти ускорения должны быть равны между собой, т.е.

$$t_1 = \frac{k m_2 g (m_1 + m_2)}{\alpha m_1}.$$

Пример А16. Точка движется в плоскости xOy по закону

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \alpha t (1 - \beta t) \end{cases},$$

где α и β – положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории движения точки $y(x)$; б) скорость и ускорение движения точки;

в) момент времени t_0, когда угол между скоростью и ускорением станет равным $\dfrac{\pi}{4}$.

а) Радиус-вектор, определяющий положение точки на плоскости *xOy*, задается выражением

$$\boldsymbol{r}\,(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j}\,. \tag{1}$$

По условию задачи траектория движения задана в параметрическом виде. Для того чтобы записать кривую в декартовых координатах, выразим из первого уравнения заданной системы параметр времени t и подставим найденное выражение во второе уравнение системы: $x = \alpha t \Rightarrow t = x/\alpha \Rightarrow y(x) = x(1-\beta x/\alpha)$. Функция $y(x)$ описывает параболу, ветви которой направлены вниз, она пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = \alpha/\beta$.

б) Скорость движения точки определяется как первая производная от радиуса-вектора (1)

$$\boldsymbol{v}\,(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = \dot{\boldsymbol{r}}\,(t) = \dot{x}(t)\,\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\,\boldsymbol{j} = \alpha\,\boldsymbol{i} + (\alpha - 2\alpha\beta t)\,\boldsymbol{j}\,, \tag{2}$$

а ее ускорение – второй производной от (1)

$$\boldsymbol{a}\,(t) = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2 = \ddot{\boldsymbol{r}}\,(t) = \ddot{x}(t)\,\boldsymbol{i} + \ddot{y}(t)\,\boldsymbol{j} = 0\,\boldsymbol{i} + (-2\alpha\beta)\,\boldsymbol{j}\,. \tag{3}$$

Модули этих векторов равны

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 2\alpha\beta t)^2}\ ;$$

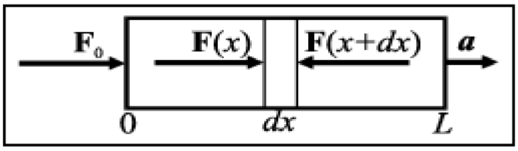
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t)} = \sqrt{0^2 + (-2\alpha\beta)^2}\ .$$

в) Момент времени t_0, когда угол между скоростью и ускорением станет равным $\dfrac{\pi}{4}$, вычисляется из формулы (самостоятельно)

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left.\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{a}|}\right|(\mathrm{t}=\mathrm{t}_0) = \frac{2\beta t_0 - 1}{\sqrt{1 + (1 - 2\beta t_0)^2}}\ .$$

Ответ: $t_0 = 1/\beta$.

Пример А17. Однородный упругий брусок движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}_0$, равномерно распределенной по торцу. Площадь торца равна S, модуль Юнга материала − E. Найти относительное сжатие бруска в направлении действия силы.



Под действием силы брусок будет двигаться с ускорением, которое можно найти из второго закона Ньютона:

$$a = F_0 / m = F_0 / (\rho S L),$$

где ρ − плотность материала. Рассмотрим бесконечно тонкий элемент dx (см. рисунок). На него будут действовать силы упругости со стороны других частей бруска. Под действием этих сил выделенный элемент будет двигаться с ускорением, равным ускорению бруска. Запишем второй закон Ньютона для элемента:

$$dm \cdot a = \rho S\, dx \cdot a = F(x) - F(x+dx) = -dF\ .$$

Интегрируя это выражение от сечения с нулевой координатой до некоторого сечения с координатой x, получим

$$F(x) = F_0 - \rho Sax = F_0(1 - x/L).$$

Найдем напряжение внутри бруска

$$\sigma(x) = \frac{F(x)}{S} = \frac{F_0}{S}\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

На свободном конце бруска при $x = L$ напряжение равно нулю. По закону Гука для относительного сжатия элемента dx получаем:

$$\varepsilon = \frac{d\Delta l}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{F_0}{SE}\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

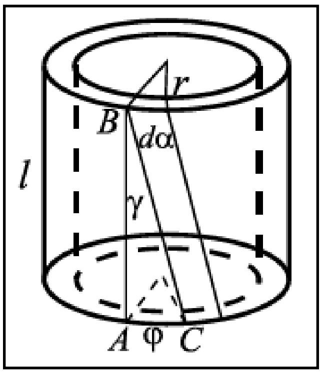
Следовательно, сжатие всего бруска равно:

$$\Delta\ell = \int d\Delta l = \int_0^L \varepsilon\, dx = \int_0^L \frac{F_0}{SE}\left(1 - \frac{x}{L}\right)dx = \frac{F_0}{SE}\left(x - \frac{x^2}{2L}\right)\Bigg|_0^L = \frac{F_0 L}{2SE}\ .$$

Отсюда видно, что удлинение будет в два раза меньше, чем в случае покоящегося бруска. Это связано с тем, что в состоянии покоя на брусок должны действовать две силы $\boldsymbol{F}_0$ с противоположных концов, направленные навстречу друг другу.

Пример А18. Установить связь между крутящим моментом N и углом закручивания φ для: а) трубы, у которой толщина стенок Δr значительно меньше радиуса трубы; б) сплошного стержня круглого сечения. Известны их длина l, радиус r и модуль сдвига G.

Выделим малый элемент объема круглого образца. Из рисунка видно, что деформация, которую испытывает этот элемент, есть деформа-



ция сдвига. Запишем закон Гука для выделенного элемента объекта:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{dF}{GdS} = \frac{dF}{Grd\alpha\Delta r} = \frac{rdF}{Gr^2 d\alpha\Delta r} = \frac{dN}{Gr^2 d\alpha\Delta r}$$

Из ΔABC видно, что $\operatorname{tg}\gamma = \frac{AC}{AB}$. При малых углах φ и γ имеем ($\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma$): $\gamma = \frac{r\varphi}{l}$. Подставив это выражение в первую формулу, получим

$$dN = \frac{r^3 \Delta r G\varphi\, d\alpha}{l}.$$

Проинтегрируем это выражение по α от 0 до 2π

$$N = \frac{2\pi r^3 \Delta r G\varphi}{l}.$$

б) Сплошной стержень можно разбить на множество труб с толщинами стенок dr. Для каждой из этих труб можно записать выражение, полученное в пункте а). Тогда общий крутящий момент найдем суммированием крутящих моментов отдельных труб:

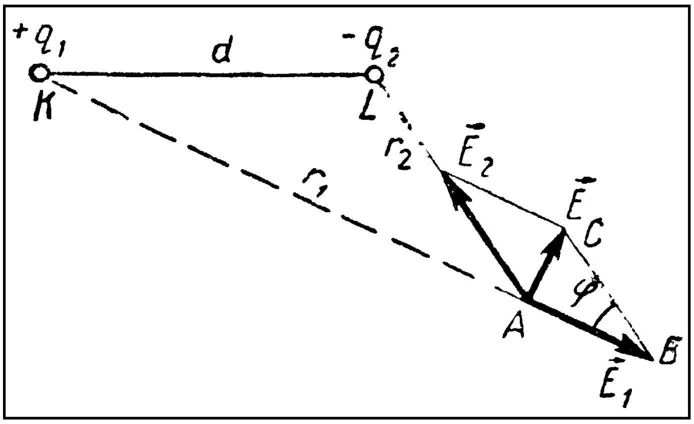
$$N = \int dN = \frac{1}{l}\int_0^r 2\pi\varphi G r^3 dr = \frac{\pi\varphi G r^4}{2l},$$

т.е. деформация кручения сводится к сумме деформаций сдвига.

Горбунова О.И., Зайцева А.М., Красников С.Н. Задачник-практикум по общей физике. Электричество. Электромагнетизм. – М.: «Просвещение», 1975. – 160 с.

Пример А19. Два точечных заряда $q_1 = 2\cdot10^{-7}$ Кл и $q_2 = -4\cdot10^{-7}$ Кл находятся в керосине на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Каковы напряженность электростатического поля и электрическое смещение в точке A, находящейся на расстоянии $r_1 = 20$ см от одного и $r_2 = 15$ см от другого заряда?

Диэлектрическая проницаемость керосина, в котором находятся заряды, $\varepsilon = 2$, а абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м. Полная напряженность электростатического поля в точке A равна:



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ – напряженности электрического поля, создаваемые зарядами q_1 и q_2 в точке A (см. рисунок). Модуль вектора $\vec{E}$ определим из ΔABC:

$$E^2 = \left|\vec{E}\right|^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos\varphi.$$

Напряженности полей точечных зарядов равны

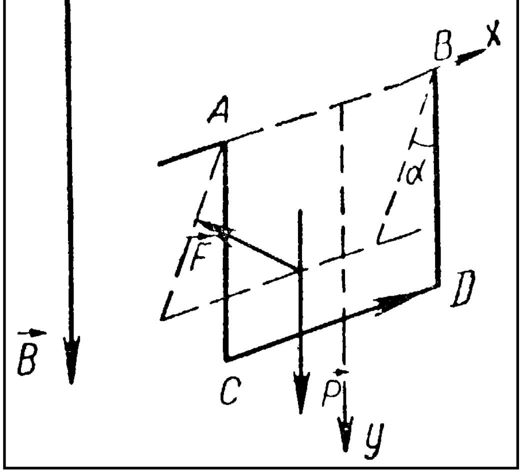
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_1^2} \text{ и } E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_2^2}.$$

Из ΔAKL найдем $\cos\varphi = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$. Следовательно, в точке A напряженность электростатического поля равна

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - \frac{q_1 q_2 (r_1^2 + r_2^2 - d^2)}{r_1^3 r_2^3}} = 6{,}2\cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

Вектор электрического смещения в точке A равен $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_A$, а его модуль $D = \left|\vec{D}\right| = \varepsilon\varepsilon_0 E_A = 1{,}09\cdot 10^{-6}$ Кл/м^2.

Пример А20. Медный провод сечением $S = 2$ мм^2, согнутый в виде трех сторон квадрата, может вращаться относительно горизонтальной оси. Провод находится в однородном магнитном поле, направленном вертикально вниз. Когда по проводу течет ток $I = 10$ А, провод отклоняется на угол $\alpha = 15^\circ$. Определите индукцию магнитного поля B.



Изогнутый проводник, повернувшись при включении тока на угол α, остается в равновесии (см. рисунок). Следовательно, сумма моментов сил, действующих на него, равна нулю. Проводник с током находится в магнитном поле и поле тяготения Земли, поэтому на каждую из трех его частей действует сила Ампера и сила тяжести.

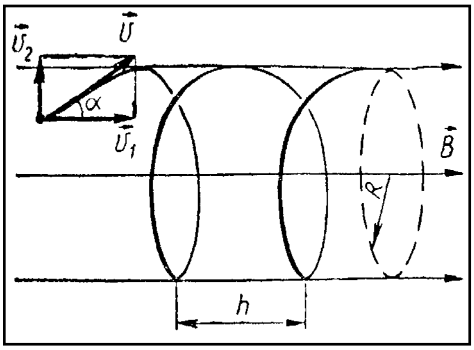
Рассмотрим движение проводника относительно неподвижного наблюдателя в системе координат с осью x, направленной по оси вращения, и осью y, направленной вертикально и проходящей через середину проводника CD (см. рисунок), когда по нему не течет ток. Силы Ампера, действующие на токи, текущие по сторонам AC и DB, равны по величине и противоположны по направлению. Радиус-векторы этих сил одинаковы, поэтому суммарный момент сил, действующих на эти части проводника, равен нулю. Определим силу Ампера, действующую на часть проводника CD (ток направлен от C к D). Учитывая, что векторы $\vec{B}$ и элемент тока $I\vec{l}$ взаимно перпендикулярны, получим для силы Ампера выражение $F = IlB$. Момент этой силы, действующий относительно оси, равен $\vec{M}_1 = [\vec{R}_1 \times \vec{F}_1]$, где $\vec{R}_1$ – радиус-вектор, проведенный от оси вращения до точки приложения силы. Расстояние от оси вращения до точки приложения силы равно $\left|\vec{R}_1\right| = l$, а угол радиус-вектором $\vec{R}_1$ и силой $\vec{F}_1$ – $\varphi_1 = -\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Проекция момента силы Ампера на ось x равна $M_1 = -F\,l\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$. На проводник в поле тяготения Земли действует сила тяжести $P = 3lSDg$, которая приложена к центру масс. Для определения радиус-вектора $\vec{R}_2$ этой силы найдем положение центра масс. В выбранной системе координат центр масс имеет координаты:

$$X_0 = 0 \text{ и } Y_0 = \frac{2m\dfrac{l}{2} + ml}{3m} = \frac{2}{3}l.$$

Следовательно, расстояние от оси вращения до точки приложения силы тяжести $\left|\vec{R}_2\right| = \dfrac{2}{3}l$, а угол между радиус-вектором $\vec{R}_2$ и направлением силы $\vec{P}$ – $\varphi_2 = \alpha$. Проекция момента силы тяжести на ось x равна $M2_1 = \mathrm{P}\cdot\dfrac{2}{3}l\sin\alpha = 2l^2 S\,D\,g\sin\alpha$. Сумма проекций моментов сил на ось x при достижении равновесия обращается в нуль. Таким образом, $B = \dfrac{2SDg}{l}\operatorname{tg}\alpha = 9{,}3\cdot 10^{-3}$ Т.

Пример А21. Электрон, имеющий скорость $v = 8 \cdot 10^8$ см / с, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ Т под углом $\alpha = 30^\circ$ к ее направлению. Определите радиус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.

В магнитном поле с напряженностью $\vec{B}$ на электрический заряд q, двигающийся со скоростью $\vec{v}$, действует сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$.



Разложим скорость электрона на две составляющие (см. рисунок): параллельно и перпендикулярно линиям магнитной индукции $\vec{B}$: $v_1 = v\cos\alpha$; $v_2 = v\sin\alpha$. Благодаря наличию составляющей v_2 на электрон действует сила Лоренца, поэтому он движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Радиус этой окружности определим из условия $\dfrac{mv_2^2}{R} = ev_2B$, так как сила Лоренца является центростремительной силой. Из этого равенства находим, что

$$R = \frac{v_2}{\frac{e}{m}B} = \frac{v\sin\alpha}{\frac{e}{m}B} = 0{,}07 \text{ м}.$$

Вдоль направления вектора магнитной индукции $\vec{B}$ сила не действует, поэтому электрон вдоль линий индукции движется равномерно со скоростью $v_1 = v\cos\alpha$. В результате сложения двух движений (по окружности и вдоль линий индукции) электрон двигается по винтовой линии радиусом R и шагом винта $h = v_1 T$, где $T = \dfrac{2\pi R}{v_2}$ – период движения по окружности. Таким образом, шаг винтовой линии $h = \dfrac{2\pi v\cos\alpha}{\frac{e}{m}B} = 0{,}79$ м.

Пример А22. Найдите зависимость между групповой u и фазовой v скоростями для следующих законов дисперсии: а) $v = \dfrac{a}{\sqrt{\lambda}}$; б) $v = bk$;

в) $v = \dfrac{c}{\omega^2}$, где a, b и c – постоянные величины; λ, k и ω – длина волны, волновое число и циклическая частота соответственно.

По формуле Рэлея групповая скорость (скорость распространения энергии) $u = v - \lambda \dfrac{\partial v}{\partial \lambda}$:

а) $\dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = -\dfrac{1}{2} a \lambda^{-\frac{3}{2}}$; $u = v - \lambda \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = a\lambda^{-\frac{1}{2}} + \lambda \cdot \dfrac{1}{2} a \lambda^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2} a \lambda^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2} v$;

б) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $v = \dfrac{2\pi b}{\lambda} = 2\pi b \lambda^{-1}$; $\dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = -2\pi b \lambda^{-2}$;

$u = v - \lambda \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = 2\pi b \lambda^{-1} + \lambda \cdot 2\pi b \lambda^{-2} = 4\pi b \lambda^{-1} = 2v$;

в) $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}$; $v = \sqrt[3]{\dfrac{c}{4\pi^2}} \lambda^{\frac{2}{3}}$; $\dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = \dfrac{2}{3} \sqrt[3]{\dfrac{c}{4\pi^2}} \lambda^{-\frac{1}{3}}$;

$u = v - \lambda \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = \sqrt[3]{\dfrac{c}{4\pi^2}} \lambda^{\frac{2}{3}} - \lambda \cdot \dfrac{2}{3} \sqrt[3]{\dfrac{c}{4\pi^2}} \lambda^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} \sqrt[3]{\dfrac{c}{4\pi^2}} \lambda^{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} v$.

Пример А23. Показатель преломления прозрачного вещества для небольшого интервала длин волн, вдали от линий поглощения, связан с длиной волны соотношением $n = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$ (коэффициенты A и B положительны). Определить: а) дисперсию вещества; б) фазовую скорость; в) групповую скорость.

а) Дисперсия вещества определяется первой производной показателя преломления по длине волны $\eta = \dfrac{dn}{d\lambda} = -\dfrac{2B}{\lambda^3}$. В силу того, что производная отрицательна, то дисперсия нормальная.

б) Фазовая скорость $v = \dfrac{c}{n} = \dfrac{\lambda^2 c}{A\lambda^2 + B}$.

в) Групповая скорость $\dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = \dfrac{2\lambda B c}{(A\lambda^2 + B)^2}$; $u = v - \lambda \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} = \dfrac{\lambda^2 (A\lambda^2 - B)c}{(A\lambda^2 + B)^2}$.

Все решения к “Сборнику задач по общему курсу физики”
В.С. Волькенштейн. В 2 кн. Кн.2. – М.: Олимп:
ООО “Фирма «Издательство АСТ»”, 1999. – 592 с.

Пример А24. Во сколько раз сила гравитационного притяжения между двумя протонами меньше силы их электростатического отталкивания? Заряд протона равен по модулю и противоположен по знаку заряду электрона.

Сила гравитационного притяжения $F_г = G\frac{m^2}{r^2}$, а сила электростатического отталкивания $F_э = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$. Тогда $\frac{F_э}{F_г} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon G m^2} = 1{,}24\cdot 10^{36}$.

Пример А25. Показать, что электрическое поле, образованное заряженнным диском, в предельных случаях переходит в электрическое поле: а) бесконечной заряженной плоскости; б) точечного заряда.

Напряженность электрического поля заряженного диска с поверхностной плотностью заряда σ и радиусом R задается формулой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(R/r)^2}}\right).$$

На близких расстояниях от диска ($r << R$) величина $1 - \frac{1}{\sqrt{1+(R/r)^2}} \approx 1$.

В этом случае напряженность электрического поля $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, т.е. для точек, находящихся вблизи заряженного диска, его можно представить в виде бесконечно протяженной плоскости.

В противоположном случае, когда $r >> R$, величина $\sqrt{1+\left(\frac{R}{r}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2$.

В этом случае напряженность электрического поля $E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{R}{r}\right)^2$. Так как поверхностная плотность заряда $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$, то $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, т.е. для точек, находящихся на достаточно большом расстоянии от диска, диск можно рассматривать как точечный заряд.

Приложение Б

СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

I. *Некоторые физические постоянные*

Величина	Обозначение	Значение в СИ
Число Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{26}$ кмоль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	k_B	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/кмоль
Универсальная газовая постоянная	R	8,314 Дж/(моль·К)
Число Лошмидта	n_0	$2{,}69\cdot10^{25}$ м$^{-3}$
Число Фарадея	F	$9{,}65\cdot10^{7}$ Кл/кг-экв
Элементарный заряд	e	$1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Масса электрона	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Удельный заряд электрона	$e\,/\,m_e$	$1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг
Масса протона	m_p	$1{,}762\cdot10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	h	$6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К
Скорость света в вакууме	c	$2{,}99792458\cdot10^{8}$ м/с
Гравитационная постоянная	G	$6{,}672\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2

II. *Приставки и множители десятичных кратных и дольных единиц международной системы СИ*

экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^{9}	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^{3}	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

III. *Использование других единиц измерения*

1 мм рт. ст. = 0,01316 атм = 133,3 Па;

1 атм = 760 мм рт. ст. = $1{,}013\cdot10^{5}$ Па = 1,013 бар;

1 Дж = 0,239 кал = $6{,}242\cdot10^{18}$ Эв;

1 Эв = $1{,}602\cdot10^{-19}$ Дж = $4{,}45\cdot10^{-26}$ Квт·ч;

1 дюйм = 2,54 *см*; 1 миля (международная) = 1,8 *км*;

1 фут = 30,48 *см*; 1 ярд = 91,44 *см*;

1 унция ≈ 28,3 *г*; 1 унция тройская аптекарская ≈ 31,1 *г*;

1 Фунт торговый ≈ 454 *г*; 1 Фунт тройский аптекарский ≈ 373 *г*;

n °C = 273,15+n K (**Кельвин**) = 9n/5+32 F (**Фаренгейт**) = 0,8n R (**Реомюр**)

IV. *Свойства металлов*

Название	Массовое число, A	Плотность, ρ, $\times10^3$, кг·м$^{-3}$	Модуль Юнга, E, $\times10^{10}$Н/м^2	Модуль сдвига, G, $\times10^{10}$Н/м^2	Характеристическая температура Дебая, Θ_D	Энергия Ферми, $E_Ф$, эВ
Алюминий	27	2,7	6,8	2,6	390	11,9
Бериллий	9	1,83			1100	14,6
Ванадий	51	5,96				
Золото	197	19,27	8	2,8	170	5,5
Калий	39	0,86			100	2,14
Литий	7	0,53				4,72
Медь	64	8,94	12,3	4,5	320	7,1
Натрий	23	0,97			150	3,12
Никель	59	8,9	20,2	7,7	.410	
Платина	195	21,5	16,8	6,1	229	
Рубидий	85	1,53				
Свинец	207	11,37	1,62	0,56	88	
Серебро	108	10,5	7,9	2,86	165	5,5
Цезий	133	1,87				1,53

V. *Свойства полупроводников*

Название	Массовое число, A	Плотность, ρ, $кг \cdot м^{-3}$	Ширина запрещенной зоны, ΔE, эВ	Подвижность, u, $м^2 \cdot В^{-1} \cdot с^{-1}$	
				электронов	дырок
Германий	73	$5{,}47 \cdot 10^3$	0,72	0,39	0,19
Кремний	28	$2{,}3 \cdot 10^3$	1,09	0,12	0,05
Селен	79	$4{,}5 \cdot 10^3$	0,8		

VI. *Моменты инерции тел*

Тело	Ось	Момент инерции
Шар радиуса r	любая ось	$\frac{2}{5}mr^2$
Диск радиуса r	ось перпендикулярная плоскости диска	$\frac{1}{2}mr^2$
Цилиндр радиуса r и высотой l	ось перпендикулярная оси симметрии	$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
Цилиндр радиуса r и высотой l	ось симметрии	$\frac{1}{2}mr^2$
Тонкий стержень длиной l	ось перпендикулярная стержню	$\frac{1}{12}ml^2$
Куб с длиной ребра l	любая ось	$\frac{1}{6}ml^2$

VII. *Первая и вторая космические скорости на планетах*

Планета	v_1, км/с	v_2, км/с	Планета	v_1, км/с	v_2, км/с
Меркурий	3,0	4,25	Юпитер	42,6	60,4
Венера	7,2	10,2	Сатурн	25,7	36,4
Земля	7,9	11,2	Уран	15,2	21,5
Марс	3,57	5,05	Нептун	16,6	23,5

VIII. Астрономические постоянные

Радиус Земли	$6{,}378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность Земли	$5{,}518 \cdot 10^3$ кг/м^3
Масса Земли	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}9599 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}989 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1{,}737 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг
Среднее расстояние до Луны	$3{,}844 \cdot 10^8$ м
Среднее расстояние до Солнца	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин
Средняя плотность Солнца	$1{,}41 \cdot 10^3$ кг/м^3

Авторы: ***Терехов Сергей Владимирович***,
д.ф.-м.н., доц., в.н.с. отдела № 16,
ГУ ДонФТИ им. А.А. Галкина.
Варюхин Виктор Николаевич,
д.ф.-м.н., проф., зав. каф. “Теоретической физики и нанотехнологий”, ДонНУ,
директор ГУ ДонФТИ им. А.А. Галкина.

Учебное пособие: Математическая библиотечка студента-физика. Т. 1 (части I и II). Решение задач по линейной и векторной алгебрам, аналитической геометрии на плоскости и пространстве, теории пределов, дифференциальному исчислению, исследованию функций // Учебное издание для студентов физико-технических факультетов университетов и педагогических институтов / Донецк: ГУ «ДонФТИ им. А.А. Галкина». – 2018. – 411 с.