



Терехов С.В.

*Фракталы
и
физика подобия*

Донецк – 2011

Терехов С.В.

*Посвящается
светлой памяти моей жены
Елены Сергеевны Тереховой (Гуторовой)*

**Фракталы
и
физика подобия**

“Наше ощущение прекрасного возникает под влиянием гармонии порядка и беспорядка в природных объектах – тучах, деревьях, горных грядках или кристалликах льда. Их очертания – это динамические процессы, застывшие в физических формах... наука и эстетика согласны в том, что именно теряется в технических объектах по сравнению с природными: роскошь некоторой нерегулярности, беспорядка и непредсказуемости. Понимание этого может здорово помочь нам в придании человеческого лица технологии, от которой всё больше и больше зависит наше выживание”.

Г. Айленбергер

Донецк –2011

УДК 510; 514; 530.1
ББК Ф32
PACS 05.45.Df
T35

Донецкий физико-технический институт
им. А.А.Галкина НАН Украины
Донецкий национальный университет МОН Украины
Физический факультет, кафедра “Нанофизика”

T35 Терехов С.В. Фракталы и физика подобия. – Донецк:
“Цифровая типография”, 2011. – 255 с.

Фрактальная геометрия возникла в результате преодоления кризиса в математике 1875-1925 годов, связанного с осознанием невозможности “истинного понимания неправильности и фрагментации (равно как правильности и связности), по-прежнему определяя размерность как число пространственных координат... Главным здесь, на мой взгляд, является то, что довольно расплывчатое понятие размерности, судя по всему, имеет много математических аспектов, которые не только принципиально различны, но ещё дают различные числовые значения этой размерности” (Б. Мандельброт. “Фрактальная геометрия природы”). Обнаружение новых геометрических объектов с необычным видом и неординарными свойствами привело к созданию фрактальной геометрии. Фрактальные линии, поверхности и другие образы имеют дробную и целочисленную размерность, которая в большинстве случаев не совпадает с топологической размерностью пространства их существования. Применение размерности Хаусдорфа-Безиковича, которая в дальнейшем была обобщена Реньи, позволило Мандельброту определить фракталы, как класс новых геометрических объектов. Большая схожесть фрактальных фигур с природными образованиями и междисциплинарный характер фрактальной геометрии вызывают к этому разделу современной геометрии повышенный интерес со стороны молодых исследователей, специализирующихся в разных областях физики и других наук. Именно это и побудило автора к написанию этой книги.

Для студентов специальностей “Теоретическая физика”, “Физика твёрдого тела”, “Физика конденсированного состояния” и “Нанофизика”, молодых преподавателей и исследователей, интересующихся фрактальной геометрией и динамикой.

Ил. 237. Табл. 3. Прил. 2. Библиогр.: с. 246-250 (76 назв.)

УДК 510; 514; 530.1
ББК Ф32
PACS 05.45.Df

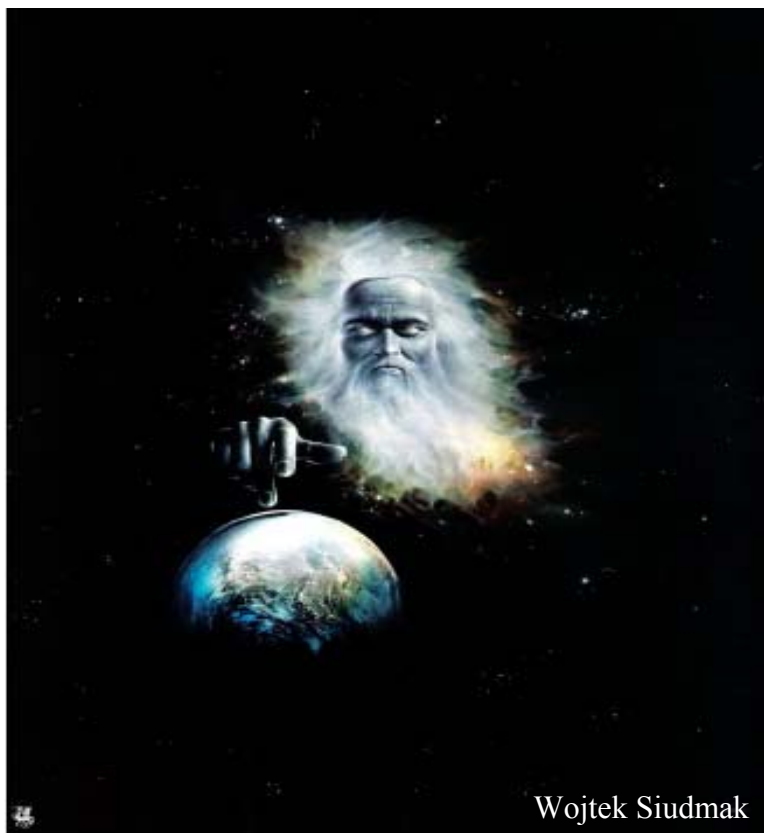
© Терехов С.В., 2011

Оглавление

	Стр.
<i>Введение</i>	6
<u>Глава 1.</u> Подобие и фракталы.....	9
1.1. Самоподобие.....	15
1.2. Однородные функции и скейлинг.....	18
1.3. Размерность Хаусдорфа-Безиковича.....	24
1.4. Размерность Реньи.....	26
<u>Глава 2.</u> Конструктивные (детерминированные, регулярные) фракталы.....	29
2.1. “Пыль” Кантора.....	32
2.2. Кривая и “снежинка” Коха.....	33
2.3. Кривые Пеано.....	34
2.4. “Салфетка” и “ковёр” Серпинского.....	36
2.5. Спирали.....	38
2.6. “Листья папоротника” Барнсли.....	42
2.7. “Деревья” Босмана.....	46
2.8. “Драконы” Хартера-Хайтвея.....	47
2.9. “Губка” Менгера.....	48
<u>Глава 3.</u> Построение детерминированных фракталов.....	49
3.1. Инвариантные преобразования.....	49
3.2. Аналитический способ построения фракталов.....	50
3.3. Специальная теория относительности.....	54
3.4. Возникновение хаоса и аттракторы.....	60
<u>Глава 4.</u> Стохастические (случайные) фракталы.....	65
4.1. Траектория движения броуновской частицы.....	67
4.2. Подобие одномерных блужданий.....	69
4.3. Обобщённое перемещение частицы Броуна.....	70
4.4. Ограниченный рост популяции.....	72
4.5. Детерминированный хаос.....	75
4.6. Аттрактор Лоренца.....	79
<u>Глава 5.</u> Динамические фракталы.....	86
5.1. Итерации комплексных функций.....	87
5.2. Комплексные регулярные фракталы Жюлиа, Фату, Мандельброта.....	89
5.3. Отображение Ньютона.....	93
<u>Глава 6.</u> Кватернионные (гиперкомплексные) фракталы....	98
6.1. Множества Жюлиа в гиперпространстве.....	103

6.2. Симметрия и мозаики.....	106
6.3. Конструирование инвариантных структур.....	115
<u>Глава 7.</u> Мультифракталы.....	120
7.1. Обобщённая статистическая сумма мультифрактала.....	121
7.2. Фрактальная, информационная и корреляционная размерности.....	124
7.3. Спектр сингулярностей мультифрактала.....	128
7.4. Модели спектра фрактальных размерностей.....	132
<u>Глава 8.</u> Физические мультифракталы.....	136
8.1. Мультифрактальная конвекция Рэлея-Бенара.....	139
8.2. Ограниченная диффузией агрегация.....	142
8.3. Рост “пальцев” в вязких средах.....	146
8.4. “Чёртовы” лестницы и “языки” Арнольда.....	149
<u>Глава 9.</u> Фракталы и кластеры.....	154
9.1. Возникновение кластеров при протекании.....	158
9.2. Распределение кластеров при критической перколяции.....	160
9.3. Проникание в решётку с вытеснением.....	162
9.4. Фрактальный диффузионный процесс.....	164
<u>Глава 10.</u> Фрактальные временные ряды.....	166
10.1. Эргодичность стационарных случайных процессов.....	168
10.2. Закон Херста.....	171
10.3. Случайные ряды.....	174
10.4. Прогнозирование долгосрочных изменений.....	177
<u>Глава 11.</u> Фрактальные поверхности.....	181
11.1. Поверхность стохастических перемещений.....	182
11.2. Анализ фрактальных поверхностей.....	184
11.3. Фрактальная топография.....	185
11.4. Молекулярные ландшафты.....	186
<u>Глава 12.</u> Фракталы и геометрия природных объектов.....	188
12.1. Фрактальные пейзажи.....	193
12.2. Статистика высоты волн.....	197
12.3. Фрактальная геометрия облаков и рек.....	199
12.4. Эредитарность, дальнодействие и степенные законы.....	203
12.5. “Хвостатые” распределения.....	210

12.6. Элементы дробного исчисления.....	213
Глава 13. Самоподобие физических явлений и процессов...	219
13.1. Модель Изинга и теорема Янга-Ли.....	223
13.2. Одно- и двумерная модели Изинга при отсут- ствии внешнего магнитного поля.....	224
13.3. Иерархическая решётка со спинами Поттса.....	227
13.4. Переход Андерсона.....	228
Глава 14. Клеточные автоматы.....	231
14.1. Игры “Жизнь”, “Аква-Тор” и другие.....	233
14.2. Влияние случайной информации и фракталь- ности на формирование биосообществ.....	237
14.3. Фрактальность клеточных автоматов.....	239
14.4. Самоорганизация и компьютерное моделиро- вание.....	241
Список использованных источников	246
Приложение А. Зависимость порядка оси от параметра подобия	251
Приложение Б. Игра Жизнь (по А.А. Шалыто и Л.А. Наумову (http://is.ifmo.ru)).....	253



Wojtek Siudmak

Я не стыжусь учиться; я выспрашиваю и выведываю, и питаю великую благодарность к тому, кто мне отвечает, и никто не бывает у меня этой благодарностью обойдён.

Сократ

Введение

Да не прочтёт сих принципов тот, кто чужд математике.

Леонардо да Винчи

Современная физическая наука строится с учётом самых разнообразных скрытых и явных симметрий, отражающих фундаментальные свойства пространства-времени. Явные симметрии (инвариантности) проявляются в виде сохранения тех или иных свойств материального объекта и законов его изменения вне зависимости от места и времени. Скрытые симметрии отвечают за тождественность частиц одного и того же вида, существование мировых констант и многие другие явления. Например, трансляционное преобразование пространственно-временных координат Галилея не изменяет законов механического движения. Более общее преобразование Лоренца оставляет неизменными уравнения электродинамики Максвелла. Важными симметриями являются также поворотная (например, окружность при повороте на любой угол совпадает сама с собой) и зеркальная (отсутствует различие между правым и левым). Совместная реализация зеркальной, трансляционной, поворотной и других инвариантностей порождает красоту и практическую целесообразность природных объектов.

Наличие симметрий напрямую связано с линейностью законов в физике: сила Ньютона пропорциональна ускорению; напряжение в законе Ома пропорционально силе тока; поток физической величины в модели Онсагера (для изотропной по Кюри системы) пропорционален приложенной термодинамической силе и т.п. Линейные законы плотно заселяют все этажи физического здания. Переход в область нелинейности нарушает симметрию, например, нарушение зеркальной инвариантности при радиоактивном распаде ядер приводит к различию между левым и правым.

Одной из важных симметрий является инвариантность законов природы при изменении масштабов (скейлинг). Она приводит к существованию самоподобных (фракталы: увеличение одного и того же затравочного объекта в определённое число раз) или самоаффинных (мультифракталы: существует целый спектр масштабов – иерархичность структуры и протекающих процессов) объектов: кристаллов и дендритов, снежинок и молний, и т.п. Нарушение скейлинговой инвариантности приводит к возникновению несора-

змерности базовых компонентов самоподобных фигур и к детерминированному хаосу в динамических системах.

Измерение линий, которые описываются недифференцируемыми в любой точке функциями (примером могут служить функции Вейерштрасса), отрезками прямой различной длины приводит к изменению понятия размерности, которая до Хаусдорфа и Безиковича могла быть только целочисленной. Применение размерности Хаусдорфа-Безиковича дало возможность Б. Мандельброту выделить новый класс геометрических фигур (фракталы и мультифракталы), топологическая размерность которых строго меньше размерности Хаусдорфа-Безиковича.

До появления работ Мандельброта в 1975 году фракталы считались нонсенсом и заповедником математических несуразностей (недифференцируемые функции Вейерштрасса, кривая Коха, дерево Пифагора, пыль Кантора и др.). Работы Мандельброта с учениками продемонстрировали возможность применения фрактальной геометрии для отображения созданных *Природой* структур: кристалликов льда, облаков и растений (рис. В.1), вихря и водосбора ручья (рис. В.2), флуктуаций высоты волн, биений человеческого сердца и других систем.



Рис. В.1. Фрактальная геометрия природы: (а) – снимок электронным микроскопом кристаллика льда; (б) – облака; (в) – капуста *Brassica cauliflora*.

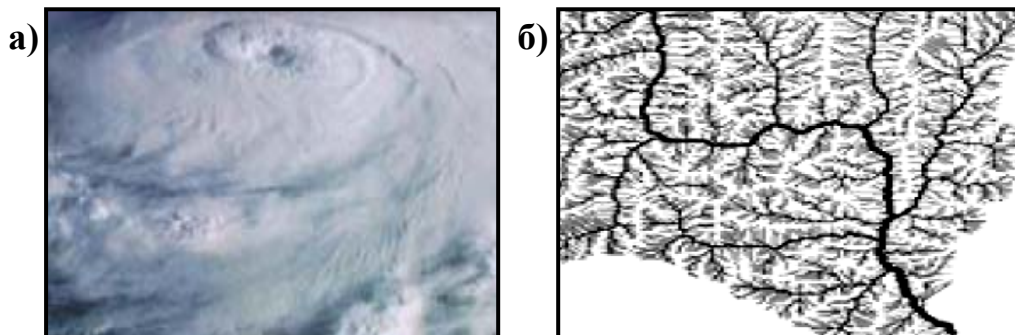
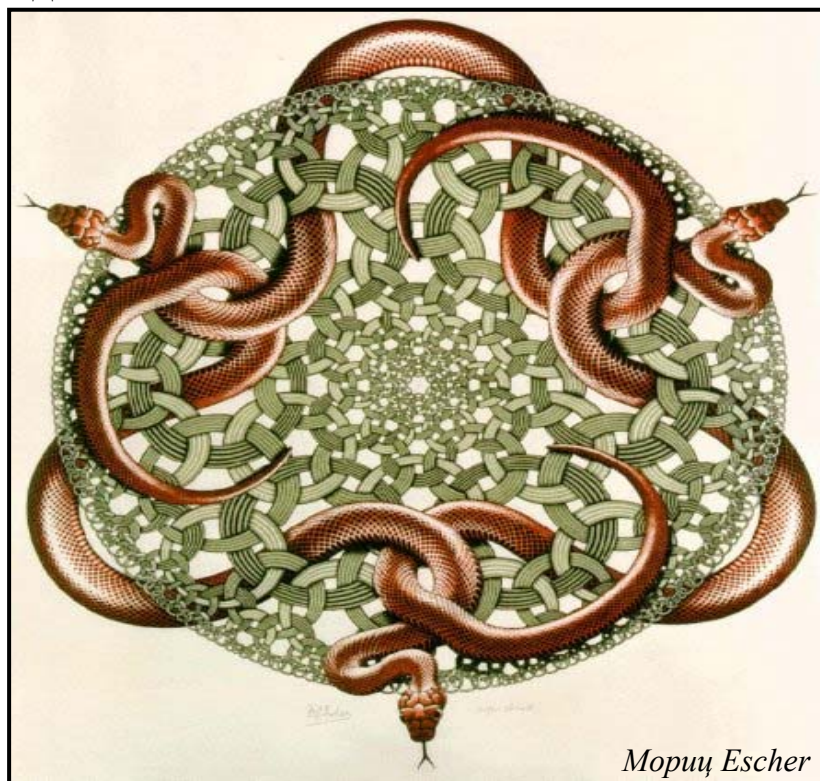


Рис. В.2. Спиральная структура вихря (а) и квазифрактальное строение водосбора ручья (б).

Моделирование природного явления или процесса подразумевает использование его геометрического строения. Именно поэтому в разных областях знания вырабатывались свои понятия для обозначения геометрии исследуемой задачи: четырёхмерное пространство-время в специальной и общей теориях относительности Эйнштейна; дислокация в физике пластических деформаций; морфология в теории биосистем и т.д. Появление фрактальной геометрии унифицирует геометрическое отображение реальности и даёт универсальный математический аппарат для учёта влияния масштабов на природное явление или процесс. В частности, фрактальные листья и деревья, мультифрактальные ландшафтные пейзажи и изменения уровней водных поверхностей достаточно правдоподобно отображают природную реальность. Широчайшее использование фракталов и мультифракталов говорит о том, что фрактальная геометрия уникальна и может использоваться в самых разных областях научного знания. Именно эта междисциплинарность фрактального подхода, интерес молодых физиков к красоте и практическому использованию фрактальной геометрии побудили автора к написанию данной книги.



Морис Эшер

Continuous effort – not strength or intelligence – is the key to unlocking our potential. (Постоянные усилия – не сила или ум – вот ключ к раскрытию нашего потенциала).

У. Черчилль

Глава 1. Подобие и фракталы

Геометрия таит в себе два великих сокровища. Одно из них – теорема Пифагора, а другое – разделение отрезка на две части в крайнем и среднем отношении. Первое подобно слитку золота, второе же – драгоценному камню.

Иоганн Кеплер

Можно возразить И. Кеплеру – геометрия таит в себе гораздо больше драгоценностей, чем узрел великий учёный средневековья. И одной из них является подобие, которое является неиссякаемым источником построения новых геометрических фигур, существенно отличающихся от “скучных” и “нудных” построений геометрии Евклида.

Элементами геометрии Евклида являются точка – объект без длины, ширины и высоты; линия – объект, который характеризуется длиной, но не имеет ширины и высоты; плоскость – объект, который описывается длиной и шириной, но не обладает свойством высоты; тело – объект с длиной, шириной и высотой. Эти понятия были выработаны человечеством на основе практического опыта работы с материальными предметами. С физической точки зрения линия возникает при движении точки. Если точка перемещается по плоскости или в пространстве без изменения направления движения (трансляция), то она движется по прямой линии. Прямая линия отличается тем, что любая её масштабная часть подобна исходной прямой в целом (рис 1.1), т.е. любой точке отрезка L_1L_2 соот-

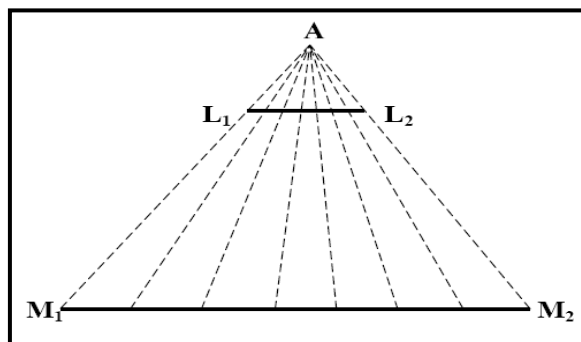


Рис. 1.1. Самоподобие прямой линии.

ветствует единственная точка на прямой M_1M_2 . Плоскость возникает при параллельном переносе прямой вдоль любого направления не совпадающего с самой прямой (рис.1.2). Здесь появляется особенность: перенос прямой вдоль неё самой не порождает плоскости, поэтому появляется выделенное направление с трансляционной симметрией. Появление этой симметрии приводит к нераз-

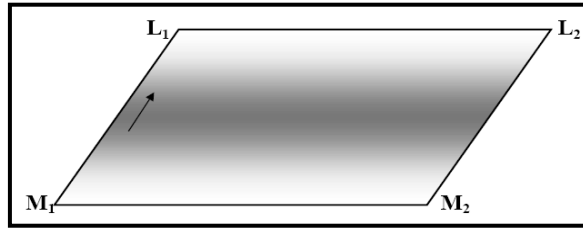


Рис. 1.2. Возникновение плоскости при трансляции прямой линии (стрелочкой показано перемещение прямой M_1M_2).

личности движений в одну или другую сторону и, как следствие, – к однородности пространства вдоль прямой линии. Таким образом, вырожденность появления качественно нового объекта (плоскости) обуславливает однородность пространства в целом, так как прямая может располагаться в пространстве произвольным образом. Как следствие указанного вырождения появляется инвариант движения (импульс перемещения). Однородность времени приводит к закону сохранения энергии. Плоскость возникает и при вращении прямой вокруг произвольной, перпендикулярно расположенной к прямой и не совпадающей с ней оси, проходящей через любую точку прямой (рис. 1.3). Неразличимость право- и левопо-

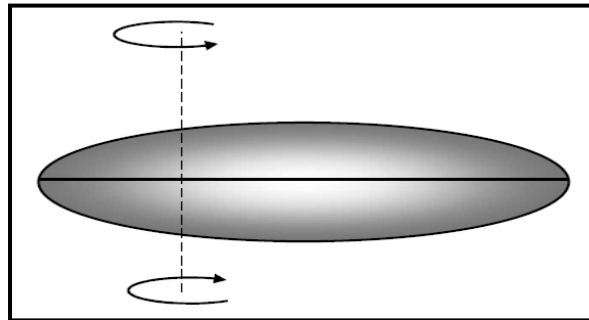


Рис. 1.3. Построение плоскости при вращении прямой линии (стрелочками показаны направления вращения прямой M_1M_2).

воротных способов построения плоскости свидетельствует о появлении другой симметрии – зеркальной, которая отображает факт неразличимости правого и левого. Так как это построение может быть выполнено для любого положения прямой в пространстве, то можно говорить о вращательной симметрии или появлении нового инварианта движения – сохранении момента импульса. Параллельный перенос кривой линии приводит к возникновению кривой поверхности, которая показана на рис 1.4 (трансляционное движение вдоль кривой линии невозможно в связи с постоянным изменением направления движения и порождением пространственного тела). В этом случае самоподобие кривой наблюдается в направлении трансляции.

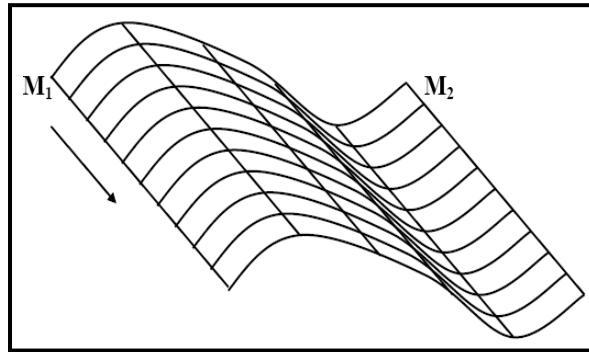


Рис. 1.4. Рождение кривой поверхности при трансляции кривой линии (стрелочкой показано перемещение кривой M_1M_2).

Аналогичное движение плоскости порождает пространственное, объёмное тело и имеет свои инварианты движения. На рис. 1.5 показано движение плоскости $M_1L_1L_2M_2$ в направлении перпендикулярном к плоскости, в результате образуется параллелепипед (частным случаем является куб, который возникает при трансляции прямой M_1M_2 на плоскости и в перпендикулярном направлении на расстояние равное длине прямой M_1M_2).

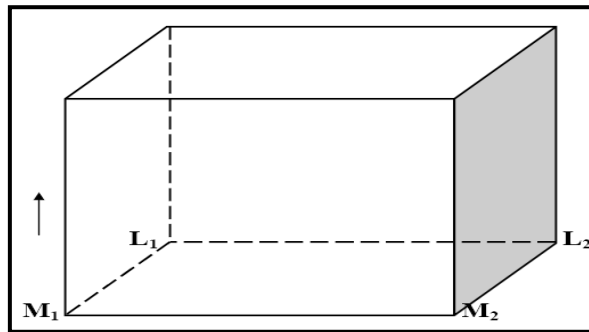


Рис. 1.5. Построение параллелепипеда при трансляции плоскости (стрелочкой показано перемещение плоскости $M_1L_1L_2M_2$).

Самоподобие прямой порождает подобие порождаемых ею фигур.

При аналитическом описании указанных элементов геометрии Евклида возникает потребность во введении такой характеристики, которая заменила бы слова “длина”, “ширина” и “высота”. Таким параметром является размерность геометрического объекта d , которая необязательно совпадает с топологической размерностью D_T . Под топологической размерностью понимают минимальное количество вещественных параметров для описания точек выбранного пространства. Для рассмотренных объектов евклидовой геометрии выполняется соотношение $d \leq D_T$ (для евклидова пространства топологическая размерность $D_T = 3$, для точки размерность $d = 0$, для произвольной линии — $d = 1$, для плоскости — $d = 2$, для пространственного тела — $d = 3$).

Основатель теории фракталов Б. Мандельброт (1984) так писал о геометрии Евклида: “Почему геометрию называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в её неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря... Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно. Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные...”

Фракталом (от латинского слова “fractus” – *изломанный*; в английском варианте слово “fractional” означает *дробный*) называется структура, состоящая из частей, которые подобны исходному объекту в целом и имеют *размерность Хаусдорфа-Безиковича* D , которая *строго больше* её топологической размерности D_T : $D > D_T$. Фракталы могут отображаться линиями, плоскостями, пространственными телами.

Ярким представителем фрактальной кривой является траектория движения броуновской частицы (рис. 1.6). Увеличение лю-

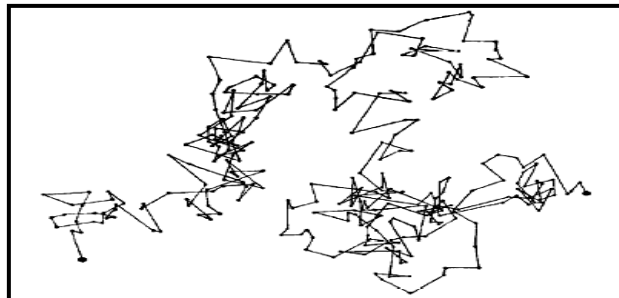


Рис. 1.6. Хаотическая траектория движения частицы Броуна.

бого её участка в 10 раз приводит к увеличению числа звеньев в 100 раз, т.е. для кривой Броуна размерность Хаусдорфа-Безиковича равна 2. Если бы броуновская частица двигалась по плоскости, то её траектория прошла бы по истечении длительного времени через все точки плоскости. Однако в силу самопересечения кривой движения этот феномен не наблюдается. Кроме того, начав движение из некоторой точки, броуновская частица может вернуться в сколь угодно малую окрестность этой точки, потому что вероятность этого события в случае плоскости равна единице. При движении в пространстве вероятность возврата в малую окрестность начальной точки движения меньше единицы. Отметим, что границы масштабной инвариантности для блуждающей частицы Броуна порядка 10^8 : от длины свободного пробега ($10 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$) до разме-

ров сосуда ($\approx 0,1$ м), причём каждое звено траектории образует *континуум*. Рассмотренный пример показывает, что при размерности Хаусдорфа-Безиковича равной двум геометрическим объектом не обязательно будет плоскость. Этой фигурой может быть и топологически одномерная линия. Отметим, что траектория броуновской частицы достаточно близко подходит под определение недифференцируемых *функций Вейерштрасса*, которые определяются формулой

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k x)$$

(α – вещественное число, а β – нечётное число), где множители α^k обеспечивают сходимость приведенного ряда. Вейерштрасс показал, что при выполнении неравенства $\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2}$ функция $w(x)$ во всех точках непрерывна, но не дифференцируема. Самоподобная функция Вейерштрасса с коэффициентом β

$$w_L(\beta x) = \sum_{k=1}^L \cos(\beta^k \beta x) = \sum_{k=1}^L \cos(\beta^{k+1} x) = \sum_{k=1}^{L+1} \cos(\beta^k x) = w_{L+1}(x)$$

практически совпадает с исходной функцией, т.е. является *асимптотически самоподобной*. Если составить музыкальный ряд с помощью функции Вейерштрасса, то при удвоении скорости воспроизведения звуки будут звучать *не на октаву выше*, как должно быть, а *на полтона ниже*. Функции Вейерштрасса описывают результирующую суммы колебаний с разными периодами. Отсутствие в природе идеально периодических процессов, взаимодействие ограниченного объекта с внешней средой, возникновение спонтанных флуктуаций, стремление к выживанию и другие причины приводят к нарушению самоподобия, что отражается в виде разнообразия форм и способов существования материи.

Фракталы можно разделить на детерминированные (конструктивные, регулярные), построение которых ведётся в соответствии с заданным алгоритмом или функциональной зависимостью, и хаотические (случайные, псевдослучайные), в алгоритме построения которых присутствует случайный (или псевдослучайный) элемент. С другой стороны фракталы можно разделить на статические (итерация вещественных функций), которые строятся согласно линейному закону преобразования базисного элемента (при этом используются трансляционные, поворотные и сжимающие-растягиваю-

щие операции) и динамические (комплексные и гиперкомплексные) с нелинейным законом итерационных преобразований. Одной из отличительных черт фрактальных множеств является их самоподобие при изменении масштаба (так называемая *скейлинговая инвариантность*). Самоподобные множества можно разделить на одномасштабные (*фракталы*) и многомасштабные, которые имеют спектр скейлингов (*мультифракталы*).

Для иллюстрации самоподобия и определения размерности геометрического объекта с помощью масштабного преобразования разделим отрезок прямой, квадрат и куб на N равных частей (рис. 1.7). Тогда каждая сконструированная часть будет подобна исход-



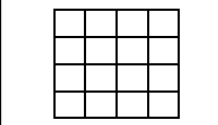

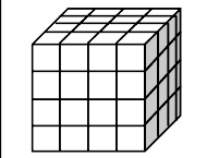

Исходный объект	Элемент подобия	Параметры подобия
		$N=4, k=1/4, d=1.$
		$N=16, k=1/4, d=2.$
		$N=64, k=1/4, d=3.$

Рис. 1.7. Размерность и коэффициент подобия геометрических фигур.

ному объекту, но уменьшена в $1/k^d$ раз (k – коэффициент подобия). Числа N и $1/k^d$ связаны между собой равенством $Nk^d=1$. Из этого равенства определим размерность объекта $d = \frac{\ln N}{\ln(1/k)}$ (в данном оп-

ределении можно использовать логарифм по любому основанию). Иная форма записи для размерности геометрической фигуры с использованием одного из свойств логарифмической функции имеет вид: $d = \log_{(1/k)} N$. Эта размерность совпадает с минимальной размерностью пространства (топологической размерностью), в котором отображается геометрическая фигура или её часть: отрезок прямой линии – в одномерном, квадрат – в двумерном, куб – в трёхмерном пространствах. Отсюда следует тот факт, что *самоподобие* геометрических фигур достигается *изменением масштаба оригинала* как в сторону увеличения ($k > 1$), так и в сторону уменьшения его размеров ($k < 1$).

1.1. Самоподобие

Природа полна аналогий, и в любой отрасли человеческого знания можно найти бесчисленные метафоры для обозначения феноменов, наблюдаемых в какой-либо другой области.

Мидхат Газале

Ранее многие исследователи в области физики и математики считали, что явления и процессы должны описываться дифференцируемыми функциями. Однако такие функции являются скорее исключением, чем правилом, в организации природы. Примером может служить траектория броуновской частицы (рис. 1.6), которая является недифференцируемой кривой: на этой кривой присутствует большое число точек, в которых производная не существует. Среди аналогичных объектов присутствуют такие, которые при любом увеличении масштабов содержат одинаковые структуры – это фрактальные множества. Самоподобие фракталов привлекает внимание исследователей потому, что этим свойством обладают все объекты природы на всех уровнях её организации.

В качестве самоподобных структур можно привести русские матрёшки, ε -разложение Вильсона-Когута (*теория перенормировок*), логарифмическую спираль, H-фрактал (рис. 1.8), снежинку

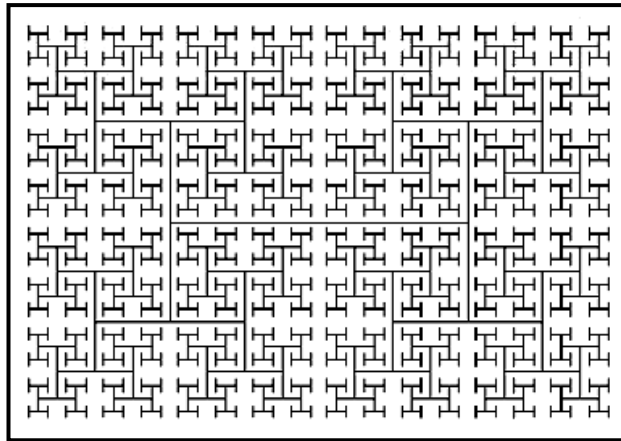


Рис. 1.8. Конструктивный H-фрактал.

Коха и т.п. Самоподобие отображает *иерархическую* сущность самоорганизации материального мира на всех уровнях его существования: от самых малых до огромных масштабов. Выбор *скейлинговой* (масштабной) области в исследуемом объекте может отразить те свойства системы, которые игнорируются при более крупном масштабе. Самоподобие приводит к тому, что мелкие детали вкрапляются в крупные и становятся “незаметными”, хотя они имеют те же свойства, что и большие “кирпичики” мироздания.

В качестве примера самоподобной фигуры рассмотрим логарифмическую спираль. Согласно Газале, поворот радиус-вектора r_i на произвольный угол φ с удлинением в k раз (рис. 1.9) описы-

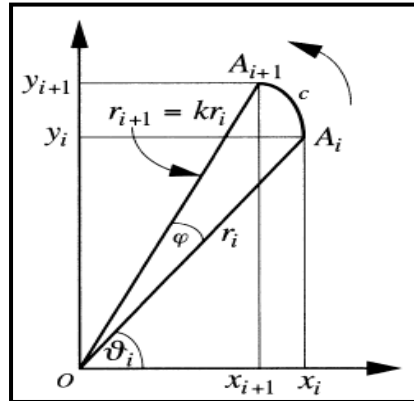


Рис. 1.9. Поворот радиус-вектора с увеличением.

вается уравнениями, которые в матричном виде выглядят так:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

После n поворотов на угол φ эти уравнения принимают вид:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k^n \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = k^n \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Если начальная точка лежит на оси Ox , то $y_i=0$. В этом случае после n поворотов на угол φ координаты новой точки определяются начальной координатой абсциссы по формулам:

$$x_n = k^n x_0 \cos(n\varphi) \text{ и } y_n = k^n x_0 \sin(n\varphi).$$

Следовательно, $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = k^n r_0$, а угол поворота $\vartheta_n = n\varphi$. Из этих формул видно, что при повороте на произвольный угол ϑ радиус-вектор увеличится в $k^{\vartheta/\varphi}$ раз. Тогда радиус-вектор можно задать формулой $r(\vartheta) = r_0 e^{\lambda\vartheta}$, где $\lambda = (\ln k) / \varphi$ – коэффициент расширения. Такая спираль называется *логарифмической*. Логарифмическая спираль самоподобна, так как существует такой угол θ , при котором увеличенная в k раз спираль совпадает с исходной спиралью. Коэффициент расширения определяет котангенс постоянного угла β между радиус-вектором r и касательной к нормали в любой точке логарифмической спирали (рис.1.10). Это означает, что в каждой четверти декартовой плоскости точки спирали расположены внутри подобных прямоугольных треугольников. Спираль достаточно часто возникает в различных физических задачах, например, фазовые траектории движения в случае устойчивого и неустойчивого

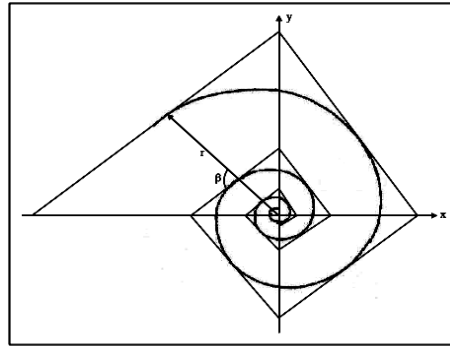


Рис. 1.10. Самоподобие логарифмической спирали.

фокусов представляют собой спирали, что говорит о возникновении самоподобия при таком типе движения.

Природа использует самоподобие (фрактальность) логарифмической спирали при построении живых организмов, например, моллюсков (рис 1.12).

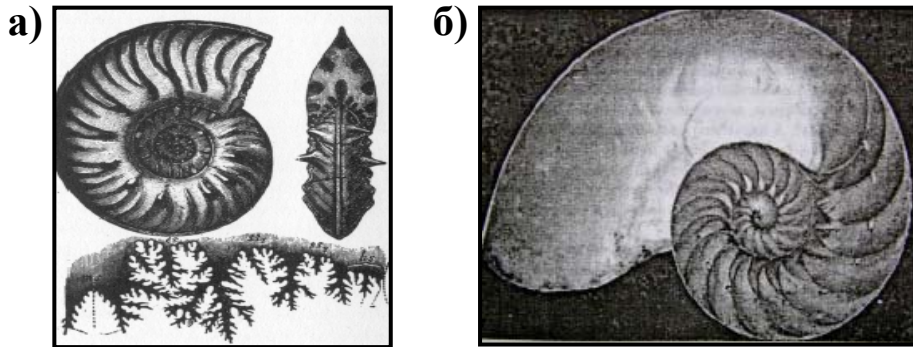


Рис. 1.12. Аммонит и его сutura (а), *Nautilus pompilius* (б).

Рис. 1.12 показывает, что самоподобие является неотъемлемым атрибутом природы: элементарные частицы подобны (*тождественны*) друг другу; броуновское движение демонстрирует вероятностное самоподобие и т.д. Подобие было использовано Бахом для построения темперированного, двенадцатитонового строя (для этого строя отношение частот соседних нот постоянно и равно $2^{1/12}$ октавы, которая разделяется на 12 полутонов) в музыке. Свойство самоподобия наиболее интенсивно использовал в своём творчестве художник Эшер (рис. 1.13).

Самоподобие пронизывает все уровни организации, существования и фиксации устройства материального мира, т.е. *скейлинг* (или масштабная инвариантность) является важной характеристикой природного объекта. Самоподобие может быть детерминированным и хаотическим, непрерывным (траектория движения броуновской частицы) и дискретным (русские матрёшки). Некоторые виды подобия сохраняются при значительном увеличении масштаба, а другие исчезают при незначительном изменении геометри-



Рис. 1.13. Самоподобие в картинах Морица Эшера.

ческих размеров (*ограниченность* скейлинга). Иногда масштабно изменённые объекты математически точно воспроизводят геометрию исходной фигуры, но в природе эта точность теряется за счёт воздействия различных факторов, скейлинговая инвариантность наблюдается только асимптотически. Самоподобие бывает явным или скрытым, поэтому его выявление является важной задачей естествознания.

Фрактальная геометрия используется для описания вида поверхностей твёрдых тел; несоизмеримых структур; квазикристаллов; диффузионного роста зародыша новой фазы; рассеяния и поглощения излучения в пористых средах; при моделировании перемежаемости в сильно турбулентных потоках; кластеризации галактик во Вселенной; береговой линии государств; мембранных поверхностей; структуры транспортных артерий; моделирования молекулярных ландшафтов; горных и лесных массивов; молний; облаков и других природных явлений.

Фрактальная геометрия и динамика базируются на применении однородных функций, которые зачастую отображаются степенными законами.

1.2. Однородные функции и скейлинг

Теперь уже недостаточно открыть основные законы и понять, как работает мир “в принципе”. Всё более и более важным становится выяснение того, каким образом эти принципы проявляют себя в реальности.

Хайнц-Отто Пайтген

Исследуя законы движения планет И. Ньютон показал, что при выполнении масштабного соотношения между частотой обращения ω и радиусом круговой орбиты r вида $\omega \sim r^{2n}$, гравитационный потенциал должен быть пропорциональным r^{2-2n} . При $n=3/2$

Ньютон получил закон всемирного тяготения; при $n=2$ тело приближается (удаляется) по спирали к центру притяжения; при $n=5/2$ одной из траекторий движения является кардиоида (“сердечко”). Таким образом, степенные законы являются неиссякаемыми источниками подобия. Так исследование частоты падения космических обломков на Землю показывает, что каждые 30 микросекунд в атмосферу попадает частица размером 1 микрон (10^{-6} м), метеориты с диаметром в 100 м встречаются с Землёй один раз в 10000 лет, а тела астрономических размеров (~ 10 км= 10000 м) посещают земную атмосферу 1 раз в 10^8 лет. Падение такого или более крупного метеорита может привести к катастрофе планетарного масштаба и к вымиранию биологических видов. Изучение зависимости числа видов сухопутных животных от длины их тела демонстрирует показательный закон с индексом степени $n=-2$ (рис. 1.14).

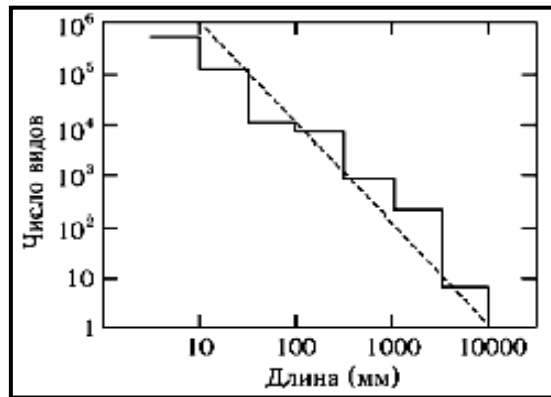


Рис. 1.14. Зависимость числа видов сухопутных животных от длины их тела.

Галилео Галилей первым открыл самоподобие законов физики. Бросая маленькие и большие камешки с Пизанской башни, Галилей заметил: они падают с почти одинаковой скоростью. Он установил, что время падения прямо пропорционально квадратному корню из высоты башни. Самоподобие закона Галилея имеет ограничение в связи с уменьшением притяжения Земли при увеличении высоты башни до астрономических размеров. Закон всемирного тяготения только приближённо описывается формулой Ньютона. Современные эксперименты требуют введения дополнительного слагаемого в теоретическую формулу Ньютона, которое связано с быстро убывающими силами.

Художник, изобретатель и учёный Леонардо да Винчи показал, что ствол дерева диаметром d разделяется на две ветви с диаметрами d_1 и d_2 , причём они связаны между собой равенством

$$\boxed{d^\sigma = d_1^\sigma + d_2^\sigma} \quad (\sigma=2). \quad (1.1)$$

Формула Леонардо да Винчи лежит в основе “трубчатой” модели структуры деревьев ($\sigma=2$), теории слияния двух рек ($\sigma=2$) и транспортных магистралей ($\sigma=1$), ему удовлетворяют артерии и вены в сосудистой системе млекопитающих ($\sigma \approx 2,7$), бронхи лёгкого ($\sigma \approx 3$). Концепция скейлинга подсознательно используется человеком при создании музыкальных произведений: музыка красива, если в ней присутствует несколько изменений тональности (мультифрактальность) и ритма (ограниченная масштабность).

Достаточно широко в физике используют гиперболические связи между величинами, в частности, Гейзенберг получил соотношения неопределённостей в виде: $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ или $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ (Δp и Δx ; ΔE и Δt – погрешности измерения импульса и местоположения; энергии и времени, соответственно, $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек – постоянная Планка). Это неравенство показывает, что для точной фиксации местонахождения элементарной частицы необходимо использовать фотоны с очень большими импульсами (короткие по длине электромагнитные волны), т.е. при высокоточном измерении пространственной координаты частицы невозможно определить её импульс в связи с возмущением движения измеряющими волнами. Наибольшая точность измерения переменных p и x (E и t) достигается тогда, когда обе измеряемые величины подчиняются *нормальному закону (закону Гаусса)*. Скейлинговая инвариантность соотношения неопределённостей Гейзенберга наблюдается в достаточно широких диапазонах энергий и временных интервалов, импульсов и координат. Соотношение неопределённостей Гейзенберга является следствием существования природных масштабов (размеров элементарных частиц). При их отсутствии все элементарные частицы превратились бы в точки, т.е. просто схлопнулись. В этой связи *вакуум* (пространство без материи) состоит из флуктуаций, которые имеют конечную энергию и существуют в течение конечного промежутка времени (косвенным подтверждением этой гипотезы являются данные, полученные при изучении сверхтонкой структуры атомных спектров).

Самоподобие наблюдается не только при целочисленных, но и при дробных показателях степени. Дробные индексы степени встречаются в разных разделах физики и указывают на существо-

вание *универсальности* физических законов при описании, например, сосуществующих фаз и спиновых систем; ферромагнетизма и сверхпроводимости. Зачастую функция состояния по одному из своих аргументов может быть представлена степенным законом (например, функция трёх переменных $f(x; y; z) = x^\alpha g\left(\frac{y}{x^\beta}; \frac{z}{x^\mu}\right)$), т.е. является самоподобной по этой переменной. Так в термодинамике введён закон *соответственных состояний*, который утверждает подобие поведения веществ вблизи критической точки фазового перехода. Если записать все параметры состояния системы в безразмерном виде (например, $l = d/d_c$, где d_c – значение параметра d в критической точке), то все вещества демонстрируют универсальность поведения вблизи критической точки. Скейлинг степенных функций связан с отсутствием у них естественных масштабов длины. Кроме того, физические и другие ограничения приводят к разрушению масштабной инвариантности: упругая пружина не может линейно растягиваться до бесконечности, всегда существует критическая длина, при достижении которой пружина претерпевает разрыв. Следовательно, ограничения не геометрической природы определяют существование характеристических или критических масштабов, до достижения которых наблюдается подобие.

Универсальность поведения вещества в окрестности критической точки фазового перехода привела к созданию теории перенормировок (*метод ренорм-группы Вильсона*). Например, изучение поведения теплоёмкости $c(T)$ в зависимости от температуры T в окрестности критической температуры T_c показало наличие простого степенного закона: $c(T) - c(T_c) \sim |T - T_c|^{-\alpha}$ (разности вида $c(T) - c(T_c)$ называют *параметрами порядка*). Универсальность природы проявляется в том, что критический индекс α имеет одно и то же значение для различных веществ. Он зависит от размерности пространства, в котором протекает процесс, и от *числа степеней свободы* параметра порядка (числа ограничений, накладываемых на параметр порядка).

В силу сложности устройства реальных систем и протекающих в них процессов исследователь вынужден моделировать ситуацию, выдвигая простые гипотезы. Так изучение магнитных спиновых систем привело Изинга к простой модели: спины могут занимать только два положения (“вверх” \uparrow и “вниз” \downarrow) и взаимодей-

ствуют только с ближайшими соседями. Модель Изинга приводит к существованию двух критических температур: 1) полностью упорядоченное состояние при $T_c = 0$, когда все спины направлены в одну сторону; 2) полностью хаотическое распределение магнитных моментов при $T_c = \infty$, при котором наблюдается беспорядочная ориентация спинов. Для трёхмерной модели Изинга компьютерные вычисления дают для параметра порядка (средней спонтанной намагниченности $\bar{M}(T)$) выражение вида $\bar{M}(T) \sim (T_c - T)^{0,325}$ при $T < T_c$. Критический индекс практически равен $1/3$, такая же температурная зависимость наблюдается и для разности плотностей сосуществующих фаз газ-жидкость (универсальность поведения вблизи критической точки перехода).

Одним из достижений теории фракталов является установление связи перенормировки с самоподобием исследуемого объекта. На рис. 1.15 показаны 3 шага построения ферро- и антиферромагнитной иерархических, самоподобных решёток. Чёрным и светлым точкам на рис. 1.15б соответствуют разнонаправленные спи-

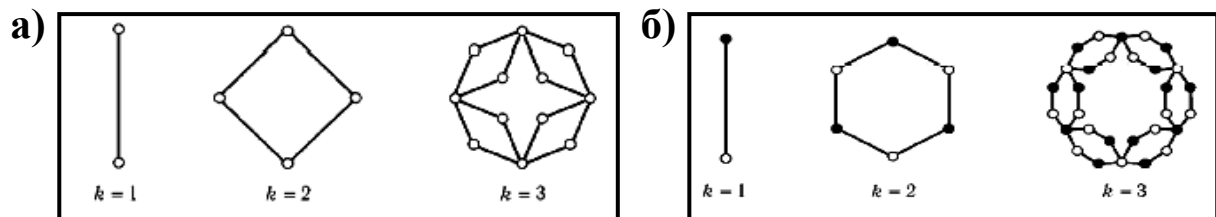


Рис. 1.15. Построение ферро- (а) и антиферромагнитных (б) решёток.

ны. Так как решётки подобны, то их можно характеризовать фрактальной размерностью Хаусдорфа-Безиковича. Компьютерное экспериментирование с иерархическими решётками кристаллов показало, что одинаковым решёткам соответствуют разные критические индексы, это привело к снижению научного интереса к теории ренорм-группы. Несмотря на то, что ренорм-группа имеет ограниченную область применимости, сходимость её рядов вызывает сомнение, но она всё-таки является хорошим инструментом для отыскания критических индексов и установления взаимоотношений между ними.

Рассмотрим простой пример применения теории Вильсона к треугольной решётке, для которой порог перколяции $p_c = 1/2$, а критический индекс корреляционной длины равен $4/3$. В методе Вильсона используется масштабное увеличение самоподобной решётки, т.е. 3 узла исходной решётки заменяются одним “сверхузлом”

новой решётки. “Сверхузел” считается занятым, если он представлен *кластером*, для которого заполнены не менее двух узлов исходной решётки. Обозначим через p вероятность того, что заполнен узел исходной решётки (вероятность того, что узел свободен равна $q = 1 - p$). Тогда вероятность все три узла равна p^3 , а два узла — $3p^2q$. Следовательно, вероятность образования кластера определяется по формуле $P = p^3 + 3p^2(1-p)$. При достижении критического значения p_c эта вероятность равна $P = p = p_c$. Кубическое уравнение имеет два очевидных (0 и 1) и одно нетривиальное ($p_c = 1/2$) решения. Последний корень совпадает с известным порогом перколяции для треугольной решётки, что указывает на истинность скейлинговой гипотезы. Проверим этот факт, вычислив критический индекс ν корреляционной длины ξ : $\xi = \sigma |p - p_c|^{-\nu}$ (σ — константа). Для “сверхрешётки” приведенное равенство имеет вид $E = \lambda c |P - p_c|^{-\nu}$ (λ — коэффициент подобия между исходной решёткой и “сверхрешёткой”). Подобие требует равенства этих величин $E = \xi$, следовательно, критический индекс $\nu = \ln \lambda / \ln[(P - p_c)/(p - p_c)]$. В окрестности критической точки представим вероятность P в виде ряда Тейлора $P = p_c + 3(p - p_c)/2 + \dots$, тогда дробь $(P - p_c)/(p - p_c) = 3/2$. При значении коэффициента подобия $\lambda = \sqrt{3}$ критический индекс

$$\nu \cong 1,355 \approx 4/3.$$

Для правильного вычисления критических индексов, по-видимому, надо использовать разложение функций не в ряд Тейлора, а в обобщённые ряды с дробными показателями степени.

Однородные функции описывают не только детерминированные процессы, но и хаотические явления. Степенные законы с целочисленными показателями степени описывают спектры мощности разных шумов (“белый” не зависит от частоты сигнала; “*фликер*” — обратно пропорционален частоте; “коричневый” (броуновский, от английского слова “*brown*”=“*коричневый*”) — обратно пропорционален квадрату частоты; “чёрный” — показатель степени в обратной пропорциональности частоте превышает двойку). Однако в акустических исследованиях используют ещё “розовый” шум с дробным показателем степени, для которого мощность постоянна в пределах октавы, а не герца.

Однородные функции используют не только в физике или хи-

мии, но и в биологии (субъективная громкость воспринимаемого человеческим ухом звука прямо пропорциональна его интенсивности в степени 0,3), экономике (например, закон Парето), в лингвистике (гиперболический закон Ципфа) и т.п. Отличие показателей степени от целочисленных значений указывает на необходимость обобщения понятия размерности геометрических фигур.

1.3. Размерность Хаусдорфа-Безиковича

Формула может описать лишь малую долю взаимоотношений, в то время как человеческий глаз обладает огромными способностями к интеграции и различению.

Бенуа Б. Мандельброт

Прямая линия обладает трансляционной и скейлинговой инвариантностью, т.е. самоподобна при параллельном переносе и изменении масштаба. При равномерном движении вдоль прямой из точки \bar{r}_0 со скоростью \bar{v} радиус-вектор \bar{r} с течением времени t изменяется согласно формуле

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}t. \quad (1.2)$$

Выполним растяжение ($k > 1$) или сжатие ($k < 1$) Вселенной, тогда соотношение (1.2) примет вид:

$$\bar{r}' = k\bar{r} = k(\bar{r}_0 + \bar{v}t) = k\bar{r}_0 + k\bar{v}t = \bar{r}_0 + \bar{v}t' + (k-1)\bar{r}_0, \quad (1.3)$$

где введено обозначение $t' = kt$. Из формулы (1.3) видно, что параллельный перенос прямой на величину $(k-1)\bar{r}_0$ приводит к совпадению с исходной прямой, что и подтверждает масштабную инвариантность прямой Евклида в новой Вселенной. Другие геометрические фигуры, как и фракталы, не обладают такими свойствами, но им присущи свои инвариантности, например, окружность обладает поворотным самоподобием и зеркальной симметрией относительно диаметра.

Скейлинговая инвариантность прямой связана с её бесконечной длиной и нарушается для отрезков, так как они имеют конечную длину. Инвариантность нарушается при изменении масштаба конечного отрезка при сохранении подобия. В этой связи возникает вопрос об измерении длин отрезков. Подобрав соответствующим образом коэффициент k можно добиться того, что полученный после масштабного преобразования отрезок покроем N раз первоначальный отрезок прямой. В этом случае говорят о сораз-

мерности конечных множеств и выборе подходящего масштаба измерения. Если считать длину первоначального отрезка равной L , то длина масштаба будет равна $l = L/N$. Изменяя число N можно добиться любой длины масштабного отрезка. Очевидно, что устремление N к бесконечности не изменит длины первоначального отрезка

$$\boxed{L(l) = lN}. \quad (1.4)$$

Поэтому отрезки прямой, квадраты и кубы могут быть использованы для измерения длин кривых, площадей поверхностей и объёмов тел. Так площадь

$$\boxed{S = l^2 N = L(l) l^1}, \quad (1.5)$$

а объём

$$\boxed{V = l^3 N = L(l) l^2}. \quad (1.6)$$

Таким образом, процесс измерения сводится к выбору меры $L(l)$ и масштаба l .

Уменьшение первоначального отрезка в k раз задаёт масштаб

$$\boxed{l = L(l) / k}. \quad (1.7)$$

Подставив формулу (1.7) в формулы (1.4)-(1.6) получим

$$L(l) = L(l)N/k; \quad S = L^2(l)N/k^2; \quad V = L^3(l)N/k^3. \quad (1.8)$$

Из формул (1.8) видно, что выражения $1/k, 1/k^2, 1/k^3, \dots, 1/k^d$ являются множителями подобия, а из первого равенства (1.8) следует, что надо положить N/k^d равным 1, тогда число

$$\boxed{d = \frac{\ln N}{\ln(1/k)}} \quad (1.9)$$

будет определять размерность геометрических фигур с выбранной мерой $L(l)$.

Для измерения кривых фигур коэффициент подобия надо устремить к нулю для совмещения выбранного масштаба с бесконечно малым участком фигуры. Такой подход был предложен независимо друг от друга Ф. Хаусдорфом и А.С. Безиковичем в 1919 году. Таким образом, размерность Хаусдорфа-Безиковича определяется соотношением

$$\boxed{D = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N}{\ln(1/k)} \right)}. \quad (1.10)$$

В отличие от топологической размерности, которая может принимать только целочисленные значения, размерность Хаусдорфа-Безиковича может быть и дробной. В связи с последним замечанием размерность Хаусдорфа-Безиковича называется *фрактальной* раз-

мерностью. Вычисление размерности фракталов будет продемонстрировано в Главе 2 для конкретных фигур. Размерность Хаусдорфа-Безиковича определяет нижнюю границу допустимых масштабов, применяемых для измерения геометрических фигур. Помимо этой размерности были предложены и другие её определения.

1.4. Размерность Реньи

Бытие человека базируется на двух китах: чувствах и знаниях. Чувства без знаний не эффективны; знания без чувств бесчеловечны.

В. Вайскопф

Скейлинговое подобие нарушается при учёте физических, химических, биологических, экономико-социальных и других факторов. Галилей, исследуя зависимость прочности костей животных от их габаритов, пришёл к следующему выводу: животное, имеющее по отношению к своим сородичам вдвое большие размеры, должно весить в 8 раз больше, чем они. Однако более широкие кости лап имеют только *вчетверо* большее поперечное сечение и могут выдерживать только четырёхкратное увеличение веса. Это приводит к тому, что размер костей увеличивается быстрее, чем изменяются остальные части тела животного. Нарушение подобия происходит и при рассеивании энергии теплокровными существами: излучаемая энергия должна быть пропорциональна площади поверхности их тела с показателем степени $\frac{2}{3}$ (*индексом рассеивания*), но экспериментальные данные приводят к индексу рассеивания, равному $\frac{3}{4}$ (рис. 1.16).

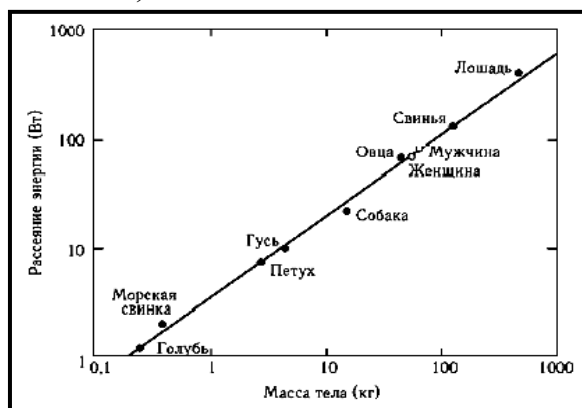


Рис. 1.16. Рассеивание энергии теплокровными животными.

Подобие в динамических задачах сводится к использованию однородных функций, описывающих поведение исследуемой системы. Если потенциальная энергия тела описывается однородной функцией пространственных координат порядка n , т.е. $U(\lambda r) = \lambda^n U(r)$,

то при масштабировании времени в ω раз скорость движения изменится в λ/ω раз, а кинетическая энергия – в $(\lambda/\omega)^2$ раз. Если коэффициенты подобия совпадают $(\lambda/\omega)^2 = \lambda^n$, то лагранжиан будет однородной функцией порядка n , а уравнения движения останутся неизменными для преобразования сжатия-растяжения пространственно-временного континуума (*универсальность* поведения динамических систем вне зависимости от их масштабов). Наиболее часто однородные функции используются в равновесной термодинамике, поэтому многие термодинамические системы демонстрируют универсальное поведение.

Нарушение скейлинга (в частности, из-за его ограниченности) приводит к изменению поведения динамических и термодинамических объектов. Нарушение скейлинга указывает на пирамидальную организацию природы: *на смену одной однородной функции состояния приходит другая зависимость между параметрами системы с новыми скейлинговыми свойствами.*

Для описания смены масштабной инвариантности воспользуемся обобщённым определением *энтропии Реньи* (1955). Оно содержит моменты порядка ν вероятностей p_i :

$$S_\nu = \frac{1}{\nu - 1} \ln \left(\sum_{n=1}^N p_n^\nu \right), \quad (1.11)$$

где ν – произвольное вещественное число. Отметим, что при $\nu \rightarrow 1$ из формулы (1.11) следует стандартное выражение для энтропии

$$S_1 = - \sum_{n=1}^N p_n \ln p_n. \quad (1.12)$$

Определим *обобщённую размерность* формулой

$$D_\nu = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{S_\nu}{\ln k}. \quad (1.13)$$

Из формулы (1.13) видно, что при больших отрицательных значениях параметра ν размерность формируется малыми вероятностями, а при больших положительных значениях этого параметра размерность формируется теми вероятностями, которые близки к единице. При $\nu = 0$ *размерность Реньи* совпадает с размерностью Хаусдорфа-Безиковича для фракталов.

Для фрактальных фигур со свойством самоподобия вероятности $p_i = 1/N$, а энтропия не зависит от порядка ν :

$$S_\nu = (\nu - 1)^{-1} \ln \left(N (1/N)^\nu \right) = -\ln N, \quad (1.14)$$

что и определяет особый статус самоподобных фракталов. Из оп-

ределения размерности Реньи следует, что самоподобный фрактал покрывается одинаковыми “ячейками”, число которых вычисляется по формуле

$$n(v) = (1 - v) D_v. \quad (1.15)$$

При значении $v=1$ величина D_1 задаёт *информационную*, а при $v=2$ *корреляционную* $D_2 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{S_2}{\ln k}$ размерности. Энтропия s_2 определяется вероятностями обнаружения подобного элемента фрактального множества на расстоянии k от наугад выбранного другого элемента этого множества. Эти размерности показывают иерархию масштабов, зависящих от того, какие моменты вероятностей участвуют в их формировании.

Достижение границы существования одного масштаба сопровождается переходом к другому масштабу, иной однородной функции состояния, возникает динамический хаос, изменяется структура физического тела. Так в 1984 году Д. Шехтман с сотр. обнаружили аморфно-кристаллическое состояние быстроохлаждённого сплава алюминия с марганцем. Такие системы получили название *квазикристаллов*. Они характеризуются наличием симметрии пятого порядка (примером фигуры с осью симметрии пятого порядка может служить пятиконечная звезда или *пентаграмма*, *Соломонова печать*, *ведьмин след*, *гоблинский крест*), запрещённой для периодических (самоподобных) кристаллов. Следовательно, фракталы являются неотъемлемой частью природного творчества.

Помимо фракталов существуют геометрические фигуры, состоящие из частей с разными скейлинговыми коэффициентами подобия (мультифракталы). Эти объекты характеризуются набором (*спектром*) несоразмерных масштабов, которые присущи отдельно взятым однородным фрактальным подмножествам. Исследование свойств мультифракталов будет проведено в Главе 7. Здесь отметим только одно их качество: совокупность различных однородных монофракталов порождает неоднородную структуру с бесконечным или конечным спектром размерностей. Мультифракталы отображают такие физические явления и процессы, как сложные сигналы, возникновение турбулентности, строение объектов, созданных природой, стохастические транспортные движения и т.п. Так как мультифракталы состоят из монофракталов, то проведём классификацию последних и рассмотрим методы их построения.

Глава 2. Конструктивные (детерминированные, регулярные) фракталы

Фрактал – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба.

Н.А. Леверрье

Конструктивными фрактальными объектами называются геометрические фигуры, которые строят по заданной процедуре с использованием комбинаций линейных преобразований одного и того же базисного фрагмента (параллельные переносы, повороты и растяжения-сжатия). Например, фракталом является фигура, которая получается путём удвоения отрезка прямой с последующим уменьшением их длины в k раз, их поворотом на определённый угол и присоединением к одному концу отрезка (рис. 2.1).

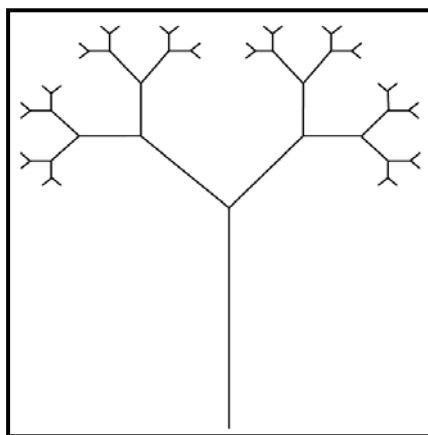


Рис. 2.1. Конструктивный Y-фрактал.

Фракталы обладают следующими свойствами:

- всегда содержат один и тот же фрагмент с разными размерами и одним и тем же коэффициентом подобия;
- в основном они не могут быть описаны стандартным геометрическим языком;
- обязательно содержат явное, приближённое или асимптотическое подобие элементов;
- размерность фрактальной фигуры всегда больше её топологической размерности;
- в большинстве случаев фрактальное множество задаётся комбинацией определённых преобразований;
- существуют фрактальные множества (мультифракталы) со спектром размерностей (объединение фрактальных подмножеств).

Конструктивные фракталы строятся по изначально заданной фигуре (основе), которая в дальнейшем повторяется с уменьшени-

ем в соответствии с заданной процедурой или помещением её в вершины данного фрагмента, последующее положение которого задаётся тем или иным преобразованием. Для построения конструктивного фрактала используют линейное преобразование вида

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + x_0 \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + y_0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

которое определяет параллельный перенос и поворот. Если взять в качестве основы параллелограмм, то после применения преобразования (2.1) он перейдёт в новый параллелограмм при сохранении его вида и площади (рис. 2.2). Более общее преобразование задаётся

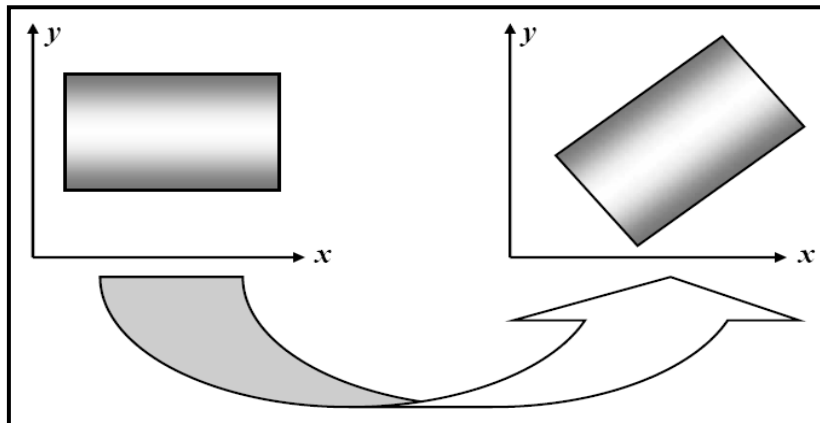


Рис. 2.2. Параллельный перенос и поворот параллелограмма.

ся системой уравнений

$$\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = cx + dy + y_0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

которая задаёт не только трансляции и повороты, но и сжатия-растяжения основы (рис 2.3).

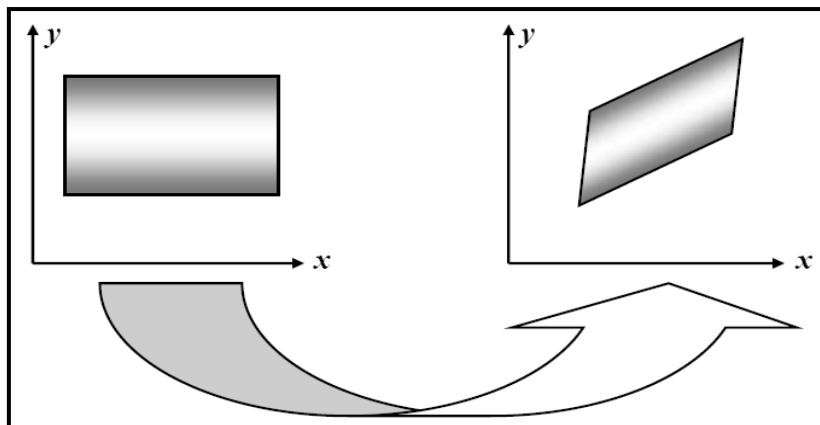


Рис. 2.3. Аффинное преобразование параллелограмма.

Фрактал, полученный с помощью преобразования (2.2), показан на рис. 2.4.

Масштабное сжатие-растяжение основы с поворотами описы-

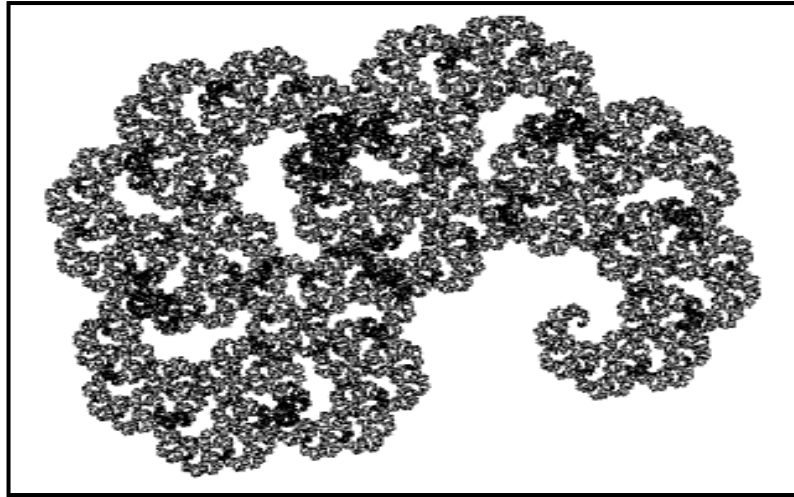


Рис. 2.4. Аффинный фрактал.

ваается матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, которая определяет тип и устойчивость неподвижной точки начала координат $O(0; 0)$. Инвариантность преобразования определяется выполнением уравнения

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X, \quad (2.3)$$

которое является уравнением на собственные значения матрицы преобразования A (вектор $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ является главным вектором матрицы A). Уравнение (2.3) имеет нетривиальное решение при обращении главного определителя системы в нуль, т.е.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

В развёрнутом виде уравнение (2.4) сводится к квадратному уравнению

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0, \quad (2.5)$$

где инварианты $I_1 = a + d$ и $I_2 = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Корни уравнения (2.5) находятся по стандартным формулам. При выполнении неравенства $I_1^2 > 4I_2$ корни равны $\lambda_1 = \frac{I_1 - \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{I_1 + \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2}$, а при выполнении равенства $I_1^2 = 4I_2$ — $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{I_1}{2}$. Проанализируем тип и устойчивость точки $O(0; 0)$:

а) если $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| < 1$, то точка $O(0; 0)$ устойчивая;

б) если $|\lambda_1| < 1$ и $|\lambda_2| > 1$, то точка $O(0; 0)$ седловая (гиперболическая);

- в) если $|\lambda_1|=1$ и $|\lambda_2|=1$, то точка $O(0; 0)$ эллиптическая;
 г) если $|\lambda_1|>1$ и $|\lambda_2|>1$, то точка $O(0; 0)$ неустойчивая.

При выполнении равенства $|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = I_2 = 1$ преобразование сохраняет площадь преобразуемой фигуры. Рассмотрим ряд конструктивных фракталов.

2.1. “Пыль” Кантора (1883)

Нельзя допустить возможности непрерывного наблюдения. Наблюдение следует рассматривать как дискретную, разрывную совокупность событий. Между этими событиями существуют пустоты, заполнить которые мы не можем...

Эрвин Шрёдингер

Если отрезок прямой разделить на 3 равные части и удалить средний отрезок, то полученная фигура представляет первый шаг при построении канторовской “пыли”. Аналогичные действия выполняются с каждым из полученных отрезков до бесконечности (рис. 2.5). Так как при n -ом построении коэффициент подобия ра-

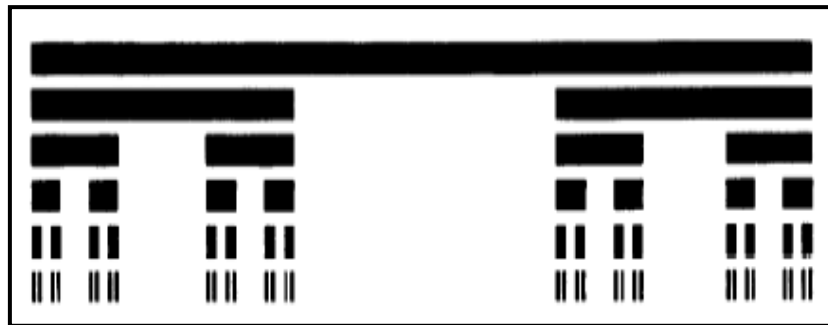


Рис. 2.5. “Пыль” Кантора.

вен 3^{-n} , а число возникающих отрезков равно 2^n , то размерность Хаусдорфа-Безиковича равна $D_T = 0 < D = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309 < 1 = d$. Таким образом, канторовская “пыль” занимает промежуточное положение между прямой и точкой. На первом шаге из отрезка единичной длины изымается отрезок длиной $1/3$, на втором шаге – $2/9$, на третьем шаге – $4/27$, на четвёртом шаге – $8/81, \dots$ В результате бесконечной последовательности итераций будет изъята вся длина исходного отрезка, так как

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом, канторовская “пыль” представляет собой несчётное множество бесконечного числа точек, которое обладает мощностью континуума.

Рассматриваемое множество не является самоподобным, самоподобное фрактальное множество Кантора можно построить на бесконечном луче. Кроме того, можно построить две внешне различающихся канторовских фигуры, имеющих одинаковую фрактальную размерность.

2.2. Кривая и “снежинка” Коха (1904)

Наука ищет пути всегда одним способом. Она разлагает сложную задачу на более простые, затем, оставляя в стороне сложные задачи, разрешает более простые и тогда возвращается к оставленной сложной.

В. Вернадский

Возьмём отрезок прямой и в его средней части построим равносторонний треугольник; аналогичные построения проведём на каждом прямолинейном участке (результаты построений до 5 шага показаны на рис. 2.6). Шаг итерации при n -ом построении (коэф-

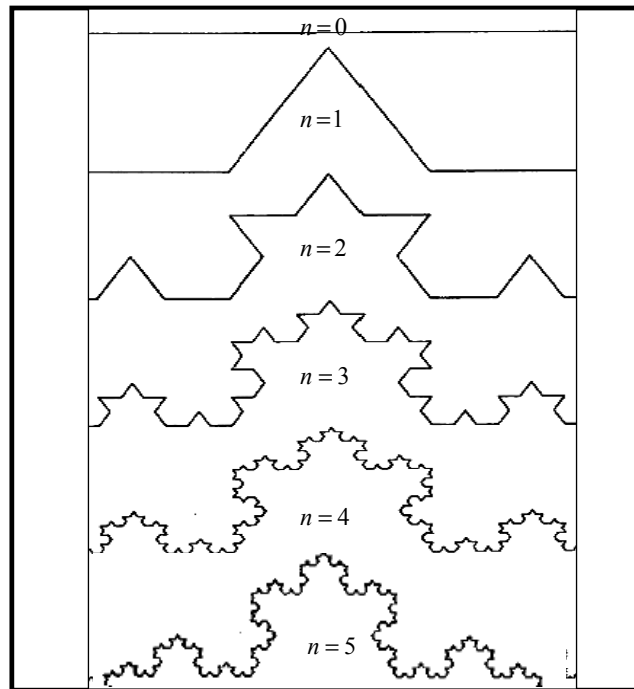


Рис. 2.6. Кривая Коха.

фициент подобия) равен 3^{-n} , а число возникающих отрезков – 4^n . Следовательно, размерность Хаусдорфа-Безиковича кривой Коха равна $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618 > D_T = 1$. Так как эта размерность лежит между 1 и 2, то кривая Коха занимает промежуточное положение между одно- и двумерными топологическими фигурами. Если исходный отрезок прямой имеет единичную длину, то на первом шаге построения длина кривой Коха увеличивается на отрезок длиной $1/3$ и становится равной $4/3$. После второго итерационного шага её дли-

на станет равной $(4/3)^2$, после третьего шага – $(4/3)^3$, ..., после N -го шага – $(4/3)^N$. Отсюда легко видеть, что в результате бесконечного числа итераций длина кривой Коха станет бесконечной.

Кривую Коха можно строить на сторонах правильного многоугольника (равносторонний треугольник, квадрат и т.д.). На рис. 2.7 показаны первые четыре шага построения “снежинки” Коха из

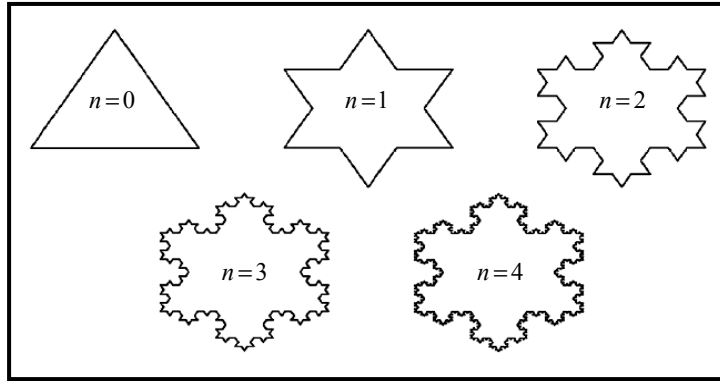


Рис. 2.7. “Снежинка” Коха.

равностороннего треугольника. В результате бесконечной итерации возникает замкнутая, без самопересечений, симметричная, самоподобная, бесконечно изломанная фигура похожая на снежинку (“остров” Коха по Мандельброту). Граница “снежинки” Коха имеет бесконечную длину, несмотря на то, что она ограничивает конечную площадь.

2.3. Кривые Пеано (1890)

Наш язык мудр: между выражениями “я убеждён” и “я убедился” – большая разница.

К. Чапек

Если динамическая система содержит очень большое число частиц, то можно ввести функцию распределения $f(q; p; t)$ частиц в фазовом пространстве по месторасположениям и скоростям в зависимости от момента времени. Из теории вероятностей известно, что $\int f(q; p; t) d\Gamma = 1$, где величина $d\Gamma = dq dp$ определяет объём фазового пространства, занятый системой. Дифференциальный закон сохранения числа частиц с течением времени определяется уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{J}) = 0 \quad (2.6)$$

или с учётом несжимаемости фазовой “жидкости” уравнением Лиувилля:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (2.7)$$

Для диссипативных систем объём фазового пространства, занимаемый динамической системой сохраняется, но “расплывается” по всей фазовой плоскости, превращаясь в бесконечно тонкую линию без самопересечений.

Свойством плотного заполнения доступной области обладают “кривые” Пеано, фрактальная размерность которых совпадает с размерностью плоскости $D = D_T = 2$. Пеано построил непрерывную функцию, для которой областью определения является отрезок, а областью значений – квадрат на плоскости. Линия Пеано строится следующим образом: исходный квадрат разбивается на 9 равных квадратов ($N=9$, $k=3^{-1}$, $D=\ln 9/\ln 3=2=D_T$), проводится непрерывная кривая, проходящая по диагоналям квадратов, в той последовательности, которая показана пунктирной линией на рис. 2.8а. На рис. 2.8б показан второй шаг построения кривой Пеано для квадрата 4 (такие же построения проводятся для каждого из 9 квадратов), далее процедура повторяется бесконечное число раз.

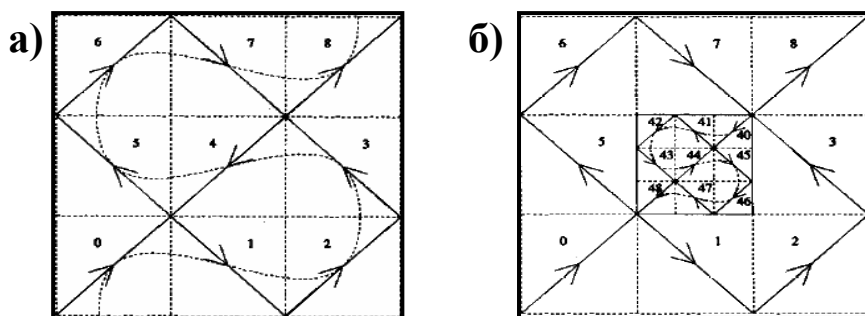


Рис. 2.8. Первые два итерационных шага построения “кривой” Пеано.

Построение Пеано не устанавливает взаимнооднозначного соответствия между точками отрезка и точками квадрата: некоторым точкам квадрата соответствует две точки ребра соседних квадратов, а другим четыре точки стыка квадратов.

На рис. 2.9 показаны другие кривые, которые заполняют плоскость.

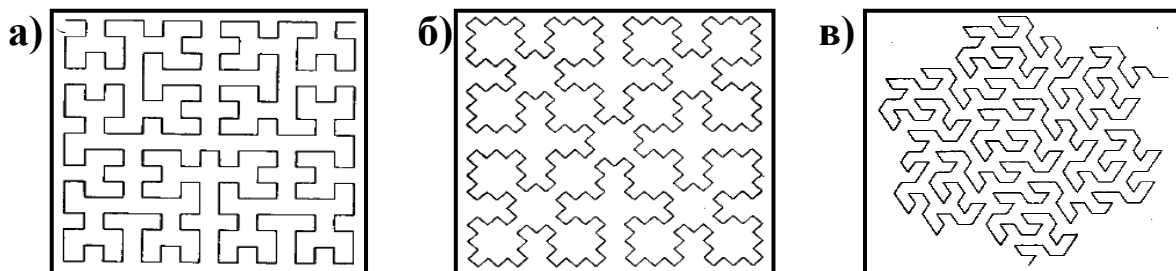


Рис. 2.9. “Кривые”, заполняющие плоскость:
а) – Гильберта; б) – Серпинского; в) – Госпера.

2.4. “Салфетка” и “ковёр” Серпинского (1915)

Жизнь гложет там, где насилие стремится стереть её своеобразие и особенности.

В.С. Гроссман

Фракталы Серпинского представляют собой плоский аналог “пыли” Кантора (рис. 2.10). “Салфетка” Серпинского может быть

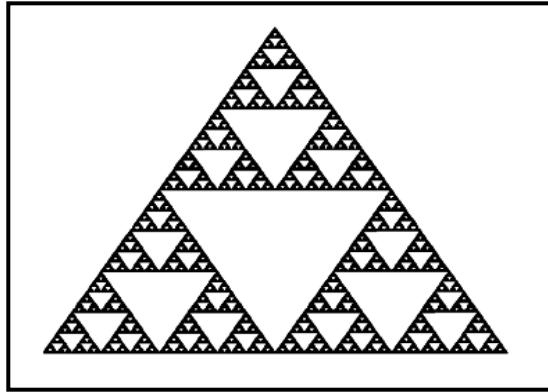
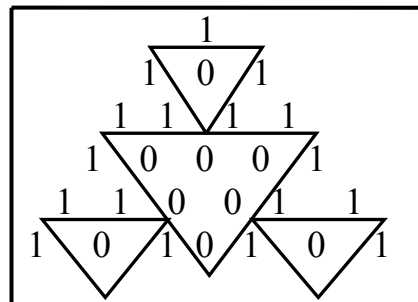
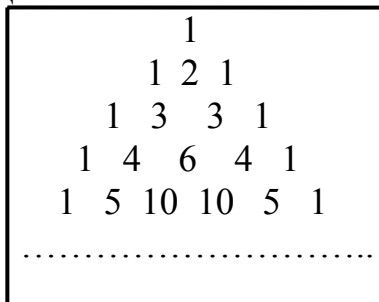


Рис. 2.10. “Салфетка” Серпинского.

определена различными способами: удалением центрального равностороннего треугольника из исходного треугольника, разделённого на четыре равносторонних треугольника; множеством выигрышных точек в игре сэра Пинского; использованием треугольника Паскаля в системе двоичного исчисления (надо учитывать правила сложения, принятые в двоичном исчислении: $0+0=1$, $0+1=1$, $1+0=1$ и $1+1=0$). Воспользуемся последним способом, для чего напомним, как строится треугольник Паскаля. Возведение в степень n суммы двух чисел приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
 n=2: & \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \\
 n=3: & \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\
 n=4: & \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \\
 & \quad \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Паскаль заметил, что числовые коэффициенты на шаге n можно вычислять по известным коэффициентам шага $n-1$ в виде суммы ближайших чисел (рядом построен аналогичный треугольник в двоичной системе исчисления):



Треугольник Паскаля, построенный в двоичном коде, полностью отвечает верхней части фрактала Серпинского, если вместо нулей изобразить равносторонние треугольники.

Фрактальная размерность “салфетки” Серпинского обратно пропорциональна размерности Хаусдорфа-Безиковича для канторовской “пыли”, т.е. равна $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,5849$. Площадь “салфетки” Серпинского, как и длина канторовской “пыли”, равна нулю, так как в результате построения изымается вся площадь исходного равностороннего треугольника.

В 1986 году Гордон и др. провели исследование зависимости критической температуры от напряжённости магнитного поля фазового перехода сверхпроводящей жидкости в нормальную на образце алюминиевой фольги, которая имела вид “салфетки” Серпинского после 10 итераций. Эта зависимость имела вид самоподобной фрактальной кривой, которая достаточно хорошо согласовывалась с теоретической линией.

Аналогичные действия тем, которые были проделаны с равносторонним треугольником, выполненные по отношению к квадрату, порождают “ковёр” Серпинского (рис. 2.11). Первоначаль-

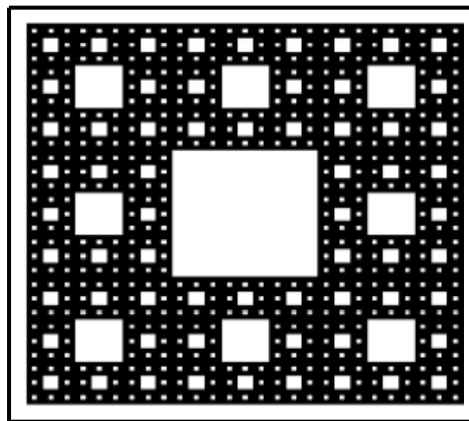


Рис. 2.11. “Ковёр” Серпинского.

ный единичный квадрат разбивается на девять квадратов, а затем вырезается центральный квадрат. В дальнейшем эта процедура проделывается с каждым из восьми оставшихся квадратов и продолжается до бесконечности. Для “ковра” Серпинского $N=8$, $k=3^{-1}$, следовательно, размерность Хаусдорфа-Безиковича равна

$$D = \ln 8 / \ln 3 = 1,8928 > D_T = 0.$$

Так как фрактальная размерность у “ковра” Серпинского больше, чем у “салфетки”, то “ковёр” является менее “дырявой” фрактальной фигурой, чем “салфетка”.

Фрактальные множества Серпинского обладают поворотной симметрией (треугольник надо повернуть на угол 120° , а квадрат – на 90°). Точки фракталов Серпинского с иррациональными координатами при тех или иных преобразованиях порождают хаотические циклы, несмотря на то, что координаты точек-образов однозначно определяются координатами исходной точки. В физике это явление называется *детерминированный хаос* (см. п. 4.6. Аттрактор Э. Лоренца).

2.5. Спирали

Полезные комбинации – самые красивые. Специальное эстетическое чувство – ощущение красоты – играет роль решета... Тот, кто не владеет им, никогда не будет истинным творцом.

А. Пуанкаре

Плоские спирали разделяются на три типа: раскручивающиеся, спираль Архимеда и логарифмическая спираль (спираль роста).

1). Раскручивающаяся спираль строится согласно формулам:

$$\begin{cases} x = a (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha) \\ y = a (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \end{cases} \quad (2.8)$$

2). Спираль Архимеда в полярной системе координат описывается соотношением $\rho = \lambda \alpha$, где положительное число λ определяет расстояние между соседними витками спирали.

3). Уравнение логарифмической спирали имеет вид $\rho = \rho_0 e^{\lambda \alpha}$: для положительных значений параметра λ спираль раскручивается, а для отрицательных – скручивается; при обращении λ в нуль спираль вырождается в окружность с радиусом $R = \rho_0$. Я. Бернулли установил, что изменение масштаба спирали приводит к тому же результату, что и её вращение. Действительно поворот спирали на угол β отвечает трансляции угловой переменной на этот угол, т.е. надо провести замену $\alpha \rightarrow \alpha - \beta$, тогда уравнение спирали роста приобретает вид $\rho = \rho_0 e^{\lambda(\alpha - \beta)} = \rho_0 e^{-\lambda \beta} e^{\lambda \alpha} = \rho'_0 e^{\lambda \alpha}$. С другой стороны полученную формулу можно интерпретировать и как масштабное изменение со скейлинговым коэффициентом $k = e^{-\lambda \beta}$. Логарифмическая спираль обладает рядом интересных свойств:

– касательная, которая проведена к логарифмической спирали при фиксированном угле α , параллельна любой другой касательной к произвольной ветви спирали для этого угла. Это свойство следует из скейлинговой инвариантности логарифмической спирали;

– логарифмическая спираль самоподобна, если пренебречь вращением, и не зависит от масштаба.

Эти свойства делают логарифмическую спираль такой же выделенной геометрической фигурой, как и прямая линия. В физике в виде спиралей изображаются фазовые портреты затухающих колебаний.

В качестве примера рассмотрим колебания тела на пружине. Пусть тело массой m прикреплено к пружине с коэффициентом упругости k , коэффициент трения о горизонтальную плоскость равен μ . Выведем тело из положения равновесия и отпустим. На тело действуют следующие силы: сила упругости $F_{упр.} = -kx$, сила трения $F_{тр.} = -\mu dx/dt = -\mu x'$ и внешняя вынуждающая сила $F(t)$, которая является равнодействующей всех внешних сил, действующих на тело (рис. 2.12). Согласно второму закону Ньютона,

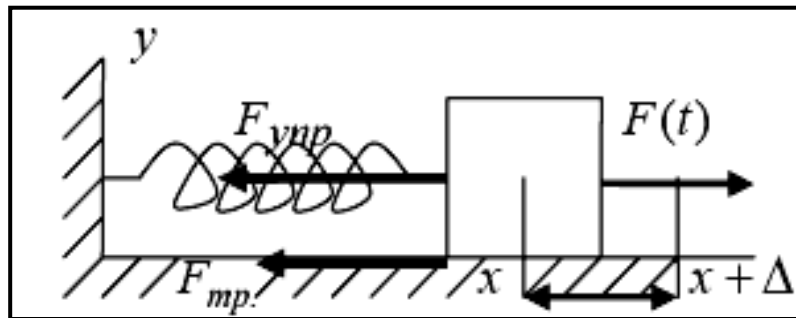


Рис. 2.12. Колебания тела на упругой пружине.

$$ma = F_{упр.} + F_{тр.} + F(t),$$

где $a = \frac{d^2x}{(dt)^2} = x''$ – ускорение, следовательно, уравнение движения имеет вид

$$m x'' = -\mu x' - kx + F(t).$$

Введя обозначения $\frac{\mu}{m} = 2\lambda$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{F(t)}{m} = f(t)$, перепишем полученное уравнение в виде

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = f(t).$$

Найденное уравнение описывает колебания с трением под действием внешней силы. Рассмотрим частные случаи этого уравнения.

1. Пусть отсутствуют внешние силы ($f(t) = 0$) и сила трения ($\mu = 0$), тогда уравнение принимает вид

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

и описывает свободные колебания. С математической точки зре-

ния данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, поэтому ищем его решение в виде $x = e^{kt}$. В этом случае характеристическое уравнение определяется квадратным уравнением вида

$$k^2 + \omega_0^2 = 0,$$

корнями которого будут величины $k_{1,2} = \mp i\omega_0$. Следовательно, общее решение $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$. Преобразуем это равенство следующим образом

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos(\omega_0 t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin(\omega_0 t) \right).$$

Вводя обозначения $\sin \varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, $\cos \varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ и $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, получим

формулу, описывающую свободные колебания

$$x = A(\sin \varphi \cos(\omega_0 t) + \cos \varphi \sin(\omega_0 t)) = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где A – амплитуда колебаний, $\omega_0 t + \varphi$ – фаза колебаний, φ – начальная фаза колебаний.

2. Пусть отсутствуют внешние силы ($f(t) = 0$), т.е. колебания осуществляются с трением (*диссипативная* система). В этом случае уравнение колебаний имеет вид

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0,$$

а характеристическое уравнение даётся квадратным уравнением

$$k^2 + 2\lambda k + \omega_0^2 = 0.$$

С практической точки зрения наибольший интерес представляет случай, когда $\lambda < \omega_0$. Корни характеристического уравнения равны

$$k_{1,2} = -\lambda \mp i\omega,$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Проводя преобразования аналогичные тем, которые были проведены для предыдущего случая, запишем формулу, описывающую затухающие колебания

$$x = A e^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Из формулы видно, что при наличии силы трения колебания при увеличении времени t происходят с уменьшающейся по логарифмической спирали амплитудой.

3. Пусть отсутствует сила трения ($\mu = 0$), т.е. колебания осуществляются под действием внешних сил, тогда уравнение принимает вид

$$x'' + \omega_0^2 x = f(t).$$

Если внешняя сила описывается периодической функцией

$$f(t) = f_0 \sin(\nu t),$$

то решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка представляется в виде суммы решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (см. случай **1.**) $x_0 = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ и частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, которое будем искать в виде

$$\bar{x} = t^n (A \cos(\nu t) + B \sin(\nu t)).$$

а) пусть $\nu \neq \omega_0$ ($n=0$), тогда $\bar{x} = A \cos(\nu t) + B \sin(\nu t)$. Подставляя эту функцию и её вторую производную в уравнение, сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях и решая систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов

A и B , получаем, что $A=0$, а $B = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \nu^2}$, следовательно, общее решение имеет вид

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f_0 \sin(\nu t)}{\omega_0^2 - \nu^2};$$

α) пусть $\nu \neq \omega_0$, но $\nu \approx \omega_0$ и $\varphi=0$, тогда решение принимает вид

$$x \approx \frac{f_0 \sin(\nu t)}{\omega_0^2 - \nu^2};$$

из полученной формулы видно, что при приближение частоты возбуждающей силы к частоте собственных колебаний наблюдается резкое возрастание амплитуды колебаний (*резонанс*);

β) пусть $\nu \gg \omega_0$ и $\varphi=0$, тогда $x \approx A \sin(\omega_0 t)$ – действие внешней силы не оказывает влияния на собственные колебания системы.

б) пусть $\nu = \omega_0$ ($n=1$), тогда $\bar{x} = t(A \cos(\nu t) + B \sin(\nu t))$. Подставляя эту функцию и её вторую производную в уравнение, сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях и решая систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B , получаем, что $B=0$ и $A = -\frac{f_0}{2\nu}$, следовательно, общее решение имеет вид:

$$x = A \sin(\nu t + \varphi) - \frac{f_0 t \cos(\nu t)}{2\nu}.$$

2.6. “Листья папоротника” Барнсли (1988)

Физическая теория подобна костюму, сшитому для природы. Хорошая теория подобна хорошо сшитому костюму, а плохая – тришкину кафтану.

Я.И. Френкель

Преобразования поворотов, сжатий, растяжений и инверсий являются частным случаем аффинных преобразований плоскости, которые задаются формулами (2.2), которые запишем в виде

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b y_n + e \\ y_{n+1} = c x_n + d y_n + f \end{cases} \quad (2.9)$$

с масштабным коэффициентом $\sqrt{ad-cb}$. Использование четырёх систем вида (2.9) (системы итерируемых функций – СИФ) позволили М. Барнсли построить фрактальные фигуры, которые очень похожи на природные структуры. На рис. 2.13 показано фрактальное множество, похожее на лист папоротника, которое было построено с помощью СИФ.

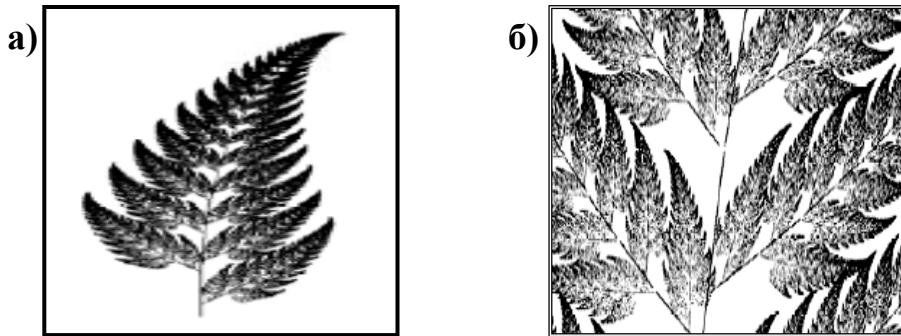


Рис. 2.13. Аффинный лист папоротника (а), построенный после 200 000 итераций и его увеличенный фрагмент (б).

Это изображение можно представить в виде табл. 2.1:

Таблица 2.1.

Коэффициенты СИФ листа папоротника (по Р.М. Кроноверу).

СИФ Папоротник	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
1	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
2	0,1000	–0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
3	0,1000	0,4330	–0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
4	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070

Изменяя коэффициенты *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f* можно получать как новые “листья папоротника”, так и новые фрактальные фигуры, например, “деревья”. В качестве новой СИФ, применение которой приводит к построению новых “листьев папоротника”, возьмём коэффициенты из табл. 2.2 по С.В. Божокину и Д.А. Паршину со случайным выбором итерирующей функции:

Таблица 2.2.

Коэффициенты СИФ листа папоротника.

СИФ Папоротник	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>p</i>
1	0,00	0,00	0,00	0,16	0,00	0,00	0,01
2	0,85	0,04	-0,04	0,85	0,00	1,60	0,85
3	0,20	-0,26	0,23	0,22	0,00	1,60	0,07
4	-0,15	0,28	0,26	0,24	0,00	0,44	0,07

(в последнем столбце табл. 2.2 приведены значения вероятностей, с которыми выбирается та или иная система аффинных преобразований). Результат применения этой таблицы показан на рис. 2.14.

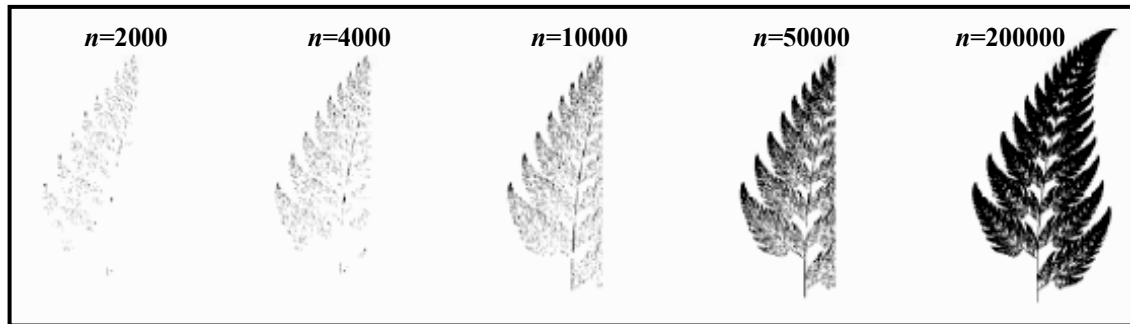


Рис. 2.14. Изображение листа папоротника на разных этапах итерационного процесса построения.

Из этого примера видно, что незначительное количество первоначальной информации совместно с заданной программой действий порождает фрактальные множества, удивительно похожие на природные объекты. По-видимому, по аналогичному сценарию развивался и эволюционный процесс, который фиксировал в структуре одних объектов минимальное количество информации, а в других – программу необходимых действий, которые использовались для строительства сложных организмов. Например, биоорганизмы возникают на *субклеточном, клеточном и многоклеточном* (организменный, популяционный, социальный) уровнях организации биологических систем. Различие между субклеточным и высшим многоклеточным уровнями заключается в количестве генов, которые определяют начальное информационное поле, задающее градиенты первичных реагентов и запускающее “строительство” новых более сложных организмов. На субклеточном уровне информационная ёмкость человеческого гена равна 800 Мб. Очевидно, что такого количества информации вряд ли достаточно для построения такого сложного и многоклеточного организма как человек. По-видимому, на клеточном уровне происходит поиск и усвоение новой информации о строящемся объекте. Возникновение

новой информации вынуждает биологическую систему перестраиваться и подстраиваться под внешние условия.

Разберём “строительство” “листа папоротника”:

– первая и вторая итерационные функции формируют “стебель” остальных листьев, кроме того, вторая итерационная функция отвечает и за слабый изгиб “стебля” (коэффициенты b и c отличны от нуля). Если выполнить итерационную процедуру без функций, 1 и 2, то получим “лист папоротника” без “стебля” (рис. 2.15а).

– игнорирование функциями 3 и 4 ведёт к построению “стебля” без “листьев” (рис. 2.15б);

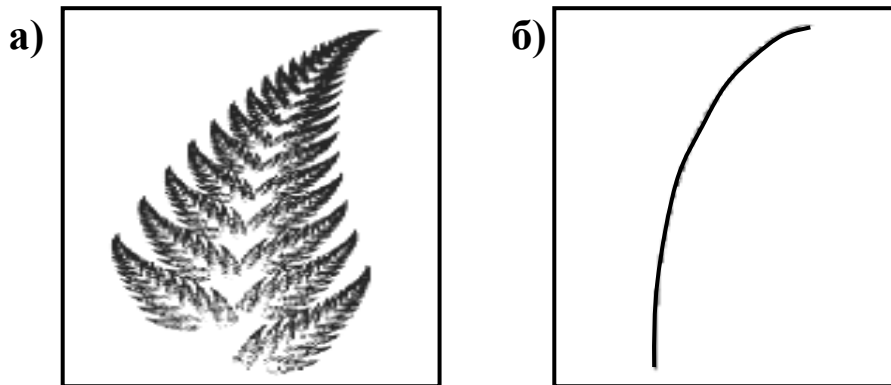


Рис. 2.15. “Лист папоротника” без “стебля” (а) и “стебель” без “листьев” (б).

– исключение поворота в итерационной функции 2 (коэффициенты b и c равны нулю) приводит к тому, что “стебель папоротника” становится прямым (рис. 2.16);

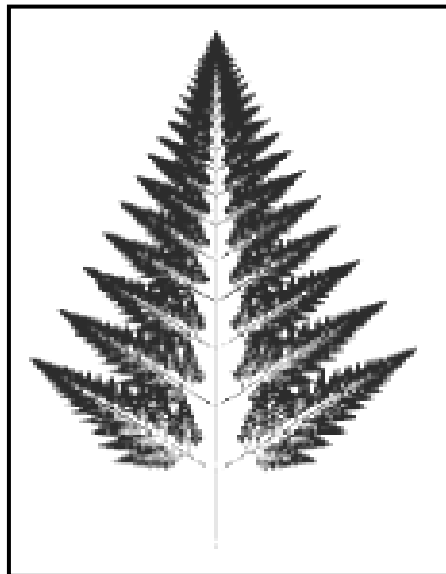


Рис. 2.16. “Лист папоротника” с прямым “стеблем”.

– расположение листьев слева и справа от “стебля” задают трансляции (коэффициенты e и f) в итерационных функциях 3 и 4. Если

эти коэффициенты совпадают, то “листья” располагаются симметрично относительно “стебля” (рис. 2.16), в противном случае – асимметрично (рис. 2.15). Другими словами: итерационные функции 2 и 3 формируют “листья” с одной стороны, а функции 2 и 4 – с другой стороны “стебля”.

– отражение в итерационной функции 4 определяет направление изгиба “листьев” вверх или вниз (рис. 2.17).

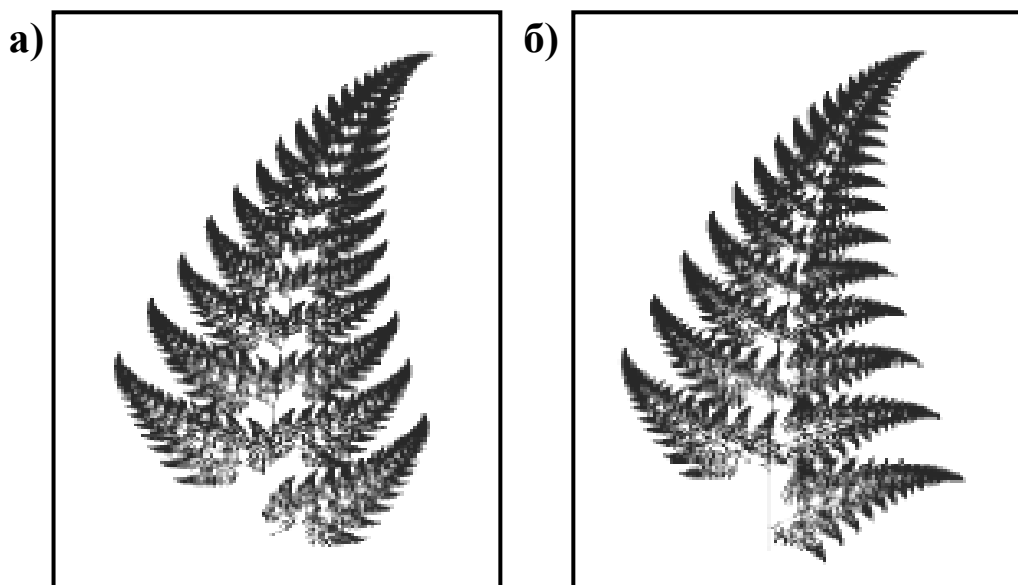


Рис. 2.17. Правильный (а) и неправильный изгиб (б) “листьев папоротника”.

Следовательно, изменяя коэффициенты итерационных функций в аффинных преобразованиях СИФ, можно построить целое семейство разнообразных “листьев папоротника” (рис. 2.18) и им анало-

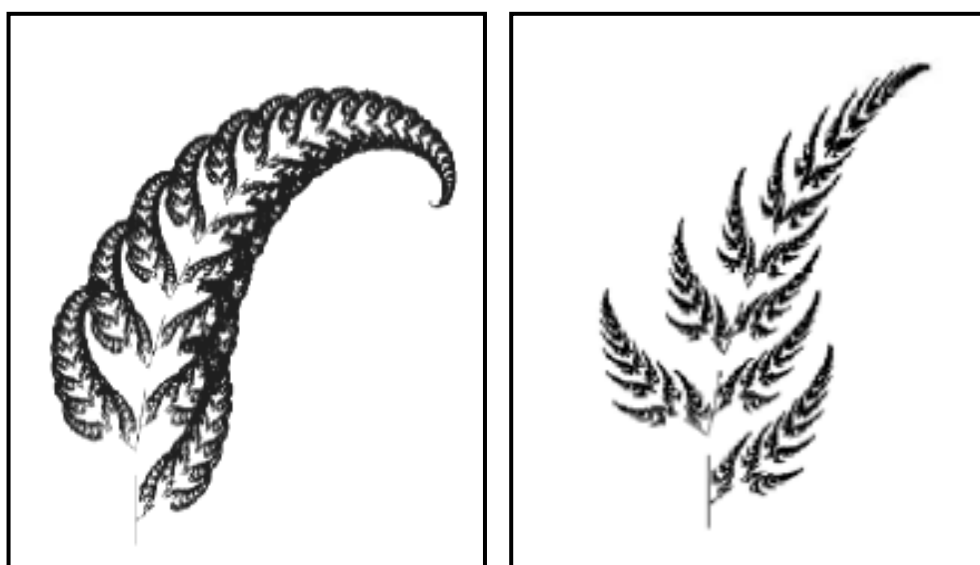


Рис. 2.18. “Листья” семейства “папоротниковых”.

гичных объектов, например, деревьев или кристаллов.

2.7. “Деревья” Босмана

Математика – наука о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями.

Е. Вигнер

Примером фракталов, которые получили название “деревья”, может служить фигура, изображённая на рис. 2.1. Она представляет собой стилизованное отображение “дерева” Пифагора (рис. 2.19 а), которое впервые было построено А.Е. Босманом с помощью чертёжной линейки во время второй мировой войны (было использовано одно из доказательств теоремы Пифагора с использованием квадратов). Применение логарифмической спирали при построении “дерева” Пифагора приводит к картине обдуваемого ветром “дерева” (рис. 2.19б).

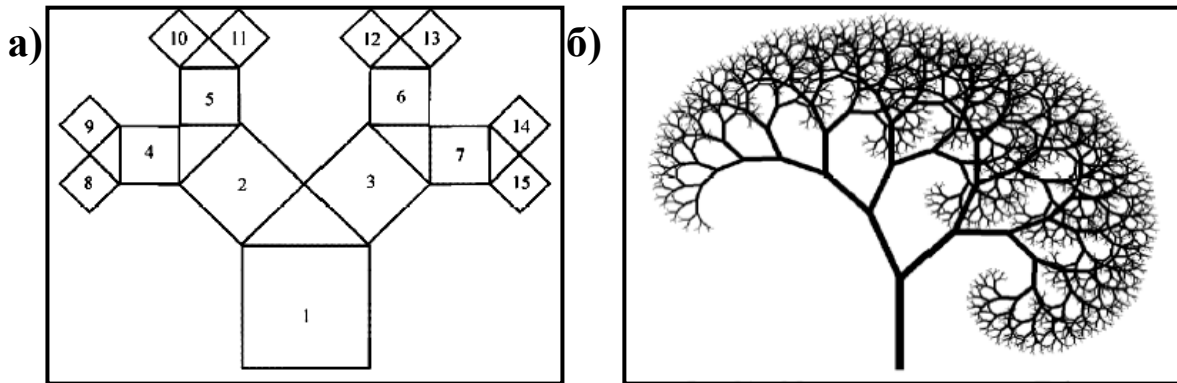


Рис. 2.19. Способ построения (а) и обдувание ветром (б) “дерева” Пифагора.

“Дерево” иного вида было построено основателем фрактальной геометрии Б. Мандельбротом, оно показано на рис. 2.20.

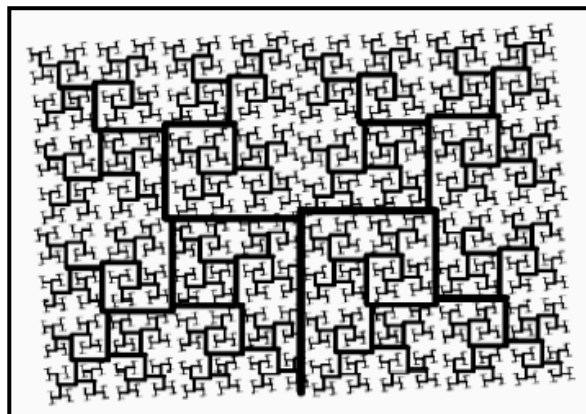


Рис. 2.20. “Дерево” Б. Мандельброта.

Построение “деревьев”, “кустов” (рис. 2.21), “цветов”, “снежинок”, “кристаллов” и им подобных фигур осуществляется при использовании СИФ. Для некоторых фрактальных множеств коэф-

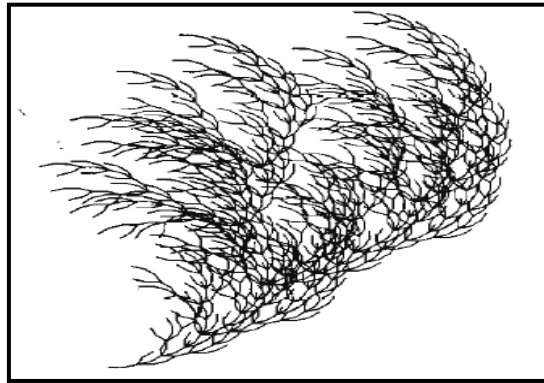


Рис. 2.21. “Куст” Р.М. Кроновера.

коэффициенты итерационных функций приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3.

Коэффициенты СИФ (по Р.М. Кроноверу).

Фрактал	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Папоротник	0,7000	0,0000	0,0000	0,7000	0,1496	0,2962
	0,1000	-0,4330	0,1732	0,2500	0,4478	0,0014
	0,1000	0,4330	-0,1732	0,2500	0,4445	0,1559
	0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0,0070
Кристалл	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0,2232
	0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,6306	0,2232
	0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061
Лист	0,4000	-0,3733	0,0600	0,6000	0,3533	0,0000
	-0,8000	-0,1867	0,1371	0,8000	1,1000	0,1000
Дерево	0,1950	-0,4880	0,3440	0,4430	0,4431	0,2452
	0,4620	0,4140	-0,2520	0,3610	0,2511	0,5692
	-0,0580	-0,0700	0,4530	-0,1110	0,5976	0,0969
	-0,0350	0,0700	-0,4690	0,0220	0,4884	0,5069
	-0,6370	0,0000	0,0000	0,5010	0,8562	0,2513

2.8. “Драконы” Хартера-Хайтвея

Настанет время, когда потомки наши будут удивляться, что мы не знали таких очевидных вещей.

Сенека

Если складывать лист бумаги так, как показано на рис. 2. 22а

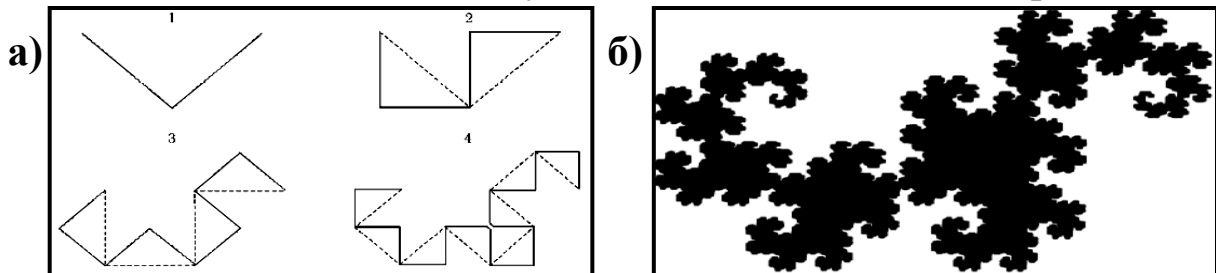


Рис. 2.22. Построение (а) и вид (б) “дракона” Хартера-Хайтвея. (показаны первые четыре итерации), то после *n*-ого шага построения получается фрактальная фигура, названная Хартером “драко-

ном”. Из рис. 2.22а видно, что на каждом следующем шаге прямолинейный отрезок заменяется на два новых отрезка, которые являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника. Направления прогибов вновь получаемых частей чередуется. Отметим тот факт, что последовательность центральных складок точно укладывается на логарифмическую спираль. Продолжение итераций до бесконечности приводит к фрактальному множеству, показанному на рис. 2.22б. Хаусдорфова размерность фрактала “дракон” равна единице.

2.9. “Губка” Менгера

Величайшим достижением человеческого гения является то, что человек может понять вещи, которые он уже не может вообразить.

Л.Д. Ландау

“Губка” Менгера (рис. 2.23) является пространственным аналогом “ковра” Серпинского (рис. 2.11). Начальный куб разбивает-

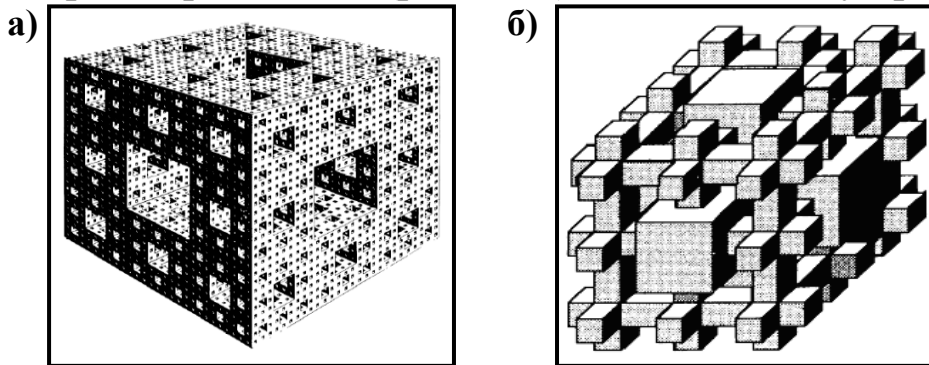


Рис. 2.23. “Губка” Менгера (а) и её внутренняя фрактальная часть (б).

ся на 27 кубиков, затем извлекается 7 кубиков: из центра куба и 6 кубиков из центров граней, оставшиеся кубики вновь разбиваются на 27 частей и производится извлечение указанных выше кубиков второго шага построения, процедура повторяется до бесконечности. Процесс вырезания оставляет на каждом шаге 20 кубиков с коэффициентом подобия 3, следовательно, размерность Хаусдорфа-Безиковича для “губки” Менгера равна $2 < D = \ln 20 / \ln 3 = 2,7268 < 3$. Полученная размерность показывает, что “губка” Менгера имеет нулевой объём и бесконечную площадь своих границ.

Конструктивные фракталы демонстрируют возможности построения компьютерных картин, практически не отличимых от тех, которые создала Природа в ходе эволюционного развития. В настоящее время созданы программы, позволяющие отображать горные и молекулярные ландшафты, волны и другие явления.

Глава 3. Построение детерминированных фракталов

Мы являемся свидетелями природных процессов определённого типа, потому что процессы иного типа протекают без свидетелей.

А.Л. Зельманов

Построение конструктивных фракталов может проводиться не только согласно словесной процедуре, но и при помощи математических формул. Поэтому требуется выработка общего подхода к *аналитической* геометрии фракталов.

3.1. Инвариантные преобразования

Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.

Г. Вейль

При использовании комплексных $z=x+iy$ и им комплексно-сопряжённых чисел $\bar{z}=x-iy$ (x и y – вещественные числа; i – мнимая единица, $i^2=-1$) система уравнений вида (2.9) может быть переписана в виде

$$\boxed{z'_{n+1} = A z_n + B \bar{z}_n + C}, \quad (2.10)$$

где комплексные постоянные равны $A = \frac{1}{2}(a+d-i(b-c))$, $B = \frac{1}{2}(a-d+i(b+c))$

и $C = e+if$. Рассмотрим частные случаи этого отображения: при $C=0$ (коэффициенты системы $e=0$ и $f=0$) система уравнений (2.9) описывает аффинное преобразование $\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b y_n \\ y_{n+1} = c x_n + d y_n \end{cases}$ с масштабным ко-

эффициентом $\sqrt{ad-cb}$ без трансляции. Если выполняются равенства $B=0$ и $C=0$ (аналогично $A=0$ и $C=0$), то обращение в нуль коэффициента B может произойти в одном из случаев:

а) $a=d=0$ и $b=-c$ ($A=0$: $a=d=0$ и $b=c$). Система уравнений (2.9) принимает вид $\begin{cases} x_{n+1} = b y_n \\ y_{n+1} = -b x_n \end{cases}$ ($A=0$: $\begin{cases} x_{n+1} = b y_n \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases}$ – инверсии нет) и описывает

перекрёстное расширение (сжатие) относительно начала координат с инверсией одной из переменных.

б) $a=d$ и $b=c=0$ ($A=0$: $a=-d$ и $b=c=0$). Система (2.9) преобразуется к виду $\begin{cases} x_{n+1} = a x_n \\ y_{n+1} = a y_n \end{cases}$ ($A=0$: $\begin{cases} x_{n+1} = a x_n \\ y_{n+1} = -a y_n \end{cases}$ – инверсия есть) – растяжение (сжатие) относительно начала координат.

в) $a=d$ и $b=-c$ ($A=0$: $a=-d$ и $b=c$). Система (2.9) переходит в сис-

тему $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = -bx_n + ay_n \end{cases}$ ($A=0$: $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = bx_n - ay_n \end{cases}$ – поворот с масштабированием), которая описывает чистый поворот системы координат при условии $a^2 + b^2 = 1$, поворот с растяжением – при $a^2 + b^2 > 1$, поворот с сжатием – при $a^2 + b^2 < 1$. Таким образом, совокупность линейных, итерационных отображений одной комплексной плоскости в другую отвечает построению фрактального множества.

Известно, что аффинные преобразования инвариантны относительно трансляционной, поворотной, инверсионной и масштабной симметрий, следовательно, такими же свойствами будут обладать и фрактальные фигуры. Так как симметрии преобразования изначально сказываются на строении фрактальной фигуры, то фрактальные множества обладают более широким диапазоном инвариантностей и констант движения, чем фигуры Евклида. Фрактальные множества так похожи на природные объекты только потому, что эволюция шла и продолжает идти по направлению сохранения старых и поиска новых инвариантов существования и преобразования, которые необходимы для поддержания устойчивого, стационарного состояния. Чем больше сохраняется всевозможных симметрий, тем упорядоченнее, совершеннее природное творение, которое способно выдерживать внешние воздействия в широком диапазоне их изменений. Естественно, что природа шла не только по пути сохранения инвариантов линейных преобразований и целочисленной размерности евклидовой геометрии, но и экспериментировала с дробной размерностью и нелинейными отображениями, некоторые из которых будут рассмотрены в Главах 4 и 5. Природные симметрии существенно отличаются от аффинных и, естественно, требуют своего тщательного изучения и аналитического отображения. Это задача неотвратимо встанет перед будущими исследователями в области не только естественных, но социально-гуманитарных наук. В этой Главе ограничимся исследованием линейных преобразований и вопросов, связанных с их применением для построения конструктивных фракталов.

3.2. Аналитический способ построения фракталов

Самое удивительное свойство нашего мира – это то, что он познаваем. *А. Эйнштейн*

Рассмотрим аналитическую схему построения салфетки Серпинского с использованием системы преобразований вида (2.10)

на комплексной плоскости. Первый шаг состоит в том, чтобы отделить 3 равносторонних треугольника, длина сторон которых составляет половину от длины стороны исходного равностороннего треугольника. По М. Барнсли эта операция может быть реализована с помощью трёх линейных аффинных преобразований:

- 1) $T_1 \Rightarrow z' = \frac{1}{2}z$ – преобразовывает вершины исходного треугольника в вершины первого строящегося треугольника; прорисовываются стороны с длиной стороны, которая равна половине длины стороны исходного треугольника (рис. 3.1а);
- 2) $T_2 \Rightarrow z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ – строит вершины второго треугольника у основания исходного треугольника;
- 3) $T_3 \Rightarrow z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ – строит вершины третьего треугольника у последней вершины равностороннего треугольника.

На втором шаге описанные действия применяются к вершинам малых треугольников (рис. 3.1б) и т.д. Задание порядка выполне-

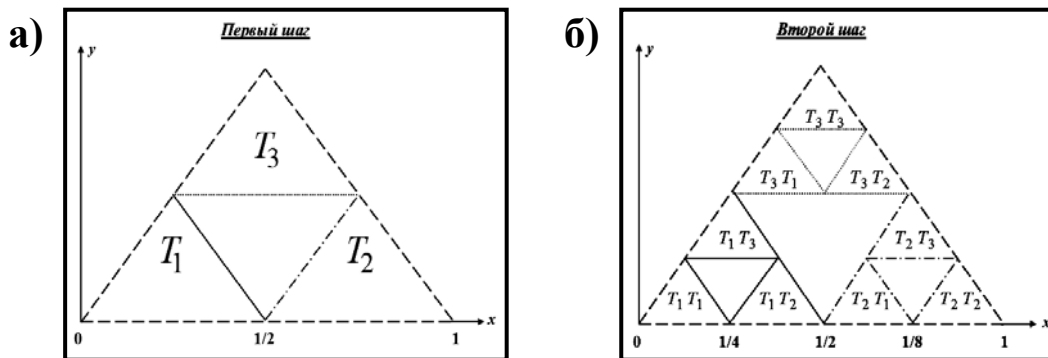


Рис. 3.1. Первый (а) и второй этапы (б) аналитического построения “салфетки” Серпинского.

нения указанных преобразований определяет *генеалогический код* “салфетки” Серпинского. Реализация бесконечного кода порождает плоский аналог “пыли” Кантора. Отметим, что построение этого фрактального множества можно начинать даже с одной точки, так как он представляет собой аттрактор (равновесное или стационарное состояния данной системы). Это связано с тем, что вершины треугольника являются неподвижными точками приведенных аффинных преобразований. Начав с произвольной внутренней точки равностороннего треугольника, итерационный процесс приведёт к притягиванию фрактального множества точек к вершинам треугольника.

Приведенный пример показывает возможность использования

СИФ для построения конструктивных фракталов, поэтому рассмотрим более детально применение поворотов и сжатия-растяжения к преобразованию декартовой системы координат в косоугольную систему координат.

Преобразования, которые были использованы для построения “салфетки” Серпинского, содержат сжатие (масштабный коэффициент $\frac{1}{2}$ перед z), трансляцию на постоянный вектор $\frac{1}{2}$, повернутый на угол 60° (выражение $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ в 3-ем преобразовании).

В качестве второго примера рассмотрим применение системы итерируемых функций для построения кривой Коха. Преобразования имеют вид:

1) $T_1 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}z$ – переводит начальную точку в точку, которая расположена на $\frac{1}{3}$ части исходного отрезка; прорисовывается сам отрезок (рис. 3.2а);

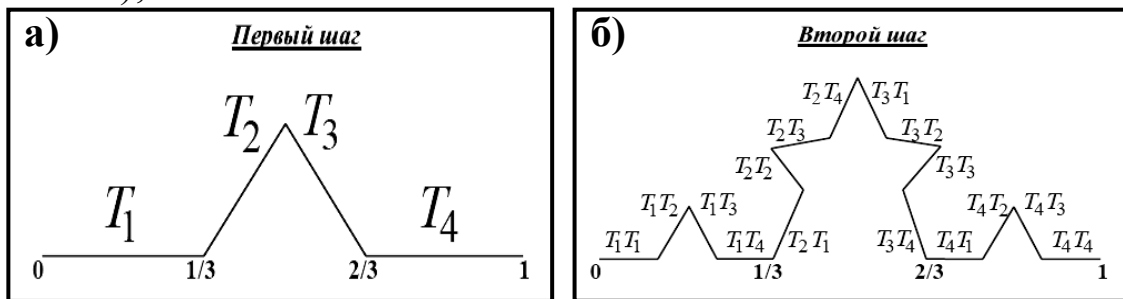


Рис. 3.2. Первый (а) и второй этапы (б) аналитического построения кривой Коха.

2) $T_2 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}ze^{i\pi/3} + \frac{1}{3}$ – исходный отрезок сжимается в 3 раза, полученный отрезок поворачивается на угол $\pi/3$ против часовой стрелки, а затем сдвигается вдоль вещественной оси на постоянный вектор $\frac{1}{3}$;

3) $T_3 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}ze^{-i\pi/3} + \frac{1}{3}e^{i\pi/3}$ – описывает уменьшение исходного отрезка в 3 раза, поворот полученного отрезка на угол $\pi/3$ по часовой стрелке, трансляция вдоль постоянного вектора $\frac{1}{3}$, который был повернут на угол $\pi/3$ против часовой стрелки;

4) $T_4 \Rightarrow z' = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$ – масштабирует начальный отрезок и сдвигает результирующий отрезок вдоль вещественной оси на постоянный вектор с длиной $\frac{2}{3}$.

Повторное применение процедур 1)-4) порождает второй шаг построения кривой Коха (рис. 3.2б), далее схема повторяется до установившегося шага или бесконечности.

По аналогичной схеме строится “двойной дракон” Хартера-Хайтвея (рис. 2.21б). Его изображение возникает при использова-

нии системы аффинных преобразований вида:

$$\begin{cases} T_1 \Rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-i\pi/4} - 1 \\ T_2 \Rightarrow z' = \frac{1}{\sqrt{2}} z e^{-i3\pi/4} + i \end{cases}$$

Фрактальная размерность “двойного дракона” $D = 1,5236$.

Среди аффинных преобразований существенными являются сжимающие отображения, аттракторами которых являются фрактальные множества с неподвижными точками. Поэтому *фракталы* можно определить как *множества точек, инвариантных относительно полугруппы сжатий*.

Помимо преобразований комплексной плоскости с мнимой единицей, квадрат которой $i^2 = -1$, могут быть выполнены аффинные отображения для плоскостей двойных $w = x + \zeta y$ (ζ – мнимая единица, $\zeta^2 = -1$) и идеальных $u = x + \omega y$ (ω – мнимая единица, $\omega^2 = 0$) чисел. Модуль комплексного числа $z = x + iy$ определяет множество точек, лежащих на окружности с центром в начале координат комплексной плоскости и радиусом $R = |z|$, так как $|z|^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Квадрат расстояния между точками в геометрии Евклида определяется такой же формулой, следовательно, метрика комплексной плоскости совпадает с метрикой евклидовой геометрии. В этой связи будем называть геометрию комплексной плоскости (плоскости Минковского) *круговой*. Модуль двойного числа $w = x + \zeta y$ задаёт гиперболу $|w|^2 = (x + \zeta y)(x - \zeta y) = x^2 - y^2$ (интервал между точками), поэтому на комплексной плоскости двойных чисел действует *гиперболическая* или *спиральная* геометрия. Вычисление модуля идеального числа показывает, что он равен ($|u|^2 = (x + \omega y)(x - \omega y) = x^2$) только вещественной части идеального числа и определяет две вещественных прямых, которые зеркально расположены относительно начала координат *идеальной* плоскости. Таким образом, обращение в нуль полинома $P_2(q) = aq^2 + bq + c = 0$ с дискриминантом $D = \sqrt{a^2 - 4bc}$ определяет геометрию той или иной комплексной плоскости: 1) $D < 0$ – *круговая* геометрия; 2) $D = 0$ – геометрия идеальной плоскости; 3) $D > 0$ – *спиральная* геометрия. Очевидно, что параметры a , b и c связаны с реализацией той или иной симметрии, а, следовательно, с инвариантами движения.

3.3. Специальная теория относительности

Здесь перед нами вырастает психологический барьер, связанный с тем, что мы не знаем, как воспринимать понятия пространства и времени на этом этапе, когда они ещё не существовали в нашем традиционном понимании.

Б. Ловелл

Равномерное и прямолинейное перемещение по комплексной плоскости Минковского со скоростью, близкой к скорости света $c=299792,458$ км/сек приводит к неожиданным эффектам сокращения длин отрезков, замедления времени, постоянства скорости света во всех инерциальных системах и другим явлениям, которые были открыты в специальной теории относительности Эйнштейна.

В классической механике изменение местоположения одной из частиц мгновенно вызывает изменение положений других частиц, что свидетельствует о бесконечной скорости распространения сигнала о перемещениях в механической системе. При таком описании силы, действующие на частицы, зависят от их координат, определяемых в один и тот же момент времени. Изменение одной из координат мгновенно сказывается на величине других координат. Такой *абсолютизм* классической механики проявляется также в следующих явлениях.

Рассмотрим измерение длины стержня в подвижной системе отсчёта \tilde{K} (в неподвижной системе отсчёта K она равна $l=x_2-x_1$), движущейся относительно системы отсчёта K равномерно и прямолинейно вдоль оси Ox со скоростью V . Одновременная фиксация в момент времени t начала и конца стержня в системе \tilde{K} , согласно *формулам Галилея* приводит к равенствам:

$$\begin{cases} x'_2 = x_2 - V t \\ x'_1 = x_1 - V t \end{cases} \quad (2.11)$$

Следовательно, длина стержня в системе отсчёта \tilde{K} с учётом равенств (2.11) равна $l' = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 = l$. Это равенство отражает *абсолютность длины* стержня: в произвольной инерциальной системе отсчёта длина тела имеет одно и то же значение.

Мгновенная скорость перемещения системы \tilde{K} по отношению к системе K (относительная скорость движения) определим посредством взятия производной от первого равенства в принципе относительности Галилея: $u' = u - V$. Если два тела движутся относительно друг друга, то скорость относительного движения в непод-

вижной системе отсчёта равна $u_{отн} = u_2 - u_1$, а в подвижной системе отсчёта она определяется равенством $u'_{отн} = u'_2 - u'_1 = u_2 - u_1 = u_{отн}$. Полученное соотношение указывает на *абсолютность относительной скорости движения*: в любой инерциальной системе отсчёта скорость перемещения одного тела относительно другого одинакова.

Дифференцирование по времени равенства $u' = u - V$ приводит к равенству ускорений материального тела в подвижной (a') и неподвижной системах отсчёта (a): $a = a'$. Следовательно, *ускорение тела является абсолютной величиной*, которая не изменяется (*инвариантна*) при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

В классической физике справедлив *закон сохранения массы* (*закон Ломоносова-Лавуазье*), т.е. масса тела инвариантна относительно преобразований Галилея. В этой связи легко показать, что второй закон Ньютона справедлив в любой инерциальной системе отсчёта. Полученные равенства указывают на то, что наблюдения за механическими движениями не могут дать критерия различия инерциальных систем: нельзя утверждать покоится или равномерно и прямолинейно движется система отсчёта.

Равноправие всех инерциальных систем отсчёта позволяет использовать любую из них. Оно отрицает при наблюдении за механическими изменениями тел возможность обнаружения абсолютного пространства и абсолютного времени, так как состояния равномерного, прямолинейного движения и покоя неразличимы.

Попытки установления различий этих состояний были предприняты в оптических экспериментах Брадлея (1725) по абберации света при наблюдении удалённых звёзд, Физо (1751) по распространению света в движущейся среде, Майкельсона-Морли (1881) по выявлению “эфирного ветра” (идея эксперимента принадлежит Максвеллу), Бонч-Бруевича (1956) по наблюдению двойных звёзд, вращающихся вокруг общего центра масс, и измерению скоростей лучей, вышедших из противоположных точек солнечного диска. Проведенные эксперименты показали, что скорость распространения возмущения от точки к точке конечна: изменение положения одной из частиц отразится на положении другой частицы только по истечении определённого промежутка времени.

Максимальная скорость распространения сигнала равна скорости света $c = 299792,458$ км/сек.

Большинство скоростей, с которыми движутся тела, значительно меньше этой величины ($u \ll c$), поэтому классическая механика имеет широкую область применимости.

Конечность скорости распространения взаимодействий в сочетании с принципом относительности приводит к *релятивистской механике* (специальной теории относительности (Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн)). Эйнштейн ввёл два постулата:

1. Наблюдая любое физическое явление (*а не только механическое*) в инерциальной системе отсчёта, невозможно установить находится она в состоянии равномерного и прямолинейного движения или в состоянии покоя (*все физические законы инвариантны относительно выбора инерциальной системы отсчёта*).

2. Скорость света в вакууме имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчёта.

Второй постулат Эйнштейна наделяет вакуум различных инерциальных систем одним и тем же свойством: скорость света в них не зависит от скорости перемещения одной системы отсчёта по отношению к другой. Эта гипотеза требует пересмотра таких понятий как одновременность событий, ход часов и длин тел в различных инерциальных системах отсчёта, учёта зависимости физических характеристик (массы, импульса, энергии и т.п.) от состояния движения, также требуется пересмотр теоремы сложения скоростей. Указанные проблемы не могут быть решены без изменения формул Галилея. Новые формулы, устанавливающие взаимосвязь между координатами тела в покоящейся и подвижной системах координат, должны удовлетворять ряду требований: а) связь между координатами должна быть линейной, чтобы каждой точке покоящейся системы отсчёта отвечала единственная точка подвижной системы отсчёта (взаимно однозначное соответствие для существования обратного перехода от координат точки в подвижной системе отсчёта к координатам той же самой точки в неподвижной системе отсчёта); б) при малых скоростях движения ($u \ll c$) полученные формулы должны переходить в формулы классической механики. Первое требование отображает однородность и изотропность пространства и однородность времени, а, следовательно, существование законов сохранения массы, импульса, энергии, момента импульса и обратимость движения во времени. Второе требование отображает *принцип соответствия*: более общая теория

должна в определённых предельных случаях давать результаты, полученные в предшествующей теории. Другими словами: каждая новая теория (относительность теоретической истины) должна опираться на абсолютизм экспериментальных фактов, полученных при подтверждении её предшественницы, и давать им соответствующую интерпретацию.

Важным понятием в релятивистской механике является *событие*, которое происходит в пространственной точке в определённый момент времени. Зачастую пользуются четырёхмерным пространством, по осям которого определяют три пространственные и одну временную координаты. *Времениподобным интервалом* между событиями, которые произошли в начале координат и в точке (x, y, z, τ) ($\tau = ct$ – время в пространственных единицах измерения) называется величина, определяемая равенством:

$$s^2 = \tau^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (2.12)$$

Времениподобный интервал (2.12), взятый со знаком “–”, называется *пространственноподобным интервалом*. Если интервал между событиями равен нулю, то говорят, что событие происходит на световом конусе, который разделяет четырёхмерное пространство на времениподобную и пространственноподобную области (рис. 3.3). Связь между координатами в лабораторной и подвижной инер-

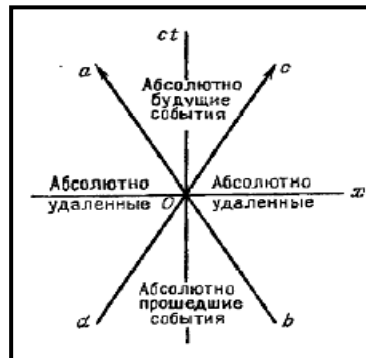


Рис. 3.3. Релятивистские области.

циальных системах отсчёта называется *преобразованием Лоренца*. Интервал между событиями является инвариантом относительно (аффинного) преобразования Лоренца плоскости Минковского, которое имеет вид:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}; y' = y; z' = z \\ t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \end{cases}. \quad (2.13)$$

Разделение интервалов на времени- и пространственноподобные не зависит от выбора инерциальной системы отсчёта, поэтому понятие интервалов является абсолютным. *Причинно-следственная связь* между событиями наблюдается только в областях пространства-времени, *разделённых времениподобным интервалом*. В указанных областях *абсолютный* характер имеют понятия “раньше” и “позже”.

Релятивистская механика открыла целый ряд новых физических эффектов:

– **сокращение длины твёрдого стержня**: пусть линейка покоится в лабораторной системе координат K и имеет в этой системе длину $l_0 = x_2 - x_1$, где x_2 и x_1 координаты конца и начала линейки. Найдём по формулам (2.13) в один и тот же момент времени τ' координаты конца и начала линейки в подвижной системе координат:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x_2' + (V/c)\tau'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \\ x_1 = \frac{x_1' + (V/c)\tau'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \end{cases} \quad (2.14)$$

Вычитая из первого равенства второе, найдем связь между **собственной длиной** стержня l_0 в лабораторной системе координат K и его длиной l в движущейся системе координат K' :

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad (2.15)$$

Формула (2.15) показывает, что подвижный стержень будет короче по отношению к его длине в покоящейся (*лабораторной*) системе отсчёта.

– **замедление хода часов**: пусть часы покоятся в подвижной системе координат K' . В одной и той же точке x' происходит событие, которое начинается в момент времени τ_1' и заканчивается в момент времени τ_2' , т.е. длительность события составляет $\tau_0 = \tau_2' - \tau_1'$. В лабораторной системе координат K длительность события будет равна

$$\tau = \frac{\tau_2' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} - \frac{\tau_1' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \quad (2.16)$$

Этот эффект теории Эйнштейна отражает **замедление хода часов** в подвижной системе отсчёта.

– **сложение скоростей**: пусть материальная частица движется в лабораторной системе координат K со скоростью u . Относительно системы K равномерно и прямолинейно движется система координат K' . В системе отсчета K' частица движется со скоростью u' . Дифференциально малые изменения положения точки за некоторый дифференциально малый промежуток времени в разных системах координат связаны между собой преобразованием Лоренца. Используя стандартное определение скорости как отношения перемещения к промежутку времени, получим формулы для компонент скорости

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + (u'_x V / c^2)}; \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + (u'_x V / c^2)}; \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - (V/c)^2}}{1 + (u'_x V / c^2)}. \quad (2.17)$$

При движении частицы вдоль оси абсцисс проекции её скорости на координатные оси равны $u'_x = u'$ и $u'_y = u'_z = 0$. **Теорема сложения скоростей** имеет вид

$$u = \frac{u' + V}{1 + (u' V / c^2)}. \quad (2.18)$$

Пусть световой луч движется в системе координат K' , которая перемещается равномерно и прямолинейно относительно лабораторной системы координат K со скоростью света c . Используя теорему сложения скоростей, получим $u = \frac{c+c}{1+(c \cdot c/c^2)} = c$. Это оз-

начает, что и в лабораторной системе координат луч света движется со скоростью c .

– **связь между энергией и импульсом**: специальная теория относительности установила новое соотношение, связывающее энергию и импульс, вида

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.19)$$

Преобразование Лоренца можно рассматривать, как поворот на мнимый угол на плоскости Минковского (круговая геометрия) или как поворот на реальный угол на плоскости двойных чисел (спиральная геометрия).

Изложенный материал показывает ограниченность скорости распространения взаимодействий и области, в которой наблюдается причинно-следственная связь между событиями; отображает абсолютность времени- и пространственноподобных интервалов; относительность хода часов и длин тел, одновременности, понятий “раньше”-“позже”.

3.4. *Возникновение хаоса и аттракторы*

Детерминизм, подобно английской королеве,
царствует, но не правит.

Майкл Берри

Анализ применения отображений к “салфетке” Серпинского показывает, что точки этого фрактального множества являются *репеллерами*, т.е. точками, от которых точки-изображения экспоненциально удаляются. При обратном преобразовании репеллеры превращаются в *аттракторы*, т.е. точки-изображения притягиваются к ним. Как отмечалось выше аттракторами “салфетки” Серпинского являются вершины равностороннего треугольника.

С физической точки зрения это означает следующее: при определённых условиях бесконечно малые флуктуации могут экспоненциально возрасти, порождая при этом хаос в регулярном движении или выход системы за пределы области устойчивого существования (и наоборот). Хаотические движения и появление неустойчивостей встречаются в материальном мире практически также часто, как регулярное перемещение или “беззаботная” стационарность. Этот факт подтверждает открытое в теории нелинейных динамических систем свойство *перемешиваемости*: вероятности возникновения порядка из хаоса и хаоса из порядка равны между собой. Материальный мир постоянно балансирует на грани хаос-порядок, порождая всё новые и новые формы самоподобных и мультифрактальных фигур.

На рис. 3.4 показано, как ламинарный поток дыма на некотором расстоянии от источника дыма превращается в турбулентное течение. Не менее сложный и хаотический вид имеют траектории



Рис. 3.4. *Возникновение хаотических движений в ламинарном потоке дыма.*

движения частиц в задаче трёх тел (рис.3.5), впервые исследован-

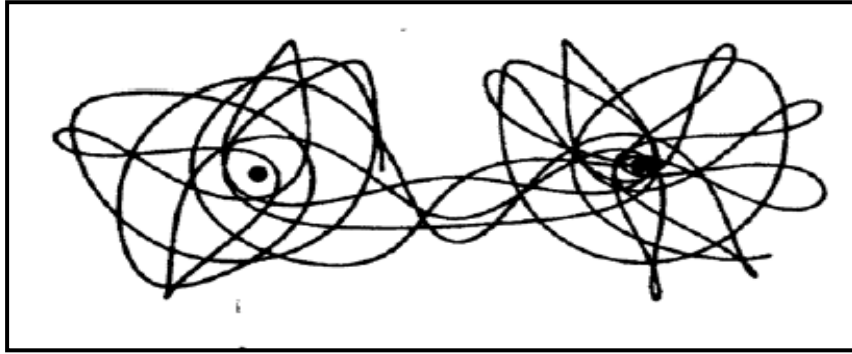


Рис. 3.5. Хаотические траектории движения трёх взаимодействующих тел.

ной Пуанкаре. А. Пуанкаре (1892) писал: “Поражаешься сложностью этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать представление о сложности задачи трёх тел, в которой нет однозначного интеграла, и ряды расходятся...”. Впервые экспериментальное наблюдение хаоса было осуществлено при изучении генератора Ван дер Поля, который демонстрировал нелинейные периодические автоколебания. Исследования в области одномерных отображений показали, что

- для рациональных чисел отображения осуществляют возврат системы в исходное равновесие (энергия системы сохраняется и при выходе из состояния равновесия система снова в него возвращается по истечении некоторого времени, необходимого для релаксации системы – *консервативные системы*);
- для иррациональных чисел изученные отображения демонстрируют возникновение динамического хаоса, зависимость от вариации начальных условий и переход системы в качественно новое состояние (энергия рассеивается; система устойчива вблизи некоторого установившегося состояния; возникают квазипериодические движения – *диссипативные системы*).

Физико-математическое моделирование диссипативных систем может быть сведено к рассмотрению систем дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (i=1 \div n) \quad (2.20)$$

Если функции $f_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$ аналитические и не имеют общего множителя, то система дифференциальных уравнений первого порядка имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_i(0) = x_{i0}$. Если динамические переменные $x_i(t)$ не зависят

от времени, то система находится в *стационарном* состоянии. Устойчивость стационарного состояния определяется уравнениями

$$f_i(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0. \quad (2.21)$$

Решения уравнений (2.21) определяют *особые* точки фазового пространства, в отличие от иных точек, которые называются *регулярными* или *обыкновенными*. Обозначим через x_{is} совокупность динамических переменных, которые обеспечивают переход системы в стационарное состояние. Устойчивость этого состояния определяется малыми отклонениями динамических переменных от их значений в стационарном режиме $\delta x_i(t) = x_i(t) - x_{is}$, которые удовлетворяют линеаризованным динамическим уравнениям вида:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta x_j, \quad (2.22)$$

где коэффициенты $a_{ij} = \left. \partial f_i / \partial (\delta x_j) \right|_{\delta x_j = \delta x_j(0)}$, а начальные условия имеют вид $\delta x_i(0) = x_{i0} - x_{is}$, причём величины $\delta x_i(0)$ называются *числами* или *показателями Ляпунова*. Решение уравнения (2.22) будем искать стандартным образом, представив его в виде:

$$\delta x_i(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} e^{x_{ks} t}, \quad (2.23)$$

здесь величины $\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(\delta x_1(0); \delta x_2(0); \dots; \delta x_n(0))$. Тогда система уравнений (2.23) принимает вид однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{ik} x_{ks} e^{x_{ks} t} = \sum_{j,k=1}^n a_{ij} \lambda_{jk} e^{x_{ks} t}, \quad (2.24)$$

которая имеет решение только в том случае, когда её главный детерминант равен нулю, т.е. $\det |a_{ij} - \delta_{ij} x_{is}| = 0$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ – символ Кронекера. Из вида решения (2.24) следует, что k -ая составляющая решения будет затухать с течением времени, если $\text{Re } x_{ks} < 0$, и нарастать если $\text{Re } x_{ks} > 0$ (экспоненциальное нарастание и затухание малых флуктуаций). Если хотя бы для одного из показателей Ляпунова его реальная часть будет положительной, то стационарное состояние будет неустойчивым. Если же для k -ой компоненты выполняется равенство $\text{Re } x_{ks} = 0$, то состояние системы будет нейтральным (*лабильным*), а для анализа устойчивости динамической системы

надо вводить в рассмотрение нелинейные поправки, возникающие при учёте, например, квадратичных слагаемых в разложении функции $f_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в ряд Тейлора.

Рассмотрим поведение фазовых траекторий в малой окрестности особой точки. Через обыкновенную точку фазового пространства проходит одна и только одна траектория. В особой точке эти траектории могут пересекаться. Однако это невозможно наблюдать за конечный промежуток времени в силу единственности решения уравнений движения. В двумерном случае характеристическое уравнение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к квадратному уравнению (в комплексной области это уравнение вида $P_2(q)=aq^2+bq+c=0$). Анализ корней этого уравнения приводит к шести типам поведения фазовых траекторий, которые показаны на рис. 3.6:

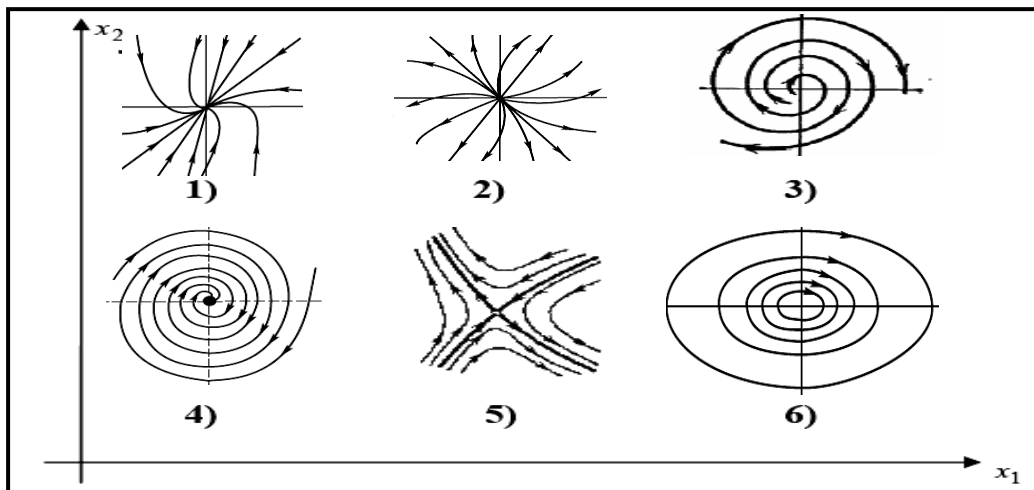


Рис. 3.6. Особые точки двумерной динамической системы:

- 1) $\text{Re} x_{1s} < 0, \text{Im} x_{1s} = 0; \text{Re} x_{2s} < 0, \text{Im} x_{2s} = 0$ – устойчивый узел;
- 2) $\text{Re} x_{1s} > 0, \text{Im} x_{1s} = 0; \text{Re} x_{2s} > 0, \text{Im} x_{2s} = 0$ – неустойчивый узел;
- 3) $\text{Re} x_{1s} < 0, \text{Im} x_{1s} \neq 0; \text{Re} x_{2s} < 0, \text{Im} x_{2s} \neq 0$ – неустойчивый фокус;
- 4) $\text{Re} x_{1s} > 0, \text{Im} x_{1s} \neq 0; \text{Re} x_{2s} > 0, \text{Im} x_{2s} \neq 0$ – устойчивый фокус;
- 5) $\text{Re} x_{1s} \cdot \text{Re} x_{2s} < 0$ – седловая точка (числа Ляпунова имеют разные знаки);
- 6) $\text{Re} x_{1s} = 0; \text{Re} x_{2s} = 0$ – центр.

Любая фазовая траектория, которая начинается в обыкновенной точке фазового пространства, будет обязательно приближаться к какой-либо из особых точек или замкнутому циклу (*периодическое движение*). Это приводит к тому, что всё фазовое пространство

динамической системы разбивается на области притяжения к устойчивому фокусу и предельному циклу (*аттракторы* по Пуанкаре).

Наличие в фазовом пространстве притягивающих множеств со сложной структурой порождает странные аттракторы. В этих множествах наблюдается устойчивость в притяжении к аттрактору и неустойчивость, проявляющаяся в разбегании фазовых точек по странному аттрактору. На рис. 3.7 показан странный аттрактор Э. Лоренца, который построил его при исследовании системы дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих критическую конвекцию в жидкости. Странные аттракторы зачастую са-

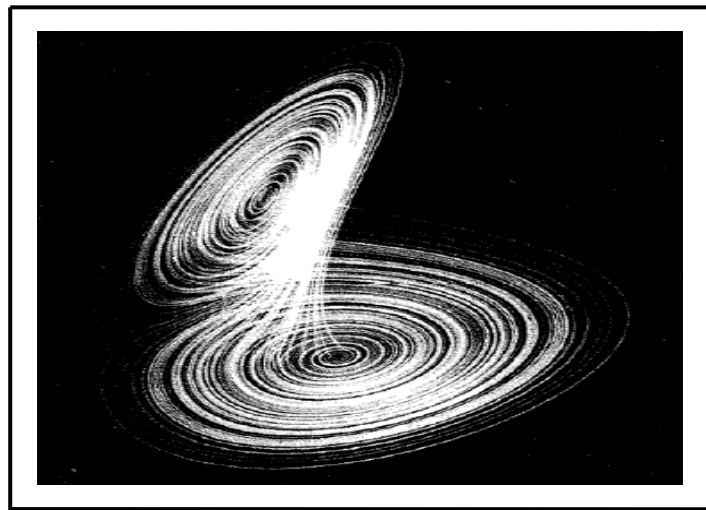


Рис. 3.7. Странный аттрактор Э. Лоренца.

моподобны и обладают *упорядоченной структурой*. Барнсли показал, что подвергнутые конечному числу сжимающих аффинных преобразований, которые выбираются случайным образом, странные аттракторы могут аппроксимировать изображения реального мира. Случайность выбора сжимающих комплексных функций порождает беспорядочное высвечивание всего странного аттрактора в целом. Для восстановления реального изображения требуется конечное (достаточно небольшое) число параметров и ограниченное число сжимающих аффинных преобразований. Здесь вновь возникает аналогия с генеалогическим кодом, позволяющем при минимуме используемой информации получить максимум реалистичности. Применение метода систем итерируемых функций или функций комплексного переменного со случайным выбором итерируемой функции позволяет значительно ускорить процесс построения фрактальной фигуры.

Глава 4. Стохастические (случайные) фракталы

Физическая концепция случайности сформирована теориями, в которых случай играет существенную роль лишь на микроскопическом уровне, в то время как на макроскопическом уровне случай теряет всю свою значимость.

Б.Б. Мандельброт

Генеалогический код или итерационная процедура является неиссякаемым источником как детерминированного хаоса, так и самоподобных фигур. Выбор подходящей начальной точки и набора итерируемых функций с их случайным включением приводит к быстрому отображению не только простых, но и странных неподвижных точек самоподобного множества.

Другой процедурой, порождающей фрактальные множества, является применение рекуррентных соотношений. Например, соотношение вида $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ при $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ порождает последовательность Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Выбрав коэффициент подобия $1/k = 1,6$ и округлив результат умножения на это число чисел Фибоначчи, получим за небольшим количеством чисел, ту же последовательность Фибоначчи: 0, 2, 2, 3, 5, 8, 13, ... Если вычислить предел отношения последующего члена к предыдущему, то получим $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$. Число φ является одним из корней квадратного уравнения $x^2 + x - 1 = 0$ и называется *золотым сечением*. С другой стороны, число $\varphi \approx 0,61803$ является неподвижной точкой итерационного преобразования вида $x_{n+1} = 1/[x_n]$, здесь квадратные скобки означают отбрасывание целой части числа x_n . Рассматриваемое преобразование называется *гиперболическим отражением* или *отображением Гаусса*.

Если представить квадратное уравнение, одним из корней которого является золотое сечение, в виде гиперболического отображения вида $\frac{1}{\varphi} = \varphi + 1$ и заменить справа от равенства единицу на произвольное, целое, положительное число n , то получим бесконечное множество *серебряных сечений*, которые являются корнями уравнений $\frac{1}{\psi_n} = \psi_n + n$. Серебряные сечения возникают в теории квазикристаллов, модели Изинга, при описании возникновения хаоса через синхронизацию мод и в других физических построениях.

Хаотизация динамического процесса, устойчивость или изменение стационарного состояния систем различных уровней организации материи связаны с возникновением и ростом (подавлением) флуктуаций тех или иных величин. Статистический характер поведения флуктуаций изучается в разных науках: от распределения галактик в астрономии до формирования погоды в климатологии; от полимеризации молекул в органической химии до исследования фрактальной структуры транспортных путей в биологии. В физических исследованиях случайное, статистическое самоподобие встречается при изучении ограниченной диффузионной агрегации, молний, поверхностей разрыва, минимумов энергии в спиновых стёклах, турбулентности, молекулярных ландшафтов, движения частицы Броуна и т.д. В частности, движение броуновской частицы является подтверждением молекулярного строения вещества, а траектория перемещения – существования недифференцируемых функций, один из видов которых был предложен Вейерштрассем.

Физический закон, лежащий в основе подобия, которое сохраняется в широком масштабном диапазоне (см. Главу 1, стр. 12), называется *диффузией*: среднеквадратическое смещение броуновской частицы прямо пропорционально времени наблюдения, коэффициент пропорциональности равен удвоенному значению *коэффициента диффузии* D . Используя найденное соотношение, А. Эйнштейн теоретически предсказал, что в ограниченном объёме присутствует конечное число молекул. Этот факт был подтверждён экспериментами Перрена. Броуновское движение является частным случаем процесса Маркова-Винера для случая фиксированных приращений. Определив броуновскую функцию $B(t)$ как проекцию броуновского движения на одну из пространственных осей, можно показать, что спектр мощности приращений соответствует “коричневому” шуму (см. пункт 1.2, стр. 24).

Детерминированный хаос возникает тогда, когда имеется существенная зависимость от начальных условий, или правая часть дифференциального уравнения первого порядка задана функцией с положительным показателем Ляпунова в каждой точке её определения. Примером случайной кривой, отображающей стохастичность блужданий, является траектория движения броуновской частицы (рис. 1.6).

4.1. *Траектория движения броуновской частицы (1827)*

Возможно, что рассматриваемое здесь движение идентично так называемому броуновскому движению молекул. Однако доступные мне источники содержат о последнем явлении настолько неопределённые сведения, что я просто не смог сформировать о нём никакого мнения.

А. Эйнштейн

Для построения кривой Броуна можно воспользоваться следующей процедурой: единичный отрезок разбивается на 1000 равных отрезков с длиной $l = 1/1000 = 0,001$; с помощью генератора случайных чисел создаётся последовательность дробных чисел $\{g_i\}$ из единичного интервала ($0 < g_i < 1$); образуют массив чисел $Y(i) = g_i - \frac{1}{2}$; вычисляют координаты случайной точки по формулам $x_i = \frac{i}{1000}$ и $y_i = \sum_{k=1}^i Y(k)$; предыдущую и последующую точки соединяют отрезками прямой. Результатом процедуры будет случайная линия, показанная на рис. 4.1.

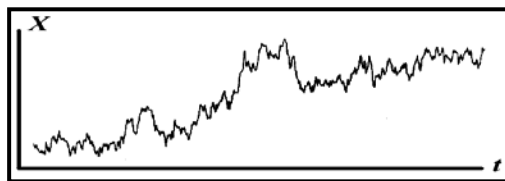


Рис. 4.1. *Кривая Броуна.*

Кривая Броуна является отражением постоянного теплового перемещения составляющих вещества частиц. Энергия частицы при абсолютной температуре T системы, согласно кинетической теории Больцмана, равна $\varepsilon = \frac{3}{2} k_B T$ ($k_B = 1,38 \cdot 10^{-25}$ Джс / К — постоянная Больцмана) и не зависит от геометрических размеров частиц. Траектория случайных блужданий представляет собой набор хаотических шагов с характерной длиной в произвольных направлениях. Наличие естественного масштаба (минимальной и максимальной длин шагов перемещения) приводит к самоподобию кривой Броуна.

Для выявления фрактальных свойств движения частицы Броуна рассмотрим одномерное случайное блуждание. Пусть частица каждые τ секунд (время столкновений) совершает вдоль прямой хаотические прыжки на расстояния не более ξ или $-\xi$, соответствующие диаметру частицы.

Для аналитического описания процесса случайного блуждания введём закон распределения случайной величины ξ . Так как большинство непрерывных случайных величин подчиняются нормальному закону или закону ошибок Гаусса, то будем считать, что случайная величина ξ является нормальной, т.е. имеет плотность вероятности вида

$$f(\xi; \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D\tau}\right). \quad (4.1)$$

Средняя длина прыжка (математическое ожидание) определяется формулой

$$\langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi; \tau) d\xi = 0, \quad (4.2)$$

а дисперсия –

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 f(\xi; \tau) d\xi = 2D\tau. \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) А. Эйнштейн получил выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2\tau}. \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) справедливо также для прыжков, которые совершаются через неодинаковые интервалы времени, а распределение случайной величины ξ имеет произвольные природу и вид. Переход к безразмерной переменной Больцмана $E = \frac{\xi}{\sqrt{2D\tau}}$ позволяет ввести броуновскую функцию $B(t)$ (координату частицы на оси)

$$X(t) = B(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n E_i, \quad (4.5)$$

вид которой показан на рис. 4.2.

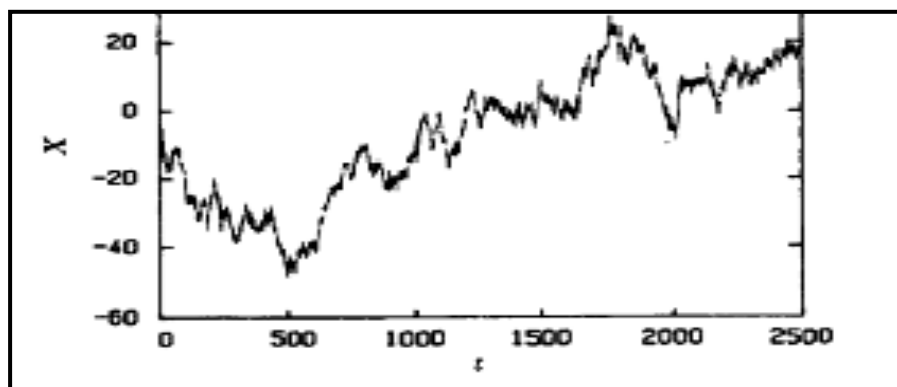


Рис. 4.2. Функция мощности для случайного блуждания.

4.2. *Подобие одномерных блужданий*

В том мире, в котором мы живём, флуктуации, бифуркации и неустойчивости встречаются на всех уровнях. Устойчивые системы, порождающие определённую, соответствующую только идеализациям, или аппроксимациям.

И.Р. Пригожин

Наблюдение за перемещениями броуновской частицы с различными временами разрешения показывает независимость конечных прыжков между собой, а их совместная функция распределения приводит к тем же самым значениям математического ожидания (4.2) и дисперсии (4.3). В этом случае функция распределения имеет вид:

$$f(\xi; k\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathcal{D} k\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\mathcal{D}k\tau}\right). \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) следует, что фиксирование положения броуновской частицы через неравные промежутки времени приводит к соотношению Эйнштейна (4.4), в котором надо заменить τ на $t = k\tau$. Такое масштабирование времени приводит к тому, что рис. 4.2 изменяется в направлении уменьшения или увеличения, т.е. демонстрирует скейлинговую инвариантность. В этой связи покажем, что функция (4.1) является однородной функцией. Для этого проведём масштабные преобразования $\zeta = \sqrt{k} \xi$ и $t = k\tau$, тогда новая функция

$$f(\zeta; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \mathcal{D} k\tau}} \exp\left(-\frac{k\xi^2}{4\mathcal{D}k\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} f(\xi; \tau). \quad (4.7)$$

Формула (4.7) показывает, что плотность вероятности Гаусса является однородной функцией порядка $\lambda = -\frac{1}{2}$. Множитель $\frac{1}{\sqrt{k}}$ в формуле (4.7) не только указывает на подобие случайных блужданий, но и обеспечивает правильную нормировку на единицу плотности вероятности после масштабного изменения пространства-времени. Преобразования пространства-времени с разными масштабными коэффициентами для пространственной и временной координат называются *самоаффинными*.

Пример случайных блужданий ещё раз подчёркивает связь между подобием, однородными функциями и фрактальными множествами. Фрактальные фигуры, возникающие при использовании вероятностных функций отображения, называются *стохастическими* или *случайными*.

Однородность плотности вероятности Гаусса позволяет обоб-

щитить случайные блуждания на случай, когда скейлинговый показатель M отличается от $\frac{1}{2}$, но лежит в пределах от 0 до 1. Построение теории обобщённых броуновских движений было выполнено основателем фрактальной геометрии Бенуа Б. Мандельбротом.

4.3. Обобщённое перемещение частицы Броуна

... по странному устройству вещей, всегда ничтожные причины родили великие события и, наоборот, великие предприятия оканчивались ничтожными следствиями.

Н.В. Гоголь

Для стохастического движения Мандельброта дисперсия функции мощности $B_M(t)$ пропорциональна времени t^{2M} . Корреляция между прошлыми и будущими приращениями определяется формулой

$$\mathcal{K}(-t; t) = \frac{\langle -B_M(-t)B_M(t) \rangle}{\langle B_M^2(t) \rangle} = 2^{2M-1} - 1. \quad (4.8)$$

Формула (4.8) не зависит от времени и при $M = \frac{1}{2}$ показывает отсутствие корреляции между значениями приращений в прошлом и будущем (независимость приращений). Однако при $M \neq \frac{1}{2}$ (*диффузия Леви*) наблюдается чёткая зависимость между прошлыми и будущими приращениями, что приводит к сохранению (*персистентности*) или пренебрежению (*антиперсистентности*) той тенденцией, которая возникла для предыдущих прыжков. Персистентность устанавливается при $M > \frac{1}{2}$: если в прошлом приращения были положительными (увеличивались), то (в среднем) и в будущем сохранится эта тенденция, несмотря на незначительные отклонения от кривой роста. Случай антиперсистентности характеризуется значениями параметра $M < \frac{1}{2}$ и сменой прошлой тенденции на противоположную.

Свойства персистентности и антиперсистентности противоречат обычным предположениям, на которых базируется статистическая физика: события могут быть скоррелированы, если они разделены не более чем на конечный промежуток времени Δt , причём при $\Delta t \rightarrow \infty$ корреляция между событиями разрушается. Возникновение статистической независимости во времени и/или пространстве является базовой гипотезой о *тепловом равновесии*.

Системы со свойствами персистентности и антиперсистентности ассоциируются с биосистемами, которые характеризуются доминантными и регрессионными параметрами при передаче информации наследственности с помощью генетического кода. Системы с показателем Мандельброта $M = \frac{1}{2}$ порождают шум с независимыми значениями, который называется “белым”, а при значениях $M \neq \frac{1}{2}$ – “коричневым” (броуновским). С увеличением параметра M шум уменьшается, а отклонения от начала координат – увеличиваются. Эти явления приводят к возникновению аномальной диффузии, которая наблюдается в стохастических средах.

Аномальность диффузионного процесса связана со свойствами фрактальных блужданий в евклидовом пространстве. На фрактальных множествах евклидового пространства аномальная диффузия характеризуется изменением показателя степени зависимости коэффициента диффузии от времени.

По *центральной теореме* теории вероятностей определённым образом нормированная сумма большого числа случайных величин с неизвестными законами распределения и конечными дисперсиями подчиняется закону Гаусса. Отсюда следует инвариантность закона ошибок *относительно сложения независимых* случайных величин: дисперсия σ^2 суммы двух случайных величин равна сумме дисперсий этих случайных величин, т.е.

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \quad (4.9)$$

Если ввести некоторый общий показатель степени M , необязательно совпадающий с фрактальной размерностью, а в качестве характеристики ширины распределения *интерквартильный размах* s (разность между двумя значениями случайной величины, для которых вероятности равны $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{4}$, соответственно), то вместо соотношения (4.9) можно записать более общее правило:

$$s^M = s_1^M + s_2^M, \quad (4.10)$$

где $0 < M \leq 2$. Такого вида соотношение впервые было получено Леонардо да Винчи (см. пункт 1.2, формула (1.1) на стр. 20). Случай $M = 1/2$ соответствует инвариантному распределению с плотностью вероятности вида

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{2x}\right), \quad (4.11)$$

которая является дифференциальной функцией распределения того, что броуновский шум $B(t)$ с нулевым начальным значением снова обратится в нуль на интервале $x \leq t \leq x+dx$.

Применение однородных случайных функций распределения приводит к возникновению случайных фрактальных фигур, которые являются отражением детерминированного хаоса, порождаемого малыми флуктуациями, нарастающими с течением времени в соответствии с классической статистической физикой, или с сохранением (сменой) тенденции по Б.Б. Мандельброту.

4.4. Ограниченный рост популяции

Бытие вечно, ибо существуют законы, охраняющие сокровища жизни, которыми украшает себя Вселенная.

И.В. Гёте

Рассмотрим ряд простых моделей, прогнозирующих численность населения Земли:

– *модель Мальтуса*. При благоприятных внешних условиях (обилие пищи, отсутствие хищников и т.п.) скорость увеличения численности популяции dN/dt пропорциональна числу особей в сообществе N . Коэффициент прироста населения k ($k > 0$) определяется разностью коэффициентов рождаемости и смертности. Согласно модели Мальтуса, кинетическое уравнение эволюции численности популяции имеет вид

$$dN/dt = kN. \quad (4.12)$$

Решением уравнения является функция $N(t) = N(0)e^{kt}$ (раскручивающаяся логарифмическая спираль, см. пункт 2.5, стр. 38), где $N(0)$ – число особей в начальный момент времени. Удвоение численности населения происходит достаточно быстро по истечении промежутка времени, равного $\Delta t = \ln 2 / k$. При превышении некоторого большого числа N_c (предел численности популяции) модель Мальтуса становится непригодной в силу зависимости коэффициента прироста от числа индивидуумов в сообществе.

– *логистическая модель (модель Ферхюльста (1845))*. При $N \geq N_c$ возникает конкуренция между особями из-за нехватки питания и стремлением к расширенному воспроизводству. Эти обстоятельства включают природные регуляторные функции, которые подавляют развитие менее приспособленных членов популяции. Линейная зависимость коэффициента прироста $k = a - bN$ от числа особей

приводит к логистической модели, в которой эволюционное уравнение имеет вид

$$\boxed{dN/dt = aN - bN^2}. \quad (4.13)$$

Изменения численности населения в зависимости от времени по модели Мальтуса (штрих-линия) и модели Ферхюльста (сплошная линия) показаны на рис. 4.3. При малой численности сообщества

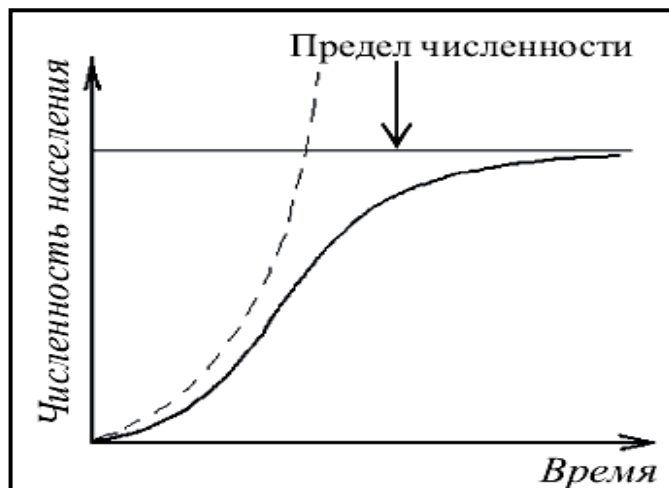


Рис. 4.3. Рост численности населения Земли, согласно моделям Мальтуса и Ферхюльста.

закон Мальтуса и логистическое соотношение практически совпадают (в физике твёрдого тела аналогичная картина наблюдается при вычислении теплоёмкости по моделям Эйнштейна и Дебая), однако при приближении к критической величине народонаселения логистический закон показывает выход на стационарную численность N_c (явление насыщения). Различные оценки стационарной численности населения Земли приводят к значениям от 16 до 20 млрд. человек. S-образный логистический закон также описывает смену одной технологии другой, эволюционные преобразования в экономической и социокультурной сферах, распространение инноваций и т.п.

Модель Ферхюльста может быть описана также на языке итераций:

$$\boxed{x_{n+1} = (1+r)x_n - rx_n^2}, \quad (4.14)$$

где r — управляющий параметр модели. Стационарным состояниям численности населения соответствуют два значения: $x_0 = 0$ — отсутствие первоначальной популяции (неустойчивое состояние) и $x_0 = 1$ — максимально заполненная экологическая ниша для исследуемой популяции. Исследуем поведение популяции вблизи этого

положения, для чего линеаризуем уравнение (4.14), введя новую переменную $y_n = x_n - 1$, причём $y_n \ll 1$ определяет бесконечно малые отклонения от состояния $x_0 = 1$:

$$y_{n+1} \cong (1-r)y_n. \quad (4.15)$$

При значениях управляющего параметра $0 < r < 2$ состояние $x_0 = 1$ устойчиво (рис. 4.4а), а при $r > 2$ – оно становится неустойчивым (рис. 4.4б). При $r = 2,3$ популяция периодически колеблется с периодом 2

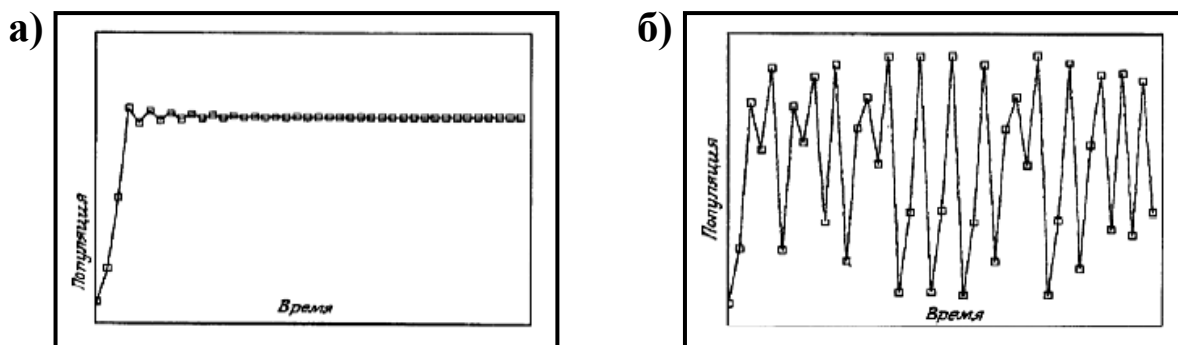


Рис. 4.4. Устойчивость состояния $x_0 = 1$ при $0 < r < 2$ (а) и неустойчивость при $r > 2$ (б).

вблизи стационарного состояния. Эти колебания устойчивы до тех пор, пока управляющий параметр меньше $r = 2,449$. При дальнейшем росте параметра r период колебаний удваивается каждый раз, когда происходит приближение к значению $r = 2,57$, после чего колебания становятся аperiodическими, т.е. хаотическими (рис. 4.5).

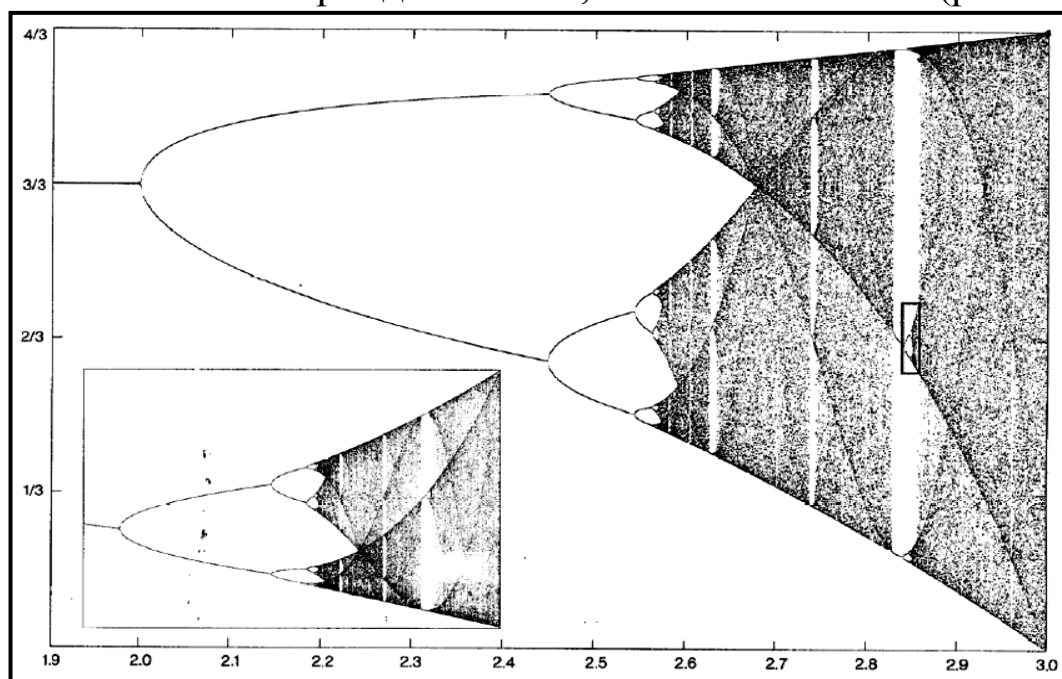


Рис. 4.5. Бифуркационная картина удвоения периода колебаний в логистической модели.

Удвоение периода колебаний при достижении очередного значения r_n называется *бифуркацией*. Исследования показали, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \right) = \kappa = 4,66920166091\dots, \quad (4.16)$$

где κ – постоянная Фейгенбаума. Бифуркационная диаграмма, изображённая на рис. 4.5, напоминает конструктивный Y-фрактал, соответствующий дереву Пифагора (см. Главу 2, рис. 2.1, стр. 28). При $r=2,8284$ возникают колебания периода 3, которые затем удваиваются до значения $r=2,8495$, после чего возникает хаос.

Исследование модели Ферхюльста показывает, что существуют общие законы возникновения тесно связанных между собой фракталов, неустойчивостей стационарных состояний и детерминированного хаоса в динамических системах вне зависимости от вида организационного уровня материи.

4.5. *Детерминированный хаос*

Это не бардак, это творческий беспорядок!
А. Лебедев

Динамическое поведение нелинейной системы всегда сопровождается неустойчивостями и возникновением детерминированного хаоса, который коренным образом отличается от стохастичности. Первый возникает из-за зависимости поведения системы от начальных условий или положительности коэффициентов Ляпунова скоростей изменения состояния. Вторая является противоположностью детерминизма и сосуществует с ним в вечном единстве и противоборстве. Так же как в детерминированных системах могут возникать псевдослучайные перемещения, так и в хаотических средах должны наблюдаться упорядоченные движения. Это утверждение является следствием *принципа перемешиваемости*, установленного в теории нелинейных динамических систем, но который имеет более глубокий философский смысл и область применимости, нежели ему было изначально отведено.

Возникающий хаос сопровождается ветвлением (бифуркацией), в результате которого система выбирает то или иное устойчивое стационарное состояние. Выбор в пользу одного из них совершается за счёт изменения управляющего параметра при достижении им критического значения. Пока это значение не достигнуто система колеблется между двумя “зайцами” и не знает, которого

из них предпочесть. Осуществить выбор помогают флуктуации, случайные пробы пребывания в том или ином состоянии. Однако при этом изменяется геометрия самой системы, она становится на определённое время фрактальной, т.е. отличной от евклидовой. В этот момент времени включаются свойства *персистентности* или *антиперсистентности*. Флуктуации не ведут себя так, как это принято в статистической физике, где они могут только нарастать с течением времени. Они подчиняются тенденции, возникшей на раннем этапе вхождения системы в хаос: либо тенденция сохраняется, либо подавляется. Это и является критерием выбора одного из стационарных состояний. В дальнейшем возникшая тенденция вновь подвергается сомнению и система либо эволюционирует в сторону всё большей устойчивости, либо деградирует и становится всё более и более неустойчивой, вплоть до полного прекращения своего существования. Тенденциозное развитие реализует естественный отбор как состояний, так и самих систем в зависимости от значений их управляющих параметров (параметров порядка и хаоса). Чем устойчивее эти параметры по отношению к внешнему воздействию, тем дольше система пребывает в выбранном стационарном состоянии. Многообразие систем и стационарных состояний порождается огромным числом сочетаний, по всей видимости, конечного числа параметров порядка (генеалогического кода), которые сами подвержены флуктуациям. Однако наличие мировых констант доказывает, что некоторые из них меняются настолько медленно, что определяют существование самого материального мира.

Детерминизм сохраняется на начальных стадиях превращения системы, но после нескольких бифуркаций и вхождения в область хаоса он “бледнеет” под напором случайностей. Он снова возникает благодаря тенденциозности эволюционного процесса и теперь уже хаосу приходится возвращаться в “окопы”. Постоянная борьба между детерминизмом и хаотичностью наиболее ярко проявляется на микроскопическом уровне, где “царствует” её величество случайность. Несмотря на раздел территорий, причинно-следственные и вероятностные “войска” постоянно преодолевают естественную границу между ними, стремясь оккупировать как можно больше плацдармов для последующих “атак”. Они приводят к тому, что ранее усвоенная системой информация (соответственно

энтропия) становится бесполезной, что заставляет систему генерировать и запоминать новую информацию. В свою очередь, это требует создания специфических, унифицированных отделов по жизнеобеспечению, сохранению генеалогического кода, сбору, переработке, сортировке, запоминанию, наследственной передаче в силу конечного времени существования, выработке и хранению новой информации, а также стратегии будущих действий. Эти требования вызывают эволюционные преобразования систем с борьбой между собой за комфортные условия развития, что вновь приводит к появлению детерминированного хаоса, но на новом уровне организации материального мира. Это говорит о том, что известные и неизвестные законы преобразования материального мира допускают множество исходов, но реализуется только один сценарий в силу необратимости происходящих изменений из-за внутри- и вневидовой борьбы между системами за “место под солнцем”.

Возражения по поводу того, что мир устроен по известным нам законам, ведь даже космические корабли достигают требуемых целей, легко могут быть опровергнуты тем, что для этого требуется постоянная корректировка их курса. Если же космический корабль, находящийся на орбите Земли, предоставить самому себе на достаточно длительный промежуток времени, то его траектория движения станет такой же непредсказуемой, как и траектория частицы Броуна. В этой связи возникают вопросы об устойчивости солнечной системы, нашей галактики и Вселенной в целом. Не изменится ли тенденция её существования после некоторого числа бифуркаций и не является ли она регрессивной? Следовательно, любые долгосрочные прогнозы поведения любой динамической системы (погоды, увеличения или уменьшения количества сделок на бирже, демократизации мирового сообщества и т.д.) обречены на провал. Хорошие эксперты не гадают на кофейной гуще и не делают предсказаний, они выявляют тенденции. Фиксация тенденций в виде феноменологических моделей и эстетических образов (зрительных, слуховых и др.) составляет суть научного и художественного, эстетического восприятия материального мира. Гениальность человеческого мозга в том и состоит, что отсекая ненужное, он создаёт вечное.

Найденные законы и пропорции содержат в себе отсечённое, которое может оказаться при определённых условиях важным и

необходимым. Множественность ранее установленных соотношений лишний раз подчёркивает, что не всё так просто, как нам бы этого хотелось. Кроме того, рождение кибернетики не только расширило наши вычислительные возможности, но и с появлением компьютерной графики позволило создавать иллюзию мира, которая притягивает всё большее и большее число людей. Если число поклонников виртуального мира будет расти, а сам этот мир будет совершенствоваться в сторону правдоподобности и схожести с материальной средой, то неизбежно возникнет деградация человеческого общества: эволюция *Homo Sapiens* (Человек разумный, лат.) претерпит бифуркацию и будет заменена развитием роботов.

Однако бифуркационный сценарий перехода к хаосу не является единственным. Ещё один сценарий возникновения детерминированного хаоса был открыт Б.Б. Мандельбротом при исследовании нелинейных отображений одной комплексной плоскости в другую. Существование на плоскости аттракторов и репеллеров приводит к формированию евклидовых или фрактальных границ между ними (*сепаратрис*, от слова *сепарация* – разделять). Точки, которые образуют границу, не могут участвовать в притяжении к аттрактору или в отталкивании от репеллера, поэтому они находятся в лабильном (безразличном) состоянии. При изменении управляющих параметров меняются не только неподвижные точки, но и границы их влияния. Может случиться так, что она рассыплется на отдельные точки и станет такой, как “пыль” Кантора (см. пункт 2.1, стр. 32) или “салфетка” Серпинского (см. пункт 2.4, стр. 36). Этот процесс является более общим, чем сценарий Фейгенбаума, несмотря на то, что процесс Б.Б. Мандельброта схож с преобразованием Ферхюльста. Различие состоит в том, что при критических значениях управляющего параметра граница из евклидовой становится фрактальной. Самоподобие границы прослеживается на разных масштабах и на различных её участках. Границы такого рода называются *множествами Жюлиа*, который, в частности, установил, что эту границу можно восстановить целиком по малому участку, используя масштабирование. Динамический процесс на границе невероятно хаотичен, граница постоянно видоизменяется, поэтому комплексные фракталы называют *динамическими*. В нелинейных динамических системах с числом переменных не менее 2 возникают аттракторы нового типа – *странные аттракторы*.

4.6. *Аттрактор Лоренца*

То, что мы знаем, – ограничено, а
то, что мы не знаем, – бесконечно.

П.С. Лаплас

Пусть слой жидкости толщиной h находится в гравитационном поле Земли (\vec{g} – вектор свободного ускорения) под действием градиента температуры, т.е. на верхней границе жидкость имеет постоянную температуру T_0 , а на нижней – $T_0 + \Delta T$ (рис. 4.6). При дос-

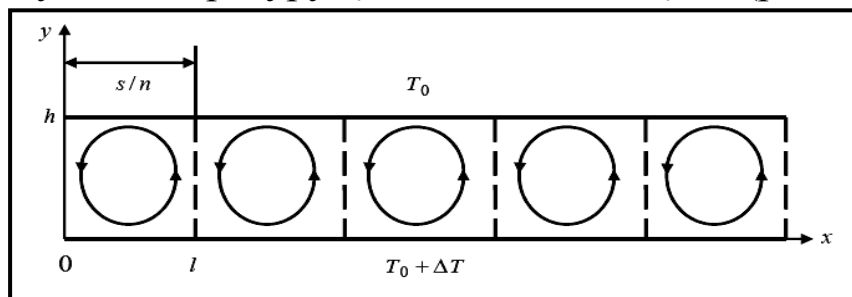


Рис. 4.6. *Поведение слоя жидкости при наличии градиента температуры.*

таточно большой разности температур ΔT (*градиент температуры*) в слое возникают конвекционные потоки, которые формируют ячейки Бенара (рис. 4.7) (ширина $l = s/n$, s – размер среды вдоль оси

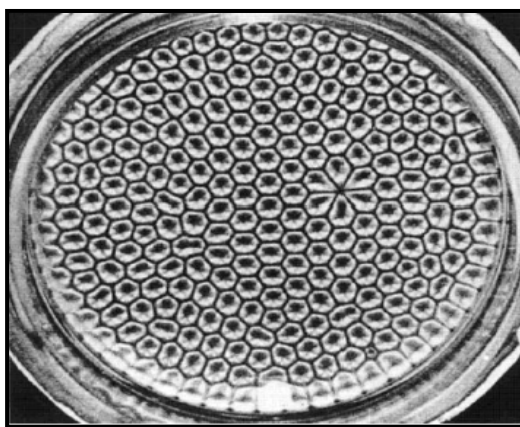


Рис. 4.7. *Внешний вид ячеек Рэлея-Бенара.*

абсцисс, n – число ячеек, уместяющихся на оси абсцисс): внутри которых жидкость поднимается от более нагретой нижней границы к поверхности слоя, а по плоскостям шестигранников охлаждающаяся жидкость стекает вниз.

Распределённая система задаётся векторным полем скоростей $\vec{u} = \vec{u}(u_1; u_2; u_3)$, скалярными полями давления $P = P(x, y, z, t)$, температуры $T = T(x, y, z, t)$ и плотности $\rho = \rho(x, y, z, t)$, соответственно. Моделирование исследуемой ситуации строится на использовании уравнений:

– Навье-Стокса $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \vec{u} + \vec{g}$ (ν – кинематическая вязкость);

– неразрывности среды $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$;

– теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(T \vec{u}) = \chi \Delta T$ (χ – коэффициент теплопроводности);

– связи между плотностью и температурой $\rho = \rho_0(1 - \alpha \Delta T)$ (остальные параметры считаются независимыми от разности температур (приближение Буссинеска), α – коэффициент теплового расширения).

Система уравнений дополняется граничными условиями:

– на нижней границе $T(x, y, z = 0; t) = T_0 + \Delta T$; $\vec{u}|_{y=0} = 0$;

– на верхней границе $T(x, y, z = h; t) = T_0$; $\vec{u}|_{y=h} = 0$.

Граничные условия для поля скоростей отражают отсутствие движения жидкости через граничные плоскости. Линеаризуем данные уравнения, введя следующие обозначения:

$$P = P_0 - \rho_0 g(1 - \alpha \Delta T)y + p(x, y, t) \quad \text{и} \quad T = T_0 + \Delta T \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \theta(x, y, t),$$

где $p(x, y, t)$ и $\theta(x, y, t)$ – малые отклонения от гидростатического давления $P = P_0 - \rho_0 g y$ и от линейной зависимости $T = T(y)$, соответственно. Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{u} + \alpha g \vec{j} \theta; \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla(\theta \vec{u}) - \Delta T \nabla \left(\frac{y}{h} \vec{u}\right) = \chi \Delta \theta, \end{cases} \quad (4.17)$$

заметим, что $\nabla(y \vec{u}) = u \vec{j}$. Граничные условия преобразуются к виду:

$$\begin{cases} \theta(x, y = 0; t) = \theta(x, y = h; t) = 0; \\ u \vec{j}|_{y=0} = u \vec{j}|_{y=h} = 0. \end{cases}$$

Так как движение жидкости происходит в плоскости xOy , то составляющая скорости $u_3 = 0$. В силу того, что $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$, можно ввести функция тока жидкости, согласно формулам

$$u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

отражающим непрерывность среды. После исключения давления, как показал Солтсмен (1981), уравнения (4.17) принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x, y)} + \nu \Delta^2\psi + \alpha g \frac{\partial\theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, y)} - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \chi \Delta\theta, \end{cases}$$

где $\frac{\partial(q, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$ и $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$. Разлагая функцию тока в ряд Фурье, сохраняя только младшие члены разложения и используя подстановку

$$\begin{aligned} \frac{n}{1+n^2} \frac{\psi}{\chi} &= \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right); \\ \frac{\pi R \theta}{R_c \Delta T} &= \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right), \end{aligned}$$

где $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ зависят только от времени ($R = \alpha g h^3 \Delta T / (\nu \chi)$ – число Рэлея, а $R_c = \pi^4 (1+n^2)^3 / n^2$ – его критическое значение, величина n характеризует отношение линейных размеров ячейки Бенара), получим систему уравнений Э.Н. Лоренца (1963):

$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y - X) \\ \dot{Y} = bX - Y - XZ \\ \dot{Z} = -cZ + XY \end{cases}, \quad (4.18)$$

где производная берётся по безразмерному времени $\tau = \pi^2 (1+n^2) \chi l / h^2$, $a = \nu / \chi$ – число Прандтля, $b = R / R_c$ – управляющий параметр, а коэффициент $c = 4 / (1+n^2)$. В системе уравнений Лоренца переменная $X(t)$ характеризует скорость вращения конвекционных потоков, а $Y(t)$ и $Z(t)$ описывают распределение температуры по осям абсцисс и ординат, соответственно. Решение уравнения (4.18) при $a=10$, $c=8/3$ и $b=24,74$ показало, что графики функций $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ подобны кривой Броуна (см. пункт 4.1, рис. 4.1, стр. 67). В качестве примера на рис. 4.8а показана зависимость $X(t)$. Из рис. 4.8а видно, что старт итераций со стартовой точки близкой к первоначально выбранной точке приводит к расхождению графиков функции $X(t)$ (пунктирная линия на рис. 4.8а). Затем Э.Н. Лоренц изобразил все три переменные на пространственном графике, напоминающем в плоском изображении крылья бабочки (см. пункт 3.4, рис. 3.7, стр. 64), который не только продемонстрировал взаимозависимость переменных $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ (рис. 4.8б), но и показал сложный характер

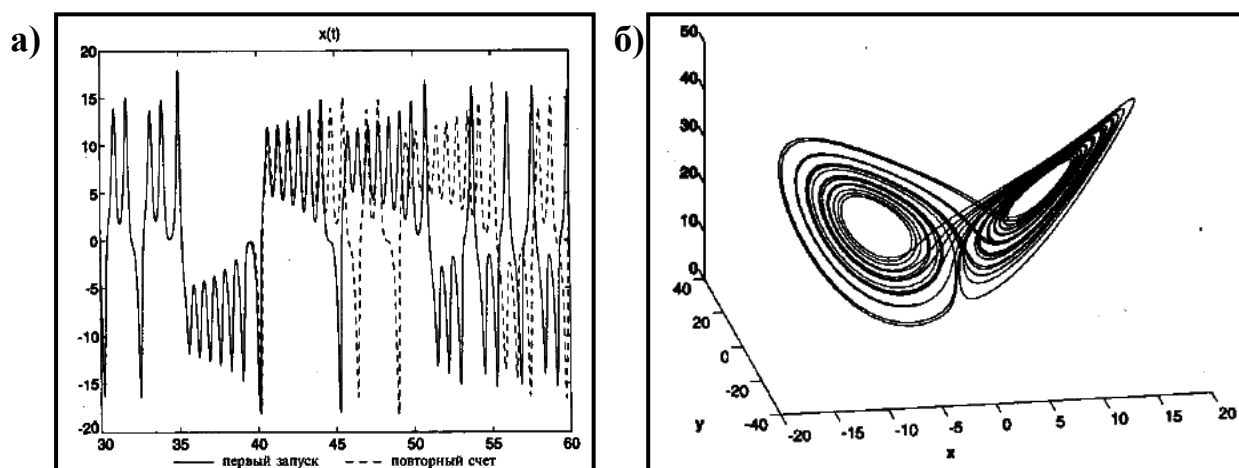


Рис. 4.8. Временное изменение функции $X(t)$ (а) и трёхмерное изображение странного аттрактора Лоренца (б).

автоколебаний, которые возникают в динамической системе при определённых значениях управляющего параметра. Они получили название *детерминированного хаоса*.

Проанализируем устойчивость (условия возникновения конвекции и турбулентности) модели Лоренца, для чего запишем систему уравнений (4.18) в векторной форме

$$\dot{\vec{X}} = F(\vec{X}),$$

где $\vec{X} = (X; Y; Z)$, $F(\vec{X}) = (a(Y - X); bX - Y - XZ; -cZ + XY)$. Решение уравнения $F(\vec{X}) = 0$ определяет неподвижные точки, которые задаются равенствами $\vec{X}_1 = (0; 0; 0)$ и $\vec{X}_2 = (\pm\sqrt{c(b-1)}; \pm\sqrt{c(b-1)}; b-1)$. Первая точка описывает теплопроводность покоящейся среды. Её матрица устойчивости по Ляпунову равна

$$\left. \frac{\partial F_i(\vec{X})}{\partial X_j} \right|_{X_1} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix},$$

причём собственные

числа равны

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a+1}{2} \pm \frac{\sqrt{(a+1)^2 + 4(b-1)a}}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_3 = -c. \quad (4.19)$$

Все показатели Ляпунова отрицательны при значении управляющего параметра $0 < b < 1$, т.е. решение $\vec{X}_1 = (0; 0; 0)$ устойчиво. При $b = 1$ собственное число $\lambda_1 = 0$, а решение $\vec{X}_1 = (0; 0; 0)$ становится неустойчивым: начинается конвекция Бенара и реализуется второе решение $\vec{X}_2 = (\pm\sqrt{c(b-1)}; \pm\sqrt{c(b-1)}; b-1)$. Для этого решения матрица устойчивости

имеет вид
$$\left. \frac{\partial F_i(\vec{X})}{\partial X_j} \right|_{X_2} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & d \\ d & d & -c \end{pmatrix},$$
 где $d = \pm\sqrt{c(b-1)}$. Главные значения

этой матрицы при $b=1$ равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -c$ и $\lambda_3 = -a - 1$. Критическая ве-

личина управляющего параметра для конвективного решения определяется по формуле $b_c = a \frac{a+c+3}{a-c-1}$ (при $a=10$, $c=8/3$, то $b_c=24,74$). При превышении этого значения предельный цикл конвективного движения становится неустойчивым и динамическая система переходит в хаотический режим.

Возникновение ячеек Бенара при достижении критического значения градиента температуры демонстрирует явление самоорганизации в диссипативной системе. *Тепловая энергия, вносимая в систему извне*, расходуется на создание конвективных потоков в строго определённых пространственных областях, что приводит к возникновению шестигранных структур. Геометрическая форма ячеек зависит от граничных условий, она может также быть квадратной и треугольной. При нагревании не только дна, но и боковых стенок сосуда, происходит переход шестигранников в *страйп-структуры (лабиринты)* с последующим переходом их в *спирали* (рис. 4.9). Таким образом, ячеистая структура становится неустой-

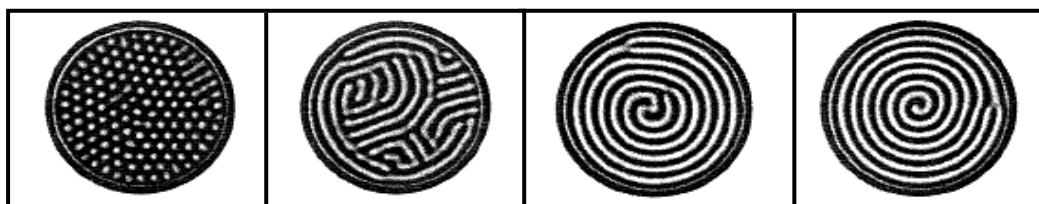


Рис. 4.9. Стадии преобразования ячеек Рэлея-Бенара в спираль.

чивой при нагреве боковых стенок и замещается более устойчивым спиралевидным образованием.

Аттрактор в модели Э.Н. Лоренца был назван “странным” потому, что его геометрическую структуру невозможно было воссоздать из элементов евклидовой геометрии, т.е. из элементов с целочисленной размерностью. “Странный” аттрактор Э.Н. Лоренца обладает дробной размерностью и является фракталом. Увеличение любого его участка приводит к тому же результату, если просчитать траектории с более точными числовыми значениями параметров, т.е. “странный” аттрактор самоподобен. Все траектории внутри странного аттрактора неустойчивы; фазовая точка никогда не проходит по одной и той же траектории; любые две из них экспоненциально расходятся, при этом оставаясь на инвариантном торе (рис. 4.10). Движения фазовой точки носят хаотический характер, а достаточно малое изменение начальных условий радикально изменяет вид движения: от периодических до хаотических, т.е. оно

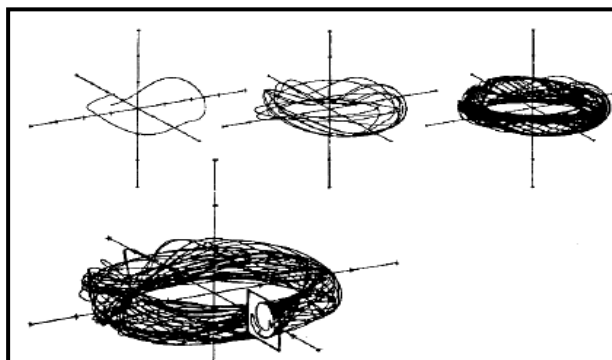


Рис. 4.10. *Образование инвариантного тора фазовыми траекториями в модели Э.Н. Лоренца.*

становится неустойчивым, но детерминировано предсказуемым в смысле эволюционного развития. Перечисленные свойства говорят о частичной упорядоченности, которая проявляется в формировании конвекционных ячеек Рэлея-Бенара.

Ещё раз подчеркнём отличие детерминированного хаоса от случайных процессов: случайное движение либо непредсказуемо, либо предсказуемо (с определённой вероятностью) отличаются от сложных автоколебаний, отображаемых “странным” аттрактором, эволюция которых детерминируема, но ограничено предсказуема, и они имеют вполне узнаваемый фазовый портрет. Кроме того, для описания стохастических процессов надо учитывать флуктуации в исходном уравнении или формулировать уравнение в терминах плотности вероятности, как это сделал при создании квантовой механики Э. Шрёдингер. Вхождение системы в детерминированный хаос порождает *внутренний “белый” шум*, при этом сама система остаётся устойчивой по отношению к *внешним шумам и воздействиям*. Малое отклонение любой внутренней точки “странного” аттрактора от первоначального положения “потонет” во внутреннем шуме собственных флуктуаций системы. Иная картина наблюдается при малом отклонении системы от положения равновесия или стационарного состояния: по истечении продолжительного времени оно может привести к существенным изменениям динамической системы и, может быть, к её полному разрушению. Таким образом, детерминировано хаотические системы сочетают слабую чувствительность к малым внешним шумам и воздействиям с устойчивостью их “странного поведения”.

Другой вид “странного поведения” демонстрирует осциллятор Рёсслера (рис. 4.11), который возникает при исследовании системы уравнений вида:

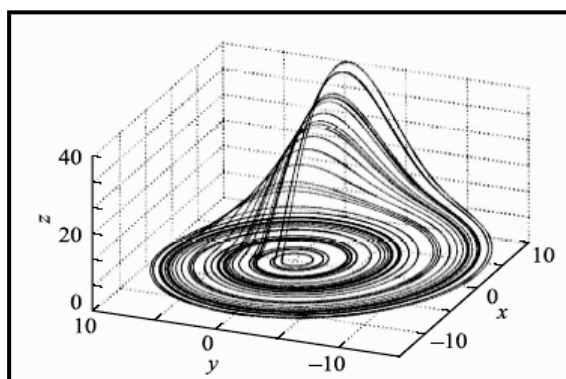


Рис. 4.11. Автоколебания в системе Рёсслера (1976)
при $a=0,2$; $b=0,4$ и $c=8$.

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z \\ \dot{Y} = X + aY \\ \dot{Z} = b + Z(X - c) \end{cases} \quad (4.20)$$

Исследование системы уравнений (4.20) проводится аналогично тому, как это было показано на примере системы уравнений (4.18).

Если рассмотреть систему нелинейных итерационных уравнений вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n y_n + a_4 y_n + a_5 y_n^2 \\ y_{n+1} = b_0 + b_1 y_n + b_2 y_n^2 + b_3 x_n y_n + b_4 x_n + b_5 x_n^2 \end{cases}, \quad (4.21)$$

то она порождает довольно много “странных” аттракторов самых разнообразных и фантастических форм, некоторые из которых показаны на рис. 4.12.

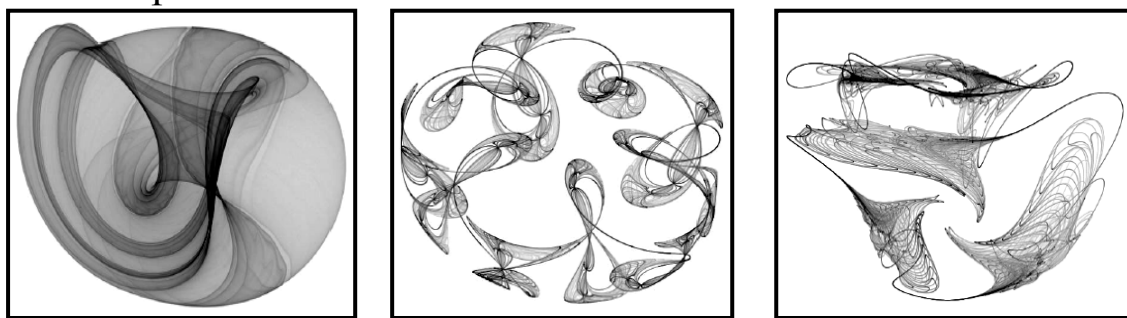


Рис. 4.12. Области детерминированного хаоса нелинейной системы.

Из приведенных примеров становится очевидным, что любая нелинейная система дифференциальных уравнений первого порядка с двумя или более переменными должны порождать “странный” аттрактор или “странный” репеллер. Системы со “странными” репеллерами представляют не меньший интерес, так как они должны отражать области случайного порядка, которые должны быть весьма чувствительными к внутренним шумам и очень неустойчивыми по отношению к внешнему воздействию.

Глава 5. Динамические фракталы

Чему бы жизнь нас не учила, но сердце верит в чудеса.

Ф.И. Тютчев

Итерационные процессы на комплексной плоскости порождают *динамические фрактальные множества*, которые уже напоминают некоторые природные явления и объекты. Например, возникает конкуренция между несколькими аттракторами за доминирование на плоскости, что приводит к возникновению сложных, фрактальных по строению границ между территориями противоборствующих аттракторов. Именно в пограничных областях наблюдается фазовый переход порядок-беспорядок. Наличие репеллеров порождает “пустыни”, недоступные для фазовых траекторий. Плоскость дробится на ячейки, размер которых должен определяться при устремлении числа итераций к бесконечности. В результате “борьбы за выживание” может остаться только одна из воюющих сторон, но на плоскости всегда останутся точки, которые “не подчинятся зову победителя”. Границы такого вида называются *множествами Жюлиа* (Гастон Жюлиа и Пьер Фату изучали эти множества для случая рациональных отображений в комплексной плоскости), ряд этих фигур изображён на рис. 5.1.

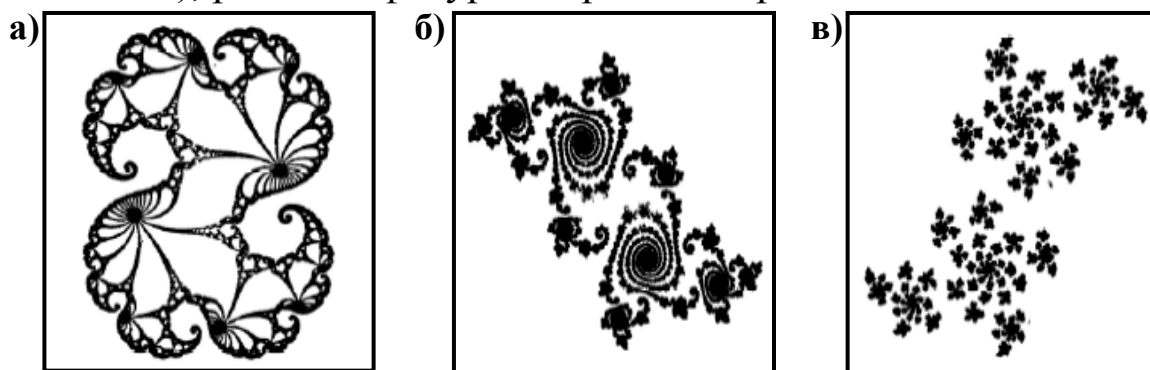


Рис. 5.1. Виды фрактальных множеств Жюлиа.

На границе происходят постоянные “стычки”, она постоянно видоизменяется, что невозможно отобразить на статической картинке. Именно из-за этого процесса комплексные фракталы получили название “*динамические*”. Кроме того, на плоскости могут появляться новые аттракторы, которые, используя конкурентную борьбу между другими аттракторами, могут захватить большую территорию и диктовать другим “соплеменникам” свои условия. Выбор того или иного числового значения управляющего параметра приводит к конкретному типу множества Жюлиа.

5.1. *Итерации комплексных функций*

Теория не является самоцелью наук, она занимается реальными, а не вымышленными проблемами. С точки зрения физика, теория больше напоминает дипломатию, чем твёрдые убеждения.

Дж. Дж. Томсон

Самая простая нелинейная, квадратичная итерация, которая была исследована Бенуа Б. Мандельбротом, имеет вид:

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c, \quad (5.1)$$

где $c = a + ib$ – постоянное комплексное число. В области вещественных чисел равенство (5.1) переходит в нелинейную систему двух итерационных функций гиперболического типа:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}. \quad (5.2)$$

Преобразование (5.2) порождает фрактальную фигуру, вид границ которой постоянно изменяется.

Как любое отображение, система уравнений (5.1) имеет *неподвижные точки*, которые определяются из условия $z = f(z)$ и могут быть *притягивающими (аттракторами)*, *отталкивающими (репеллерами)* или *нейтральными (слиперами)*, производная от английского слова *sleep – спать*). Неподвижная точка подобна в некотором смысле равновесному состоянию в термодинамике или стационарному состоянию для динамической системы. Если неподвижная точка является стартовой точкой итерационного процесса, то система в ней и останется. Классификация неподвижных точек соответствует динамическим равновесиям трёх типов: устойчивому, неустойчивому и лабильному (безразличному). Все точки, которые отображают итерационный процесс (5.1), будут неограниченно приближаться к аттрактору, удаляться от репеллера или находиться на первоначальном расстоянии от слипера. Характер неподвижной точки определяется значением первой производной от итерационной функции $f(z)$: аттракторы характеризуются значениями первой производной, которые удовлетворяют неравенству $|f'(z)| < 1$, слиперы – равенству $|f'(z)| = 1$, а репеллеры – неравенству $|f'(z)| > 1$. Способ получения этих соотношений становится очевидным, если разложить итерационную функцию в окрестности любой неподвижной точки z_0 в ряд Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots, \quad (5.3)$$

ограничившись первыми двумя членами разложения. Для неподвижной точки равенство (5.1) примет вид ($f(z) = z_{n+1}, f(z_0) = z_0, z = z_n$, а z_0 определяет исходную точку): $z_{n+1} = z_0 + f'(z_0)(z_n - z_0)$ или

$$\boxed{z_{n+1} - z_0 = f'(z_0)(z_n - z_0)}. \quad (5.4)$$

Из формулы (5.4) видно, что при $\boxed{|f'(z)| < 1}$ расстояние от итерационной точки z_n до неподвижной точки z_0 с каждым итерационным шагом будет уменьшаться, для слипера ($\boxed{|f'(z)| = 1}$) – оставаться неизменным, а для репеллера ($\boxed{|f'(z)| > 1}$) – увеличиваться.

Не менее важными точками комплексных отображений являются периодические точки, которые образуют *циклы*. Например, цикл *периода 2* определяется равенствами:

$$\begin{cases} \xi = f(\zeta) \\ \zeta = f(\xi) \end{cases}, \quad (5.5)$$

при этом точки, которые находятся на цикле, никогда его не покидают, а переходят друг в друга. Из (5.5) легко видеть, что периодические точки цикла периода $k=2$ являются неподвижными точками отображения:

$$\boxed{z_{n+1} = f(f(z_n)) = f^{(2)}(z_n)}, \quad (5.6)$$

а периодические точки цикла периода $k=3, 4, 5, \dots$ –

$$\boxed{z_{n+1} = \underbrace{f \dots f}_{k-1}(f(z_n)) = f^{(k)}(z_n)}. \quad (5.7)$$

Характеристика цикла периода 2 определяется первой производной от функции отображения, т.е.

$$\boxed{(f^{(2)}(\xi))' = (f(f(\xi)))' = f'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) = f'(\zeta) \cdot f'(\xi)}. \quad (5.8)$$

Дальнейшая классификация для циклов периода 2 (с учётом формулы (5.8)) проводится также, как и для неподвижных точек отображения: если выполняется неравенство $|f'(\zeta) \cdot f'(\xi)| < 1$, то цикл притягивает точки; при $|f'(\zeta) \cdot f'(\xi)| = 1$ – точки отображения находятся на первоначально определённом расстоянии от цикла; в случае, когда $|f'(\zeta) \cdot f'(\xi)| > 1$, итерационные точки удаляются от цикла. Такая же схема исследования применяется и для циклов периода $k=3, 4, 5, \dots$. Точки, в которых появляется цикл периода 2, называются *точками бифуркации* (или *ветвления*); для цикла периода 3 – *точками трифуркации* и т.д. В связи с этим неподвижные притягивающие циклы периода $k \geq 2$, согласно А. Пуанкаре, также называются аттракторами. Поэтому сохраняющие первоначальное рас-

стояние циклы будем называть слиперами, а отталкивающие – репеллерами. Итак, под особыми структурами динамической системы будем понимать неподвижные точки (фокусы) и неподвижные циклы с общими именами: аттракторы, слиперы и репеллеры. Бесчисленное множество неподвижных точек может образовывать линию Кантора. Если изображающая точка притягивается к бесконечности, то притягивающей точкой является *бесконечно удалённая точка*.

5.2. Комплексные регулярные фракталы Жюлиа, Фату, Мандельброта

Красота и математическое совершенство точно решённых моделей инициирует появление и развитие новых математических структур, которые, в свою очередь, способствуют созданию новых физических теорий...

А.Ю. Захаров

Простейшее множество Жюлиа порождается отображением

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2, \quad (5.9)$$

которое является частным случаем более общих преобразований комплексной плоскости с помощью полиномов

$$z_{n+1} = f(z_n) = P_n(z), \quad (5.10)$$

где $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ – полином порядка n с комплексными коэффициентами, или их отношения (рациональной дроби):

$$z_{n+1} = f(z_n) = P_n(z) / Q_m(z). \quad (5.11)$$

Неподвижные точки отображения Жюлиа являются решением уравнения $z^2 = z$: $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. Первая производная от итерационной функции равна $f'(z) = 2z$. В первой неподвижной точке она равна $f'(0) = 0 < 1$, следовательно, эта точка порождает аттрактор. Во второй неподвижной точке $f'(1) = 2 > 1$, т.е. она соответствует репеллеру. Если выбрать в качестве начальной итерационной точки такую, модуль которой меньше единицы, то последовательность чисел $z_0^2, z_0^4, z_0^8, \dots$ будет стремиться к нулю, т.е. к устойчивому фокусу $z_1 = 0$. Если начальная точка по модулю равна 1, то и все последующие итерационные точки будут лежать на единичной окружности, т.е. на слипере. Если же модуль начальной точки итерационного процесса превышает единицу, то вышеуказанная последовательность стремится к бесконечно удалённой точке. Таким образом, сепаратрисой (границей) бассейнов двух аттракторов (устой-

чивого фокуса и бесконечно удалённой точки) является слипер в виде единичной окружности, внутри которой лежит устойчивый фокус и на которой находится неустойчивый репеллер $z_2=1$, а также все неподвижные точки отображений более высокого порядка $f^{(k)}(z)$.

Если константа $c \neq 0$, то корни уравнения $z^2+c=z$ также приводят к аналогичным трём случаям, но при этом внутренний аттрактор находится в точке $z_1 \neq 0$, а граница приобретает фрактальную структуру. При значении константы $c=-0,12+0,74i$ граница состоит из связного множества деформированных окружностей. Внутренние точки этих окружностей притягиваются к трициклам, определяемым уравнением вида (5.7): $z_{n+1}=f^{(3)}(z_n)$. Следовательно, вид границы (множества Жюлиа, рис. 5.1а и б, стр. 86) зависит от значений постоянной $c \neq 0$. Возможна ситуация, что при определённом значении константы c граница может превратиться в “пыль” Кантора – множество несвязанных между собой точек, которое получило название “пыль” Фату (рис. 5.1в). Следует отметить, что выбор начальной итерационной точки не из множества Жюлиа уведит последовательность отображающих точек на бесконечность, в противном случае точки множества довольно хаотичным образом переходят одна в другую. Б.Б. Мандельброт установил правила, по которым можно предсказать вид множества Жюлиа в зависимости от значения управляющего параметра c . Эти правила графически отображаются в виде множества Мандельброта (рис. 5.2). Множес-

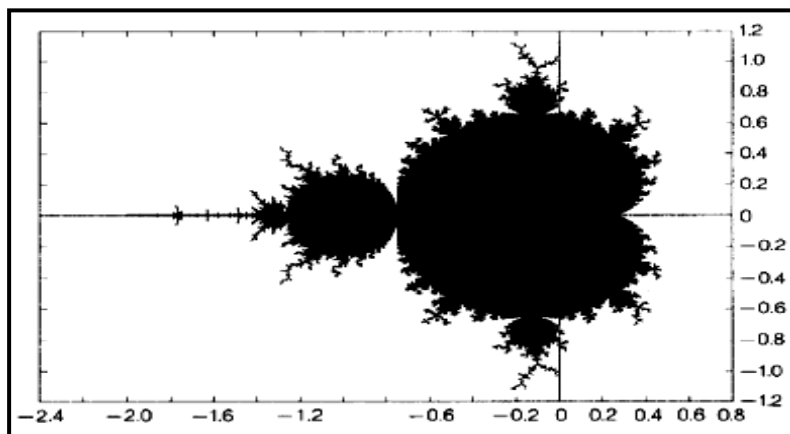


Рис. 5.2. Графическое изображение правил Б.Б. Мандельброта.

тво Мандельброта связно и имеет фрактальную размерность. Суть правил основателя фрактальной геометрии состоит в следующем: пока параметр c находится в чёрной зоне, множества Жюлиа связ-

ны; попадание значений параметра c в светлую область приводит к полному рассыпанию множества Жюлиа с переходом в множество Фату.

Исследуем свойства самого множества Мандельброта. Основную его часть занимает фигура, похожая на кардиоиду. Значениям параметра порядка c из этой области соответствуют множества Жюлиа с незначительно деформированным слипером. Бесконечное множество ей подобных фигур, изображённых вокруг кардиоиды, называются *почками*, которые отвечают за возникновение циклов того или иного периода. Так центру наибольшей почки на рис. 5.2 соответствует значение параметра c , отвечающее за возникновение бицикла (происходит бифуркация), сдвиг по вещественной оси влево порождает переход к трициклам: бифуркационная ветвь разбивается на три ветви и т.д. Другие почки отвечают за возникновение циклов более высоких порядков. Граница множества Мандельброта содержит бесконечно много слиперов, которые называют *маргинально устойчивыми точками*.

Из рис. 5.2 также видно, что множество Мандельброта окружено разветвлёнными иглоподобными фигурами, которые называются *дендритами*, на их иглах нанизано бесконечно много уменьшенных копий множества Мандельброта. Если взять значение параметра c на игле дендрита, то множество Жюлиа принимает вид дендрита. Если запускать итерационный процесс с любой точки дендрита, то это приводит к хаотическим блужданиям отображающей точки по дендриту. Если начальная точка не принадлежит дендриту, то точка-образ притягивается бесконечно удалённым аттрактором. Стартуя из точки, принадлежащей какой-либо миниатюрной копии главного множества Мандельброта, получают комбинацию из дендрита и части, аналогичной и подобной основному множеству. Выбор исходной точки в малой окрестности дендрита порождает самые фантастические виды “пыли” Фату, один из которых показан на рис. 5.3.

Метод построения множества Мандельброта основан на теореме, которую независимо друг от друга доказали Гастон Жюлиа и Пьер Фату. Суть её состоит в определении связности множества Жюлиа. Если старт итерационного процесса происходит с точки $z_0 = 0$ и отображающие точки не уходят на бесконечность, то множество Жюлиа связно. Последнее утверждение является эффекти-

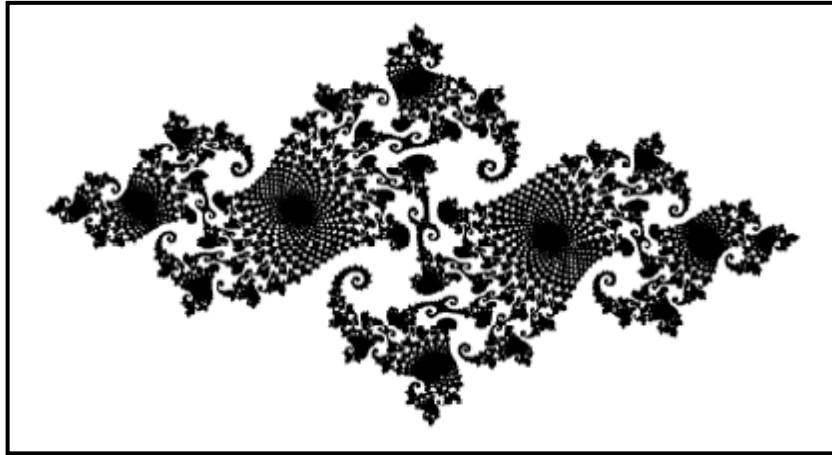


Рис. 5.3. “Морской конёк” из “пыли” Фату.

вным критерием принадлежности управляющего параметра c множеству Мандельброта и способом построения последнего. Действительно, последовательность комплексных чисел по соотношению (5.1) имеет вид: $z_0=0$; $z_1=c$; $z_2=c^2+c$; $z_3=(c^2+c)^2+c$; $z_4=((c^2+c)^2+c)^2+c$; ... Если эта последовательность имеет предел, отличный от бесконечности, то точка c принадлежит множеству Мандельброта. Отбрасывание в этой последовательности исходной точки $z_0=0$ никаким образом не изменяет сделанного вывода.

Очевидно, что на практике при построении фрактальной фигуры Мандельброта ограничиваются достаточно большим, но конечным числом итераций, например, 200000, а при подходе к границе это число увеличивается до 500000. Из изложенного материала следует три правила Мандельброта:

- 1) если итерационный процесс приводит к уходу последовательности на бесконечность, то точка c находится далеко от множества Мандельброта;
- 2) чем медленнее точка-образ уходит на бесконечность, тем ближе она находится к границам множества Мандельброта;
- 3) если последовательность $z_0=0$, $z_1=c$, $z_2=c^2+c$, $z_3=(c^2+c)^2+c$, ... сходится к конечному числу, то параметр c принадлежит множеству Мандельброта.

При построении фрактальной фигуры Мандельброта было замечено: если при значениях параметр c , удовлетворяющих неравенству $|c| > 2$, итерационная точка выходит за границы круга с радиусом 2, то она быстро перемещается к бесконечно удалённой точке. Если построить линии ухода точки-образа на бесконечность и линии с одинаковыми значениями итерационной последовательности для

разных значений параметра c , то получим “заряженное” множество Мандельброта (рис. 5.4). Отметим, что при значительном удале-

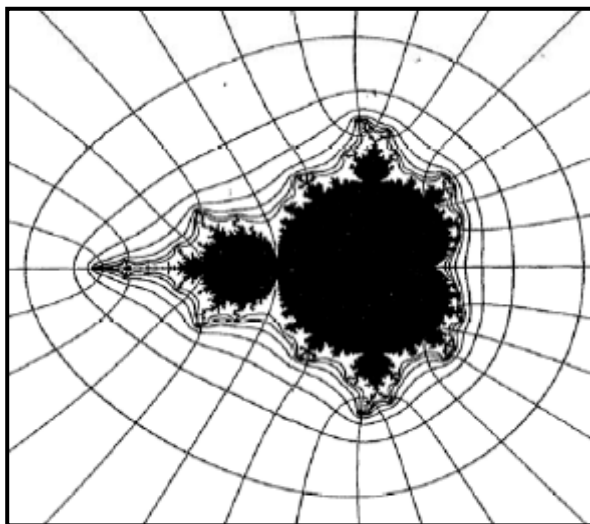


Рис. 5.4. “Заряженное” множество Мандельброта.

нии от фрактальной фигуры эквилиния по форме приближается к окружности.

Проведенное исследование вновь подтверждает ранее высказанное утверждение: генеалогический код, содержащий минимум информации, в сочетании с процессом его считывания способен породить невероятно сложные и *самоорганизованные* фрактальные фигуры. Другими словами, *самоорганизация* возникает в точках ветвления программы многократной реализации генеалогического кода. В результате *самоорганизации* происходит перестройка внутренней структуры исходной системы и последующая эволюция преобразованной системы в соответствии с принципом персистентности.

5.3. Отображение Ньютона

Чутьё художника иногда стоит мозгов учёного, и то и другое имеет одни цели, одну природу, и что, может быть, со временем при совершенствовании методов им суждено слиться.

А.П. Чехов

Пусть дана непрерывная и монотонная функция $f(x)$, которая на отрезке $[a; b]$ имеет непрерывные и не обращающиеся в нуль производные $f'(x)$ и $f''(x)$, а на концах отрезка $[a; b]$ принимает значения разных знаков. В силу монотонности график функции пересекает ось абсцисс в единственной точке x_0 , которая является корнем уравнения $f(x) = 0$ (рис. 5.5). Проведём касательную к графику функции $y = f(x)$ из того конца отрезка $[a; b]$, для которого выполняет-

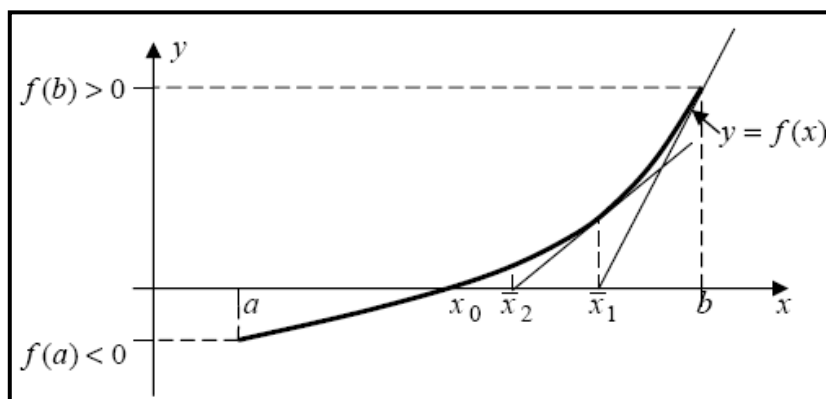


Рис. 5.5. Приближение к корню по методу Ньютона.

ся неравенство $f(a)f''(a) > 0$ или $f(b)f''(b) > 0$. Для графика, изображённого на рис. 5.5, таким концом является точка b , так как график функции вогнутый, то $f''(b) > 0$ и $f(b) > 0$. При выборе другого конца интервала точка пересечения касательной с осью абсцисс может выйти за пределы интервала $[a; b]$. Воспользуемся уравнением касательной, которую проведём к графику заданной функции $y = f(x)$ в точке b :

$$y = f(b) + f'(b)(x - b).$$

Касательная пересекает ось абсцисс в точке

$$\bar{x}_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

в которой проведём новую касательную. Новая касательная пересекает ось абсцисс в точке

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{f'(\bar{x}_1)}.$$

Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность ε на шаге k :

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} - \frac{f(\bar{x}_{k-1})}{f'(\bar{x}_{k-1})}.$$

Следовательно, $x_0 \approx \bar{x}_k \pm \varepsilon$.

Если этот алгоритм применить к функции комплексного переменного, то получим итерационный процесс

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \quad (5.12)$$

Легко видеть, что неподвижными точками отображения (5.12) являются корни уравнения $f(z) = 0$.

Наличие дроби в итерационной формуле (5.12) указывает на

наличие особых *сверхпритягивающих* точек, для которых выполняется равенство $f'(z)=0$. Согласно формуле (5.4), корни уравнения $f'(z)=0$ будут притягивать к себе любую итерационную последовательность, причём расстояние от сверхпритягивающей точки до точки-образа будет равно нулю. Это говорит о том, что при старте с корня уравнения $f'(z)=0$ итерационный процесс будет давать значения совпадающие с этим корнем. Для пояснения этого момента рассмотрим ряд примеров.

Если итерационной функцией является квадратичный полином $f(z)=P_2(z)=az^2+bz+c$, то неподвижными точками будут корни квадратного уравнения $az^2+bz+c=0$, которые имеют вид

$$z_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.13)$$

и расположены симметрично относительно прямой Дж. Хаббарда (1977) $z = -\frac{b}{2a}$, которая расположена перпендикулярно к отрезку прямой, соединяющей корни (5.13). Если итерации начинаются с точки на прямой Хаббарда, то точки-образы будут постоянно располагаться на ней, совершая хаотические колебания. Корни квадратного уравнения (5.13) являются аттракторами, прямая Хаббарда – слипером. В силу того, что все точки прямой Хаббарда являются особыми сверхпритягивающими точками, то граница между аттракторами имеет сложную фрактальную структуру. Используя параллельный перенос и масштабирование, приведём квадратичный полином к виду, описывающему множество Мандельброта:

$$P_2(z)=az^2+bz+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z\right)+c=a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=Z^2+C, \quad (5.14)$$

где $Z=\sqrt{a}\left(z+\frac{b}{2a}\right)$, $C=c-\frac{b^2}{4a}$. В новой системе координат прямая Хаббарда проходит через начало координат, её схематичный вид показан на рис. 5.6. Граница каждой грушевидной фигуры состоит из бесконечного числа подобных грушевидных фигур, которые соседствуют с обеими полуплоскостями комплексной плоскости.

В случае кубической функции картина значительно усложняется. Вначале рассмотрим простой полином третьей степени вида $f(z)=P_3(z)=z^3-1$. Корни этой функции имеют вид:

$$z_1=1, \quad z_{2,3} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}}{2}. \quad (5.15)$$

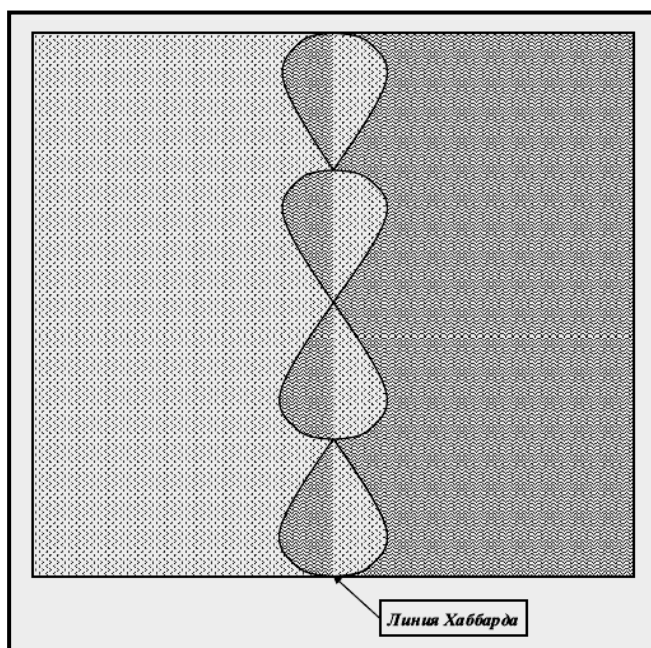


Рис. 5.6. Схематичный вид сепаратрисы для случая $f(z)=P_2(z)=az^2+bz+c$.

При расположении корней на комплексной плоскости они образуют равносторонний треугольник, высотами, биссектрисами и медианами которого являются прямые Хаббарда (рис. 5.7).

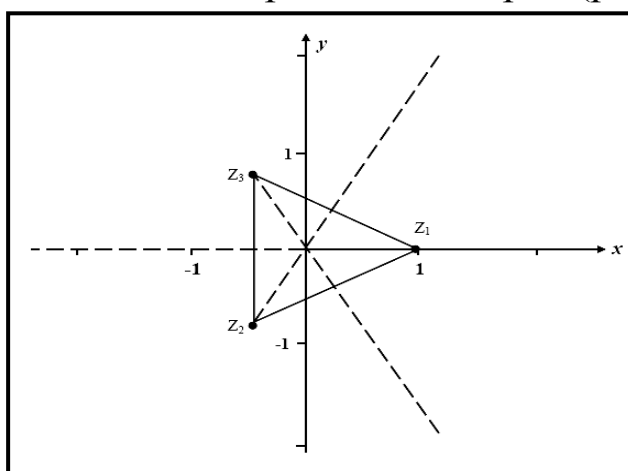


Рис. 5.7. Корни уравнения $z^3 - 1 = 0$ и границы Хаббарда (пунктирные прямые).

Из рис. 5.7 видно, что прямые Хаббарда пересекаются в точке $z=0$, в которой первая производная функции ($f'(z)=3z^2$) обращается в нуль. Она лежит на всех трёх прямых Хаббарда, которые являются слиперами. Особенность точки $z=0$ и хаотичность колебаний на слиперах порождает “пузырчатую” границу между тремя аттракторами (5.15), которая разделяет комплексную плоскость, как пирог, на три части. Сепаратриса представляет собой фрактальное множество, показанное на рис. 5.8а, на рис.5.8б показаны итераци-

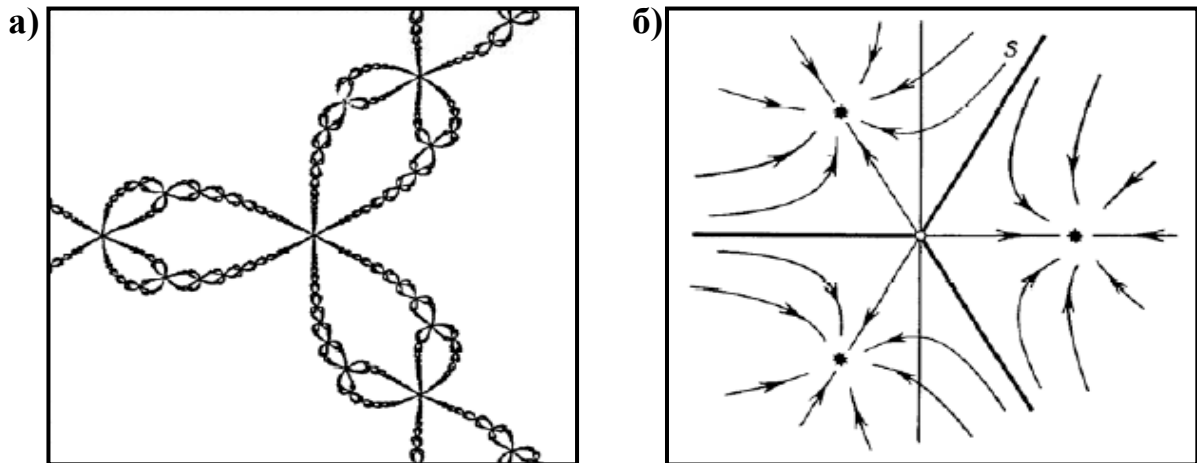


Рис. 5.8. Сепаратрисы (а) и потоки (б) в итерационном процессе Ньютона.

онные потоки метода Ньютона. Отметим, что столь своеобразное строение фрактальной сепаратрисы приводит к тому, что она соседствует одновременно с тремя областями. На рис. 5.9 показан увеличенный участок границы между тремя областями.

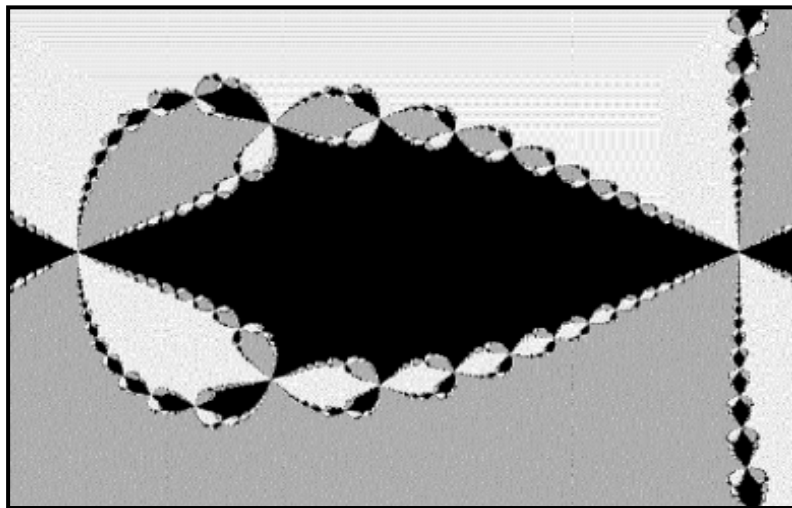


Рис. 5.9. Фрактальная структура увеличенного участка “деревьев” Хаббарда.

В общем случае, когда в качестве итерационной функции используется произвольный полином третьей степени, реализация метода Ньютона сопровождается появлением своеобразных областей. Если старт итерационного процесса происходит из этих областей, то точки-образы притягиваются к циклу, который не связан ни с одним из корней кубического уравнения. Если параметризовать коэффициенты кубического полинома, т.е. установить их зависимость от некоторого комплексного параметра t , то на комплексной плоскости этого параметра появлению цикла будут соответствовать те области, которые представляют собой миниатюрные копии множества Мандельброта.

Глава 6. Кватернионные (гиперкомплексные) фракталы

Единственный способ избавиться от драконов – это иметь своего собственного.

Е.Л. Шварц

С начала 60-х годов XX в. в научной литературе появляются работы, в которых для описания физических явлений и процессов используются функции пространственного комплексного переменного (кватернионов). Эти работы показали перспективность применения кватернионов при исследовании механических, электромагнитных, квантовых и других физических процессов.

Кватернион можно получить из комплексного числа $z = x + iy$ с использованием принципа удвоения комплексных единиц. Полагая $x = x_0 + jx_2$ и $y = x_1 + jx_3$ ($j^2 = -1$ – новая мнимая единица) и вводя закон умножения комплексных единиц (табл. 6.1, Гамильтон (1843)),

Таблица 6.1.

Произведения гиперкомплексных чисел i , j и k .

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

получим кватернион

$$q = \tau + ix + jy + kz. \quad (6.1)$$

В формуле (6.1) τ называется *числовой* (скалярной или вещественной), а $ix + jy + kz$ – *векторной* (мнимой) частями кватерниона. Из табл. 6.1. видно: произведение гиперкомплексных чисел некоммутативно (неперестановочно). Таким же законом умножения, как и комплексные единицы, обладают орты координатных осей в векторной алгебре со следующими отличиями:

– скалярное произведение ортов $\bar{e}_n \cdot \bar{e}_m = \delta_{nm}$, где $\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$ – символ Кронекера;

– векторное произведение $\bar{e}_n \times \bar{e}_m = \Omega_{nm}^q \bar{e}_q$, где символ

$$\Omega_{nm}^q = \begin{cases} -1, & \text{если все индексы различны и образуют нечётную подстановку} \\ 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают} \\ 1, & \text{если все индексы различны и образуют чётную подстановку} \end{cases}.$$

В физической интерпретации табл. 6.1 отображает наличие в исследуемом многообразии поступательного и вращательного движений, т.е. винтового перемещения.

Гиперкомплексные числа подчиняются всем арифметическим действиям. Особый интерес представляет произведение мнимых частей двух разных кватернионов:

$$\text{Im}q_1 \text{Im}q_2 = -(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) + (y_1z_2 - y_2z_1)i + (z_1x_2 - z_2x_1)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k. \quad (6.2)$$

Действительная часть (6.2) представляет собой скалярное произведение вектора $\bar{X} = (x_1; y_1; z_1)$ на вектор $\bar{Y} = (x_2; y_2; z_2)$, т.е. $-(\bar{X} \cdot \bar{Y})$. Мнимая часть кватерниона (6.2) представляет собой векторное произведение $\bar{X} \times \bar{Y}$ этих векторов. Исходя из изложенного материала, можно предложить иную форму записи кватерниона:

$$q = q_0 + \beta \bar{q} \quad (6.3)$$

(β – мнимая единица, $\beta^2 = -1$). Такую форму записи кватерниона будем называть *алгебраической* или *векторной*, причём перемножение мнимых частей кватернионов будет осуществляться с учётом (6.2) по правилу

$$\boxed{\beta \bar{q}_1 \beta \bar{q}_2 = -\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 + \beta [\bar{q}_1 \times \bar{q}_2]}. \quad (6.4)$$

Вычислим длину (модуль) $|q|$ и квадрат кватерниона:

$$\begin{aligned} q^* q = |q|^2 &= (q_0 + \beta \bar{q})(q_0 - \beta \bar{q}) = q_0^2 + |\bar{q}|^2; \\ q^2 = q \cdot q &= \|q\|^2 + \beta 2q_0 |\bar{q}| \bar{e}_q; \quad \|q\|^2 = q_0^2 - |\bar{q}|^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

здесь $\|q\|^2 = q_0^2 - |\bar{q}|^2$ – вещественноподобный интервал, \bar{e}_q – единичный вектор в направлении вектора \bar{q} . Формулы (6.5) показывают, что введение кватернионов объединяет евклидово и псевдоевклидово пространства. Поэтому такое пространство будем называть *гиперпространством*. В евклидовом неискривлённом пространстве из первого равенства (6.5) следует, что

$$\left(\frac{q_0}{|q|}\right)^2 + \left(\frac{|\bar{q}|}{|q|}\right)^2 = 1. \quad (6.6)$$

Полученное равенство означает, что после введения угла φ между кватернионом и осью Oq_0 , можно записать: $q_0 = |q| \cos \varphi$ и $|\bar{q}| = |q| \sin \varphi$.

В псевдоевклидовой части гиперпространства из определения интервала $\|q\|^2 = q_0^2 - |\bar{q}|^2$ следует равенство

$$\left(\frac{q_0}{\|q\|}\right)^2 - \left(\frac{|\bar{q}|}{\|q\|}\right)^2 = 1. \quad (6.7)$$

Следовательно, в псевдоевклидовом пространстве

$$q_0 = |q| \text{ch} \varphi \quad \text{и} \quad |\bar{q}| = |q| \text{sh} \varphi.$$

Рассмотрим другие формы записи кватерниона:

а) *тригонометрическая* форма записи кватерниона

$$q = |q| (\cos \varphi + \beta \bar{e}_q \sin \varphi), \quad (6.8)$$

здесь $\cos \varphi = \frac{q_0}{|q|}$, $\sin \varphi = \frac{|\bar{q}|}{|q|}$, единичный вектор $\beta \bar{e}_q$ называют *цветом* кватерниона.

б) *показательная* запись кватерниона

$$q = |q| \exp(\beta \bar{e}_q \varphi) = |q| \exp(i\xi + j\psi + k\zeta), \quad (6.9)$$

где угол φ связан с углами ξ , ψ и ζ соотношением

$$\varphi^2 = \xi^2 + \psi^2 + \zeta^2.$$

Если в евклидовом подпространстве кватернион (6.1) разделить на модуль гиперкомплексного числа, то получим ортомодулированный кватернион в евклидовом пространстве:

$$\frac{q}{|q|} = \cos \alpha_0 + i \cos \alpha_1 + j \cos \alpha_2 + k \cos \alpha_3, \quad (6.10)$$

где α_n ($n=0\div 3$) – углы, которые образует кватернион с осями ортогональной системы координат в евклидовом гиперпространстве. Косинусы $\cos \alpha_n$ называются *направляющими косинусами* кватерниона. Они связаны между собой соотношением

$$\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1. \quad (6.11)$$

Установим связь между направляющими косинусами кватерниона и углами ξ , ψ и ζ . Воспользовавшись формулой Эйлера

$$e^{i\gamma} = \cos \gamma + i \sin \gamma,$$

нетрудно показать, что

$$\cos \alpha_0 = \cos \xi \cos \psi \cos \zeta - \sin \xi \sin \psi \sin \zeta;$$

$$\cos \alpha_1 = \cos \xi \sin \psi \sin \zeta + \sin \xi \cos \psi \cos \zeta;$$

$$\cos \alpha_2 = \cos \xi \sin \psi \cos \zeta - \sin \xi \cos \psi \sin \zeta;$$

$$\cos \alpha_3 = \cos \xi \cos \psi \sin \zeta + \sin \xi \sin \psi \cos \zeta.$$

При значении углов $\psi = 2\pi n$, $\zeta = 2\pi m$, ($n, m \in Z$) получаем стандартные формулы для комплексного числа: $\cos \alpha_0 = \cos \xi$ и $\cos \alpha_1 = \sin \xi$.

В псевдоевклидовом пространстве ортонормированный кватернион равен:

$$\frac{q}{\|q\|} = ch \gamma_0 + i ch \gamma_1 + j ch \gamma_2 + k ch \gamma_3, \quad (6.12)$$

где γ_n ($n=0\div 3$) – углы, которые образует кватернион с осями ортогональной системы координат в псевдоевклидовом подпространстве.

Направляющие косинусы связаны между собой равенством

$$ch^2\gamma_0 - ch^2\gamma_1 - ch^2\gamma_2 - ch^2\gamma_3 = 1.$$

Комплексная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($u(x, y), v(x, y) \in R(x, y)$) будет *аналитической (регулярной, голоморфной)* в области D , если она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.13)$$

Согласно теории Ли, можно ввести инфинитезимальный комплексный оператор $\diamond = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$. Подействуем оператором \diamond на комплексную функцию $f(z)$, получим

$$\diamond f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (6.14)$$

В силу условий (6.13) аналитическая функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению $\diamond f(z) = 0$. Функция $f(z)$ называется *гармонической*, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta f = 0$$

($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа). Оператор Лапласа Δ можно представить в виде $\Delta = \diamond^+ \diamond$ ($\diamond^+ = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$ – комплексно-сопряженный оператор к оператору \diamond), тогда гармоническая функция удовлетворяет уравнению $\diamond^+ \diamond f = 0$.

Для получения условий, аналогичных соотношениям Коши-Римана и определяющих регулярность кватернионной функции

$$f(t, \bar{r}) = W(t, \bar{r}) + \beta \bar{V}(t, \bar{r})$$

в области D , подействуем оператором $\diamond = \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$ на эту функцию

$$\diamond f = \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{r}} + \beta \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \times \bar{V} \right] \right) = \Sigma + \beta \Xi.$$

Вводя обозначения $grad W = \nabla W = \frac{\partial W}{\partial \bar{r}}$, $div \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{r}}$ и $rot \bar{V} = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \times \bar{V} \right]$ (операции градиента (*grad*), дивергенции (*div*) и ротора (*rot*) стандартно определены в векторной алгебре) и учитывая уравнение $\diamond f = 0$, получим условия регулярности функции f в области D :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = div \bar{V}, \quad grad W = -\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + rot \bar{V} \right). \quad (6.15)$$

Если функция $f(t, \bar{r})$ не удовлетворяет соотношениям (6.15), то она

нерегулярна. Предположим, что эта функция является гармонической функцией, тогда она удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\Xi} = 0. \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \bar{\Xi}}{\partial t} - \operatorname{grad} \Sigma - \operatorname{rot} \bar{\Xi} = 0, \quad (6.17)$$

при этом функции W и \bar{V} удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \Delta W = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} + \Delta \bar{V} = 0.$$

Рассмотрим псевдогиперфункцию $f(\tau, \bar{r}) = \alpha \phi(\tau, \bar{r}) + \beta \bar{\psi}(\tau, \bar{r})$, которая описывает поле в некоторой замкнутой псевдоевклидовой области D . Выясним условия регулярности псевдогиперфункции. Подействуем оператором $\diamond = \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$ на данную функцию и воспользуемся уравнением $\diamond f = 0$, тогда получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \operatorname{div} \bar{\psi} = 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \tau} + \operatorname{grad} \phi = 0, \quad (6.19)$$

$$\operatorname{rot} \bar{\psi} = 0. \quad (6.20)$$

Преобразуем (6.18) к виду

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \operatorname{div} \left(\phi \frac{\bar{V}}{c} \right) = \operatorname{div} \left(\phi \frac{\bar{V}}{c} - \bar{\psi} \right) \quad (6.21)$$

или

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \operatorname{div} \bar{J}_\phi = \sigma_\phi, \quad (6.22)$$

где $\bar{J}_\phi = \phi \frac{\bar{V}}{c}$ – поток величины $\phi(\tau, \bar{r})$; $\sigma_\phi = \operatorname{div}(J_\phi - \bar{\psi})$ – производство величины ϕ в области D за счёт наличия “стоков” и “источников”. Если источники и стоки отсутствуют ($\sigma_\phi = 0$) и среда несжимаема ($\operatorname{div} \bar{V} = 0$), то величина ϕ сохраняется. Таким образом, уравнение (6.18) определяет в общем случае уравнение баланса величины ϕ , а в частном случае $\sigma_\phi = 0$ – дифференциальный закон сохранения временной составляющей псевдогиперфункции.

Следующее уравнение (6.19) путём преобразования

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \tau} + \left(\frac{\bar{V}}{c} \operatorname{grad} \right) \bar{\psi} = \left(\frac{\bar{V}}{c} \operatorname{grad} \right) \bar{\psi} - \operatorname{grad} \phi \quad (6.23)$$

сводится к виду

$$\frac{d \bar{\psi}}{d \tau} = \left(\frac{\bar{V}}{c} \operatorname{grad} \right) \bar{\psi} - \operatorname{grad} \phi. \quad (6.24)$$

Формула (6.24) определяет закон изменения векторной функции $\bar{\psi}(\tau, \bar{r})$, т.е. закон движения величины, описываемой этой функцией. Из формулы (6.20) следует, что векторное поле $\bar{\psi}$ является потенциальным полем (безвихревым, следовательно,

$$\bar{\psi}(\tau, \bar{r}) = -grad \lambda(\tau, \bar{r}),$$

где $\lambda(\tau, \bar{r})$ – потенциал векторного поля $\bar{\psi}$).

Используя формулы (6.18)-(6.20), проверим регулярность импульсного поля $P(\tau, \bar{r}) = \alpha \frac{E(\tau, \bar{r})}{c} + \beta \bar{p}(\tau, \bar{r})$

$$(6.18): \quad \frac{\partial E}{c \partial \tau} + div(m\bar{V}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} + div(m\bar{V}) = 0 \quad (6.25)$$

– закон сохранения массы, записанный в дифференциальной форме.

$$(6.19): \quad \frac{d \bar{p}}{d \tau} = \left(\frac{\bar{V}}{c} grad \right) (m\bar{V}) - \frac{grad E}{c} \Rightarrow \frac{d \bar{p}}{d t} = grad \left(\frac{mV^2}{2} - E \right), \quad (6.26)$$

где учтено постоянство массы m . Обозначая через $K = \frac{mV^2}{2}$ – кинетическую энергию, а через $U = E - K$ – потенциальную энергию, перепишем последнее уравнение в виде второго закона Ньютона

$$\frac{d \bar{p}}{d t} = -\nabla U = \bar{F}. \quad (6.27)$$

Уравнение (6.20) показывает потенциальность импульсного поля.

6.1. Множества Жюлиа в гиперпространстве

Читать не размышляя – всё равно
что есть и не переваривать.
Эдмунд Берк

В гиперпространстве итерационное отображение Жюлиа имеет вид

$$q_{n+1} = q_n^2 + q_0, \quad (6.28)$$

где $q_0 = a + bi + cj + ek$ – постоянный кватернион. В пространстве Евклида равенство (6.28) эквивалентно системе четырёх итерационных уравнений (см. квадрат кватерниона во втором равенстве (6.5)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{n+1} = \tau_n^2 - x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 + a \\ x_{n+1} = 2 \tau_n x_n + b \\ y_{n+1} = 2 \tau_n y_n + c \\ z_{n+1} = 2 \tau_n z_n + e \end{array} \right., \quad (6.29)$$

которая является частным случаем системы уравнений вида (4.21).

При $z_0=0$ и $e=0$ система (6.29) порождает трёхмерную проекцию фигуры Жюлиа:

$$\begin{cases} \tau_{n+1} = \tau_n^2 - x_n^2 - y_n^2 + a \\ x_{n+1} = 2\tau_n x_n + b \\ y_{n+1} = 2\tau_n y_n + c \end{cases}, \quad (6.30)$$

которую обозначим $3DJ$. При $y_0=0$ и $c=0$ система уравнений (6.30) сводится к ранее исследованной системе итерационных функций гиперболического типа $2DJ$ (см. пункт 5.1, формула (5.2), стр. 87).

$$\begin{cases} \tau_{n+1} = \tau_n^2 - x_n^2 + a \\ x_{n+1} = 2\tau_n x_n + b \end{cases}. \quad (6.31)$$

При $x_0=0$ и $b=0$ система (6.31) порождает логистическое отображение Ферхюльста (см. пункт 4.4, формулу (4.13), стр. 73) или множество $1DJ$.

Так как множества $1DJ$ и $2DJ$ изучены в главах 4 и 5, соответственно, то исследуем свойства множества $3DJ$:

– двумерными сечениями множества $3DJ$ являются множества Жюлиа;

– при выполнении неравенства $b^2 + c^2 \neq 0$ нелинейное преобразование (6.30) имеет две неподвижные точки $A(\tau_A; x_A; y_A)$ и $B(\tau_B; x_B; y_B)$, где координаты $\tau_A = \frac{s-1}{2s}$; $x_A = bs$; $y_A = cs$; $\tau_B = \frac{s+1}{2s}$; $x_B = -bs$; $y_B = -cs$, а па-

раметр $s = \sqrt{\frac{4a-1 + \sqrt{8a-1 + 16(a^2 + b^2 + c^2)}}{8(b^2 + c^2)}}$;

– при выполнении соотношений $\begin{cases} b^2 + c^2 \neq 0 \\ |\tau_A| < 0,5 \\ \sqrt{\tau_A^2 + x_A^2 + y_A^2} < 0,5 \end{cases}$ точка $A(\tau_A; x_A; y_A)$ бу-

дет устойчивой, а точка $B(\tau_B; x_B; y_B)$ – всегда неустойчивой;

– при выполнении равенств $b=0$, $c=0$ и $-2 < a < -0,75$ наблюдается счётное множество подынтервалов, на которых наблюдаются устойчивые периодические точки; $-0,75 < a < 0,25$ существует единственная устойчивая неподвижная точка $C(\tau_C; 0; 0)$ ($\tau_C = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}$) и единственная

неустойчивая неподвижная точка $D(\tau_D; 0; 0)$ ($\tau_D = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$); при $a=0,25$

точки $C(\tau_C; 0; 0)$ и $D(\tau_D; 0; 0)$ сливаются и порождают лабильную точку, которая исчезает при $a > 0,25$; при $a=0,5$ особая точка $E(0,5; 0; 0)$ по-

рождает инвариантный цикл: $\tau_B = 0,5, x^2 + y^2 = \frac{4a-1}{4}$;

– множество $3DJ(a, b, c)$ при нулевых значениях параметров a, b и c принадлежит единичной сфере $\tau^2 + x^2 + y^2 = 1$ и индуцирует хаотические движения;

– множество $3DJ(a, 0, 0)$ симметрично осей Ox и Oy и при малых значениях параметра a лежит на некоторой поверхности вращения вокруг оси $O\tau$;

– при выполнении неравенств $|q| \geq |z| > 2$ любая траектория итерационного процесса $3DJ(a, b, c)$ стремится к бесконечно удалённой неподвижной точке, а само множество $3DJ(a, b, c)$ – несвязно, состоит из отдельных точек;

– множество $3DJ(a, b, c)$ является границей областей притяжения устойчивых точек и бесконечно удалённой точки;

– множество $3DJ(a, b, c)$ инвариантно относительно прямого и обратного итерационных процессов, причём для обратного отображения оно является аттрактором. Вид множества $3DJ(a, b, c)$ с различных сторон показан на рис. 6.1.

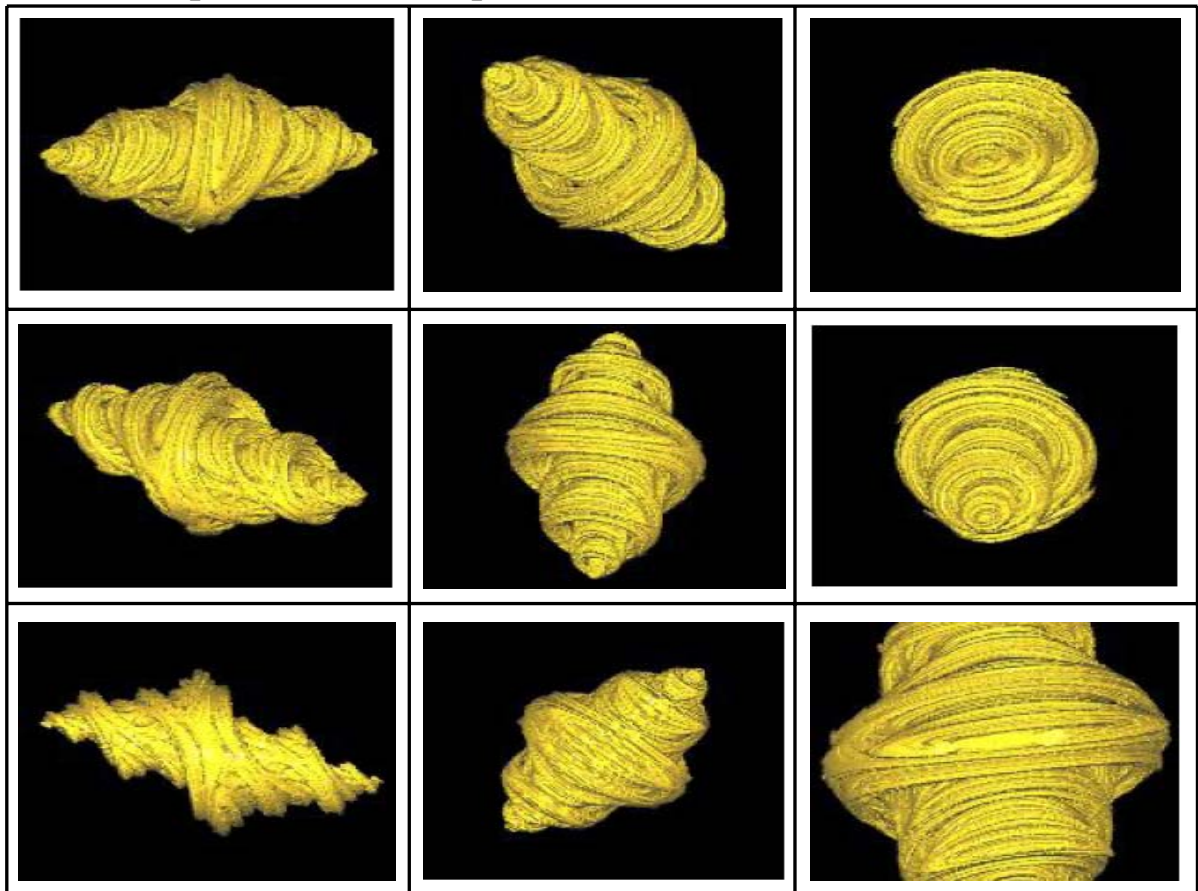


Рис. 6.1. Кватернионное множество $3DJ(a, b, c)$ и его виды с разных ракурсов.

6.2. *Симметрия и мозаики*

Можно думать, что пятерная ось является у мелких организмов своеобразным инструментом борьбы за существование, страховкой против окаменения, против кристаллизации, первым шагом которой была бы “поимка” решёткой.

Н.В. Белов

Присутствие той или иной симметрии в структуре фрактальной фигуры свидетельствует о наличии инвариантных характеристик. Их число значительно возрастает при увеличении числа степеней свободы, т.е. при переходе вещества в конденсированное состояние. Регулярные структуры возникают при достижении тем или иным параметром порядка критического значения. Примерами такой самоорганизации могут служить: кристаллизация и появление ячеек Рэля-Бенара; периодические химические реакции Белоусова-Жаботинского и возникновение вихревых дорожек; снежинки и паттерны колоний бактерий.

Помимо статической симметрии возникающих структур следует отметить симметрию протекающих транспортных и динамических процессов. Взаимодействия частиц, обмен информацией-энтропией, веществом и энергией между внутренними частями системы и с внешней средой, взаимное влияние потоков разных физических величин друг на друга, внешние и внутренние поля, флуктуации и детерминированный хаос – все они обладают своей симметрией, которая формирует свойства и геометрические особенности регулярной структуры. Изучение статических и динамических симметрий даст возможность управления физико-химическими свойствами и геометрическим устройством порождаемых пространственно-периодических структур.

Исследования физических явлений и процессов показали, что при обнаружении той или иной правильной упаковки ячеек, например, в кристалле, будет говорить о существовании такой же структуры в гидродинамическом течении, в виде фазового портрета динамической системы, при возникновении периодического движения или при развитии биологического объекта. Следовательно, *закон геометрического формообразования является универсальным*. Это свидетельствует о том, что формирование системы во внешней среде происходит путём отбора тех симметрий, которые являются общими как для динамической системы, так и для внешней среды. Поэтому выяснение вида возможных покрытий (*мозаик*) плоскости,

а тем более пространства, является не только чисто геометрической задачей, но и представляет значительный интерес для физики в связи с возникновением *ближнего* и *дальнего порядков* в веществе.

Симметрии определяют геометрическую форму самоорганизующихся фигур. В этой связи важно выяснить, какие симметрии разрешены, а какие запрещены геометрическими законами. В основе кристаллофизики лежит ортодоксальная идея плотного покрытия плоскости или пространства периодически повторяющимися фигурами. Реализация этой идеи требует существования некоторого постоянного вектора, трансляция на который всей совокупности структурных ячеек, вновь приводит к базисному виду порождающей совокупности. Однако трансляция должна быть совместимой с поворотом на определённый угол (осью симметрии того или иного порядка). *Осью симметрии k -го порядка* называют прямую линию, поворот вокруг которой на угол $\varphi = \frac{2\pi}{k}$ приводит к совмещению фигуры самой с собой. Порядок оси (k) определяет количество самосовмещений решётки при повороте на 360° . Для определения значений разрешённых углов поворота рассмотрим плоскую решётку, показанную на рис. 6.2. Из рисунка видно, что при повороте вокруг

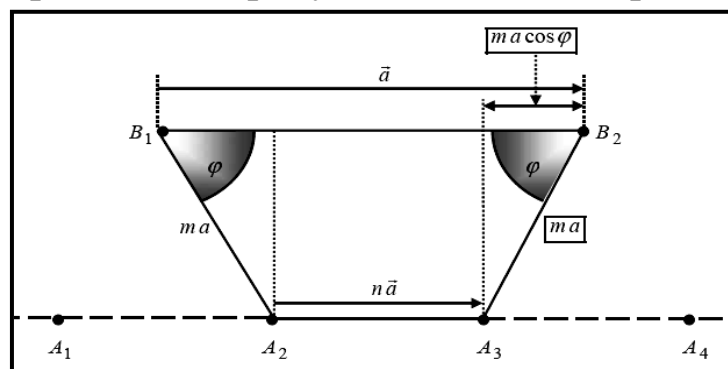


Рис. 6.2. Сочетание трансляционного сдвига на вектор \vec{a} и поворота на угол φ .

осей, проходящих через точки B_1 и B_2 и расположенных перпендикулярно к плоскости рисунка, на угол φ , конец радиуса ma (m – масштабный коэффициент, в классической кристаллофизике $m=1$) попадает в силу самоподобия в точки решётки A_2 и A_3 , соответственно. Расстояние между точками A_2 и A_3 равно постоянной решётки a , уменьшенной (увеличенной) в целое число раз. Для положительных значений числа n направления векторов \vec{a} и $n\vec{a}$ совпадают, а для отрицательных значений числа n – эти векторы разнона-

правленные. Из рис.6.2 следует необходимость выполнения равенства:

$$na = a - 2ma \cos \varphi \quad \text{или} \quad \frac{1-n}{2m} = \cos \varphi. \quad (6.32)$$

Так как значения косинуса принадлежат интервалу $[-1; 1]$, то целое число n принадлежит отрезку $[-2m+1; 2m+1]$ (положительность числа m очевидна). Зависимость порядка k оси симметрии от числа n при разных значениях масштабного параметра m показана на рис. 6.3.

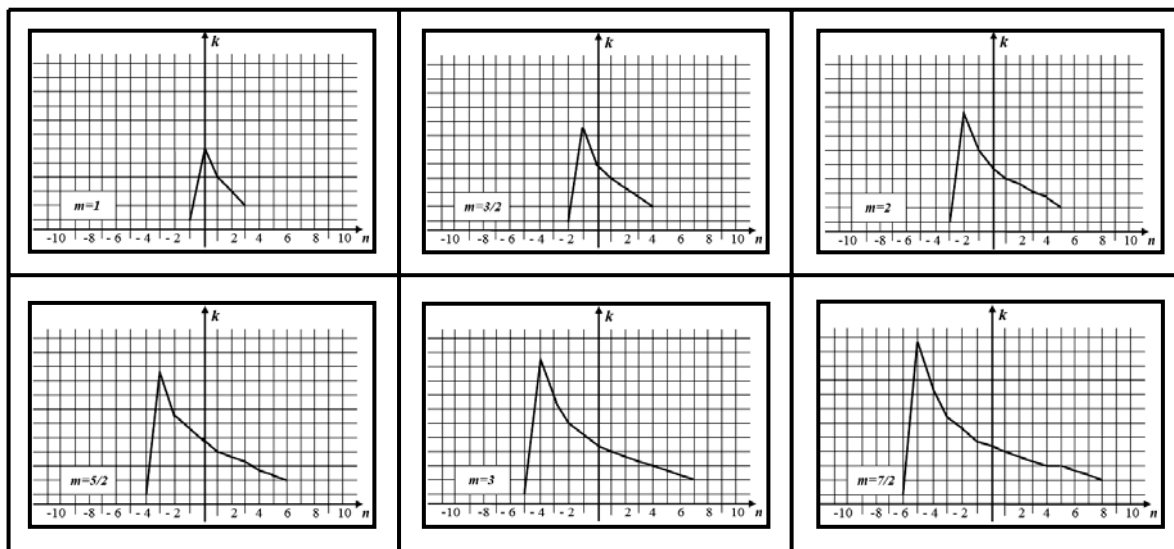


Рис. 6.3. Возникновение новых квазиосей симметрии при увеличении радиуса области самоподобия.

При полуцелых значениях m наблюдаются классические оси симметрии только 1-го, 2-го и 4-го порядков, а для целых значений — все классические оси порядка 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков. При $m \geq \frac{3}{2}$ возникают квазиоси симметрии, запрещённые при классическом подходе (см. также таблицы в *Приложении А*), в частности, возникает ось 5-го порядка, которая наблюдается в квазикристаллах. Следовательно, появление новых квазиосей симметрии при увеличении размера области подобия приводит к возникновению промежуточных состояний вещества с фрактальной геометрией и частичным упорядочением.

Рассмотрим покрытие плоскости базисными ячейками с той или иной симметрией. Стандартный подход состоит в использовании конечного числа базисных элементов, образующих совокупность мозаичных ячеек. Ячейкам может быть придана сколь угодно сложная форма, как это делал, например, в своих картинах Мориц Эшер (рис.6.4). Однако сохранение дальнего порядка при покрытии

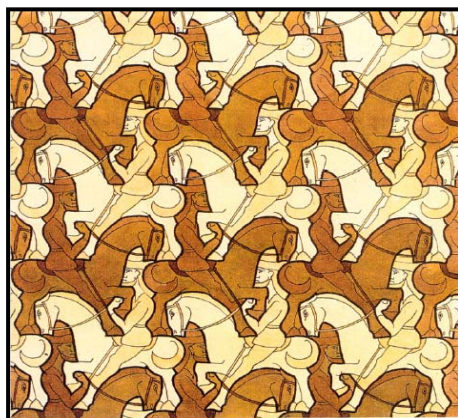


Рис. 6.4. М. Escher, *Two cavaliers*.

такими мозаиками наблюдается только для ограниченного числа способов. Кроме того, в теории покрытий, паркетов, упаковок и орнаментов существует выделенная симметрия с осью пятого порядка (квазикристаллы). Например, в физике твёрдого тела считалось невозможным появление дальнего порядка в квазикристаллах. Однако в конце XX века они были обнаружены не только экспериментально, но и в природных условиях (рис. 6.5). Эти откры-

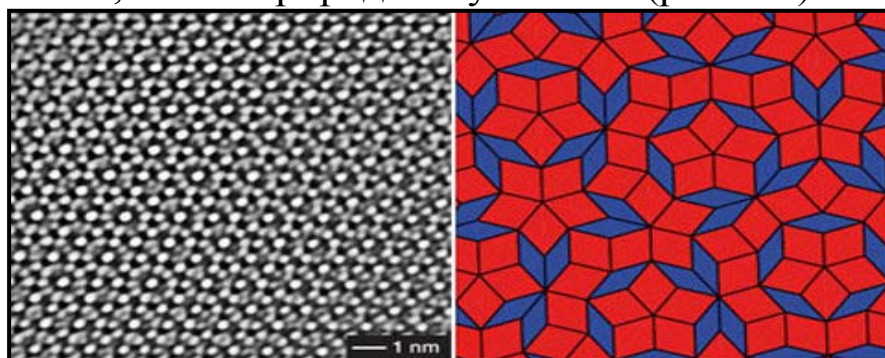


Рис. 6.5. Природный квазикристалл с осью симметрии пятого порядка.

тия позволили расширить физические представления о промежуточном кристаллическом состоянии с симметрией пятого порядка, хотя такие структуры известны с давних времён (орнаменты дворца Альгамбры в Гренаде – рис. 6.6; мозаика Пенроуза – рис. 6.7 и

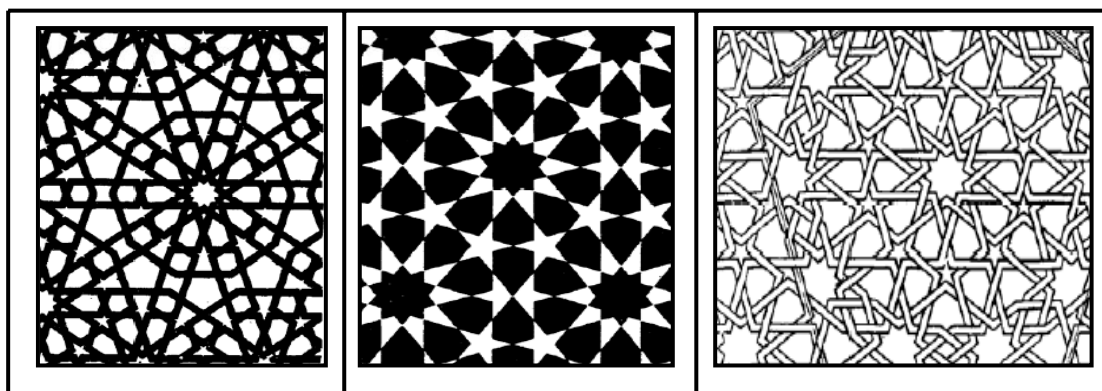


Рис. 6.6. Орнаменты дворца Альгамбра.

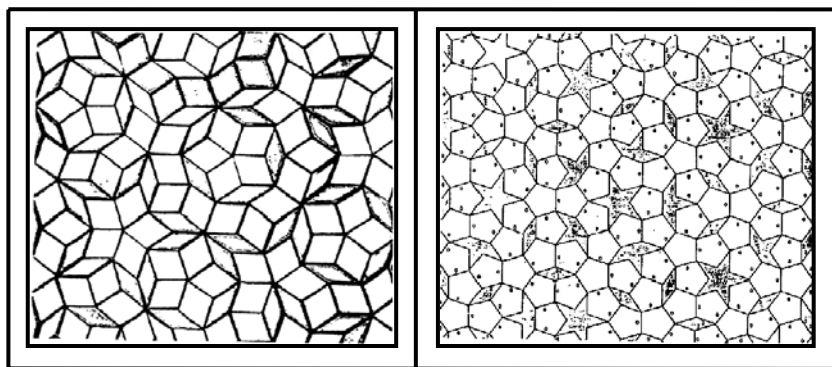


Рис. 6.7. Покрытие плоскости мозаикой Пенроуза.

др.). Сравнение рис. 6.5 с рис. 6.7 показывает, что природный квазикристалл имеет структуру мозаики Пенроуза.

Мозаика Пенроуза является отражением динамической симметрии, которая и порождает структуры с осью симметрии пятого порядка, как промежуточное звено при переходе к кристаллам. В качестве примера рассмотрим движение в плоскости xOy частицы с заряд e и массой m , соответственно. Движение частицы происходит под действием постоянного магнитного поля \vec{B}_0 , направленного вдоль оси Oz , и волнового пакета $\vec{E}(x, t)$ с большим числом разнообразных гармоник, который распространяется вдоль оси Ox (осциллятор с периодическим внешним воздействием). Поставленная задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v} \\ m \dot{\vec{v}} = e \vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}_0] \end{cases} \quad (6.33)$$

где $\vec{r} = (x, y)$ – радиус-вектор, определяющий положение частицы на плоскости xOy , $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – скорость перемещения по орбите, c – скорость света (см. пункт 3.3, стр. 55). Независимость правой части второго уравнения системы (6.33) от переменной y приводит к существованию инварианта (интеграла движения) $\dot{y} = v_y = -\omega_0 x$ (без ограничения общности константа интегрирования положена равной нулю), где $\omega_0 = \frac{eB_0}{mc}$ – циклотронная частота вращения. Волновой пакет представим в виде:

$$\vec{E}(x, t) = -\vec{E}_0 T \sin(kx - \omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (6.34)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – период, $\delta(t - nT) = \begin{cases} 1, & t = nT \\ 0, & t \neq nT \end{cases}$ – δ -функция Кронекера. Урав-

нение (6.34) имитирует короткие толчки, передаваемые частице волновым пакетом через промежутки времени пропорциональные периоду внешней силы. Для перехода к итерационному процессу запишем связь между переменными x слева (t_n-0) и справа (t_n+0) от δ -функции (такое же соотношение запишем и для переменных v_x):

$$\begin{cases} x(t_n + 0) = x(t_n - 0) \\ v_x(t_n + 0) = v_x(t_n - 0) - \frac{e}{m} E_0 T \sin(kx - \omega t) \end{cases} \quad (6.35)$$

Соотношения (6.35) приводят к представлению (6.33) в виде нелинейного отображения (в дальнейшем положим $v_x = u$):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos(\omega_0 T) + \frac{1}{\omega_0} \left[u_n - \frac{e E_0 T}{m} \sin(kx_n - \omega n T) \right] \sin(\omega_0 T) \\ u_{n+1} = -\omega_0 x_n \sin(\omega_0 T) + \left[u_n - \frac{e E_0 T}{m} \sin(kx_n - \omega n T) \right] \cos(\omega_0 T) \end{cases} \quad (6.36)$$

При значительном ослаблении магнитного поля ($\omega_0 \rightarrow 0$) система уравнений (6.36) принимает вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + T \left[u_n - \frac{\omega}{k} \right] \\ u_{n+1} = u_n + \frac{e E_0 T}{m} \sin(kx_n) \end{cases} \quad (6.37)$$

Итерации по уравнениям (6.37) приводят к глобальному хаосу при выполнении условия $G = \frac{e}{m} E_0 k T^2 \geq 1$. При малых значениях параметра G ($G \ll 1$) фазовый портрет исследуемой динамической системы представляет собой совокупность очень узких случайных слоёв, разделённых инвариантными кривыми. Перемещение перпендикулярно слоям практически невозможно, что соответствует невозможности увеличения энергии осциллятора.

Отображение (6.36) описывает ускоряющуюся под действием толчков частицу. Если положить $\omega = 0$, т.е. исключить из рассмотрения регулярные ускорения точки (изменение скорости движения частицы прямо пропорционально фазовой скорости $\frac{\omega}{k}$ волнового пакета), то вместо (6.36) возникнет отображение с подкручиванием на угол $\alpha = \omega_0 T$. Особый интерес вызывают резонансные явления, возникающие при целом числе толчков q за период колебания $\frac{2\pi}{\alpha}$, т.е. при выполнении равенства $q = \frac{2\pi}{\alpha}$. При $q = 1$ возникает цик-

лотронный резонанс, а при $q=2$ – полувцелый. Если значение величины q превышает двойку, то возникают довольно хаотические движения частицы, которые характеризуются периодическими фазовыми портретами (рис. 6.8). Неограниченная “паутина” отобра-

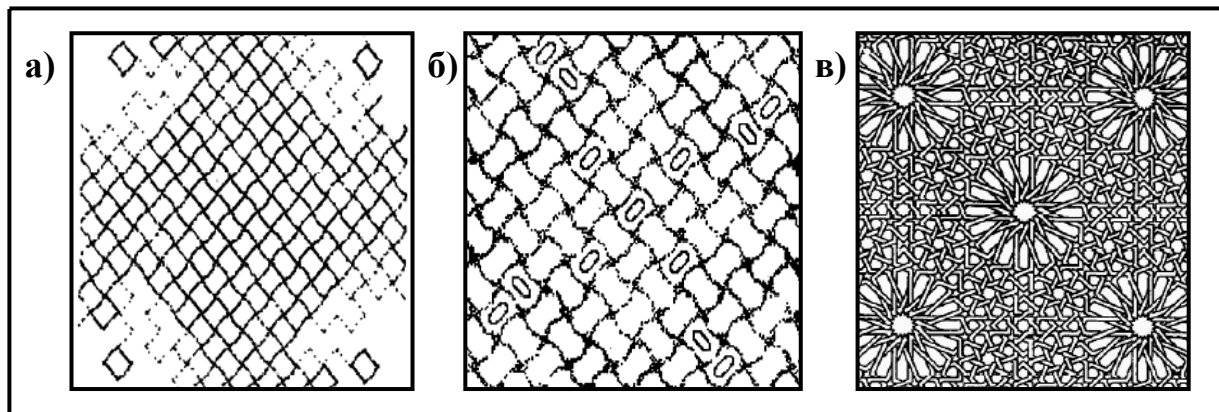


Рис. 6.8. Квадратные решётки “островков” периодических движений (а, б) и орнамент (в) при $q=4$.

жает области детерминированного хаоса. Соотношение размеров областей устойчивого и неустойчивого движений (при сохранении квадратной решётки) определяется амплитудой внешнего воздействия. Если фазовая точка-образ состояния динамической системы находится на паутине, то она может уйти сколь угодно далеко от начальной точки. Малое отличие угла поворота от его резонансного значения приводит к распаду паутины (рис. 6.9) и порождению

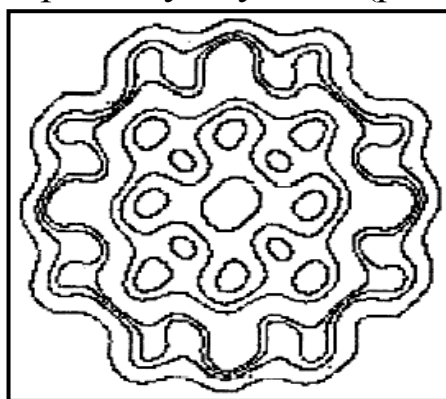


Рис. 6.9. Квазикристаллическая “паутина” областей случайных блужданий.

переходных состояний (например, состояний системы с осью симметрии пятого порядка). В этом случае возникновение паутины (областей случайных блужданий) происходит при преодолении возмущением некоторого критического значения. Многократное увеличение “паутины” показывает её фрактальную структуру.

Запишем гамильтониан динамической системы в безразмер-

ных величинах при значении внешней частоты воздействия $\omega=0$, положив $w_1 = \frac{kv_x}{\omega_0}$, $w_2 = \frac{kv_y}{\omega_0} = -kx$, $A = \frac{eE_0T}{m}$ и $\tau = \frac{t}{T}$, получим

$$H = \frac{\alpha}{2}(w_1^2 + w_2^2) - A \cos w_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n). \quad (6.38)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial w_2} = \alpha w_2 + A \sin w_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - n) \\ \frac{dw_2}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial w_1} = -\alpha w_1 \end{cases}. \quad (6.39)$$

Анализ системы уравнений (6.39) показывает, что процесс удвоения островков устойчивости (рис.6.10) наблюдается при выполне-

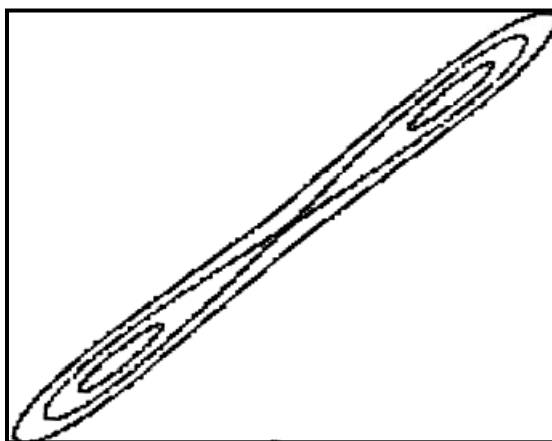


Рис. 6.10. Бифуркация “островков” устойчивости (областей периодических движений).

нии условия $A > 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. Для четвертичного циклотронного резонанса ($q=4$) угол $\alpha = \frac{2\pi}{q} = \frac{\pi}{2}$, т.е. бифуркации наблюдаются при $A > 2$. При значении параметра $A^{(2)} = 4,88665\dots$ происходит появление цикла с периодом $2^2=4$, а при $A^{(3)} = 4,92934\dots$ он теряет устойчивость и происходит рождение цикла с периодом $2^3=8$. Последовательность значений $A^{(n)}$ быстро сходится к числу $A^{(\infty)} = 4,93488\dots$ А предел отношения параметрических длин между удвоениями периодов практически равен удвоенному значению постоянной Фейгенбаума (см. пункт 4.4, формула (4.16), стр. 75):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A^{(n)} - A^{(n-1)}}{A^{(n+1)} - A^{(n)}} \right) = 8,72\dots \approx 1,87 \kappa. \quad (6.40)$$

Таким образом, постоянная Фейгенбаума отражает наличие неизменного, периодического, внешнего воздействия (“волна подкач-

ки”), которое влияет на внутреннюю динамику любой системы. В заключение рассмотрения фазовых портретов осциллятора с подкачкой отметим, что при $q=6$ фазовая “паутина” имеет вид “снежинки” Коха (рис. 6.11), а решётка получила название “кагоме”.

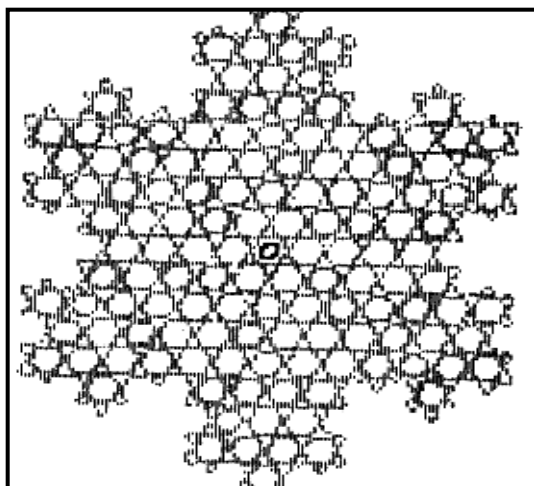


Рис. 6.11. Фрактальное строение “паутины” при $q=6$.

Подводя итог, можно сказать, что квазикристаллы являются квазипериодическими структурами, содержащими два и более несоизмеримых периода. Существование несоизмеримости пространственных периодов и внешнего периодического воздействия могут породить фрактальные структуры с квазисимметрией – осями симметрии пятого, седьмого и других запрещённых порядков.

Использование двумерных $2DJ(a, b)$ и трёхмерных $3DJ(a, b, c)$ проекций гиперкомплексных структур, которые имеют собственные вращательные степени свободы, может привести к совершенно неожиданным фигурам замощения плоскости и пространства, соответственно (рис. 6.12).

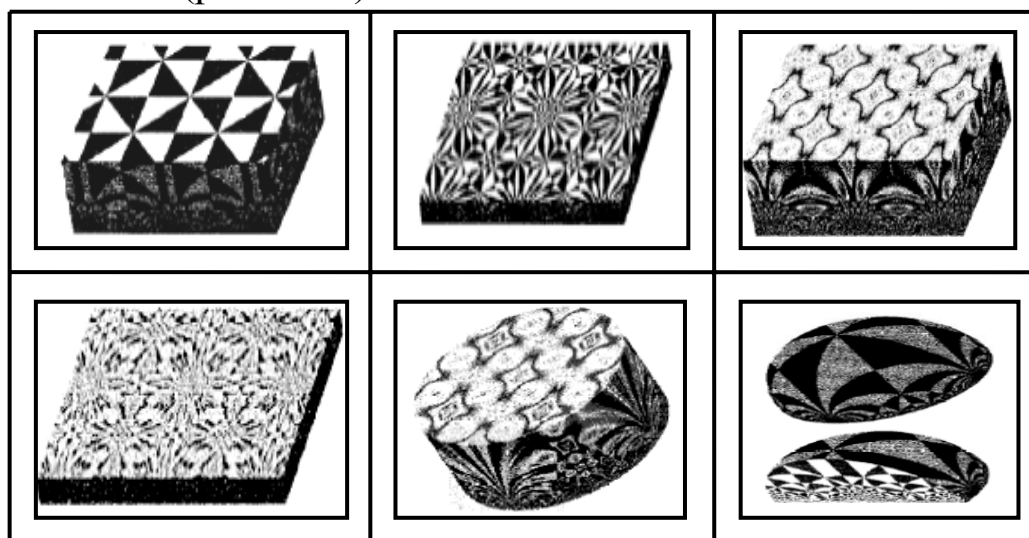


Рис. 6.12. Кватернионные мозаики по К.Н. Крамкову.

6.3. *Конструирование инвариантных структур*

В одном случае из ста тот или иной вопрос усиленно обсуждается потому, что он действительно тѐмен; в остальных девяноста девяти он становится тѐмным, потому что усиленно обсуждается.

Эдгар Алан По

До появления фрактальной геометрии заполнение пространства осуществлялось правильными многогранниками, изображёнными на рис. 6.13. Например, кристаллы алмаза (структурная мо-

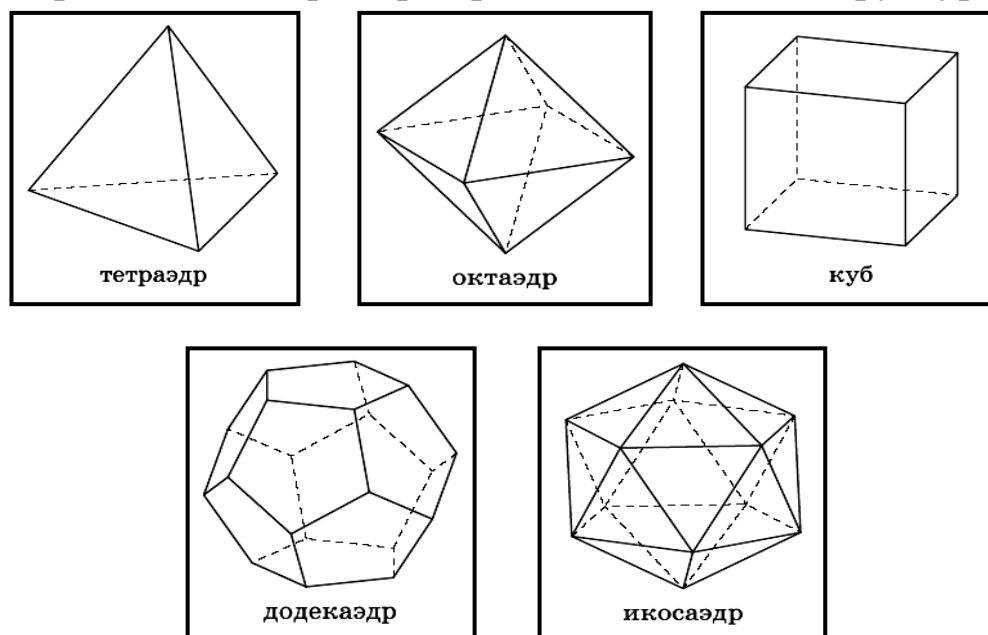


Рис. 6.13. Правильные многогранники с числом плоскостей $N=3, 6, 8, 12, 20$.

дификация углерода) имеет решётку в виде *октаэдра*, поваренная соль ($NaCl$) – в виде *куба*, сернистый колчедан (FeS) – в виде *додекаэдра*, бор (B) – в виде *икосаэдра*.

Правильные многогранники применяются также для отображения ячеек Бравэ и Вигнера-Зейтца в физике твёрдого тела. Компоненты кристаллического тела располагаются либо в узлах решётки Бравэ, либо в ячейке Вигнера-Зейтца, окружённой полиэдром Дирихле-Вороного (рис. 6.14). Параллелоэдры Дирихле-Вороного плотно заполняют трёхмерное пространство.

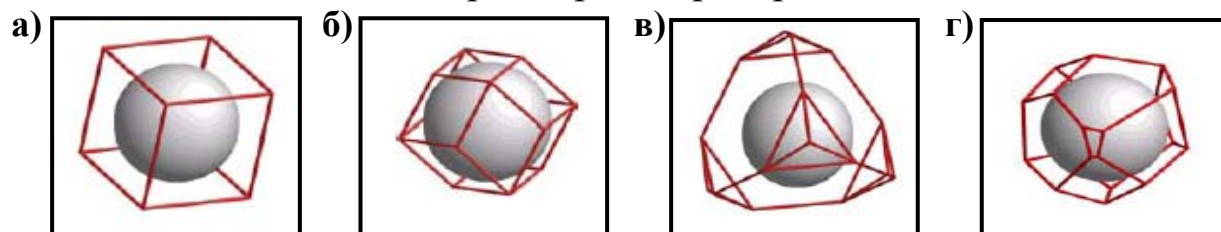


Рис. 6.14. Полиэдры Вороного: а) простая кубическая решётка; б) гранецентрированная кубическая решётка; в) решётка алмаза; г) решётка неупорядоченного материала.

Для правильных многогранников, которые имеют V вершин, G граней и R рёбер, выполняется соотношение связи Эйлера (см. табл. 6.2):

$$V + G - R = 2. \quad (6.41)$$

Таблица 6.2.

Правильные многогранники и правило Эйлера.

Название	Вершины (V)	Грани (G)	Рёбра (R)	$V + G - R = 2$
Тетраэдр	4	4 (<i>тетра</i>)	6	2
Октаэдр	6	8 (<i>окто</i>)	12	2
Гексаэдр (куб)	8	6 (<i>гекса</i>)	12	2
Икосаэдр	12	20 (<i>икоси</i>)	30	2
Додекаэдр	20	12 (<i>додека</i>)	30	2

Соотношение (6.41) полностью совпадает с правилом фаз Гиббса в термодинамике: если система описывается p независимыми переменными (степенями свободы), состоит из f сосуществующих фаз и содержит k компонентов, то они связаны равенством

$$p + f - k = 2. \quad (6.42)$$

Независимо друг от друга Кеплер и Пуансо нашли невыпуклые многогранники с элементами в виде звёзд (рис. 6.15). Они по-

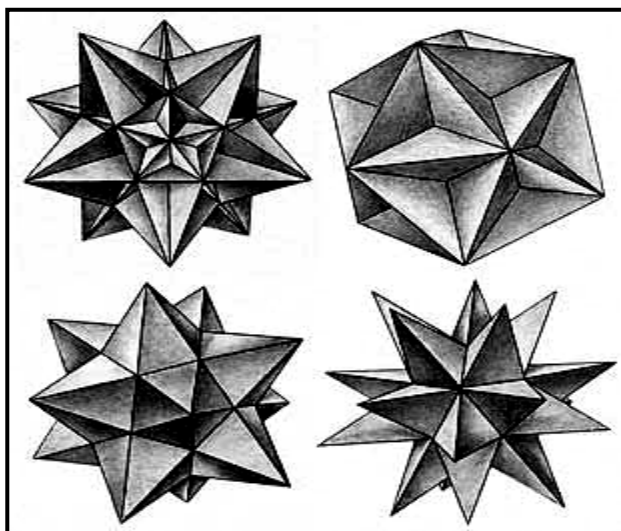


Рис. 6.15. Игольчатые тела Кеплера и Пуансо.

лучаются путём продолжения граней правильного или полуправильного многогранника до их самопересечения. Простейшее из таких тел может быть получено путём пересечения продолжений граней октаэдра или пересечением двух тетраэдров (звезда Кеплера (1619)).

На рис. 6.16 показаны плотные упаковки пространства шарами в конструкции Фуллера. Г.С. Мельниковым был разработан метод построения плоских и пространственных фигур с использова-

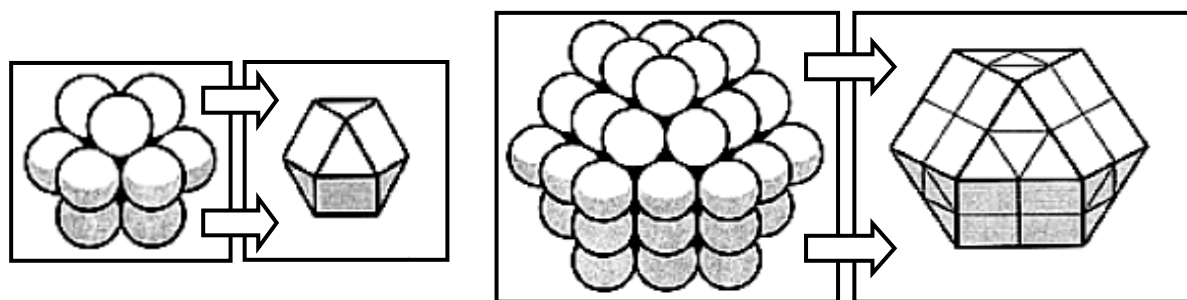


Рис. 6.16. Упаковка пространства шарами по Фуллеру.

нием гиперкомплексного исчисления, некоторые из них показаны на рис. 6.17.

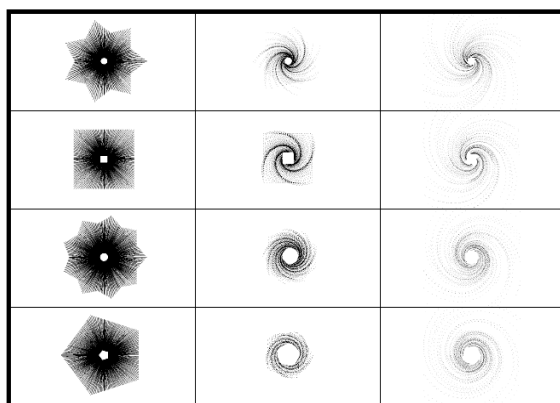


Рис. 6.17. Геометрические фигуры, построенные по кватернионному методу Г.С. Мельникова.

Как было показано в Главе 1, геометрические фигуры возникают в результате определённого типа движения точки по плоскости или в пространстве. Для кватернионов собственными движениями являются перемещения по единичной сфере четырёхмерного евклидова подпространства, уравнение которой описывается соотношением (6.11). Согласно теореме Лагранжа (1740), любое натуральное число $N \geq 1$ может быть представлено в виде суммы квадратов неотрицательных целых чисел n_i ($i=1 \div 4$):

$$N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2. \quad (6.43)$$

Компьютерное доказательство этого равенства состоит в следующем: пусть выполняется равенство $N = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \dots + n_s^2$ (*); составим программу, которая будет построчно записывать натуральные числа на экране монитора, отмечая чёрным цветом числа, которые не удовлетворяют соотношению (*). При увеличении числа квадратов s экран дисплея будет изменяться так, как показано на рис. 6.18. При $s > 4$ вид на мониторе остаётся таким же, как и для $s = 4$, что и доказывает соотношение Лагранжа.

Сравнение уравнения (6.11) с нормированным на N равенст-

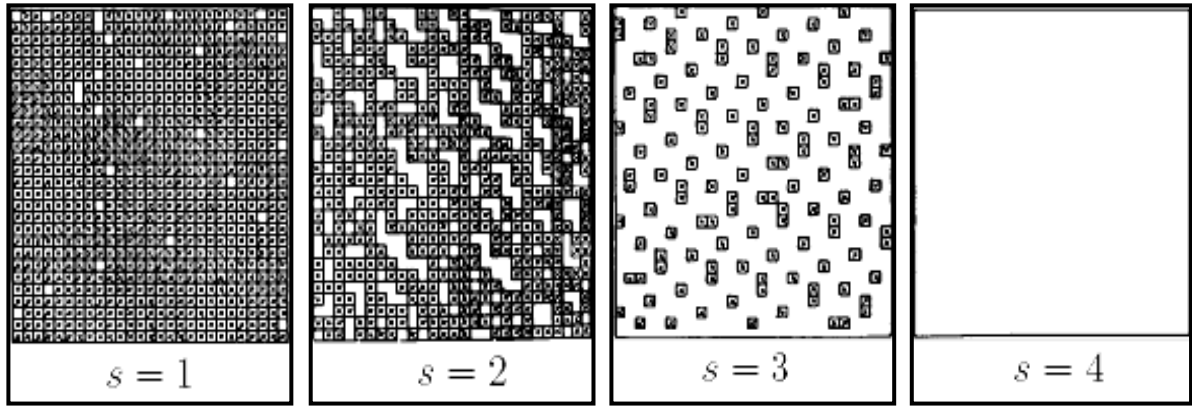


Рис. 6.18. Компьютерный способ доказательства теоремы Лагранжа.

вом (6.43) приводит к соотношению:

$$\cos^2 \alpha = \frac{n^2}{N} \quad \text{или} \quad \cos \alpha = \pm \frac{n}{\sqrt{N}}. \quad (6.44)$$

Косинус любого угла принимает значения из интервала $[-1; 1]$, следовательно, $0 \leq n \leq \sqrt{N}$. Формула (6.44) позволяет по координатам ортонормированного кватерниона построить многогранники, вершины которых лежат на поверхности единичной сферы. При $N=1$ число $0 \leq n \leq 1$, т.е. принимает два значения 0 и 1. Проекция ортонормированного кватерниона на трёхмерное пространство определяют орты координатных осей $q^{(1)} = (\pm 1; 0; 0) = \pm \vec{i}$, $q^{(2)} = (0; \pm 1; 0) = \pm \vec{j}$ и $q^{(3)} = (0; 0; \pm 1) = \pm \vec{k}$. Соединив концы этих векторов отрезками прямых линий, получим октаэдр (рис. 6.13). При $N=2$ число n лежит в интервале $0 \leq n \leq \sqrt{2}$ и также принимает два значения 0 и 1. Проекция ортонормированного кватерниона имеют вид:

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right), & q_2^{(1)} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right), & q_3^{(1)} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right), & q_4^{(1)} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right); \\ q_1^{(2)} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), & q_2^{(2)} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), & q_3^{(2)} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), & q_4^{(2)} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \right); \\ q_1^{(3)} &= \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), & q_2^{(3)} &= \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), & q_3^{(3)} &= \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), & q_4^{(3)} &= \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Соединение концов соседних векторов приводит к построению куба (рис. 6.13) с четырёхгранными пирамидами на гранях, которые параллельны оси аппликат (Oz). При $N=3$ ($n=0, 1$) указанное построение приводит к чистому кубу.

Трёхмерная сфера тесно связана с группой симметрий $SO(3)$, которая состоит из вращений относительно прямых, проходящих через начало координат. Её можно представить в виде совокупно-

сти ортогональных матриц с определителем равным +1. При добавлении трансляционных движений можно показать, что собственными движениями трёхмерного пространства являются винтовые движения. Очевидно, что совмещение винтовых движений с масштабными изменениями радиуса вращения порождает вихревое движение, в результате чего возникает фрактальное тело.

Вихри сопровождают все движения, которые происходят с диссипацией энергии. Сопротивление потоку вблизи препятствий вызывает появление круговых движений: даже при очень слабом ветре вращается пыль и мелкий мусор у бровки тротуара. В газовой и жидкой средах могут возникать гигантские вихри, которые называются *смерчами* и *водоворотами*. Вихри сопровождают полёты насекомых и летательных аппаратов. Двойная спираль ДНК – две переплетённые вихревые нити и т.п.

Причиной возникновения вихря является вязкость среды (даже очень маленькая как у газов). Обтекание средой препятствия сопровождается торможением её частиц вблизи поверхности препятствия. Вдали от поверхности препятствия частицы ускоряются потоком, в результате чего в среде возникает вращательный момент и образуется вихрь. Внутри вихря давление меньше, чем на его внешней границе, поэтому он будет устойчивым образованием, всасывая внутрь себя газовую или жидкую среду. Одинаково вращающиеся вихри при сближении начинают вращаться вокруг оси симметрии, а противоположно вращающиеся вихри – двигаются поступательно как единое целое. Например, вихревые кольца при сближении ведут себя следующим образом: переднее кольцо замедляет своё движение и увеличивает свой радиус; догоняющее кольцо сжимается и ускоряется при прохождении через переднее кольцо; смена колец местами приводит к повторению описанного процесса (*автоколебательная система*). Отметим, что наличие второго вихря вызывает изменение скорости, но не ускорения первого вихря. Изолированные вихри находятся в состоянии покоя. Стабильность и распад вихря обеспечивается гироскопическими силами. В настоящее время сценариев распада вихря открыто около десятка: пузырьковый, спиральный, двуспиральный, конический, бегущий и др. Несмотря на большое число экспериментальных и теоретических работ, адекватной *теории распада вихря пока не создано*.

Глава 7. Мультифракталы

Раз мы взялись за новое дело, мы должны
иначе думать и действовать.

Авраам Линкольн

Реальные объекты, явления и процессы всегда состоят из детерминированных и стохастических подсистем. Описание случайных элементов, согласно их природе, требует конечного (иногда и бесконечного) множества геометрических фигур с разными масштабными коэффициентами, т.е. они состоят из совокупности неоднородных монофракталов. Смесь неоднородных монофракталов порождает сложные множества, которые отображают либо моментальное состояние динамической системы, либо геометрию неупорядоченной среды. Для их изучения применяют мультифракталы, которые имеют спектр скейлинговых размерностей.

Мультифракталами называются самоподобные фигуры, составленные из различающихся по своим свойствам частей, каждая из которых характеризуется своей размерностью Хаусдорфа-Безиковича. Мультифракталы обладают следующими свойствами:

- в отличие от регулярных фракталов они неоднородны, т.е. составлены из несоразмерных структур;
- неоднородность мультифракталов приводит к введению спектра размерностей Хаусдорфа-Безиковича;
- помимо геометрических параметров они обладают статистическими характеристиками.

Продемонстрируем различие между фракталами и мультифракталами на примере покрытия плоскости самоподобными фигурами (рис. 7.1). Вначале покроем квадрат с единичной площадью

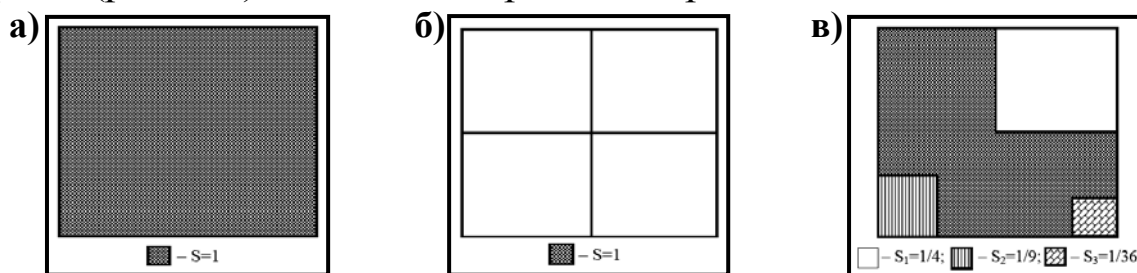


Рис. 7.1. Покрытие единичного квадрата (а) фрактальной (б) и мультифрактальной (в) плитками.

фрактальными плитками с площадью $S_1=1/4$. Число способов, которыми можно закрыть заданную площадь, равно единице. Если покрывать начальный квадрат плитками с разными коэффициентами подобия, а, следовательно, и с разными площадями плиток ($S_1=1/4$,

$S_2=1/9$ и $S_3=1/36$), то число способов покрытия равно восьми (квадрат покрывается целым числом плиток того или иного вида):

- 1) $S=4S_1$; 2) $S=9S_2$; 3) $S=36S_3$; 4) $S=3S_1+9S_3$;
 5) $S=2S_1+18S_3$; 6) $S=S_1+27S_3$; 7) $S=3S_2+24S_3$; 8) $S=S_2+32S_3$.

Этот пример показывает не только неоднородность покрытия, но и появление статистических свойств мультифрактала. Продолжение рассмотренного процесса для каждого вида плитки до бесконечности приводит к неоднородному расположению точек фрактальных подмножеств по площади заданного квадрата. “Население” наугад выбранной геометрически сходной плитки будет с каждой итерационной процедурой изменяться, поэтому количество точек внутри любой области можно только предсказать, но не предвидеть. Если обозначить через p_i вероятность попадания точки в квадрат с площадью S_i , то на первом итерационном шаге из N исходных точек в квадрат с площадью S_1 попадёт p_1N точек. На втором шаге эти точки перераспределятся между тремя аналогичными квадратами, “заселённость” которых составит p_1^2N , p_1p_2N и p_1p_3N . На третьем шаге эти величины будут равны p_1^3N , $2p_1^2p_2N$, $2p_1^2p_3N$, $p_1p_2^2N$, $2p_1p_2p_3N$ и $p_1p_3^2N$. Отсюда видно, что “заселённость” квадрата i изменяется с каждым итерационным шагом. Рассмотрим общую картину этого явления.

7.1. Обобщённая статистическая сумма мультифрактала

Нововведение – это нечто большее, чем новый метод. Это – новый взгляд на вселенную, как на место риска, а не случайностей или определённости. Это – новый взгляд на роль человека во вселенной: он создаёт порядок, идя на риск. А это означает, что нововведения – это не утверждение власти человека, а признание его ответственности.

Питер Драккер

Пусть отображение реального объекта (например, острова на географической карте) занимает область s (рис. 7.2а), имеет фрак-

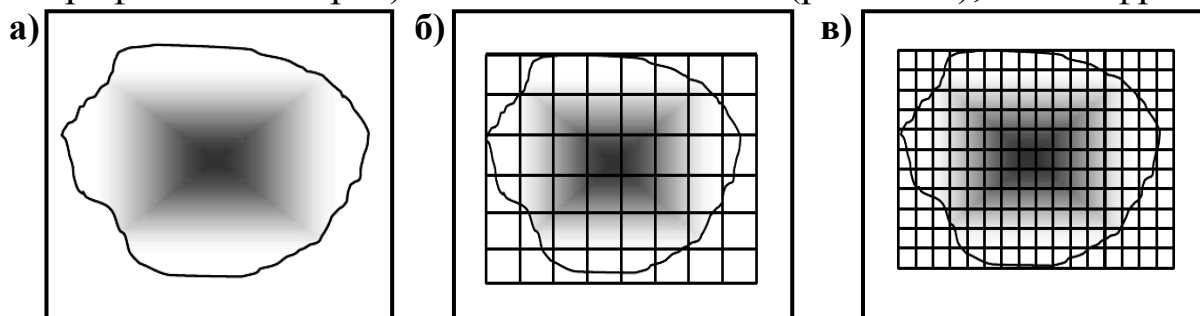


Рис. 7.2. Определение видов растений на острове (а) методом ячеек (б, в) со случайно выбранным размером.

тальную размерность D и на фиксированном этапе построения состоит из N точек (например, число видов растений в выбранном квадрате; в конце итерационной процедуры число N можно сделать сколь угодно большим). Покроем изучаемую область сеткой квадратов со случайно выбранной стороной ε (рис. 7.2б, в), которая значительно меньше максимального линейного размера острова. Из рис. 7.2 (б и в) видно, что общее число ячеек $n(\varepsilon)$ зависит от размера ячейки покрытия.

Обозначим через $n_i(\varepsilon)$ количество ячеек, в которой находится i точек (в дальнейшем считаем, что все ячейки заняты хотя бы одной точкой). Вероятность того, что в наугад выбранной ячейке будет находиться i точек, равна

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}, \quad (7.1)$$

и она определяет относительную “заселённость” выбранной ячейки. Вероятности $p_i(\varepsilon)$ должны удовлетворять стандартному условию нормировки, принятому в теории вероятностей:

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1. \quad (7.2)$$

Однако наличие пустых ячеек приводит к невыполнимости равенства (7.2). Поэтому расчёт статистической суммы для выбранной системы выполняется следующими способами:

- учитываются присутствие пустых (вакансионных) ячеек; взаимодействие занятых точками ячеек между собой (перемещение определённого числа точек из одной ячейки в другую при скейлинговом преобразовании); комбинаторные свойства системы при обмене местами тождественных ячеек и т.д. (физическое моделирование; см., например, монографию автора “Моделирование тепловых и кинетических свойств реальных систем”);
- вводится мультифрактальное обобщённое выражение для статистической суммы с “деформацией” значений $p_i(\varepsilon)$ (математическое моделирование; см. монографию Б.Б. Мандельброта “Фрактальная геометрия природы”).

Рассмотрим обобщённое выражение для статистической суммы $Z(\varepsilon, q)$ (P -модель), которая зависит не только от геометрического размера, но и от показателя степени q значения вероятности $p_i(\varepsilon)$ (“деформации” вероятности):

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon). \quad (7.3)$$

Введём в рассмотрение скейлинговую экспоненту

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(\varepsilon, q)}{\ln \varepsilon}, \quad (7.4)$$

тогда обобщённая фрактальная размерность Реньи (см. пункт 1.4, формула (1.13), стр. 28) определится формулой

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1}. \quad (7.5)$$

Если размерность (7.5) не зависит от параметра q , т.е. $D(q) = D$, то геометрическая фигура является неоднородным монофракталом, в противном случае она – мультифрактал. Из соотношения (7.4) следует показательный закон зависимости обобщённой статистической суммы от скейлинговой экспоненты:

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (7.6)$$

В случае регулярного (однородного) фрактала количество точек в каждой ячейке одинаково и равно

$$n_i(\varepsilon) = \frac{N}{n(\varepsilon)}. \quad (7.7)$$

Следовательно, вероятность того, что наугад выбрана ячейка с числом точек i , одинакова для всех ячеек и равна по формуле (7.1)

$p_i(\varepsilon) = \frac{1}{n(\varepsilon)}$. По формуле (7.6) обобщённая статистическая сумма

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \frac{1}{n^q(\varepsilon)} = n(\varepsilon) \frac{1}{n^q(\varepsilon)} = n^{1-q}(\varepsilon). \quad (7.8)$$

При достаточно малом значении линейного размера ячейки ε общее число ячеек по Хаусдорфу-Безиковичу (см. пункт 1.3, формула (1.9), стр. 25) равно

$$n(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}, \quad (7.9)$$

следовательно, обобщённая статистическая сумма (7.8) определится равенством

$$Z(\varepsilon, q) \approx \varepsilon^{D(q-1)}. \quad (7.10)$$

Сравнение формул (7.10) и (7.6) позволяет определить фрактальную размерность равенством (7.5). Для однородного монофрактала скейлинговая экспонента зависит от показателя “деформации” вероятностей по линейному закону. Нелинейная зависимость приводит к спектру размерностей и, как следствие, к возникновению многомасштабного фрактального объекта.

Так как параметр q принадлежит множеству действительных чисел, то при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в статистическую сумму дают разреженные ячейки с малыми вероятностями их заполнения. Если $q \rightarrow +\infty$, то вид статистической суммы определяют ячейки с большой “заселённостью” и высокими значениями вероятностей обнаружения таких ячеек. Следовательно, размерность Реньи характеризует плотность заполнения ячеек, т.е. неоднородность распределения точек по мультифракталу. Рассмотрим физический смысл обобщённой размерности Реньи.

7.2. Фрактальная, информационная и корреляционная размерности

Многие люди полагают, что они думают, в то время как они просто пересматривают свои предрассудки.
Уильям Джеймс

При $q = 0$ размерность Реньи постоянна и равна $D(0) = D_0$, при этом обобщённая статистическая сумма

$$Z(\varepsilon, 0) = n(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-D_0}. \quad (7.11)$$

Из формулы (7.11) следует, что размерность Хаусдорфа-Безиковича D_0 является грубым параметром для мультифрактала. При $q=1$, учёте всех ячеек (занятых i точками и пустых) и условия (7.2) получим, что $Z(\varepsilon, 1)=1$, а скейлинговая экспонента $\tau(1) = 0$. Подстановка последнего значения в формулу (7.5) приводит к неопределённости $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$. Для раскрытия неопределённости преобразуем обобщённую статистическую сумму к виду

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i p_i^{q-1} = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i e^{\ln p_i^{q-1}} = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i e^{(q-1) \ln p_i}. \quad (7.12)$$

Так как $q \rightarrow 1$, то показатель экспоненты является малой величиной, поэтому её можно разложить в ряд Тейлора ($e^x \approx 1+x$):

$$e^{(q-1) \ln p_i} \approx 1 + (q-1) \ln p_i. \quad (7.13)$$

Подстановка (7.13) в (7.12) с учётом (7.2) приводит к следующему выражению для обобщённой статистической суммы

$$Z(\varepsilon, q) \approx 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) \ln p_i(\varepsilon). \quad (7.14)$$

Выражение

$$S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) \ln p_i(\varepsilon) \quad (7.15)$$

называется в математической теории *энтропией* фрактальной фигуры, а в физике – *безразмерной конфигурационной энтропией*.

Скейлинговая экспонента по формуле (7.4) с учётом соотношения $\ln(1-x) \approx -x$ приводится к виду

$$\tau(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(\varepsilon, 1)}{\ln \varepsilon} = - (q-1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (7.16)$$

а размерность

$$D(1) = \frac{\tau(1)}{q-1} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (7.17)$$

В силу того, что энтропия является мерой хаоса или недостатка информации $I(\varepsilon) = -S(\varepsilon)$ о местонахождении ячеек с i точками, то размерность (7.17) определяет информацию, необходимую для фиксирования местоположения точки в наугад выбранной ячейке.

В качестве примера вычислим, сколько надо задать вопросов, чтобы определить положение *одной* частицы в **16** ячейках. Первый вопрос: частица находится в ячейке с номером большим 8? Ответ – нет (**F**; ответы на вопросы: **False** – ложь, **True** – правда). Второй вопрос: частица размещается в ячейке, с номером который превышает 4? Ответ – да (**T**). Третий вопрос: частица расположена в ячейке с номером, который не более 6? Ответ – да (**T**). Четвёртый вопрос: частицу можно найти в ячейке под номером 6? Ответ – нет (**F**). Следовательно, она располагается в ячейке под номером 5. Теперь вычислим количество требуемых вопросов аналитически.

Вероятность обнаружения *одной* частицы в **16** ячейках равна $p_i = \frac{1}{16}$. Согласно определению информации по Шенону, получим

$$I(\varepsilon) = -\frac{S(\varepsilon)}{\ln 2} = -\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i \frac{\ln p_i}{\ln 2} = -\sum_{i=1}^{16} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{16} \left(\frac{1}{16}\right) \log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = 16 \cdot \frac{1}{4} = 4. \quad (7.18)$$

На рис. 7.3 показан информационный процесс определения местоположения *одной* частицы в **16** ячейках.

Поэтому размерность

$$D(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (7.19)$$

называется *информационной*.

Вычислим размерность $D(2)$, которая задаётся равенством

$$D(2) = \tau(2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^2 \right)}{\ln \varepsilon} \quad (7.20)$$

и тесно связана с корреляционной функцией

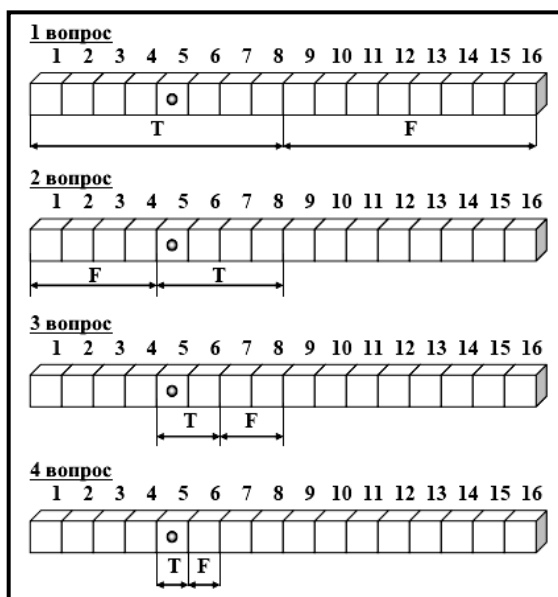


Рис. 7.3. Нахождение частицы с помощью вопросов, на которые можно отвечать только да (Т) или нет (F).

$$K(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k,l}^N \theta(\varepsilon - |\bar{r}_k - \bar{r}_l|)}{N^2}, \quad (7.21)$$

где суммирование проводится по всем парам точек мультифрактала с радиус-векторами \bar{r}_k и \bar{r}_l , $\theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда. Исходя из определения функции Хевисайда, находим, что суммирование в формуле (7.21) ведётся по всем парам точек, расстояние между которыми не менее линейного размера ячейки ε . Эта сумма, поделённая на N^2 , определяет вероятность обнаружения таких точек в мультифрактале. Эту же вероятность можно найти следующим образом: величина p_i^2 определяет вероятность попадания в ячейку i двух точек, а сумма таких вероятностей – задаёт вероятность того, что две произвольно выбранные точки фрактального множества лежат в одной ячейке. Следовательно, можно записать, что корреляционный интеграл приближён равен

$$K(\varepsilon) \approx Z(\varepsilon, 2) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^2(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D(2)}. \quad (7.22)$$

Отсюда найдём, что

$$D(2) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln K(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (7.23)$$

Размерность, которая определяется по формуле (7.23), называется *корреляционной*.

Общим свойством размерности Реньи является её монотонное убывание с ростом значения параметра q , следовательно, мак-

симального значения функция $D(q)$ достигает при $q \rightarrow -\infty$, а минимального – при $q \rightarrow +\infty$.

В качестве примера рассмотрим неоднородную “пыль” Кантора (см. пункт 2.1, рис. 2.5, стр. 32), распределение вероятностей для которой показано на рис. 7.4. На n -ом итерационном шаге её

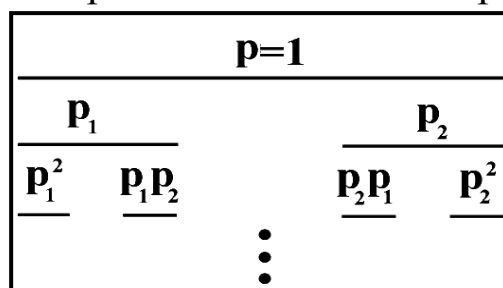


Рис. 7.4. Построение неоднородного фрактального множества Кантора.

построения обобщённая статистическая сумма будет определяться обычным биномом Ньютона

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} C_{n(\varepsilon)}^k [p_1^q(\varepsilon)]^k [p_2^q(\varepsilon)]^{n(\varepsilon)-k} = (p_1^q + p_2^q)^{n(\varepsilon)}, \quad (7.24)$$

здесь $C_{n(\varepsilon)}^k = \frac{n(\varepsilon)!}{k!(n(\varepsilon)-k)!}$ – число сочетаний из общего числа ячеек $n(\varepsilon)$

по k ячеек. На изучаемом процедурном шаге размер ячейки равен $\varepsilon = 3^{-n}$. Воспользуемся равенством (7.6), получим

$$(p_1^q + p_2^q)^{n(\varepsilon)} \approx 3^{-n(\varepsilon)\tau(q)}, \quad (7.25)$$

т.е. скейлинговая экспонента определяется с одной стороны равенством (7.5), а из соотношения (7.25) – формулой

$$\tau(q) = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 3}, \quad (7.26)$$

что позволяет для обобщённой размерности получить выражение

$$D(q) = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 3}. \quad (7.27)$$

Для однородной “пыли” Кантора вероятности $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ и все её размерности (Хаусдорфа-Безиковича, информационная, корреляционная и др.) совпадают, поэтому хаусдорфову размерность можно вычислить, положив в формуле (7.27) параметр $q = 2$:

$$D = D(2) = -\frac{\ln(p_1^2 + p_2^2)}{(2-1)\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309. \quad (7.28)$$

Для неоднородной “пыли” Кантора ($p_1 = \frac{1}{4}$ и $p_2 = \frac{3}{4}$) спектр обобщённых размерностей показан на рис. 7.5.

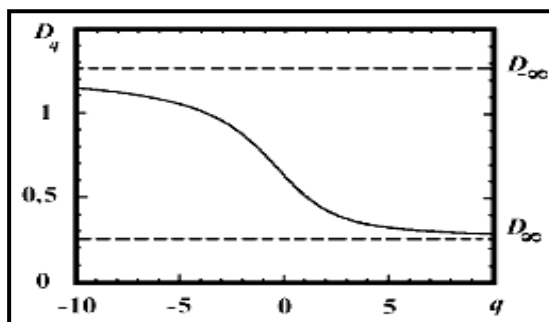


Рис. 7.5. Изменение размерности неоднородной “пыли” Кантора.

Наряду с обобщёнными размерностями используют функцию мультифрактального спектра или спектр сингулярностей мультифрактала.

7.3. Спектр сингулярностей мультифрактала

Для того чтобы “быть образованным” сегодня, необходимо не только иметь отнюдь не поверхностное знание наук и искусств, но и понимать взаимосвязи, чему мало где учат... Коротко говоря, это должно быть образованием ради выживания.

Норман Казинс

Для однородных фракталов формула (7.9) приводит к выражению

$$p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{D_0}. \quad (7.29)$$

В общем случае количество ячеек определённого сорта зависит от их размера по степенному закону, что приводит к аналогичной зависимости для вероятностей обнаружения ячеек в мультифрактале

$$p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (7.30)$$

где показатель степени α_i называют *экспонентой сингулярности* или *показателем Липшица-Гёльдера*. Формула (7.29) показывает, что чем меньше экспонента сингулярности, тем большую по величине особенность имеет функция $p_i(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для мультифракталов типичной ситуацией является изменение параметра сингулярности в некотором конечном интервале от α_{\min} до α_{\max} . Эти показатели Липшица-Гёльдера можно определить формулами

$$\alpha_{\min} = \left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = D(+\infty) \quad \text{и} \quad \alpha_{\max} = \left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = D(-\infty), \quad (7.31)$$

соответственно. Им соответствуют малые $p_{i \min}$ и большие $p_{i \max}$ вероятности заполнения наугад выбранной ячейки.

Изменение параметра α_i ставит вопрос о законе распределения вероятностей попадания его значения в тот или иной наперёд

заданный интервал. Число ячеек, имеющих один и тот же показатель сингулярности α_i в интервале от α до $\alpha+d\alpha$, обозначим через $n(\alpha)d\alpha$. Плотность вероятности $n(\alpha)$ определим в соответствии с формулой (7.9) в виде

$$n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}, \quad (7.32)$$

где функция $f(\alpha)$ задаёт размерность некоторого фрактального подмножества данного мультифрактала. Размерность этого подмножества всегда меньше или равна размерности самого множества. Таким образом, функция $f(\alpha)$ описывает спектр размерностей однородных подмножеств, на которые можно разбить исходное множество, представляющее мультифрактал.

Каждому однородному фракталу принадлежит только часть из общего числа ячеек $n(\varepsilon)$, поэтому при суммировании по подмножеству условие нормировки вероятностей (7.2) не выполняется (очевидно, что их сумма меньше единицы). Следовательно, для всех значений α выполняется неравенство

$$f(\alpha) \leq \alpha, \quad (7.33)$$

знак равенства имеет место для однородных фракталов.

Вычисление обобщённой статистической суммы по формуле (7.3) с заменой суммирования по i на интегрирование по α приводит к формуле

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \int n(\alpha) \varepsilon^{q\alpha} d\alpha \approx \int \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha. \quad (7.34)$$

В силу малости величины ε обобщённую статистическую сумму можно оценить функцией вида

$$Z(\varepsilon, q) \approx \varepsilon^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))} = \varepsilon^{\tau(q)}, \quad (7.35)$$

при выполнении равенства

$$q = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}. \quad (7.36)$$

Тогда обобщённая фрактальная размерность определяется соотношением (7.5)

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}{q-1}. \quad (7.37)$$

Знание зависимости $D(q)$ с учётом формулы (7.36) позволяет найти параметрическую функцию $\alpha(q)$ по формуле

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [D(q)(q-1)] = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (7.38)$$

Следовательно, экспонента сингулярности задаётся выражением

$$\boxed{f(\alpha) = q \frac{d\tau(q)}{dq} - \tau(q)}, \quad (7.39)$$

которое является *преобразованием Лежандра*. Обратный переход задаётся формулами (7.36) и

$$\boxed{\tau(q) = \alpha \frac{df(\alpha)}{d\alpha} - f(\alpha)}. \quad (7.40)$$

Отметим, что аналогичными равенствами связаны между собой характеристические функции в термодинамике, в частности, свободная энергия F и внутренняя энергия U для *закрытой* системы с энтропией s при температуре T

$$U = F + ST = F - T \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (7.41)$$

Другим примером является *замкнутая* механическая система, которая имеет функцию Лагранжа L и движется со скоростью \dot{q} . Её полная энергия E сохраняется и определяется формулой

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L. \quad (7.42)$$

Аддитивность лагранжиана приводит к тому, что энергия совокупности замкнутых подсистем равна сумме их энергий. Данное свойство сохраняется и тогда, когда замкнутые подсистемы находятся в постоянном (не зависящем от времени) внешнем поле. Системы, для которых энергия сохраняется, называются *консервативными*.

В классической механике преобразование Лежандра применяется тогда, когда одни характеристики состояния системы являются независимыми аргументами функции Гамильтона, например, обобщённая координата q , а другие – независимыми переменными Лагранжа, например, параметр ξ . Переход от переменных вида $q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi}$ к переменным $q, \xi, p = m\dot{q}, \dot{\xi}$ сопровождается введением функции Рауса $R(q, \xi, p, \dot{\xi}) = p\dot{q} - L$, дифференциал которой равен

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q} dq + \frac{\partial R}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial R}{\partial p} dp + \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi} = -\dot{p} dq - \frac{\partial L}{\partial \xi} d\xi + \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} d\dot{\xi}. \quad (7.43)$$

Параметры ξ и скорости их изменения $\dot{\xi}$, относительно которых не происходит преобразования Лежандра, удовлетворяют уравнению Лагранжа

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0} \quad (7.44)$$

с заменой функции Лагранжа на функцию Рауса. Следовательно, функция Рауса является гамильтоновой по отношению к переменной q и лагранжевой по отношению к координате ξ . Энергия системы определяется равенством вида (7.42):

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \dot{\xi} - L = R - \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \dot{\xi}. \quad (7.45)$$

Функция Рауса оказывается наиболее полезной в том случае, когда координата q явным образом не входит в функцию Лагранжа, такая координата называется *циклической*. Циклическая координата находится прямым интегрированием равенства $\dot{q} = \frac{\partial R(\xi, p, \dot{\xi})}{\partial p}$.

Рассмотренные примеры показывают, что задолго до открытия фрактальной геометрии физики учитывали мультифрактальность природных объектов.

С физической точки зрения мультифрактал можно считать закрытой системой с замкнутыми однородными фракталами, которая характеризуется спектром сингулярностей $f(\alpha)$, определяемым формулой (7.39). В точке, соответствующей однородному фракталу параметр $\alpha(0)$ равен хаусдорфовой размерности $\alpha(0) = D_0$ и по формуле (7.37) экспонента сингулярности $f(\alpha(0)) = D_0$. Так как остальные размерности меньше этой величины, то функция сингулярностей имеет в точке $\alpha(0) = D_0$ максимум. Информационная размерность лежит на кривой $f(\alpha(q))$ в точке, для которой выполняются равенства $f(\alpha) = \alpha$ (неподвижная точка) и $f'(\alpha) = 1$ (слипер). Следовательно, информационная размерность определяет размерность слиперной фрактальной области или области безразличного ожидания. Для корреляционной размерности функция сингулярностей равна $f(\alpha(2)) = 2\alpha(2) - D_2$. Один из видов графика функции $f(\alpha)$ приведен на рис. 7.6. Отметим тот факт, что на концах интервала α_{\min} и

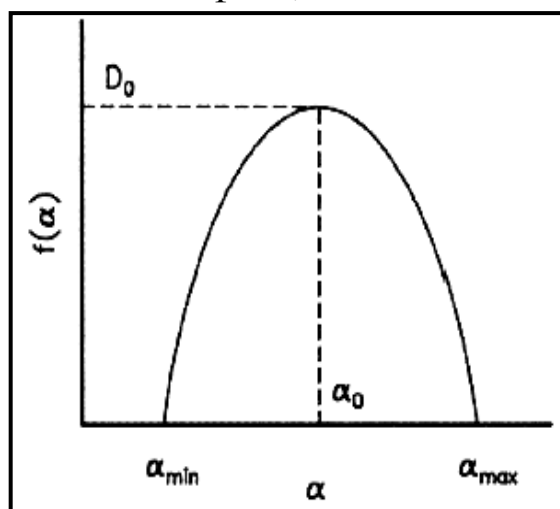


Рис. 7.6. Один из возможных видов функции спектра сингулярностей.

α_{\max} другие функции $f(\alpha)$ могут в нуль и не обращаться. Помимо рассмотренного подхода к изучению спектра мультифрактальных размерностей были предложены и другие модели его построения.

7.4. Модели спектра фрактальных размерностей

Доводы, до которых человек додумывается сам, обычно убеждают его больше, нежели те, которые пришли в голову другим.

Блез Паскаль

В настоящее время предложен целый ряд моделей, позволяющих анализировать спектр масштабов мультифракталов. Стандартный подход, рассмотренный выше, базируется на использовании преобразования Лежандра. Анализ спектра фрактальных размерностей без применения преобразования Лежандра предложен А.Б. Чаброй и Р.В. Дженсенем. Он основан на использовании нормированной меры

$$\mu_i(q) = \frac{p_i^q}{Z(\varepsilon, q)}, \quad (7.46)$$

где обобщённая статистическая сумма определяется формулой

$$Z(\varepsilon, q) = \sum_{i=1}^N p_i^q(\varepsilon), \quad (7.47)$$

т.е. суммирование ведётся не по ячейкам, а по всем точкам мультифрактала (аналогичная формула получена в методе ячеек Больцмана). Параметрическая функция $\alpha(q)$ вычисляется по формуле

$$\alpha(q) = \frac{d\tau(q)}{dq} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(q) \ln p_i}{\ln \varepsilon}. \quad (7.48)$$

Функция спектра сингулярностей определяется выражением, которое следует из равенства (7.36):

$$f(q) = q\alpha(q) - \tau(q). \quad (7.49)$$

Применение меры (7.46) позволяет ввести информацию мультифрактала (*информационный анализ мультифрактала*)

$$I(q) = \sum_{i=1}^N p_i \ln \left(\frac{p_i}{\mu_i(q)} \right). \quad (7.50)$$

Мультифрактальная информация связана с обобщёнными размерностями Реньи соотношением

$$D(q) = D(1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(q)}{(q-1) \ln \varepsilon}. \quad (7.51)$$

Показатель (7.48) и функция (7.49) сингулярностей в этом случае

оказываются сдвинутыми влево на величину $D(1)$, т.е.

$$\alpha_I(q) = \alpha(q) - D(1) \quad \text{и} \quad f_I(q) = f(q) - D(1). \quad (7.52)$$

Помимо стандартной *P-модели*, рассмотренной в пункте 7.1, нашли применение *L-модели*. Они базируются на разбиении мультифрактала на K областей с размерами V_1, V_2, \dots, V_K . Каждая область характеризуется своим значением меры p_K и находится внутри “сферы” с радиусом R_K . Значения радиусов R_K ограничены сверху радиусом “сферы” R , внутри которой располагается мультифрактал, т.е. $R_K \leq R$. В *L-модели* обобщённая статистическая сумма зависит от параметра “деформации” вероятностей q , скейлинговой экспоненты $\tau(q)$, способа разбиения мультифрактала на области или вида последовательности $\{V_K\}$, характерного линейного размера мультифрактала R .

Обобщённая статистическая сумма имеет вид

$$Z(q, \tau, \{V_K\}, R) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^q}{R_i^\tau}. \quad (7.53)$$

Эта величина будет близка к единице при приближении параметра τ к скейлинговой экспоненте $\tau(q)$, которая определяется формулой (7.5). При выполнении равенств $R_1 = R_2 = \dots = R_K = \varepsilon$ равенство (7.53) приобретает вид уравнения (7.3).

Для рекурсивной процедуры разбиения, когда на каждом шаге возникает k новых областей и на шаге n их становится k^n , обобщённую статистическую сумму можно записать в виде

$$Z_n(q, \tau, \{V_k\}, R) = \left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i^q}{R_i^\tau} \right)^n = (Z_1(q, \tau, \{V_k\}, R))^n. \quad (7.54)$$

В пределе бесконечно больших значений n обобщённая статистическая сумма (7.54) стремится или к нулю ($Z_1(q, \tau, \{V_k\}, R) < 1$), или к бесконечности ($Z_1(q, \tau, \{V_k\}, R) > 1$). Предел функции $Z_n(q, \tau, \{V_k\}, R)$ будет равен единице при $n \rightarrow \infty$ только в том случае, когда первая статистическая сумма

$$Z_1(q, \tau, \{V_k\}, R) = 1. \quad (7.55)$$

Равенство (7.55) является уравнением относительно скейлинговой экспоненты, поэтому функция $Z_1(q, \tau, \{V_k\}, R)$ является *генератором* мультипликативного процесса разбиения исследуемого неоднородного мультифрактала.

Применим рассмотренный формализм к исследованию рекур-

сивной процедуры разбиения отрезка единичной длины на отрезки с длинами $R_1=0,25$ и $R_2=0,5$, которые имеют одинаковую вероятность заполнения $p_1=p_2=\frac{1}{2}$ (рис. 7.7). Генератор этого мультипликативно-

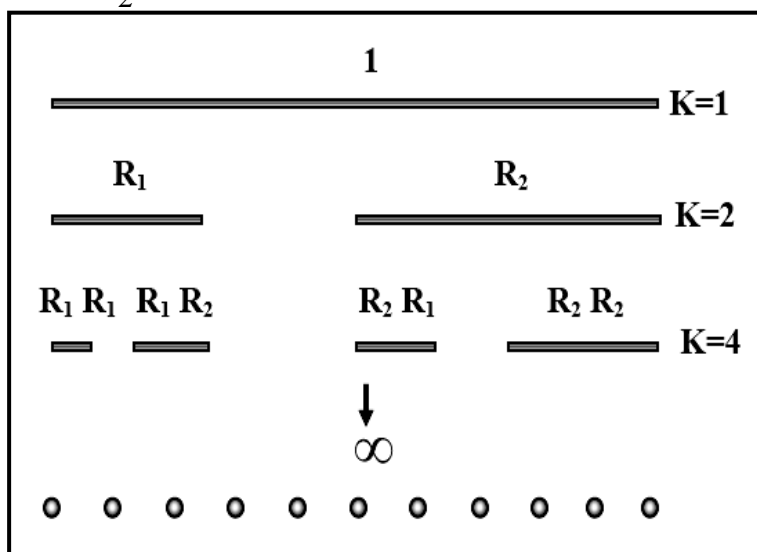


Рис. 7.7. Рекурсивная процедура построения неоднородной “пыли” Кантора.

го процесса определяется формулой

$$Z_1(q, \tau, \{V_k\}, R) = \frac{p_1^q}{R_1^\tau} + \frac{p_2^q}{R_2^\tau}. \quad (7.56)$$

Подстановка (7.56) в уравнение (7.55) при заданных значениях длин и вероятностей приводит к уравнению относительно зависимости параметра τ от величины q :

$$2^\tau + 4^\tau = 2^q. \quad (7.57)$$

Решение уравнения (7.57) имеет вид

$$\tau(q) = \frac{\ln(\sqrt{1+2^{q+2}} - 1)}{\ln 2} - 1. \quad (7.58)$$

Спектр фрактальных размерностей $D(q)$ вычисляется по формуле (7.5), принимает значения от $1/2 \leq D(q) \leq 1$ и имеет вид, показанный на рис. 7.8.

Ценность мультифракталов и их анализа состоит в том, что они отражают реальные объекты и процессы, а монофракталы являются всего лишь их идеализированными представлениями. Применимость мультифрактального подхода основана на возможности разбиения природного явления на самоподобные части с разными линейными и другими размерами, отношение которых друг к другу может быть рациональным (*соразмерные* монофракталы) или иррациональным (*несоразмерные* монофракталы) числом. Перво-

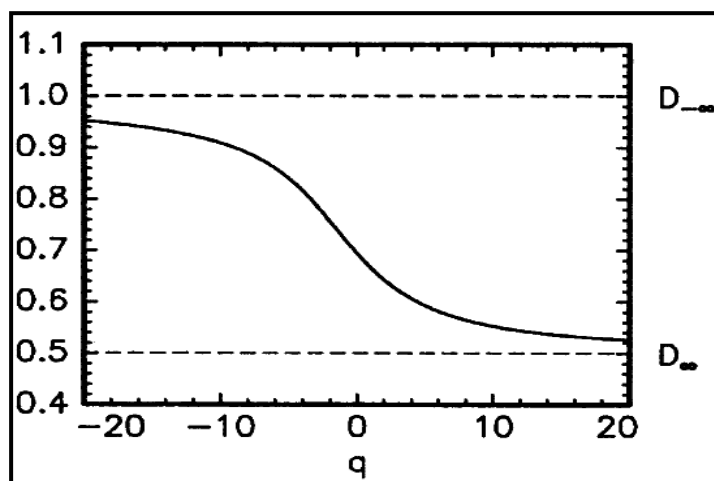


Рис. 7.8. Спектр обобщённых размерностей в L -модели мультифрактала Кантора.

начально такой анализ был разработан для статистического изучения особенностей масштабных изменений в сингулярных мерах. В настоящее время мультифрактальный способ применяется в самых разных науках: при изучении сегрегационных свойств элементов крови в биологии и диффузионного роста зародышей новой фазы в физике; для описания инвариантной вероятностной меры странных аттракторов в динамической теории систем и кодирования информации; при исследовании структуры неупорядоченных систем с запрещённой осью симметрии пятого порядка (квазикристаллы); для определения распределения людей с тем или иным доходом в экономике и т.п. Распространение мультифрактального анализа на случай функциональных зависимостей привёл к появлению и развитию вейвлетного преобразования (“wavelet” в переводе с английского языка означает “маленькая волна” или “всплеск” (Гроссман и Морле (1984))).

Солитоноподобное преобразование базируется на использовании совокупности функций, обладающих свойством пространственной (или временной) и частотной локализованности. Локализация всплеска позволяет проанализировать поведение системы в обычном пространственно-временном континууме и в частотном пространстве. Вейвлеты образуют иерархический базис и используются для моделирования нелинейных детерминированных или случайных процессов в динамических системах. В отличие от Фурье-анализа, всплески являются “математическим микроскопом”, позволяющим изучить внутреннюю природу неоднородных объектов и их скейлинговые свойства.

Глава 8. Физические мультифракталы

Anyone who conducts an argument by appealing to authority is not using his intelligence; he is just using his memory.

(Тот, кто в споре прибегает к авторитетам, использует не свой ум, а только свою память).

Леонардо да Винчи

Самоподобие в физических явлениях и процессах связано с использованием однородных функций и степенных законов, которые часто возникают при исследовании различных по своей природе, внутреннему устройству и протекающим изменениям системах. Выяснение причин, которые порождают тождественность элементарных частиц одного вида, подобия фазовых портретов разных динамических структур, условий возникновения турбулентности и формирования поверхностей зародышей новой фазы, а также решение многих других проблем современной физической теории может осуществиться с привлечением геометрических, алгебраических и других математических методов анализа. В частности, фрактальный анализ позволяет находить степенные законы изменения физических величин без привлечения физико-математического моделирования. Известно, что временные интервалы вдоль подобных фазовых траекторий изменяются в соответствии с законом $k^{1-(n/2)}$. Для линейного осциллятора с квадратичной зависимостью потенциальной энергии показатель $n=2$, т.е. коэффициент однородности равен k^0 . Это означает, что период колебаний, как временная характеристика линейного осциллятора, не будет зависеть от амплитуды или энергии колеблющегося тела. В квантовой механике это факт отражается в равных расстояниях между энергетическими уровнями, которые равны кванту Планка. Для нелинейного осциллятора с восстанавливающей силой, которая описывается кубической зависимостью, потенциальная энергия описывается полиномом четвёртой степени ($n=4$). Отсюда следует, что изменение времени будут пропорционально k^{-1} . Это означает, что частота колебаний (величина обратная к периоду) будет зависеть от энергии осциллятора: при возрастании жёсткости пружины возрастает энергия и резонансная частота системы.

Диссипативные процессы (поглощение и излучение, трение и обмен веществом с внешней средой, химические реакции и турбулентность, а также подобные явления), трудно поддаются масштабированию, так как сопровождаются случайными флуктуациями и

процессами. Например, десятикратное уменьшение микроволнового резонатора приводит к такому же десятикратному возрастанию резонансных частот, при этом толщина скин-слоя (слой внутренней поверхности резонатора, который поглощает электромагнитное излучение) обратно пропорциональна корню квадратному из частоты волны. По законам скейлинга показатель степени для коэффициента подобия должен равняться -1 , а не $-1/2$. Это свидетельствует о том, что данный процесс не описывается монофракталом с фиксированной размерностью. Для правильного моделирования процесса поглощения электромагнитного излучения внутренней поверхностью резонатора её представляют в виде мультифрактала со спектром размерностей.

При описании дифракции на прямоугольной щели используют функцию

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad (8.1)$$

которую с учётом многократного применения тригонометрической формулы $\sin \alpha = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ можно представить в виде бесконечного произведения Эйлера:

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}} = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\frac{\pi x}{4}} = \dots = \prod_{i=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2^i}\right). \quad (8.2)$$

Уже первый шаг построения бесконечного произведения Эйлера показывает, что функция $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ самоподобна с коэффициентом подобия 2 и с точностью до множителя $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, который определяет нули функции $f(x)$ при всех нечётных значениях аргумента x .

Важность масштабных преобразований была продемонстрирована в 30-ые годы XX века лауреатом Нобелевской премии Хидеки Юкавой. Используя конечную пороговую длину ядерных сил он предсказал существование элементарной частицы, которая должна реально существовать и быть приблизительно в 240 раз тяжелее электрона (Юкава назвал её *мезоном*). Впоследствии были открыты две частицы в космических потоках элементарных частиц: *мюон* (в 207 раз тяжелее электрона) и *пи-мезон* (в 270 раз тяжелее электрона).

Масштабная инвариантность проявляется не только на микроскопически малых расстояниях, но и на таких, которые совместимы с размерами Вселенной. Так в 1948 году Альфер и Герман, используя простой степенной закон между плотностью излучения ρ_r и плотностью вещества ρ_m вида $\rho_r \approx \rho_m^{4/3}$, доказали возможность существования реликтового теплового поля с температурой по абсолютной шкале $T \approx 5K$. Ровно через тридцать лет фоновое реликтовое излучение с температурой $T \approx 2,7K$ было обнаружено А. Пензиасом и Р. Вильсоном.

Применение мультифрактальной геометрии позволяет смоделировать сложное поведение нелинейных динамических систем, ограниченную диффузией сегрегацию, появление “пальцев” в вязких средах, перколяцию в кристаллических решётках и т.д. Наибольшего успеха мультифрактальный анализ достиг при изучении турбулентности. Несмотря на то, что использовались экспериментальные данные при появлении турбулентности в различных системах (атмосферная, в пограничном слое, при обтекании круглого цилиндра или проволочной решётки), все они хорошо укладываются на функцию спектра размерностей при $p=0,3$ (рис. 8.1).

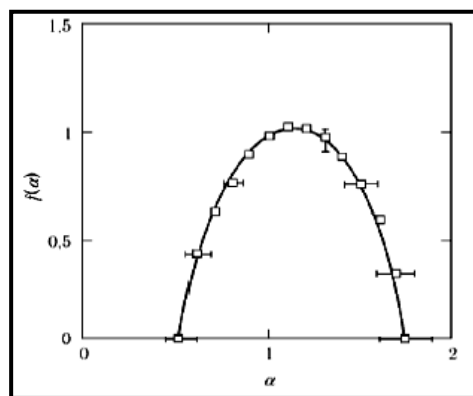


Рис. 8.1. Мультифрактальный спектр турбулентности.

Не менее важным достижением физики подобия является исследование ограниченной диффузией агрегацией отдельных блуждающих частиц на древовидном мультифрактале (рис. 8.2). Причиной возникновения такой фигуры является более высокая вероятность того, что блуждающая частица осядет на “отростке”, по сравнению с вероятностью прикрепления во внутренней области “дерева”. Теоретические расчёты показывают, что функция спектра обобщённых размерностей принимает непрерывный ряд значений из интервала от $\alpha_{\min} \approx 0,5$ до $\alpha_{\max} > 5$.

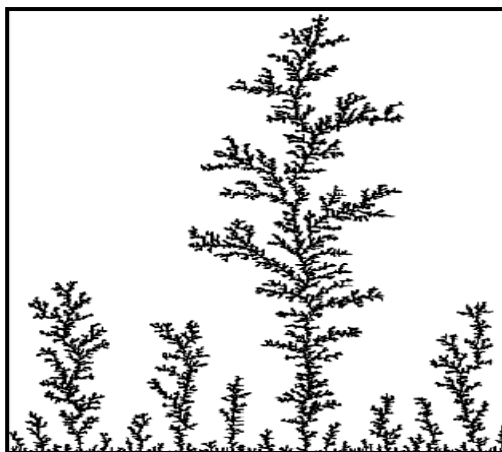


Рис. 8.2. Древоподобный мультифрактал агрегации, ограниченной диффузией.

Сходство между внешними видами древоподобного мультифрактала, возникающем при ограниченной диффузией агрегации, и линейной молнией не случайно. Рост агрегационного дерева происходит в направлении наибольшего градиента концентрации вещества, а распространение линейной волны – в направлении наибольшего градиента потенциала электрического поля. В результате этого процесса внутренние области имеют достаточно низкую вероятность “заселённости”, поэтому в этих областях практически отсутствует рост новых “ветвей”.

Рассмотрим более детально ряд конкретных систем и покажем мультифрактальный характер физических явлений и процессов.

8.1. Мультифрактальная конвекция Рэлея-Бенара

Выдержки, изречения и прочее подобны зажигательным стёклам: они собирают лучи ума и знания, рассеянные в произведениях писателей, и силой, и живостью сосредоточивают эти лучи в сознании читателей.

Джонатан Свифт

Странный аттрактор Э.Н. Лоренца (см. пункты 3.4, стр. 64, и 4.6, стр. 79) обладает мультифрактальными свойствами, хотя и с небольшим отклонением от точного самоподобия. В 1985 году М. Енсен и сотр. провели экспериментальное изучение закономерностей возникновения тепловой конвекции в очень маленькой ячейке с объёмом $0,686 \text{ см}^3$. Между нижней и верхней поверхностями жидкости поддерживалась разность температур ΔT . В ячейке возникали 2 вала. Увеличение разности температур выше некоторого критического значения приводило к потере устойчивости и возникновению поперечных осцилляций. Автоколебания происходили с со-

бственной частотой системы ω_0 . Внешнее воздействие реализовывалось в виде постоянного горизонтального магнитного поля и переменного, вертикального, электрического поля с частотой $\varphi \omega_0$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – золотое сечение (см. Главу 4, стр. 65). Оно приводило к нерегулярным флуктуациям температуры нижней поверхности ячейки. Построение графика зависимости температуры от временного промежутка наблюдений продемонстрировало существование странного аттрактора.

Анализ экспериментального графика проводился следующим образом. На полученной кривой выбиралась произвольная точка, и подсчитывалось количество шагов K вдоль линии, которые необходимо сделать, чтобы текущая точка оказалась на расстоянии от исходной точке не более чем на величину ε . При покрытии временной зависимости $n_t(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D(q)}$ кубиками оценивали вероятность обнаружения точки в кубе в момент времени t формулой

$$p_t(\varepsilon) = \frac{1}{n_t(\varepsilon)}. \quad (8.3)$$

Формула (8.3) соответствует представлению странного аттрактора в виде совокупности монофракталов. Оценка обобщённой статистической суммы по формуле (7.53) даёт выражение

$$Z(q, t, \{V_K\}, \varepsilon) \approx \varepsilon^{q\alpha(q)} \sum_{i=1}^K p_i^{1-q} \approx \varepsilon^{q\alpha(q) - \tau(q)} = \varepsilon^{f(\alpha)}. \quad (8.4)$$

Вычисленный по экспериментальным данным спектр сингулярностей $f(\alpha)$ показан на рис. 8.3, который демонстрирует хорошее согласие теории и эксперимента.

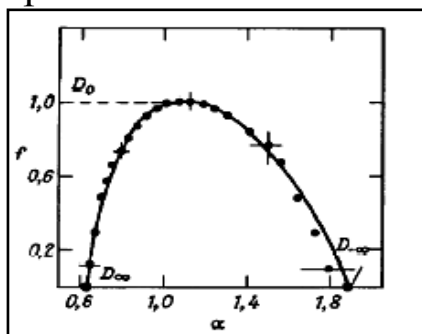


Рис. 8.3. Спектр сингулярностей для конвекции Рэлея-Бенара.

В общем случае странный аттрактор можно представить в виде фрактальной пыли, фрактальная размерность которой меньше топологической размерности евклидова пространства. Странность аттрактора проявляется в том, что итерационный процесс его по-

строения существенно зависит от выбора начальной точки. Кроме того, выбор двух сколь угодно близких исходных условий приводит при большом числе итераций к значительному расхождению значений итерационных последовательностей. Прототипом странного поведения может служить модель Ферхюльста (логистическое отображение, см. пункт 4.4, стр. 72). Следует отметить, что логистическое отображение; критическое отображение окружности самой на себя с числом вращений, равным золотому сечению; множество Кантора и тепловая конвекция Рэлея-Бенара принадлежат к одному *классу универсальности*. В силу того, что золотое сечение является неподвижной точкой распределения Гаусса или гиперболического отображения, то данный класс мультифракталов можно назвать *гиперболической группой универсальности*.

Свойства установленного универсального поведения странных аттракторов могут быть асимптотически хорошо смоделированы с помощью двух генераторов с длиной $l_1=0,408$ и $l_2=l_1^2$, имеющими вероятности реализации $p_1=p_2=0,5$. Размерность Хаусдорфа-Безиковича ($q=0$) $f(\alpha(0)) = D_0$ для этого модельного странного аттрактора с удвоением периода определяется из равенства

$$\boxed{l_1^{D_0} + l_2^{D_0} = 1}. \quad (8.5)$$

Так как $l_2=l_1^2$, то замена $x=l_1^{D_0}$ приводит уравнение (8.5) к квадратному уравнению, одним из корней которого является золотое сечение $l_1^{D_0} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$. Следовательно, фрактальная размерность Хаусдорфа-Безиковича модельного странного аттрактора равна

$$D_0 = \frac{\ln l_1^{D_0}}{\ln l_1} = \frac{\ln(0,618)}{\ln(0,408)} \approx 0,537. \quad (8.6)$$

Информационная размерность $D(1)=0,525$. При $q \neq 0$ и $q \neq 1$ уравнение (8.5) имеет вид

$$\boxed{l_1^{\tau(q)} + l_2^{\tau(q)} = 2^q}, \quad (8.7)$$

поэтому размерности определяются по формуле вида золотого сечения

$$D(q) = \frac{\ln \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+2^{q+2}} - 1 \right) \right]}{(q-1) \ln l_1}. \quad (8.8)$$

Последовательность размерностей задаётся числами

$$D(-\infty) = \frac{1}{\log_2 l_1} = 0,774; \dots; D(-1) = 0,561; D(0) = D_0 = 0,537; D(1) = 0,525; D(2) = 0,497; \\ D(3) = 0,482; \dots; D(+\infty) = \frac{1}{2 \log_2 l_2} = 0,387. \quad (8.9)$$

Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с численными расчётами (погрешность $\sim 2,5\%$). Несмотря на малое расхождение между теоретическими результатами и данными численных расчётов, надо признать, что странный аттрактор удвоения периода не является полностью самоподобным. Это означает, что для описания физических мультифрактальных объектов и процессов требуется более точное выражение для обобщённой статистической суммы.

Уточнение выражения для обобщённой статистической суммы связано с установлением зависимости вероятности обнаружения точек покрытия в той или иной ячейке от линейных размеров самой ячейки. Кроме того, надо учитывать присутствие в системе пустых ячеек, которые ответственны за существование свободного объёма, подвижность и размер частиц, а также их взаимодействия между собой. Указанные условия эквиваленты правильному выбору параметра порядка в теории фазовых переходов. После фиксации параметра порядка можно использовать теорию фазовых переходов Л.Д. Ландау и ренормализационный подход Вильсона-Когута.

Другим примером физического мультифрактала является дендритная структура, которая возникает при агрегации частиц, ограниченной их подвижностями.

8.2. Ограниченная диффузией агрегация

События и обстоятельства имеют свои корни в нас самих. Они растут из семян, которые мы посеяли.
Генри Дэвид Торо

Ограниченная диффузией агрегация также, как и конвекция Рэ-ля-Бенара, является ярким представителем класса динамических мультифракталов, которые являются мгновенными снимками того или иного физического процесса. С другой стороны, процесс ограниченной диффузии отображается случайным мультифракталом, так как диффузионный процесс – это случайные блуждания частицы до достижения её поверхности осаждения.

Процесс диффузионного перемещения частиц впервые был описан Фиком в предположении, что частицы находятся в совер-

шенно беспорядочном тепловом движении и не взаимодействуют между собой. Рассмотрим процесс диффузии в цилиндре с постоянной площадью поперечного сечения S , ось которого расположена на оси абсцисс Ox (рис. 8.4), причём концентрация $c(t; x)$ веществ-

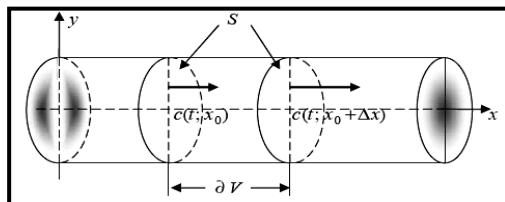


Рис. 8.4. Картина диффузионного процесса по Фику.

ва вдоль цилиндра неравномерна ($c(t; 0) > c(t; L)$) и отсутствуют источники и стоки для диффундирующего вещества (нет внешнего введения вещества в диффузионную зону и отсутствуют внутренние химические реакции). Количество вещества, приходящееся на единицу объёма исследуемой системы, называется *объёмной концентрацией*, т.е. $c = \frac{dN}{dV}$, где dN – число частиц в элементе объёма dV .

Нетрудно показать, что поток вещества при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$ пропорционален площади поперечного сечения S и скорости изменения концентрации $\frac{\partial c(t; x)}{\partial x}$ вдоль оси Ox , т.е. *поток*

вещества $J = -\mathcal{D} S \frac{\partial c(t; x)}{\partial x}$, где \mathcal{D} – коэффициент пропорциональности.

Это равенство называется *первым законом Фика*, а \mathcal{D} – *коэффициентом диффузии*. В общем случае коэффициент диффузии определяется соотношением Эйнштейна (см. пункт 4.1, формулу (4.4), стр. 68). Отметим, что диффузионный процесс, в основном, происходит в сторону убывания концентрации и это направление выбрано положительным. Градиент же изменения концентрации направлен в противоположную сторону, поэтому в приведенной формуле для потока поставлен знак “–”. Будем считать коэффициент диффузии постоянной величиной. Следовательно, скорость изменения массы вещества в объеме dV за промежуток времени Δt , с одной стороны, равна разности изменений массы на выходе и входе области dV , а с другой стороны – разности потоков вещества, т.е. его изменению $\frac{\partial J}{\partial x} S dx \Delta t$. Приравнивая эти величины и переходя к пре-

делу $\Delta t \rightarrow 0$, получим, с учётом определения концентрации, уравнение диффузии

$$\frac{\partial c(t; x)}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2}, \quad (8.10)$$

здесь $j=J/S$ поверхностная плотность потока. Уравнение (8.10) называется *вторым законом Фика* или *уравнением диффузии*.

В трёхмерном пространстве уравнение диффузии при отсутствии источников и стоков имеет вид $\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \bar{j} = 0$, а при их наличии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \bar{j} = \sigma, \text{ где функция } \sigma \text{ описывает производство или уничтоже-}$$

ние вещества в диффузионной зоне. Использование полученного уравнения диффузии для интерпретации экспериментальных данных сводится к его интегрированию при определённых краевых условиях.

При достижении стационарного состояния ($\frac{\partial c}{\partial t} = 0$) распределение частиц в пространстве определяется уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 c(t; x)}{\partial x^2} = 0. \quad (8.11)$$

Граница перемещается в направлении перпендикулярном к градиенту концентрации и определяется формулой

$$\bar{v} = \mathcal{D} \left. \frac{\partial c(t; x)}{\partial x} \right|_S \bar{n}, \quad (8.12)$$

где \bar{n} – вектор нормали к поверхности S .

На рис. 8.2 (см. стр. 139) показана компьютерная картина процесса осаждения (агрегации). Частицы, случайно блуждающие по плоскости, достигая поверхности агрегата, становятся частью новой поверхности. Если частица достигала нижней линии рис. 8.2, то она становилась зародышем нового дендрита. Как только блуждание заканчивала одна частица, так из случайно выбранной точки верхней прямой рис. 8.2 своё диффузионное перемещение начинала другая точка. От вертикальных линий рис. 8.2 частицы отражались по законам геометрической оптики. Аналогичные мультифрактальные дендриты наблюдаются при электроосаждении металлов, росте вторичных фаз, при образовании “вязких пальцев”, когда происходит поднятие вязкой жидкости по капиллярам, и тому подобных процессах.

Иной алгоритм построения ветвящейся структуры был предложен Уиттенем и Сандером, который основан на выращивании кластера (см. Главу 9). Процесс роста кластерного зародыша оста-

навливают при достижении им диаметра L и содержании частиц N . Обозначим число узлов роста на границе кластера через N_γ . Это число прямо пропорционально числу частиц в кластере N , которое, в свою очередь, зависит от диаметра L по степенному закону, т.е. $N_\gamma \sim N \sim L^D$ (для плоского случая фрактальная размерность кластера равна $D=1,71$). Тестирование узлов роста производится путём случайного испускания частиц с окружности, которая очерчивается вокруг выросшего дендрита. Вероятность того, что блуждающая частица осядет на узле k , определяется формулой $p_k = \frac{N_k}{N} \sim \varepsilon^{-D}$. В силу того, что в данном компьютерном эксперименте используются частицы фиксированного размера ε , то по формуле (7.53) получим, что обобщённая статистическая сумма равна

$$Z(q, \tau, \{V_k\}, R) = \sum_{i=1}^K \frac{p_i^q}{\varepsilon^{\tau(q)}} \approx L^{\tau(q)}. \quad (8.13)$$

Трудность вычисления статистической суммы (8.13) состоит в том, что при малых значениях параметра q тяжело оценить малые вероятности, определяющие агрегацию частицы внутри кластера. Схожесть процессов ограниченной диффузией агрегации и электроосаждения позволяет смоделировать эту ситуацию на языке теории электромагнитных явлений. Численное моделирование электростатической задачи позволило установить спектр сингулярностей дендритного класса универсальности (рис.8.5).

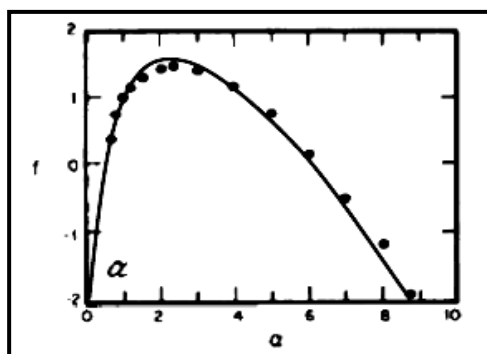


Рис. 8.5. Спектр сингулярностей дендритных мультифракталов.

Из рис. 8.5 видно, что при стремлении экспоненты сингулярностей α к нулю функция спектра сингулярностей также стремится к нулю. Максимум функции равен 1,5 вместо теоретического значения 1,71. Такое расхождение теории и эксперимента было объяснено тем, что при моделировании сформировавшихся дендритов были использованы небольшие числа частиц в кластерах.

Сравнение рис. 8.5 с рис. 8.3 показывает существенное отличие гиперболического и дендритного классов универсальности. К последнему относится и возникновение “пальцев” в вязких средах.

8.3. Рост “пальцев” в вязких средах

Истинная логика нашего мира – это подсчёт вероятностей.

Джеймс Кларк Максвелл

Помещение двух *смешивающихся* вязких жидкостей (например, воды и желатина) между двумя параллельными, стеклянными, плоскими пластинами приводит к появлению мультифрактальных дендритных структур (“пальцев”). Их образование связано с броуновским движением частиц жидкостей, наличием градиентов химических потенциалов и давления, которые определяют гидродинамическую неустойчивость системы. Рост “пальцев” осуществляется у выступов дендритов, вблизи которых градиенты давления и химических потенциалов достигают наибольших значений.

В *несмешивающихся* жидкостях (например, глицерине и нефти) поверхностное натяжение препятствует ветвлению дендритного дерева. Это приводит к образованию “*крупных пальцев*” и, соответственно, “*крупных*” дендритов. Если добавить в одну из жидкостей добавки (присадки), которые снижают поверхностное натяжение, то “*крупные пальцы*” начинают “*худеть*” и спектр их фрактальных размеров сужается.

Динамика процесса образования “пальцев” произвольной толщины описывается уравнением Лапласа для давления. Перемещение жидкостей зависит от распределения давления и граничных условий на обеих стеклянных пластинах.

Похожий механизм образования вязких “пальцев” наблюдается при вытеснении жидкости из пористого объёма на поверхность раздела. Перемещение жидкости внутри поры описывается уравнением Дарси. В стационарном случае это уравнение сводится к уравнению Лапласа для давления. Различие между образованием вязких “пальцев” в жидкостях и пористых средах связано с разными линейными масштабами. В первом случае масштаб определяется капиллярными силами и контролируется поверхностными натяжениями жидкостей. Во втором случае характерный линейный размер определяется средним диаметром и геометрическим видом поры.

Строение поры вносит элемент случайности в процесс вытеснения жидкости. Жидкость будет лучше вытесняться через узкое горло поры, нежели через широкое отверстие. Это связано с давлением воздуха: оно тем меньше, чем уже горло поры. Следовательно, результат вытеснения жидкости из пористой среды зависит как от глобального распределения давления, так и локальных флуктуаций геометрии поры.

Четвёртым примером появления “пальцев” является задача о растворении пористой среды агрессивной жидкостью. Структуры растворения при больших скоростях течения агрессивной жидкости соответствуют дендритным фигурам, возникающим при ограниченной диффузией агрегации с фрактальной размерностью 1,6.

Для математического моделирования вытеснения одной жидкости другой рассмотрим процесс образования одиночного вязкого “пальца”, изображённого на рис. 8.6. Поверхность раздела меж-

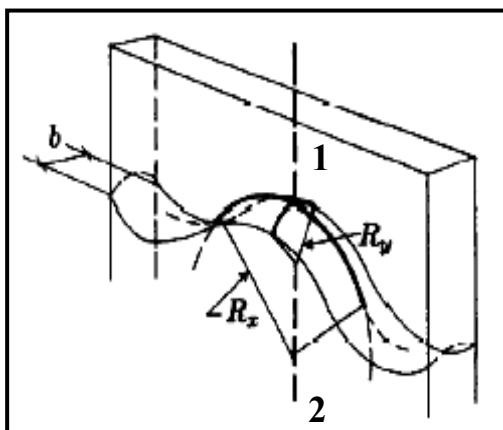


Рис. 8.6. Геометрический вид одиночного вязкого “пальца”.

ду покоящимися жидкостями определяется капиллярными силами. Они формируют разность давлений на границе раздела жидкостей

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \quad (8.14)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела между жидкостями, $R_{x,y}$ – радиусы локальной кривизны границы. Геометрия ячейки определяется углом между границей и пластиной, который обозначим через θ . Этот угол определяет один из главных радиусов кривизны R_y . Предположим, что жидкость 2 является смачивающей ($p_2 > p_1$) и выполняется неравенство $R_x \gg R_y \approx \frac{b}{2}$, где b – расстояние между двумя бесконечными и параллельными пластинами. Введём между пластинами из области, находящейся

на $-\infty$, жидкость 2 с постоянной скоростью $\bar{U} = (0, 0, u)$. С такой же скоростью будем отводить жидкость 1 из области, находящейся на $+\infty$. При различии коэффициентов вязкости жидкостей 1 и 2 граница раздела оказывается неустойчивой, что приводит к появлению вязких “пальцев”.

Величину скорости $\bar{U} = (0, 0, u)$ определим из уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности (см. пункт 4.6, стр. 80):

$$\bar{U} = -\mu \nabla P, \quad (8.15)$$

где μ – подвижность, $P = p + \rho g z$, ρ – плотность жидкости 2, g – ускорение свободного падения. Из уравнения неразрывности следует, что скорость движения удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \bar{U} = -\mu \Delta P = 0, \quad (8.16)$$

т.е. уравнению Лапласа $\Delta P = 0$ или $\Delta p = 0$.

Проверка на устойчивость решений полученного уравнения осуществляется в соответствии с процедурой Ляпунова. Синусоидальное возмущение границы раздела вида

$$\delta = A \exp(\omega t + i k x), \quad (8.17)$$

(здесь A – амплитуда возмущения, ω – частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновой вектор, λ – длина волны) либо затухает ($\omega < 0$) с течением времени, либо экспоненциально возрастает ($\omega > 0$). Такой подход фиксирует тенденции в развитии исследуемой ситуации.

Граница раздела будет неустойчивой тогда, когда длина возмущающей волны превысит некоторое критическое значение, т.е. при выполнении условия

$$\lambda \geq \lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_1 \mu_2 \sigma}{(\mu_2 - \mu_1)(u - u_c)}}. \quad (8.18)$$

Волны, не удовлетворяющие неравенству (8.18), будут подавляться поверхностным натяжением границы раздела.

Критическая скорость движения определяется формулой

$$u_c = 2\pi \frac{\mu_1 \mu_2 g (\rho_2 - \rho_1)}{\mu_2 - \mu_1}. \quad (8.19)$$

Возмущения с длиной волны $\lambda_m = \sqrt{3} \lambda_c$ обладают наибольшей скоростью нарастания, которые и определяют рост вязких “пальцев”. Подобие таких физических процессов как ограниченная диффузией агрегация, рост вязких “пальцев”, вытеснение жидкости из пористой среды и других позволяет говорить о дендритном классе универсальности.

8.4. “Чёртовы” лестницы и “языки” Арнольда

The degree of one's emotion varies inversely with one's knowledge of the facts – the less you know the hotter you get.

(Степень эмоциональной реакции обратно пропорциональна знанию фактов – чем меньше вы знаете, тем более бурно реагируете).

Бертран Рассел

Рассмотрим процесс построения однородной “пыли” Кантора (см. пункт 2.1, рис. 2.5, стр. 32) и установим зависимость вероятности обнаружения y точек множества Кантора слева от значения аргумента x длины единичного отрезка на каждом итерационном шаге (табл. 8.1). Из табл. 8.1 видно, что при устремлении количес-

Таблица 8.1.

Функция распределения вероятностей обнаружения точек множества Кантора от их расположения на отрезках.

Первый шаг

Длина отрезка	[0; 1/3]	[1/3; 2/3]	[2/3; 1]	1
Вероятность	[0; 1/2]	1/2	[1/2; 1]	1

Второй шаг

Длина отрезка	[0; 1/9]	[1/9; 2/9]	[2/9; 3/9]	[1/3; 2/3]
Вероятность	[0; 1/4]	1/4	[1/4; 2/4]	1/2
Длина отрезка	[2/3; 7/9]	[7/9; 8/9]	[8/9; 1]	1
Вероятность	[1/2; 3/4]	3/4	[3/4; 1]	1

тва итераций к бесконечности, функция $y(x)$ будет иметь горизонтальные плато почти всюду, но при этом всё-таки будет возрастать от 0 до 1. На рис. 8.7 показан график зависимости $y(x)$ для второго и бесконечного итерационного шага.

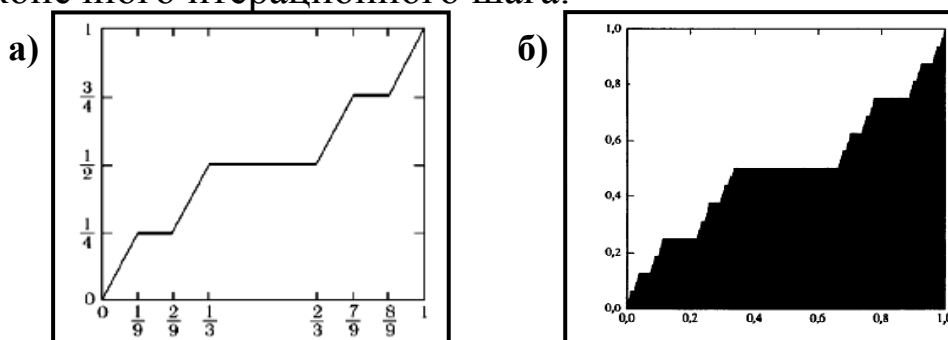


Рис. 8.7. “Чёртова” лестница для множества Кантора на втором (а) и бесконечном (б) итерационных шагах построения.

Удивительное свойство зависимости $y(x)$ иметь бесконечное число разрывов, интервалов постоянства и при этом возрастать от 0 до 1 позволяет назвать график $y(x)$ “чёртовой” лестницей. Для

биномиального мультипликативного процесса, который описывает построение неоднородной “пыли” Кантора, “чёртова” лестница имеет вид близкий к параболическому графику, который изображён на рис. 8.8.

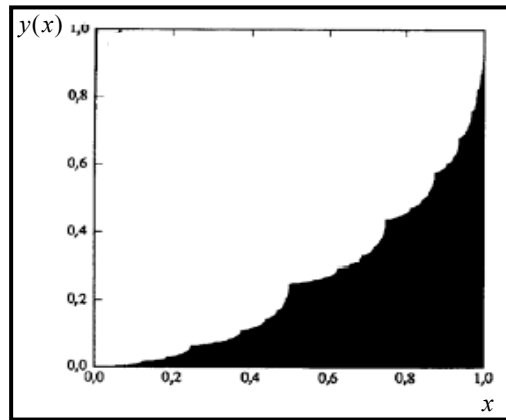


Рис. 8.8. “Чёртова” лестница неоднородной “пыли” Кантора.

“Чёртовы” лестницы играют важную роль при синхронизации двух осцилляторов. Значение функции $y(x)$ определяет отношение частот на всём множестве вещественных чисел, а плато – фиксированное отношение, но на множестве рациональных чисел. Отметим, что в последнем случае наблюдается асимптотическое самоподобие. Рациональное отношение частот соответствует появлению параметрических резонансных явлений, которые приводят к подстройке осцилляторов друг под друга. Именно поэтому это явление получило название *синхронизация мод* (затягивание частоты, синхронизация фаз). В 1812 году такую синхронизацию периодов обращения астероида Паллада и планеты Юпитер открыл Гаусс (отношение составляло $\frac{7}{18}$). Особенность синхронизационного процесса состоит в том, что он предпочитает скачкообразный переход к иному рациональному отношению частот при нарушении первоначального отношения. Частотный диапазон синхронизации тем шире, чем меньшие целые числа стоят в знаменателе и числителе отношения. Интервалы синхронизации обладают высокой степенью универсальности и наблюдаются во многих колебательных системах. В этой связи они моделируются асимптотически самоподобными фрактальными структурами ($D_0 \approx 0,868\dots$).

Явление синхронизации фаз неразрывно связано с критическим отображением окружности самой на себя. Это нелинейное преобразование можно представить в виде итерационного процесса, который описывается уравнением

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n), \quad (8.20)$$

где K – коэффициент нелинейной связи (линейный случай реализуется при $K = 0$), Ω – *формальное число вращения*, определяющее отношение частоты внешней, гармонической, вынуждающей силы к собственной частоте системы. *Реальное число вращения* определяется формулой

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n} \quad (8.21)$$

и задаёт среднее приращение переменного угла θ_n за один итерационный шаг. Такие названия связаны с тем, что в фазовом пространстве портрет динамической системы имеет вид простого (отношение частот определяется иррациональным числом) или резонансного (отношение частот определяется рациональным числом) тора, на меридианы и параллели которого накручиваются фазовые траектории.

При движении динамической системы остаются неизменными некоторые величины (например, действие $I = -\oint \frac{p dq}{2\pi}$), которые называются *адиабатическими инвариантами*. Динамические уравнения можно записать в переменных действие (I)-угол (ϑ), которые задают в фазовом пространстве инвариантный тор (рис. 8.9):

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega(I) \end{cases}, \quad (8.22)$$

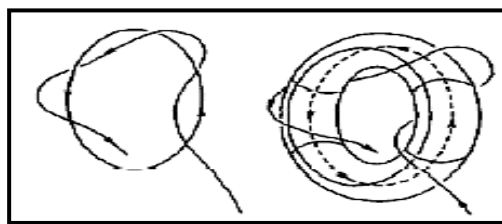


Рис. 8.9. “Рождение” инвариантного тора.

где $\omega(I)$ – круговая частота нелинейных колебаний, H – гамильтониан динамической системы. При медленных возмущениях, вносимых в динамическую систему, действие приблизительно сохраняется. Если действие меняется существенным образом, то могут возникнуть новые гармоники возмущений, которые переведут систему в новое устойчивое состояние, вплоть до возникновения хаотических движений. Следовательно, хаотическое состояние системы характеризуется системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{i} = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} \\ \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial I} \end{cases} \quad (8.23)$$

Если движение динамической системы характеризуется N адиабатическими инвариантами I_k ($k = 1 \div N$), то она имеет N сохраняющихся интегралов движения. Если число интегралов движения будет меньше числа N на величину n , то происходит “разрушение” n адиабатических инвариантов (например, *полная энергия системы не сохраняется* в нелинейных динамических системах и при формировании упорядоченных структур при необратимых процессах). Разрушение интегралов движения должно приводить к разрушению инвариантных торов фазового пространства.

Фазовые траектории на торе описывают квазипериодические колебания. Особенностью инвариантных торов является их зависимость от количества интегралов движения. При $N = 2$ торы вложены один в другой и делят фазовое пространство между собой. Разрушенные инвариантные торы оказываются плотно зажатыми между устойчивыми торами (рис 8.10), поэтому возмущения фазо-

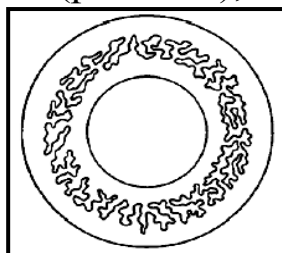


Рис. 8.10. При $N = 2$ разрушенные торы зажаты между устойчивыми торами.

вой траектории в такой области ограничены (*слабый хаос*). При количестве интегралов движения $N > 2$ торы пересекаются и разрушенные торы образуют сложную сетку каналов (“паутину”), по которым фазовая траектория начинает “гулять” по всему фазовому пространству (*сильный хаос*) и может уйти сколь угодно далеко от исходного состояния (*диффузия Арнольда*). Причина возникновения слабого и сильного хаосов состоит в следующем. Поверхность постоянной энергии в пространстве с $2N$ измерениями имеет размерность $2N - 1$, а её граница — $2N - 2$. Если торы делят фазовое пространство, то их размерность должна удовлетворять неравенству $N \geq 2N - 2$, отсюда находим, что $N \leq 2$. Следовательно, при конечном значении числа N всегда существуют конечные по размеру (пусть даже не очень большие) области фазового пространства, в кото-

рых движение динамической системы будет детерминированным, а уравнения движения обратимыми во времени.

Формальное число вращения задаёт движение по простому, а реальное число вращения – по резонансному торам. Для линейного случая ($k = 0$, синхронизация отсутствует) эти числа совпадают и инвариантным тором является резонансный тор, поэтому система подчиняется детерминированному поведению. При значении параметра $k = 1$ происходит критическое отображение окружности самой на себя, при этом область синхронизации покрывает практически весь интервал частот Ω , за исключением точек множества Кантора. Этот факт и отражает “чёртова” лестница. Области синхронизации получили названия “языков” Арнольда, которые показаны на рис. 8.11.

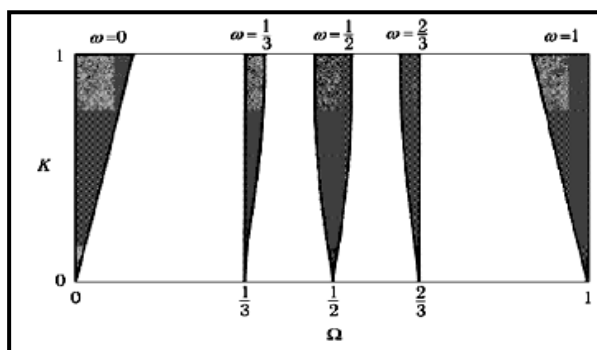


Рис. 8.11. “Языки” Арнольда.

При малых значениях итерационного угла θ_n ($\theta_n \rightarrow 0$) критическое преобразование окружности описывается кубической зависимостью вида

$$\theta_{n+1} = \Omega - \frac{2\pi^2}{3} \theta_n^3, \quad (8.24)$$

Уравнение (8.24) описывает поведение динамических систем с нечётной (несимметричной) нелинейностью, поэтому такие системы образуют свой подкласс универсальности.

При значениях параметра $k > 1$ “языки” Арнольда начинают перекрываться, а система начинает совершать сложные колебания, соответствующие возникновению хаотических движений (например, аттракторы Лоренца и Рёсслера). В этом случае при увеличении числа итерационных шагов до бесконечности числа вращений стремятся к золотому сечению (см. Главу 4, стр. 65).

Мультифрактал, состоящий из точек, которые соответствуют иррациональным значениям формального числа вращения, имеет спектр размерностей в диапазоне от $D(-\infty) \approx 0,924$ до $D(+\infty) = 0,5$.

Глава 9. Фракталы и кластеры

Если я рассуждаю логично, это значит только то, что я не сумасшедший, но вовсе не доказывает, что я прав.

И.П. Павлов

Диффузионный процесс базируется на случайном блуждании частиц, которые могут достигнуть любой точки среды. При протекании (перколяции) существует критический порог, ниже которого перколяционный процесс затухает. Например, для квадратной решётки критическая вероятность протекания от узла к узлу составляет $p_c = 0,59725$. При выполнении условия $p < p_c$ процесс блуждания частиц по узлам квадратной решётки происходит в ограниченной области квадратной решётки без её протекания. Теория перколяции применима к просачиванию жидкости в трещины, к распространению и взаимодействию трещин в различных материалах, к распространению эпидемий, лесных пожаров и другим аналогичным процессам. Схожесть диффузионного перемещения и процесса протекания зачастую приводит к их смешению. Это связано с тем, что они являются стохастическими процессами, т.е. базируются на случайных блужданиях частиц. При диффузионном перемещении частица может достигать любой точки среды. В отличие от диффузии перколяционный процесс начинается при достижении *порога протекания*. До достижения порога перколяции блуждающим частицам доступна лишь ограниченная часть системы. Наиболее ярко схожесть диффузии и перколяции проявляется при исследовании диффузии от источника вещества. Подвижная граница распространения вещества имеет такую же структуру, что и фрактальная геометрия перколяционного кластера, что и является причиной их частичного совпадения.

Для иллюстрации процесса протекания рассмотрим плоскую квадратную решётку, узлы которой независимо друг от друга с одной и той же вероятностью p занимают некоторые объекты (атомы, деревья или другие элементы) или не занимают с вероятностью $q = 1 - p$ (рис. 9.1). Обычная постановка перколяционной задачи состоит в отыскании непрерывного канала от нижней части решётки к её верхнему краю (от выбранного нижнего узла через соседние занятые узлы). Если такой путь существует, то говорят, что решётка *протекает* или *перколирует* (“percolate” (латынь) – течь насквозь, протекать, см. также пункт 1.2, стр. 22).



Рис. 9.1. Протекание по квадратной решётке при достижении порога перколяции.

Помимо протекания по узлам рассматривают также перколяцию по связям. Для такой задачи все узлы считаются занятыми, а между ближайшими соседними узлами с вероятностью p возникают связи, или они не возникают с вероятностью $q=1-p$. Непрерывный путь отыскивается не по узлам решётки, а по имеющимся между узлами связям. Порог перколяции по связям для бесконечной квадратной решётки установлен точно и равен $p_c=0,5$. Если создать квадратную решётку из сопротивлений (резисторов) и пропустить электрический ток, то он будет течь только по определённому пути. Резисторы, образующие путь для прохождения электрического тока, называются *остовом кластера*, а остальные – *болтающимися связями*.

Достижение системой порога перколяции приводит к образованию кластеров всевозможных масштабов, т.е. возникающий перколяционный объект обладает мультифрактальными свойствами. Если число кластеров, расположенных на ε узлах, равно $n(\varepsilon)$, то они связаны между собой степенным законом $n(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-\tau}$, где показатель степени для квадратной решётки $\tau = \frac{187}{91}$. Самоподобие перколяционных кластеров наблюдается в масштабах от одного шага до размеров всей квадратной решётки. Ниже порога протекания верхней границей масштаба перколяционного объекта является корреляционная длина ξ . На масштабах $l < \xi$ узлы решётки образуют монофрактал, в противном случае – геометрия объекта евклидова. В критической области корреляционная длина становится бесконечной, поэтому даже два узла решётки, как бы далеко они не располагались друг от друга, принадлежат к одному и тому же кластеру. Корреляционная размерность перколяционного мультифрактала равна $D = \frac{91}{48} \approx 1,9$. Она связана с показателем степени $\tau = \frac{187}{91}$ очевидным

соотношением $\frac{2}{D} = \tau - 1$.

Реальные физические объекты и процессы всегда имеют природный масштаб: на микроуровне им является радиус атомов или молекул (частиц, мономеров) r , а на макроуровне – радиус сферы (окружности) R , внутрь которой можно поместить объект целиком или область наблюдаемого процесса. В этой связи возникает необходимость покрытия кластеров мономерами. В Главе 6 (пункт 6.2, стр. 106 и пункт 6.3, стр. 115) рассматривались различные фигуры покрытия плоскости и пространства, одной из которых является шар (метод Фуллера). Шарами можно плотно упаковать линию без самопересечений, окружность, сферу (рис. 9.2) и другие геометри-

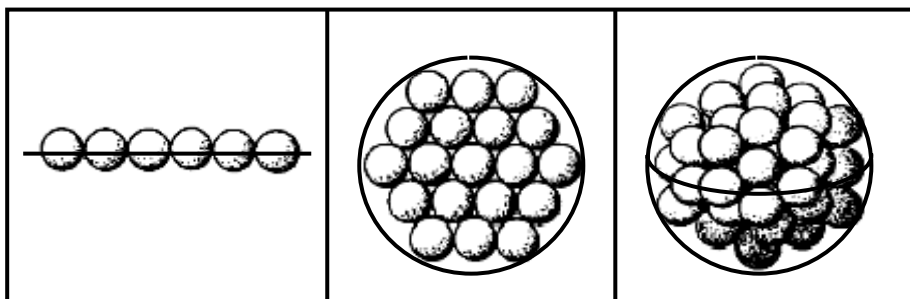


Рис. 9.2. Плотная упаковка шарами различных геометрических фигур.

ческие фигуры. Если радиус R внешней сферы (кластера) значительно превышает радиус r мономеров, то число шаров $N(R)$, необходимых для покрытия кластера определяется по формуле

$$N(R) = \rho \left(\frac{R}{r} \right)^D, \quad (9.1)$$

где ρ – плотность частиц в однородном кластере с фрактальной или евклидовой размерностью D . Для неоднородного фрактального кластера плотность зависит от расстояния до начала отсчёта и с ростом этого расстояния быстро убывает по степенному закону. В случае плотной упаковки однородного фрактального кластера шарами плотность мономеров $\rho = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,7405$, а для их случайной упа-

ковки она снижается до величины $\rho \approx 0,637$. Помимо фрактальной размерности для количественной характеристики кластера используется *разветвлённость*, как мера того количества связей, которые надо разорвать, чтобы отделить произвольно большую часть данного кластера.

Для пояснения метода упаковки Фуллера рассмотрим покрытие кривой Коха (см. пункт 2.2, стр.33) мономерами первого итера-

рационного шага её построения (рис. 9.3). На n -ом шаге построения

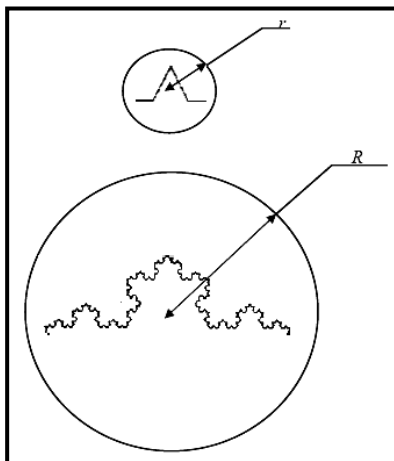


Рис. 9.3. Покрытие мономерами триадной кривой Коха.

ния кластер Коха состоит из $N(R) = 4^n$ мономеров и имеет размер $R = 3^n r$ при постоянной плотности $\rho = 1$. По формуле (9.1) вычислим фрактальную размерность этого кластера:

$$4^n = 1 \cdot \left(\frac{3^n r}{r} \right)^D \Rightarrow D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618. \quad (9.2)$$

Фрактальная размерность D определяет порядок заполнения кластером занимаемого пространства, но не описывает его геометрическую форму. Кроме того, следует остерегаться считать природный объект фракталом или мультифракталом, основываясь только на его случайности или пористости.

Кластеры возникают при ограниченной диффузией агрегации и электроосаждении металлов из растворов (для плоского случая $D=1,71$, а в пространстве $D=2,5$). Например, в плоскости растут кластеры листка цинка ($D \approx 1,63$) и коллоидного золота ($D \approx 1,7 \div 1,79$); в трёхмерном пространстве растут кластеры меди ($D \approx 2,43$), протеинов иммуноглобулина типа **IgG** ($D \approx 2,56$), коллоидного кварца и его аэрогелей ($D \approx 2,4 \div 2,55$).

Общей чертой кластеров, возникающих в результате реализации различных физических процессов, является тот факт, что эти процессы описываются уравнением Лапласа для концентрации частиц, давления и температуры. Уравнение Лапласа описывает стационарное, но неоднородное распределение перечисленных величин. В агрегационных, перколяционных и им подобных кластерах присутствуют вакансии всех масштабов: от самых маленьких до совместимых с размером кластера. Кроме того, кластеры разных размеров самоподобны по их виду.

9.1. Возникновение кластеров при протекании

Никогда не замечаешь того, что сделано: видишь только то, что осталось сделать.

Мария Складовская-Кюри

Пусть равное количество частиц и вакансий (пор) распределены по квадратной решётке со стороной L , причём соседние поры соединены капиллярными каналами (слева, справа, снизу и сверху). Вероятность обнаружения поры в наугад выбранной точке решётки равна $p=0,5$. На рис. 9.4 поры отображены белыми и чёрными точками. Белыми точками на рис. 9.4 отмечен самый большой кластер из пор. Из рис. 9.4 видно, что в этом случае протекание не

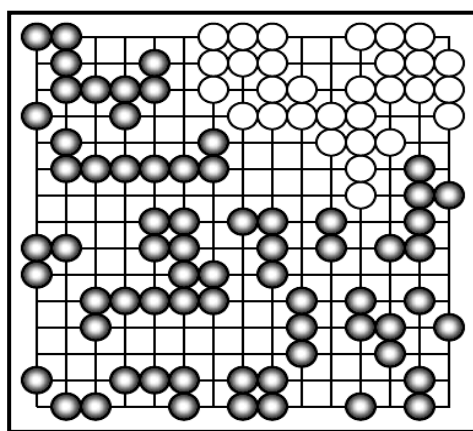


Рис. 9.4. Распределение по квадратной решётке с размером стороны $L=14$.

наблюдается, так как отсутствует непрерывный путь между нижней и верхней сторонами квадрата. Если в наугад выбранной точке квадратной решётки, принадлежащей кластеру из пор, ввести жидкость, то она займёт лишь ограниченную область, покрытую этим кластером. Увеличение количества вакансий в решётке приводит к росту вероятности p и к изменению площади, занимаемой кластерами. Быстрее других будут расти большие вакансионные кластеры, а самой большой скоростью роста будет обладать кластер, отмеченный белыми точками. При критическом значении вероятности p_c он простирается на всю решётку и называется *перколяционным кластером*. Помимо вероятности p для характеристики исследуемого процесса вводят *вероятность протекания* $P_n(p)$, которая оценивается отношением числа узлов $n(L)$, которые принадлежат самому большому (*предперколяционному*) кластеру, к площади L^2 (или объёму L^3) решётки.

При малых значениях аргумента p функция $P_n(p)$ также мала.

Приближение вероятности p к её критическому значению p_c сопровождается резким ростом вероятности протекания $P_n(p)$. Дальнейший рост меры p до единицы приводит к линейному закону изменения вероятности протекания, т.е. при выполнении неравенств $p > p_l > p_c$ её можно представить в виде линейной функции вида

$$P_n(p) = Ap + 1 - A \quad (A \approx 1,25).$$

Схематичный график функции $P_n(p)$ представлен на рис. 9.5.

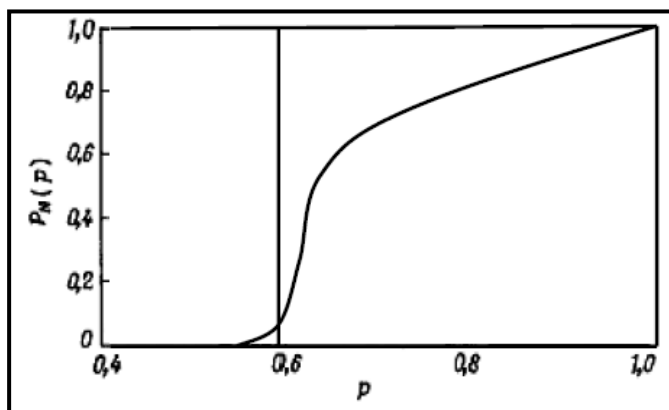


Рис. 9.5. Зависимость вероятности протекания $P_n(p)$ от вероятности обнаружения p поры в наугад выбранном узле квадратной решётки.

Рассмотрим бесконечную квадратную решётку. Предперколяционный кластер будет содержать бесконечно много узлов. Тогда вероятность бесконечного протекания ($P_\infty(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(p)$) вблизи порога перколяции задаётся формулами

$$P_\infty(p) = \begin{cases} 0, & p \leq p_c \\ (p - p_c)^\beta, & p > p_c \end{cases}, \quad (9.3)$$

где критический индекс $\beta \approx 0,14$ для двумерной и $\beta \approx 0,4$ для трёхмерной квадратных решёток. Формула (9.3) отображает тот факт, что вблизи порога перколяции происходит скачок вероятности бесконечного протекания. С физической точки зрения это означает, что решётка испытывает фазовый переход: состояние локальных связей заменяется на состояние глобального каналирования. Этот переход аналогичен преобразованию магнитной системы при снижении температуры до температуры Кюри (критическая температура T_c). Выше критической температуры упорядочение магнитных моментов наблюдается только в локальных областях. Ниже температуры Кюри упорядочение распространяется на всю решётку и приводит к образованию магнита с южным и северным полюсами. Исследуем перколяционный процесс вблизи его порога.

9.2. Распределение кластеров при критической перколяции

Полезно время от времени ставить знак вопроса на вещах, которые тебе давно представляются несомненными.

Джеймс Рассел Лоуэлл

Компьютерные исследования показали, что зависимость числа узлов $n(L)$, которые принадлежат самому большому кластеру, от линейного размера решётки L имеет вид:

$$n(L) = \begin{cases} \ln L, & p < p_c \\ L^D, & p = p_c \\ L^{D_E}, & p > p_c \end{cases} \quad (9.4)$$

где D_E – размерность евклидова пространства. Из формулы (9.4) видно, что на пороге протекания перколяционный кластер в двумерной решётке представляет собой фрактальную структуру с размерностью $D \approx 1,89$, которая близка к размерности $D_E = 2$. На рис. 9.6 показана кривая Мандельброта-Гивена, которая является хорошей моделью перколяционного кластера и имеет размерность $D \approx 1,89$. На

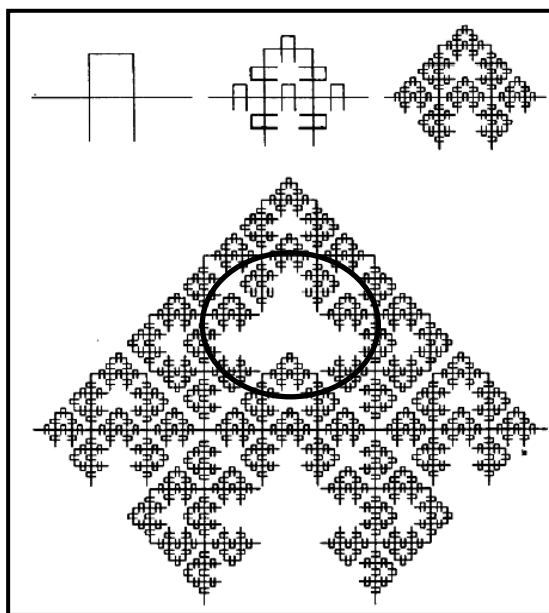


Рис. 9.6. Моделирование кластера протекания с помощью кривой Мандельброта-Гивена.

рис. 9.6 эллипсом выделено множество занятых частицами узлов, которое по своему виду напоминает множество Мандельброта (см. пункт 5.2, стр. 90). Кроме того, этот рисунок хорошо отображает самоподобие перколяционного кластера вблизи критического порога.

Объединение двух или трёх соседних узлов, занятых порами, в новый сверхузел асимптотически порождает тот же кластер в но-

вом масштабе измерения (см. пункт 1.2, стр. 22-23). Представленное в пункте 1.2 ренормализационное преобразование имеет две тривиальных неподвижных точки $p=0$ и $p=1$, а также одну нетривиальную – $p=p_c$. Функция преобразования имеет вид $f(p)=3p^2-2p^3$, а её первая производная $f'(p)=0$ для всех значений p из интервала от 0 до 1, следовательно, указанные неподвижные точки являются аттракторами перколяции. Двукратное применение ренормализационной процедуры приводит к полному совпадению масштабируемого фрагмента решётки с исходной решёткой. Перколяционный кластер и кластер после скейлингового преобразования являются равновероятными реализациями процесса протекания. Это, в свою очередь, указывает на однородность функции $n(L)$ при увеличении (или уменьшении) решётки в k раз, т.е. выполняется равенство

$$n(L) = k^D n\left(\frac{L}{k}\right). \quad (9.5)$$

Однородность функции $n(L)$ приводит к её единственной реализации в виде степенного закона $n(L) \approx L^D$, что и отражает факт фрактальности кластера протекания.

Самоподобие кластера перколяции приводит к тому, что в его “дырах” располагаются такие же кластеры всевозможных размеров. Число узлов s в перколяционном кластере и его размер имеют характерные распределения. Порог протекания определяется распределением кластеров по размерам, которое не имеет характерного размера и поэтому должно описываться степенным законом.

Средний квадратичный радиус (*радиус гирации*) кластера, измеряемый от центра тяжести, определяется формулой

$$R_g^2(s) = \frac{1}{2s^2} \sum_{i,j} (r_i - r_j)^2. \quad (9.6)$$

Число узлов s в перколяционном кластере и радиус гирации также связаны степенным соотношением $s \approx R_g^D$. Усредняя величину (9.6) по размерам кластеров и извлекая из полученного выражения квадратный корень, получим корреляционную длину или длину связности

$$\xi = \sqrt{\langle R_g^2(s) \rangle}. \quad (9.7)$$

Вблизи порога протекания корреляционная длина имеет сингулярность, которая приводит к появлению перколяционного кластера.

Изложенный материал показывает, что самоподобие кластеров приводит к степенным зависимостям, однако не всякий показатель степени можно считать фрактальной размерностью. Многие из степенных показателей могут быть выражены через фрактальную D и евклидову D_E размерности.

9.3. Проникание в решётку с вытеснением

The whole problem with the world is that fools and fanatics are always so certain of themselves, but wiser people so full of doubts.

Вся проблема этого мира в том, что дураки и фанатики всегда уверены в себе, а умные люди полны сомнений.

Бертран Рассел

При заполнении пор решётки несжимаемой жидкостью одного вида (например, маслом) перколяция жидкости другого типа (например, воды) возможна только способом вытеснения первой жидкости (Уилкинсон, Виллимсен (1983)). Эксперимент показывает, что вытеснение одной жидкости другой происходит *только по остову перколяционного кластера*. Остов кластера включает всевозможные траектории случайного блуждания по решётке, которые приводят к протеканию, за исключением тупиковых путей. Тупиковые пути заканчиваются в обособленных ветвях. Поры, которые связаны с кластером одним капиллярным каналом, называются *обособленными ветвями* (рис. 9.7).

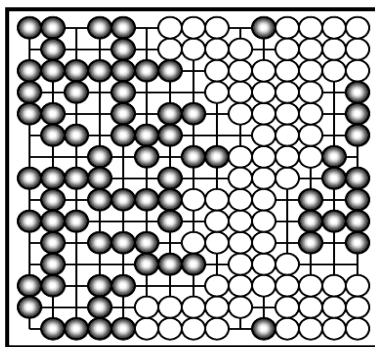


Рис. 9.7. Перколяционный кластер: остов (○) и обособленные ветви (●).

Если перерезать единственный капиллярный канал соединения, то обособленная ветвь теряет связь с кластером. Вторая жидкость не может протечь внутрь обособленной ветви, так как первая жидкость не может переместиться в какую-либо другую пору (тупик для протекания). Самонепересекающиеся траектории случайного блуждания не могут закончиться в обособленной ветви, так как в этом случае пришлось бы дважды пройти по тупиковому пу-

ти, а это невозможно из-за самонепересечения. Отметим, что число узлов в остове всегда меньше числа узлов в кластере на количество пор в обособленных ветвях. Процесс вязкого вытеснения второй жидкости подобен процессу образования вязких “пальцев”, который описывается лапласовским уравнением (8.16) для давления (см. пункт 8.3, стр.148) совместно с определёнными граничными условиями.

Экспериментальными и теоретическими исследованиями было установлено, что на пороге перколяции вытеснение практически полностью определяется геометрией кластера протекания и оно не зависит от таких физических характеристик, как поверхностное натяжение и смачиваемость. Фрактальная форма остова перколяционного кластера вытеснения зависит от расположения источника первой жидкости (точки (точек) впрыскивания) и стока второй жидкости (точки (точек) вытекания). Его размерность меньше или равна размерности кластера протекания ($D_0 \approx 1,62 \leq D \approx 1,89$). Таким образом, процесс вязкого вытеснения выделяет фрактальное подмножество узлов из перколяционного кластера в виде остова вытеснения. Размерность остова определяется как физическими свойствами вытесняющей жидкости, так и геометрической структурой пор и капиллярных каналов.

Процесс вытеснения реализуется путём противоборства между поверхностными и вязкими силами в масштабе отдельно взятой поры. Перколяционный процесс вытеснения характеризуется сохранением разности давлений между жидкостями

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{2\sigma \cos \theta}{r}, \quad (9.8)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, θ – угол смачивания жидкостью поверхности поры, r – радиус кривизны поры в месте контакта двух жидкостей. Капиллярные силы велики в узких каналах, поэтому вытесняющая жидкость движется быстро по таким путям и тормозится внутри крупных пор.

Отличие обычного протекания от перколяции с вытеснением состоит в том, что вытесняющая жидкость всегда выбирает узкие горловины, т.е. движется лишь по остову перколяционного кластера. При стандартном перколяционном процессе протекающая жидкость заполняет не только остов, но и обособленные ветви.

9.4. Фрактальный диффузионный процесс

В любой науке, в любом искусстве лучший учитель
– опыт.

Мигель де Сервантес Сааведра

В случае диффузии от источника граница концентрационных изменений имеет такую же фрактальную структуру, как и перколяционный кластер. Пусть на решётке, протяжённой вдоль оси абсцисс и имеющей ширину L , помещён источник вещества, который вводит новые порции частиц. В течение промежутка времени τ введённая частица совершает скачок в один из соседних четырёх узлов, которые удалены от источника на постоянную решётки a . Согласно модели Эйнштейна (см. пункт 4.1, формулу (4.4), стр. 68), коэффициент диффузии определяется равенством $\mathcal{D} = \frac{a^2}{2\tau}$. Будем

считать независимыми перемещения блуждающей частицы вдоль обеих координатных осей. Это приводит к тому, что средние квадраты смещений частиц от первоначального положения вдоль координатных осей равны между собой:

$$\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = \langle [y(t) - y(0)]^2 \rangle = 2\mathcal{D}t. \quad (9.9)$$

Тогда квадрат длины диффузионного пробега частицы за время t будет равен

$$l^2 = \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle + \langle [y(t) - y(0)]^2 \rangle = 4\mathcal{D}t = 2a^2 \frac{t}{\tau}. \quad (9.10)$$

В случае линейного источника вероятность обнаружения частицы на расстоянии x от источника определяется формулой

$$p(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/l} e^{-u^2} du, \quad (9.11)$$

близка к единице у источника и быстро убывает при увеличении расстояния от источника. Следовательно, в зафиксированный момент времени диффузионный фронт будет иметь такой же вид, что и граница растущего перколяционного кластера. В силу того, что вероятность в некоторой окрестности источника превышает порог протекания $p_c = 0,59725$, то происходит перколяция частиц по узлам решётки. Одновременность реализации перколяционного процесса и диффузии в указанной области приводит к фрактальному виду границы диффузионного распространения вещества по решётке. Вдали от источника вероятность $p(x) < p_c$, что приводит к затуханию протекания и к образованию изолированных кластеров. Нали-

чие двух различных явлений приводит к формированию границы между областями, которая была названа “скорлупой” источника. На рис. 9.8 показана “скорлупа” источника (пунктирная линия, сам источник отображён в виде \odot), которая отделяет область, где частицы диффундируют и перколируют (\circ), от области, где случайные блуждания частицы описываются как диффузия (\bullet).

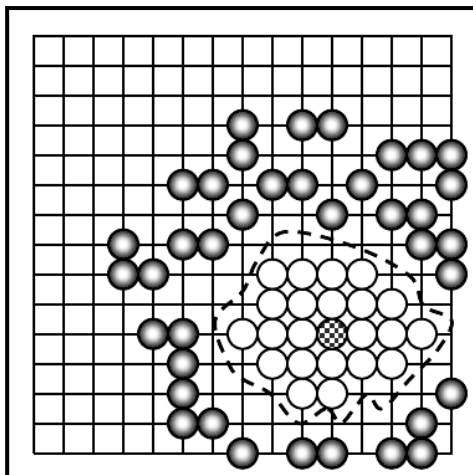


Рис. 9.8. Диффузионно-перколяционная и чисто диффузионная зоны.

Очевидно, что каждой точке скорлупы соответствует критическое значение $p_c = 0,59725$. Скорлупа источника вещества является фрактальной фигурой с размерностью $D_s \approx 1,75$. Так как она отделяет области смешанных и чистых процессов, т.е. является отражением эволюционной динамики системы, то её структура имеет довольно сложный вид. В одних частях скорлупы наблюдается избыток частиц (“острова”), а в других – их недостаток (“озёра”). Характерный размер этих образований совпадает с корреляционной длиной, которая описывается степенным законом

$$\xi = \xi_0 |p(x) - p_c|^{-4/3}. \quad (9.12)$$

Скорлупа также характеризуется внешней границей. Под *внешней границей* понимается совокупность занятых частицами узлов, которые принадлежат диффузионно-перколяционному кластеру и которые может достичь частица из диффузионной зоны. Эта характеристика является наиболее важной при изучении абсорбции атомов и молекул на различных поверхностях. Фрактальная размерность внешней границы определена точно и равна $D_b = 4/3$. Таким образом, диффузионный фронт имеет сложное внутреннее строение и представляет собой мультифрактальное множество на макроскопическом уровне, несмотря на микроскопический характер случайных блужданий.

Глава 10. Фрактальные временные ряды

Лучший способ ознакомиться с каким-либо предметом – написать книгу о нём.

Бенджамин Дизраэли

Многие природные объекты либо обладают сложной для анализа структурой, либо исследование их состояний невозможно по ряду причин (например, человеческий мозг, “чёрные дыры”, котировка валют на бирже, многовековые изменения климата и т.п.). О структуре и состоянии таких систем можно судить только по тем сигналам $x(t)$, которые они испускают (поглощают) (рис. 10.1).

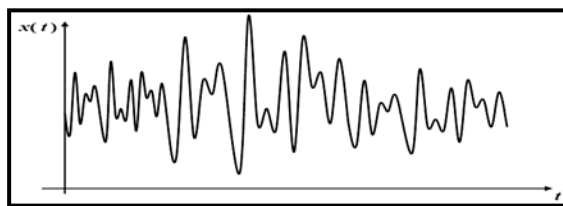


Рис. 10.1. Самоподобный временной ряд.

Записанный сигнал разобьём на N равных частей и представим в виде последовательности отрезков, которые разделены равноотстоящими точками $x_k(t) = x(t + k\tau)$, где τ – временной интервал дискретизации. Анализ последовательности $x_k(t)$ должен ответить на следующие вопросы:

- является ли сигнал обычным шумом или несёт информацию об устройстве системы?
- характеризуется ли сигнал евклидовой или фрактальной размерностями?
- если сигнал отображает динамическую систему, то надо определить:

- а) сколько независимых переменных требуется для описания её состояния?
- б) сколько аттракторов, слиперов и репеллеров содержит фазовый портрет системы?
- в) каковы их геометрическое строение и фрактальная размерность?
- г) какие из перечисленных точек и областей отвечают за испущенный сигнал?
- д) какие процессы протекают в системе (детерминированные или случайные)?
- е) можно ли сконструировать модель (непрерывную или дискретную) для отображения системы?

ё) существуют ли способы управления геометрической и динамической структурой исследуемого объекта?

Если геометрическое изображение набора точек $x_k(t)$ лишено какой-либо структуры, то сигнал является флуктуационным или случайным шумом (рис.10.2а). Определение каких-либо закономерностей

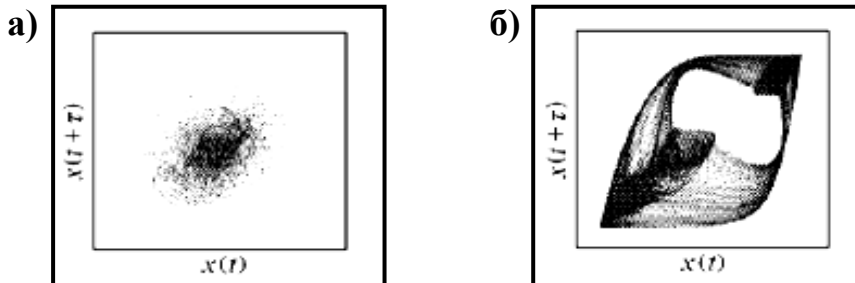


Рис. 10.2. Случайный (а) и детерминированный (б) сигнал.

стей в этом случае затруднительно и требует привлечения теории вероятностей, математической статистики и корреляционного анализа. В противоположном случае точки чётко демонстрируют динамику процессов, протекающих в системе (рис. 10.2б).

Отыскание по виду сигнала дискретного отображения или системы дифференциальных уравнений, которые описывают процессы, порождающие тот или иной сигнал, является весьма трудоёмкой задачей. Решение этой задачи даст возможность как управления внутренними процессами (особенно систем с хаотической динамикой), так и эффективного прогноза поведения систем при изменении внешних и внутренних параметров порядка. Вследствие этого продолжают настойчивые попытки реконструкции уравнений динамики как с чисто математических позиций, так и с привлечением физических гипотез.

Физико-математическая модель системы учитывает следующие факторы: внутреннее строение системы (наличие неупорядоченных и упорядоченных областей, внутреннюю и внешнюю геометрию и т.д.); глобальное и локальное взаимовлияние элементов друг на друга; конфигурации расположения элементов внутри изучаемого объёма; стремление компонент системы к смешению или разделению и т.п. Универсальность физико-математического отображения реальных объектов приводит к выделению некоторых моделей, которые описывают поведение систем с разных уровней организации материи. Одной из таких математических моделей является анализ фрактальных временных рядов на базе метода нормированного размаха или метода Херста.

10.1. *Эргодичность стационарных случайных процессов*

Такова сила истины: вы пытаетесь её опровергнуть, но сами ваши нападки возвышают её и придают ей большую ценность.

Галилео Галилей

Развивающийся во времени случайный процесс $X(t)$ характеризуется тем, что до проведения эксперимента неизвестен ни вид сигнала, ни его параметры: амплитуда, частота и фаза. Он представляется в виде бесконечного ансамбля реализаций $\{x(t_i)\}$ ($i=1 \div \infty$), полученного в момент времени t . Фиксация набора реализаций при $t=t_1$ даёт одномерное сечение процесса $X(t)$. Если процесс $X(t)$ отображает изменения непрерывной случайной величины, то её можно описать с помощью плотности вероятности $p(x(t); t)$. Тогда вероятность того, что случайная величина $X(t)$ примет значение из интервала $[x; x+dx]$ в момент времени t , равна

$$dP = p(x(t); t) dx. \quad (10.1)$$

Знание вида плотности вероятности $p(x(t); t)$ недостаточно для выяснения эволюции процесса $X(t)$. Гораздо больше информации дают два сечения процесса $X(t)$, найденные в последовательные моменты времени t_1 и t_2 . В этом случае случайная величина $X(t)$ описывается двумерной плотностью вероятности $p(x(t_1); x(t_2); t_1; t_2)$. Эта функция не должна зависеть от порядка следования реализаций $x(t_1)$ и $x(t_2)$ (*перестановочная симметрия*). Предположим, что реализации $x(t_1)$ и $x(t_2)$ *статистически независимы*. Тогда плотность вероятности двумерного сечения представляется в виде произведения одномерных плотностей вероятности для каждого сигнала:

$$p(x(t_1); x(t_2); t_1; t_2) = p(x(t_1); t_1) \cdot p(x(t_2); t_2). \quad (10.2)$$

При решении многих практических задач не требуется знание вида функции нескольких переменных $p(x(t_1); x(t_2); t_1; t_2)$, а достаточно вычислить числовые параметры распределения, которому подчиняется случайная величина $X(t)$. Такими числовыми характеристиками являются начальные и центральные моменты одномерных сечений (математическое ожидание $M[X(t)]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X(t)]$), а также двумерный центральный момент (функция корреляции $K[X(t_1); X(t_2)]$). При их вычислении проводится *усреднение по ансамблю реализаций* (черта сверху над соответс-

твующими величинами):

$$M[X(t)] = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p(x(t), t) dx(t); \quad (10.3)$$

$$\sigma[X(t)] = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \{x(t) - M[X(t)]\}^2 p(x(t), t) dx(t)} = \sqrt{\{x(t) - M[X(t)]\}^2}; \quad (10.4)$$

$$K[X(t_1); X(t_2)] = \overline{\{x(t_1) - M[X(t_1)]\} \{x(t_2) - M[X(t_2)]\}} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \{x(t_1) - M[X(t_1)]\} \{x(t_2) - M[X(t_2)]\} p(x(t_1), x(t_2), t_1, t_2) dx(t_1) dx(t_2). \quad (10.5)$$

Функция корреляции $K[X(t_1); X(t_2)]$ характеризует степень статистической зависимости между случайными процессами $X(t_1)$ и $X(t_2)$ в моменты времени t_1 и t_2 . Совмещение одномерных сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$ приводит к совпадению корреляционной функции с квадратом среднего квадратического отклонения значений сигнала $x(t)$ от его наиболее вероятного значения $M[X(t)]$:

$$K[X(t_1); X(t_2)] \Big|_{t_1=t_2=t} = \sigma^2[X(t)]. \quad (10.6)$$

Параметры (10.3)-(10.5) являются функциями времени, следовательно, они описывают эволюцию случайного процесса $X(t)$. Если функция $p(x(t_1); x(t_2); t_1; t_2)$ инвариантна (сохраняется и не меняется с течением времени) относительно временного сдвига на величину ξ , т.е. выполняется равенство

$$p(x(t_1); x(t_2); t_1 + \xi; t_2 + \xi) = p(x(t_1); x(t_2); t_1; t_2), \quad (10.7)$$

то говорят о *стационарности* случайного процесса в узком смысле. Пусть математическое ожидание $M[X(t)]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X(t)]$ являются константами, а функция корреляции (10.6) зависит только от модуля разности времён одномерных реализаций $\tau = |t_2 - t_1|$, т.е. $K[X(t_1); X(t_2)] = K(\tau)$. В этом случае говорят о *стационарности* случайного процесса в широком смысле. Отметим, что из *стационарности* случайного процесса в узком смысле следует *стационарность* случайного процесса в широком смысле, но не наоборот. Функция $K(\tau)$ является чётной ($K(\tau) = K(-\tau)$) и ограниченной ($|K(\tau)| \leq \sigma^2 = K(0)$) функцией своего аргумента. В практических расчётах используют также нормированную корреляционную функцию $\mathcal{R}(\tau) = K(\tau)/\sigma^2$ ($\mathcal{R}(0) = 1$), которая по своему определению близка

к нормированному размаху R/σ_τ в модели Херста.

Стационарный случайный процесс будем называть *эргодическим*, если при вычислении характеристик (10.3)-(10.5) усреднение по ансамблю реализаций заменяется усреднением по времени (используются угловые скобки $\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \dots dt \right)$). Формулы (10.3)-(10.5)

принимают вид

$$M[X(t)] = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right) = m; \quad (10.8)$$

$$\sigma = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - M[X(t)]\}^2 dt \right)} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle - m^2}; \quad (10.9)$$

$$K(\tau) = \langle \{x(t) - m\} \{x(t+\tau) - m\} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \right) - m^2. \quad (10.10)$$

Из (10.9) видно, что среднее значение квадрата реализации определяется постоянными числовыми характеристиками – математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ :

$$\langle x^2(t) \rangle = \sigma^2 + m^2. \quad (10.11)$$

Сильным достаточным условием эргодичности *стационарности* случайного процесса в широком смысле является условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau) = 0, \quad (10.12)$$

а более слабым – условие Слущкого (условия *перемешиваемости*)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T K(\tau) d\tau \right) = 0, \quad (10.13)$$

которое, в частности, справедливо для гармонического сигнала со случайной начальной фазой. Для статистически независимых сигналов (см. формулу (10.2), стр. 168) функция корреляции равна нулю для любых промежутков времени $\tau = |t_2 - t_1|$, поэтому такие сигналы эргодические. Верно и обратное утверждение: из эргодичности сигналов, которые испускает система во внешнюю среду, следует их нескоррелированность.

Уравнение (10.12) показывает уменьшение значения функции корреляции с ростом времени τ . Скорость убывания этой функции характеризует величину ослабления статистической связи между значениями случайного сигнала в два различных момента времени. Числовой характеристикой, определяющей диапазон существования корреляционной “пружины” между прошлым и будущим, яв-

ляется время корреляции. Оно вычисляется по формуле

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |\mathcal{R}(\tau)| d\tau \quad (10.14)$$

и даёт время, в течение которого возможен вероятностный прогноз поведения случайного сигнала в будущем. Любая попытка предсказать характер изменений случайного процесса для времени $\tau > \tau_k$ обречена на провал: столь далеко отстоящие во времени мгновенные значения случайного сигнала практически нескоррелированы, так как функция корреляции (10.10) быстро убывает до нуля.

10.2. Закон Херста

Ум человека можно определить по тщательности, с которой он учитывает будущее и исход дела.

Георг Кристоф Лихтенберг

В пункте 4.2 (стр. 69) была продемонстрирована самоаффинность сигнала, который был получен от перемещения броуновской частицы вдоль оси абсцисс. Движение броуновской частицы можно рассматривать, как процесс Маркова, при котором систему не “интересует” её прошлое и не “беспокоит”, что будет в будущем. Для описания поведения систем с “памятью” используют модель обобщённого броуновского движения (см. пункт 4.3, стр. 70). Такие системы обладают свойствами пренебрежения (антиперсистентность) или сохранения (персистентность) тенденциями развития, возникающими в системе.

Пусть приращение сигнала $\Delta X = x(t_2) - x(t_1)$, полученное за промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$, подчиняется распределению Гаусса (закону ошибок или нормальному закону) с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \tau^H} \int_{-\infty}^{x+m} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{\sigma \tau^H}\right)^2\right] dy, \quad (10.15)$$

где H – показатель Херста. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ΔX определяются формулами

$$\mathbf{M}[\Delta X] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \tau^H \quad \text{и} \quad \mathbf{D}[\Delta X] = \sigma^2 |\tau|^{2H}, \quad (10.16)$$

соответственно. Для показателя Херста $H = \frac{1}{2}$ формулы (10.16) дают значения математического ожидания и дисперсии для приращения ΔX классического движения Броуна. Приращения обобщённого броуновского движения обладают самоаффинностью по прира-

щениям времени

$$\Delta X(\lambda \tau) = x(t + \lambda \tau) - x(t) = \lambda^H \Delta X(\tau) = x(t + \tau) - x(t), \quad (10.17)$$

т.е. являются однородными функциями времени. Параметр Херста можно выразить через размах $R = x_{\max}(t) - x_{\min}(t)$ изменений сигнала на отрезке времени τ и вычисленное для этого отрезка среднее квадратическое отклонение $\sigma_\tau = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (x(t) - \langle x \rangle_\tau)^2}$ (среднее значение сигнала за время τ равно $\langle x \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} x(t)$):

$$H = \frac{\ln(R/\sigma_\tau)}{\ln \tau}. \quad (10.18)$$

Оценка числа квадратов, покрывающих кривую обобщённого броуновского движения, равна

$$N(\tau) \approx \frac{\sigma}{\tau^{2-H}}, \quad (10.19)$$

а фрактальная размерность исследуемой кривой –

$$D = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln N(\tau)}{\ln \tau} = 2 - H. \quad (10.20)$$

Математическое моделирование различных сигналов для всего возможного диапазона фрактальной размерности ($1 < D < 2$) осуществляется с помощью функции Вейерштрасса

$$x(t) = \sqrt{2} \sigma \frac{\sqrt{1 - b^{2D-4}} \sum_{k=0}^N b^{(D-2)k} \cos(2\pi s b^k t + \varphi_n)}{1 - b^{(2D-4)(N+1)}}, \quad (10.21)$$

где b и s – параметры пространственно-частотного скейлингового преобразования, φ_n – случайная фаза из интервала $[0; 2\pi]$. При бесконечном значении числа гармоник N функция Вейерштрасса задаёт идеальный математический фрактал.

Для характеристики случайного процесса (например, движения броуновской частицы) в частотном диапазоне применяют функцию *спектральной плотности мощности* или *спектр мощности* $S(\omega)$. Чаще всего эту функцию определяют на основе преобразования Фурье, которое применяется к анализируемому сигналу

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}. \quad (10.22)$$

на конечном участке. Частотное разложение Фурье для функции (10.22) имеет вид (ω – круговая частота)

$$x_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (10.23)$$

где Фурье-трансформанта $X_T(\omega)$ определяются равенством

$$X_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (10.24)$$

Функция $X_T(\omega)$ характеризует спектральные свойства конечного отрезка заданного сигнала. Для определения спектра мощности всего случайного процесса необходимо увеличить анализируемый отрезок до бесконечности, т.е. перейти к пределу $T \rightarrow \infty$. Это приведёт к возникновению несобственного интеграла первого рода и нарушит абсолютную интегрируемость (дефиницию определённого интеграла). Именно по этой причине вводят спектр мощности, который определяется формулой

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle X_T^2(\omega) \rangle_T}{T}, \quad (10.25)$$

где усреднение проводится по различным участкам сигнала.

Для фрактальных временных рядов спектр мощности описывается степенным законом $S(\omega) \approx \omega^{-\alpha}$. Для различных шумов показатель степени α равен: $\alpha = 0$ – белый (рис. 10.3а); $\alpha = 1$ – розовый (фликкер-шум, рис. 10.3б); $\alpha = 2$ – коричневый (броуновский, рис. 10.3в); $\alpha = 3$ – чёрный (рис. 10.3г). Из рис. 10.3 видно, что значение показателя α может служить характеристикой “гладкости” сигнала: чем больше величина показателя степени α , тем менее “эксцессным” (острым) выглядит график сигнала. Показатель α связан

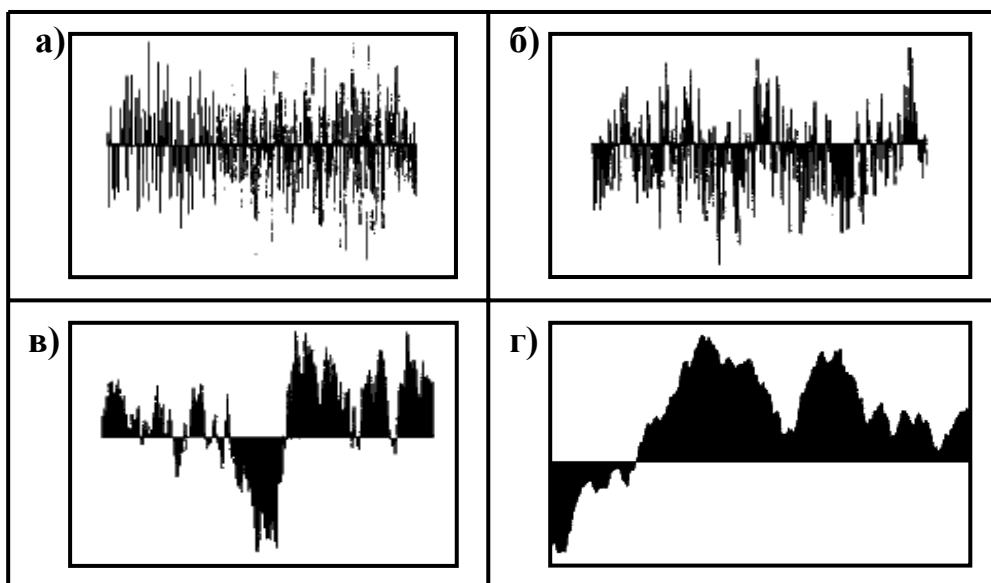


Рис. 10.3. Виды шумов с целочисленным показателем α .

с показателем Херста равенством

$$\alpha = 2H - 1. \quad (10.26)$$

Для “белых” шумов ($x(t) = A\delta(t)$, где $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$ – дельта-функция Дирака) показатель Херста лежит в интервале $0,5 \leq H < 1$; фликкер-шумовым случайным процессам отвечают значения $1 \leq H < 1,5$; обобщённое броуновское движение наблюдается при достижении величин $1,5 \leq H < 2$; для всех остальных случайных процессов – $H \geq 2$.

Используя фактор R/σ_τ можно исследовать временные ряды, различающиеся по своей природе: от стока рек, отложения ила, роста деревьев и т.п. до котировок валют на бирже, среднегодового дохода граждан, изменений политической карты мира и т.п. Для многих временных рядов выполняется *эмпирический* (экспериментальный) *закон Херста*:

$$\frac{R}{\sigma_\tau} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H, \quad (10.27)$$

где показатель Херста $H = 0,73 \pm 0,09$.

10.3. Случайные ряды

Я знаю, что подвержен погрешностям и часто ошибаюсь, и не буду на того сердиться, кто захочет меня в таких случаях остерегать и показывать мне мои ошибки.

Петр I

Случайные временные ряды возникают в результате *независимых* измерений. Испытания называются *независимыми*, если вероятность события A не зависит от того, какие события появились в предыдущих опытах, или появятся в последующих экспериментах. Пусть испытания повторяются n раз, причем событие A появляется в каждом опыте с одной и той же вероятностью p , или не появляется с одной и той же вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность появления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний определяется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (10.28)$$

Формула Бернулли является дискретным аналогом закона Гаусса: при бесконечно большом числе экспериментов ($n \rightarrow \infty$) формула (10.28) описывает нормальное распределение.

Применим формулу (10.28) к исследованию случайного процесса, который состоит в подбрасывании монеты. Для этого слу-

чайного процесса размах и среднее квадратическое отклонение определяются формулами

$$R = \sqrt{\frac{\pi n \tau}{2} - 1} \text{ и } \sigma_\tau = \sqrt{n}, \quad (10.29)$$

соответственно. Следовательно, нормированный размах для гауссовского (белого) шума (при $n \rightarrow \infty$) равен

$$\frac{R}{\sigma_\tau} = \sqrt{\frac{\pi \tau}{2}} \approx \left(\frac{\tau}{2}\right)^{1/2}, \quad (10.30)$$

где показатель Херста $H = 0,5$.

Обозначим через $m_1(t)$ количество “орлов”, выпавших при бросании τ монет в каждом испытании серии из n независимых экспериментов, а через $m_2(t)$ – количество “решек”. Случайные величины

$\xi(t) = m_1(t) - m_2(t)$ и накопленное среднее $X(t) = \sum_{l=1}^t \xi(l)$ образуют временные ряды, графические изображения которых показаны на рис. 10.4 а, б. График накопленного среднего соответствует блужданию

частицы вдоль линии с единичным шагом (см. рис. 4.1 на стр. 67). На расстояниях и периодах, значительно превышающих шаг и временной интервал между прыжками, соответственно, эти блуждания асимптотически приближаются к перемещениям броуновской частицы. Нормированный размах Херста R/σ_τ для исследуемого случайного процесса показан на рис. 10.5 (пунктиром показана за-

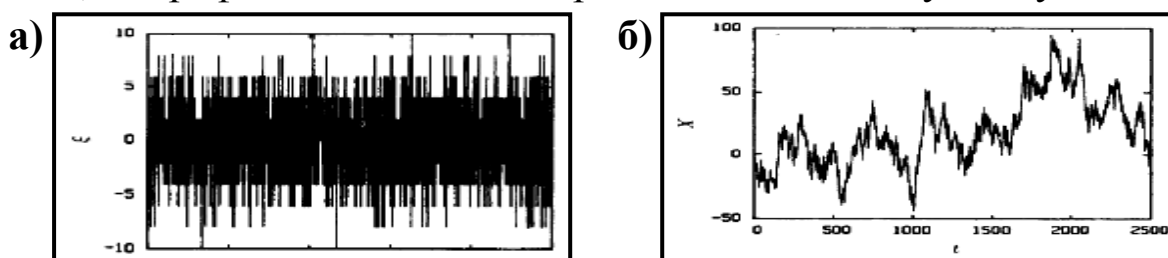


Рис. 10.4. Шум Гаусса $\xi(t)$ (а) и накопленное среднее $X(t)$ (б) при проведении независимых испытаний Бернулли.

частицы вдоль линии с единичным шагом (см. рис. 4.1 на стр. 67). На расстояниях и периодах, значительно превышающих шаг и временной интервал между прыжками, соответственно, эти блуждания асимптотически приближаются к перемещениям броуновской частицы. Нормированный размах Херста R/σ_τ для исследуемого случайного процесса показан на рис. 10.5 (пунктиром показана за-

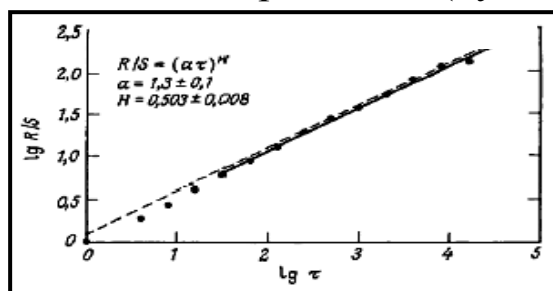


Рис. 10.5. Временная зависимость нормированного размаха Херста R/σ_τ в логарифмическом масштабе.

висимость (10.30) для белого шума).

График для нормированного размаха Херста совпадает с гауссовской асимптотикой при достаточно больших значениях параметра τ ($\tau > 20$), а при малых значениях τ – наблюдается расхождение между указанными величинами.

Таким образом, величина показателя Херста определяет следующие свойства случайных рядов:

1) $0 \leq H < 0,5$ (показатель α в спектре мощности $S(\omega) \approx \omega^{-\alpha}$ изменяется в пределах $-1 \leq \alpha < 0$, гауссовская корреляция между прошедшими и будущими событиями $\mathfrak{K}(-t; t) = 2^\alpha - 1$ (см. пункт 4.3, формулу (4.8), стр. 70) заключена между значениями $-0,5 \leq \mathfrak{K}(-t; t) < 0$) – случайные сигналы, посылаемые системой во внешний мир, являются зависимыми. Они несут информацию о предыдущем состоянии исследуемого объекта с *антиперсистентным* (эргодическим) поведением. Чем ближе показатель Херста к нулю, тем устойчивее равновесное состояние системы; любые флуктуационные отклонения от этого состояния подавляются. Такие случайные временные ряды называются *волатильными* (изменчивыми), эти ряды характеризуются постоянными *реверсами* (возвратами) к исходному состоянию, определяемому средними характеристиками.

2) $H = 0,5$ ($\alpha = 0$, $\mathfrak{K}(-t; t) = 0$) – случайные сигналы обладают постоянным спектром мощности, энергией и характеризуются отсутствием корреляции между прошлым и будущим. Размах накопленных отклонений от наиболее вероятного значения случайной величины, описывающей случайный процесс, увеличивается со временем по закону (10.30). Любые два произвольных значения случайного сигнала нескоррелированы, что отвечает случайным блужданиям: ни прошлое, ни настоящее не влияют на будущее состояние системы. В частности, такие ряды могут описываться плотностью вероятности нормального распределения Гаусса (классическое броуновское движение), хотя это и не является обязательным условием.

3) $0,5 < H < 1$ ($0 < \alpha < 1$, $0 < \mathfrak{K}(-t; t) < 1$) – с приближением показателя Херста к единице возрастает корреляция между разновременными сечениями случайного сигнала. Эти временные ряды сохраняют тенденции, возникшие в прошлом, поэтому их называют *персистентными* или *трендоустойчивыми* (“trend” (англ.) – тенденция или течение). Трендоустойчивому ряду соответствует колоколоподобный случайный сигнал, который при приближении параметра H к зна-

чению 0,5 асимптотически становится похож на кривую Гаусса для нормального закона распределения.

4) $H \geq 1$ ($\alpha \geq 1$, $\mathcal{K}(-t; t) \geq 1$) – чем бóльшее значение принимает показатель Херста, тем детерминированнее становится случайный сигнал. В научной литературе отсутствуют данные о пороговом значении показателя Херста, при котором случайный временной ряд становится полностью детерминированным. Критического значения показатель Херста, по-видимому, достигает при возникновении ближних и дальних корреляций в пространственном расположении частиц системы, а также корреляций между их скоростями перемещения. Увеличение показателя Херста в сторону значений, которые незначительно превышают единицу, демонстрирует рождение порядка в стохастической среде (см. также пункт 4.5, стр. 75). Усиление тенденциозного развития порождает кинетический переход динамической системы в область упорядочения и стационарного существования, которые определяются внешними условиями.

Коэффициент корреляции $\mathcal{K}(-t; t)$ был получен для обобщённого броуновского движения, представляющего собой фрактальное преобразование нормального закона распределения. Этому закону подчиняется подавляющее число случайных величин (95%), но не все. Поэтому требуется проведение дополнительных исследований стохастических сред с иными законами поведения. Кроме того, наличие времени коррелятивного поведения (10.14) указывает на потерю “памяти” стохастическими средами на длительных отрезках времени. Устойчивое существование “памяти” и её стабилизация другими взаимосвязями между элементами системы является одной из основных проблем современного естествознания в связи с долгосрочными прогнозами поведения случайных систем.

10.4. Прогнозирование долгосрочных изменений

Если мы убеждены в том, что необыкновенно благоприятные условия немедленно порождают необыкновенно большое число выдающихся людей, то мы не можем не признать, что обычные неблагоприятные условия, господствующие в наших школах, заглушают и губят очень много талантов.

В. Одоевский

Прогностический поиск будущих изменений неразрывно связан с устойчивым существованием любой динамической системы. *Кто знает будущее, тот знает, что делать в настоящем.* Борьба между стационарностью упорядоченной системы и постоянными,

случайными воздействиями внешнего окружения привело к необходимости анализа возникающих в системе тенденций и их эволюции. Антиперсистентным значениям показателя Херста ($0 \leq H < 0,5$) отвечают более высокие фрактальные размерности (для плоскости размерность определяется по формуле (10.20) $D = 2 - H$, а для пространства – $D = 3 - H$). Чем выше фрактальная размерность, тем более *волатильна* стохастическая система, при этом её сигнал испытывает большее число изменений. Такие системы изменяются часто и в краткие промежутки времени. Поэтому спрогнозировать их поведение достаточно легко: если в такой системе нарастают флуктуации, то через определённый промежуток времени они начнут затухать (отталкивание тенденции или *персистентный репеллер*).

Системы, поведение которых описывается моделью случайных блужданий броуновской частицы ($H=0,5$), являются *персистентными слиперами* по отношению к развитию тенденций, для них коэффициент корреляции $\mathcal{K}(-t; t) = 0$.

Если показатель Херста превышает значение 0,5 и приближается к 1, то стохастическая среда начинает следовать возникшей тенденции, но её “память” (*эредитарность* – от лат. hereditarity – *память, последствие, наследственность*) о прошлом ухудшается с течением времени (*склерозный персистентный аттрактор*).

При достижении показателем Херста значения $H = 1$ случайный сигнал, испускаемый системой, становится евклидовым (его размерность $D = 1$ – линия на плоскости; $D = 2$ – плоскость в пространстве), при этом эредитарность становится феноменальной: сигнал содержит информацию от любого прошлого до любого будущего моментов времени (*персистентный аттрактор*). Достоверность этого утверждения проверяется экспериментально. Следуя Шейнкману и Ле Барону, надо *перемешать* сечения исходного сигнала случайным образом. Если произведенное действие не изменяет показатель Херста, то корреляционная связь между сечениями случайного сигнала отсутствует. При наличии долговременной наследственности *перемешивание* данных приводит к изменению показателя Херста, так как нарушается структура сигнала.

Если показатель Херста попадает в интервал $1 < H \leq 2$, то с ростом H до значения 2 фрактальная размерность сигнала уменьшается до нуля на плоскости и до единицы в пространстве. Это означает, что на евклидовой плоскости непрерывный сигнал “рассыпает-

ся” на дискретное множество евклидовых точек, между которыми прослеживается сильная, корреляционная связь во времени. Она приводит к значительному увеличению “плотности” сечений сигнала и к “сглаживанию” резких изменений в его огибающей (см. рис. 10.3в и г, стр. 174). Следовательно, численной мерой кинетического перехода беспорядок-порядок может служить гладкость *огибающей* сигнала. Если представить огибающую линию как траекторию движения некоторой точки, то кривая будет гладкой, если она описывается параметризованной, непрерывно-дифференцируемой функцией $\vec{r}(t)$, которая называется *радиус-вектором*. Наличие корреляционной связи между сечениями хаотического сигнала порождает такую же связь между значениями радиус-вектора, что отвечает детерминизации движения точки по огибающей. Возникновение причинно-следственных “взаимодействий” между значениями радиуса-вектора приводит к обратимости движения: обращение времени вынуждает точку двигаться по огибающей в обратном направлении на участках детерминированного поведения.

Для склерозного персистентного аттрактора обратимость, как и детерминизм движения, наблюдается только на коротких промежутках времени. Другими словами, при значениях показателя Херста $0,5 < H < 1$ наблюдается смесь детерминированного и хаотического движений.

В таблице 10.1 приведены фрактальные размерности динами-

Таблица 10.1

Фрактальные размерности и показатели Херста для динамических систем

Система	$D(0)$	$H(2)$	$H(3)$
Ферхюльста ($r = r_\infty$)	0,54	1,46	2,46
Хенона	1,26	0,74	1,74
Заславского	1,38	0,62	1,62
Лоренца	2,05* ($D(2)$)	-0,05	0,95
“пыль” Кантора	0,87	1,13	2,13

ческих систем Ферхюльста (см. пункт 4.4, стр. 72); Хенона (является двумерным аналогом логистического отображения Ферхюльста и описывается системой уравнений $\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$); Заславского (представляет собой модель осциллятора в сопротивляющейся среде с дискретными подталкиваниями внешней силой, см. подобную задачу в пункте 6.2, стр. 110); Лоренца (пункт 4.6, стр. 79) и

“пыли” Кантора. В этой же таблице приведены показатели Херста при вложении вышеуказанных систем в плоскость и пространство Евклида ($H(2)$ и $H(3)$, соответственно).

Для большинства природных рядов (например, электроэнцефалограмма (рис. 10.6)) показатель Херста равен $H \approx 0,72$. Сигналы

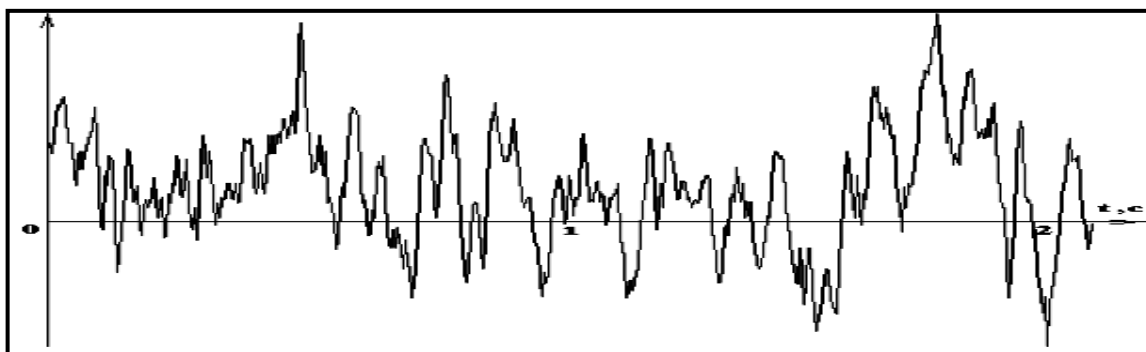


Рис. 10.6. Электроэнцефалограмма лобной доли мозга здорового человека.

динамических систем представляются в виде графика на плоскости Евклида, поэтому лучшей моделью для природных сигналов является логистическая модель Хенона и близкий к ней аттрактор Лоренца, но в пространстве.

Для проведения R/σ_τ -анализа естественных, природных сигналов лучшим способом обработки экспериментальных данных является суммирование несмещённых значений сигнала $x(t)$, чем отклонений сигнала от его статистического среднего (см. рис. 10.4а и б на стр. 175)

$$\xi(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle. \quad (10.32)$$

При этом способе накопленное отклонение от среднего значения испытывает сильные колебания при малом “шуме”, т.е. величина R/σ_τ принимает значения ниже, чем при обычном методе Херста. При большом “шуме” вычисленные значения R/σ_τ лежат заметно выше точек для несмещённого процесса (рис. 10.7).

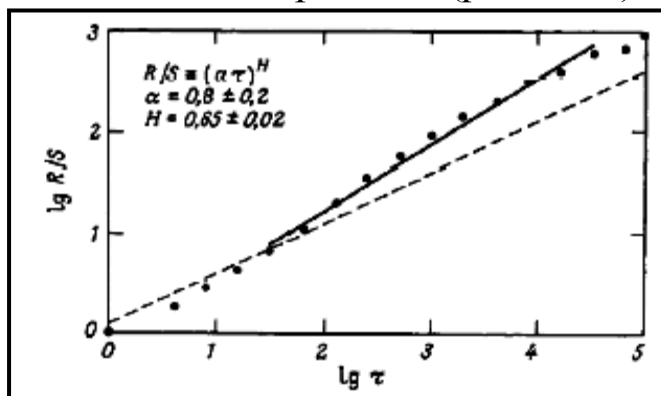


Рис. 10.7. Влияние “шумов” при смещённой обработке сигнала.

Глава 11. Фрактальные поверхности

Кто делает то, что может, делает то, что должен.
Мадлен де Скюдери

Широкое распространение идей фрактальной геометрии привело к тому, что любая линия, поверхность или тело объявлялись самоподобными (самоаффинными). Заораживающая красота фракталов (мультифракталов), построенных с использованием компьютерной техники, породила стремление исследователей все природные объекты наделить размерностью Хаусдорфа-Безиковича и спектром размерностей. В качестве примера неудачной фрактализации можно привести исследования Хэка по установлению фрактальной размерности рек (см. пункт 12.3, стр. 199). Однако применение фрактальной геометрии весьма полезно при отображении нерегулярных и случайных поверхностей. В этой связи представляется целесообразным рассмотрение вопросов, связанных с построением и анализом таких кривых поверхностей.

Одним из способов получения фрактальных поверхностей является трансляция самоподобных или самоаффинных линий вдоль выбранного направления. Пример такого построения приведен на рис. 11.1 для триадной кривой Коха. Для определения фрактальной

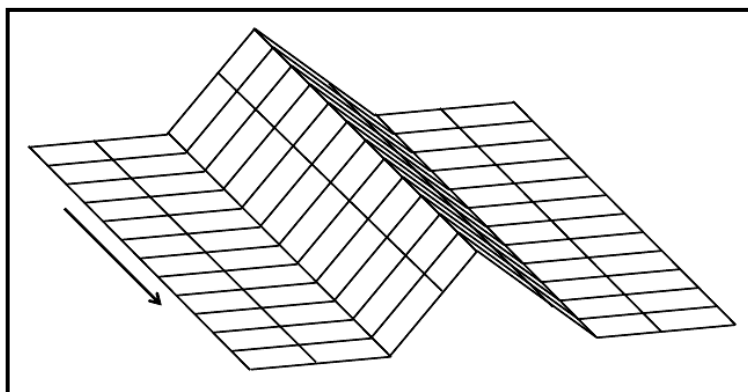


Рис. 11.1. Поверхность Коха первого итерационного порядка.

размерности поверхности Коха покроем её полосами с длиной l и шириной δ . Измерение площади поверхности Коха будем проводить с помощью квадратных ячеек с площадью $S_0 = \delta^2$. Для этого потребуется

$$N(\delta) = \frac{l}{\delta} \cdot (1/\delta^{D_l}) \quad (11.1)$$

ячеек ($D_l = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ – размерность Хаусдорфа-Безиковича для триадной кривой Коха). Первый множитель в формуле (11.1) определяет ко-

личество квадратов, необходимых для покрытия полосы длиной l , а второй – для покрытия кривой Коха. Следовательно, фрактальная размерность поверхности Коха равна $D=1+D_l \approx 2,262$. Этот пример иллюстрирует эмпирическое правило Мандельброта: *если фрактальное множество является пересечением двух других фрактальных подмножеств, то хаусдорфова размерность такого множества равна сумме фрактальных размерностей подмножеств.*

Такой способ построения фрактальных поверхностей обладает целым рядом недостатков: искусственность и нереалистичность вида поверхности; её неизотропность в перпендикулярном к линии трансляции направлении; пригодность для отображения ограниченного числа природных поверхностей (например, поверхностей, которые возникают при направленном истирании или шлифовке). В этой связи рассмотрим иные способы построения фрактальных поверхностей.

11.1. Поверхность стохастических перемещений

Знание некоторых принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.

Клод Гельвеций

Поверхности, более похожие на те, что наблюдаются у природных объектов, можно получить *методом наслоения*. Он состоит в том, что после трансляции фрактальной кривой к каждой её точке добавляются точки аналогичных слоёв, но повернутых на случайный угол по отношению к прямой трансляции. Пусть линия располагается в координатной плоскости xOz и имеет фрактальную размерность D . Нерегулярная поверхность получается путём её параллельного переноса вдоль оси ординат (ось Oy). Множество точек поверхности обозначим через $z_D(x; y)$. Повернём исходную поверхность на случайный угол φ , умножим вертикальные координаты точек на постоянный коэффициент k_z и прибавим к соответствующим координатам исходной поверхности. Выполнив эту процедуру n раз (n -слойная поверхность), получим фрактальную поверхность очень похожую на природный, горный ландшафт. Удивительное свойство n -слойной поверхности состоит в том, что её размерность совпадает с фрактальной размерностью исходной поверхности. Теоретический анализ фрактальных поверхностей, полученных методом наслоения при выборе различных значений масштабного коэффициента k_z для каждого слоя n , представляет со-

бой трудную задачу.

Продемонстрируем сложности определения фрактальной размерности на простом примере поверхности Б. Мандельброта, которая изображена на рис. 11.2. Такая поверхность не фрактальна и

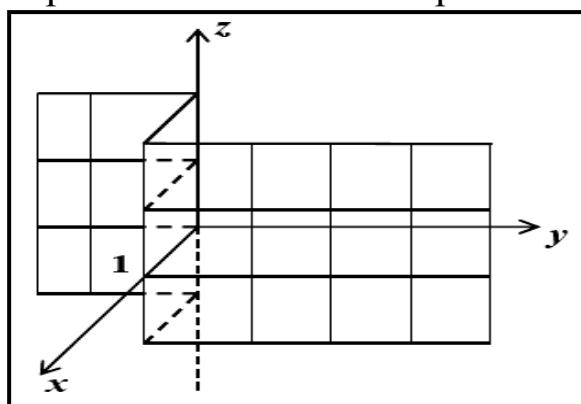


Рис. 11.2. Ступенчатая поверхность Б. Мандельброта.

в поперечном сечении имеет евклидову размерность $D(z)=1$. Для построения фрактальной поверхности выберем случайным образом угол поворота из интервала $[0; 2\pi]$ и скейлинговый коэффициент по оси аппликат слоя n , согласно формуле $k_z(n)=1/\sqrt{n}$. В результате конечного числа (n) шагов построения *не фрактальная* исходная, генерирующая поверхность превращается в кривую поверхность с размерностью Хаусдорфа-Безиковича равной $D_S=2,5$.

Если число слоёв при построении поверхности Б. Мандельброта достаточно велико ($n \rightarrow \infty$), то её вертикальный разрез напоминает сигнал броуновской частицы (см. рис. 4.1 на стр. 67). Поэтому автор такой фрактальной поверхности назвал её *броуновской* или *поверхностью случайного перемещения*. Эта поверхность описывается однородной функцией с показателем степени Херста H

$$Z(kx; ky) = k^H Z(x; y), \quad (11.2)$$

который равен $H=3-D_S=1/2$. Кроме того, соотношение (11.2) показывает, что поверхность случайного перемещения не самоподобна, а самоаффинна. Если некоторые впадины заполнить “водой” и рассматривать полученную картину сверху под некоторым углом, то она напоминает географическую карту некоторого псевдопланетарного участка (см. рис. 12.7, пункт 12.1, стр. 196). Фрактальная размерность береговой линии любого острова, изображённого на географической карте, равна $D_L=2-H=3/2$. Это значение не на много превышает размерность Хаусдорфа-Безиковича ($D_{L(real)}=1,3$), вычисленную для реальных береговых линий.

11.2. *Анализ фрактальных поверхностей*

Откапывая ошибки, теряют время, которое, может быть, употребили бы на открытие истин.

Вольтер

Вертикальные сечения фрактальных процессов и поверхностей порождают временные ($x(t)$) и пространственные ($z(x)$) сигналы. Временные сигналы были рассмотрены в Главе 10 (стр. 166-180), поэтому исследуем пространственные сигналы. Измерение пространственного сигнала $z(x)$ в равноотстоящих точках приводит к таким же графикам, как и в случае временных сигналов. Полученные таким способом множества точек обладают размерностями Хаусдорфа-Безиковича, которые попадают в интервал $[0; 2]$. Среднее квадратическое отклонение для приращений пространственного сигнала оценивается как среднее по длине измерений L

$$\sigma(\Delta x) = \sqrt{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L [z(x+\Delta x) - z(x)]^2 dx} = \langle [z(x+\Delta x) - z(x)]^2 \rangle \quad (11.3)$$

и описывается степенным законом $\sigma(\Delta x) \sim |\Delta x|^H$. Поэтому фрактальная размерность пространственного сигнала определяется по формуле (10.20) (см. пункт 10.2, стр. 172). Показатель Херста вычисляется по графику $\sigma(\Delta x)$, построенному в двойном логарифмическом масштабе.

Барроу провёл исследование большого числа поперечных сечений природных ландшафтов и параметров окружающей среды. Полученные фрактальные размерности принадлежат отрезку $[1,4; 2]$ и могут быть использованы для построения профилей природных рельефов и (экстра-) интерполяции параметров окружающей среды. Для оценки надёжности результатов Барроу необходимо исключить присутствие естественных пространственных масштабов в исходных данных. Кроме того, фундаментальное изучение фазовых переходов показало, что для надёжной оценки экспериментальных данных они должны охватывать длину $L \geq 30\Delta x$. Отсутствие корреляционного анализа для пространственных сигналов не позволяет определить наличие дальнего действия и существования корреляционной длины для имеющихся экспериментальных данных по фрактальным ландшафтам. Этот факт не позволяет установить такую же классификацию для пространственных сечений, которая была введена для временных сигналов.

11.3. *Фрактальная топография*

Факты не перестают быть фактами, когда их игнорируют.
Олдос Хаксли

Пространственные сечения многих шероховатых поверхностей (поверхности разлома или шлифования, бетонная полоса аэродрома, обшивка супертанкеров и т.п.) в большинстве случаев характеризуются средним квадратическим отклонением

$$\sigma(x) = \sqrt{\langle z^2(x) \rangle}, \quad (11.4)$$

а сама шероховатость определяется дисперсией (квадрат среднего квадратического отклонения). Систему отсчёта выбирают так, чтобы математическое ожидание было равно нулю ($\langle z(x) \rangle = 0$). Другой важной характеристикой является корреляционная функция, которая определяется формулой

$$K(\Delta x) = \langle z(x) \cdot z(x + \Delta x) \rangle, \quad (11.5)$$

причём усреднение проводится по всей длине сечения пространственного сигнала. Стационарный пространственный сигнал дополнительно характеризуется спектром мощности $\mathcal{K}(k)$

$$K(\Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(k) e^{ik\Delta x} dk. \quad (11.6)$$

Волновой “вектор” k связан с высотой шероховатости h соотношением $k = 2\pi/h$.

Все природные объекты имеют ограниченную протяжённость L_{\max} . Так как эта величина задаёт минимальное значение волнового вектора $k_{\min} = 2\pi/L_{\max}$, то в формуле (11.6) в качестве нижнего предела надо использовать k_{\min} , т.е. записать в виде

$$K(\Delta x) = \int_{k_{\min}}^{\infty} \mathcal{K}(k) e^{ik\Delta x} dk. \quad (11.7)$$

Если спектр мощности пропорционален квадрату волнового “вектора” ($\mathcal{K}(k) = Ck^2$ – коричневый или броуновский шум, C – “изрезанность” сечения пространственного сигнала), то квадрат среднего квадратического отклонения будет равен

$$\sigma^2(x) = \frac{C}{2\pi} k_{\min} = CL_{\max}. \quad (11.8)$$

Это означает: дисперсия ($D(x) = \sigma^2(x)$) будет увеличиваться с ростом максимального, линейного размера поверхности в соответствии с законом Гаусса.

Исследования различных шероховатых поверхностей показали, что их фрактальная размерность заключена между 1 и 3. В пункте 12.4 будет, в частности, обсуждена возможность перехода степенных законов в закон Гаусса. По-видимому, существование такого перехода и может объяснить значительный разброс размерностей таких поверхностей. Другой причиной указанного разногласия может быть их квазифрактальность, т.е. они характеризуются разными степенными закономерностями в плоскости поверхности и поперёк неё. Это означает самоаффинность шероховатых поверхностей: они фрактальны лишь на *локальном* уровне, поэтому *глобально* характеризуются спектром фрактальных размерностей так же, как турбулентность и аналогичные явления.

11.4. Молекулярные ландшафты

Разум есть способность видеть связь общего с частным.
И. Кант

Осаждение молекул на поверхность называется *адсорбцией*. Площадь адсорбционной области находят по измеренным адсорбционным изотермам. Для этого устанавливают графическую зависимость количества грамм-молей N молекул от давления P при фиксированной температуре T :

$$N(P) = f(P)|_{T=const} \quad (11.9)$$

Определение числа N производится либо путём измерения давления и объёма адсорбируемого вещества до и после взаимодействия с адсорбирующей поверхностью, либо прямым взвешиванием объекта с активной поверхностью. Для анализа полученных экспериментальных данных используют формулу Ленгмюра:

$$N(P) = \frac{N_m k P}{1 + k P}, \quad (11.10)$$

где N_m – число грамм-молей вещества в мономолекулярном слое, k – коэффициент адсорбции. Если обозначить через S_0 площадь, которую занимает одна молекула, то молекулярный ландшафт занимает площадь

$$S = N_m N_A S_0, \quad (11.11)$$

где $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро. Для большинства веществ площадь S_0 практически не зависит от адсорбирующей поверхности и экспериментально установлена (например, для азота величина $S_0 = 16,2 \text{ \AA}^2$).

Если площадь S_0 измеряется с помощью квадратных ячеек, сторона которых имеет длину δ , то она равна $S_0 = \delta^2$. Количество адсорбированных молекул вещества при их осаждении на фрактальную поверхность оценивается по формуле $N(\delta) \sim \delta^{-D} = S_0^{D/2}$. Размерность Хаусдорфа-Безиковича для адсорбционного процесса лежит в интервале от 1 до 3. Чем выше фрактальная размерность, тем более пористая поверхность адсорбции. На рис. 11.3 показана зависимость логарифма числа грамм-молей спиртов от логарифма площади сечения молекул при их осаждении на пористый силикагель. В этом случае фрактальная размерность $D = 3,02 \pm 0,06$. Это гово-

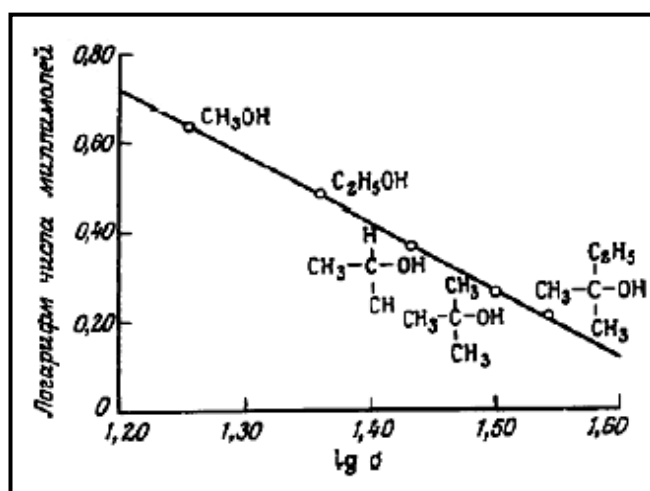


Рис. 11.3. Адсорбция спиртов на пористом силикагеле.

рит о том, что поверхность пористого силикагеля заполняет евклидово пространство. Следовательно, мономолекулярный слой спиртов обладает свойствами объёмной фазы с большим числом пор. Их количество тем больше, чем пористее силикагель. Многочисленные исследования, проведенные другими авторами, подтвердили столь высокую фрактальную размерность силикагеля и других пористых сред с размерностью Хаусдорфа-Безиковича от 2 до 3.

Проведенные исследования показывают необходимость учёта фрактальности поверхностей, на которых протекает физико-химический процесс (катализ, смачивание, напыление и т.п.). Наличие большого числа самоподобных (самоаффинных) пор в поверхностях адсорбции, смачивания, напыления и других связано с шероховатостью поверхности пор. Пространственный сигнал анализа шероховатостей имеет фрактальный характер, что и приводит к интерпретации вышеуказанных поверхностей, как фрактальных. В этой связи рассмотрим другие природные явления и процессы.

Глава 12. Фракталы и геометрия природных объектов

Убеждение – необходимое основание деятельности; если теория неправильна, практика не может быть верной.

Бенджамин Дизраэли

Простые стохастические среды подчиняются экспоненциальному и нормальному законам распределения. Однако масштабная инвариантность природных объектов вынуждает исследователей к использованию однородных функций и степенных законов с дробными показателями степени (*фрактальные распределения*). Дробные показатели степени приводят к появлению “длинных хвостов” (*паретианов*) в этих распределениях. Наличие паретианов объясняется эредитарностью естественных систем, т.е. между фрактальным объектом и внешней средой возникают обратные связи, которые усиливают персистентность внутренних процессов. Это соответствует замене эффекта “домино” (падение одного домино вызывает падение всех остальных, выстроенных в цепочку) на процесс “цепной реакции” (явление, наблюдавшееся ранее, впоследствии только усиливается). Зачастую распределения с паретианами характеризуются неустойчивыми и малоинформативными выборочными средними. Устойчивые паретианы наблюдаются для открытых систем, которые обмениваются с окружающим миром веществом, энергией и информацией о внутреннем состоянии природного объекта, что вызывает перераспределение энтропии между системой и внешней средой. Таким образом, критерием открытости диссипативной системы, в которой при определённых условиях могут возникать самоорганизующиеся структуры (в силу персистентности внутренних процессов), является *устойчивость паретианов*.

Фрактальные методы исследования природных систем существенно дополняют текстурные, физические и другие способы изучения геометрических и других особенностей реальных явлений. Они позволяют выявлять скрытые и не регистрируемые другими методами аспекты строения и внутренней деятельности естественных объектов. Результаты исследования приведут к созданию природоподобных устройств и механизмов, которые будут отличаться от ранее созданных повышенной устойчивостью, долговечностью и способностью к эволюционным преобразованиям. Например, используемые в настоящее время материалы с фотонными запрещёнными зонами используют для их создания брэгговское рассеивание. Это приводит к тому, что геометрические размеры фотонных

кристаллов должны быть порядка нескольких длин рассеиваемой волны. Применение планарных фрактальных структур с высокой поверхностной проводимостью позволит создать сложные отражающие и пропускающие зоны в широком диапазоне частот. Такие приборы позволят не только принимать и обрабатывать внешние сигналы, но и накапливать, хранить в свёрнутом виде и использовать получаемую информацию для дальнейшей эволюционной самоорганизации. Создание управляемых, интеллектуальных покрытий (например, антенн) можно осуществить при использовании детерминированных конструктивных фракталов (см. Главы 2 и 3). Для таких поверхностных отражателей резонансная длина волны может намного превышать линейные размеры фрактального трёхмерного фотонного кристалла, который содержит, например, кривые Коха разной длины и расположенных в разных плоскостях.

В пункте 1.2 был продемонстрирован целый ряд степенных законов, используемых в различных естественнонаучных моделях. В частности, широкое распространение получило трубчатое моделирование транспортных путей. Фрактальное отображение транспортных магистралей и побочных путей реализуется в виде “деревьев” Босмана (см. пункт 2.7, стр. 46). Природа использует фрактальное построение ветвящихся структур, применяя генеалогический код с определённым коэффициентом ветвления. Поэтому природные объекты самоподобны не потому, что фракталы являются оптимальными геометрическими фигурами, а потому, что “строительство” реальных систем следует оптимальному генеалогическому коду: *каждая стадия построения повторяет предыдущую итерацию, но в меньшем масштабе.*

Особую роль в развитии природных объектов играют катастрофы (фазовые переходы, падение метеоритов, разливы рек и т.д.). *Катастрофой* называется нестандартное поведение системы, которое сопровождается скачкообразным изменением её характеристик и состояния системы при плавном регулировании *управляющих параметров*. Сводка результатов, полученных в *простой теории катастроф*, приведена в табл. 12.1. На практике наиболее часто встречаются системы, в которых наблюдаются катастрофы вида *складки* или *сборки*. В частности, явление гистерезиса возникает тогда, когда возвратный скачок на сборке не происходит при тех же значениях управляющих параметров. Сигнал, который возника-

Таблица 12.1.

Зависимость потенциальных энергий от управляющих параметров.

Вид потенциальной энергии	Число управляющих параметров	Структура катастрофы
$U = q^3 + aq$	1 – параметр a	Складка
$U = \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{2}aq^2 + bq$	2 – параметры a и b	Сборка
$U = q^5 + aq^3 + bq^2 + cq$	3 – параметры a , b и c	Ласточкин хвост
$U = q^5 + aq^4 + bq^3 + cq^2 + dq$	4 – параметры a , b , c и d	Бабочка
$U = q_1^3 + q_2^3 + aq_1q_2 - bq_1 - cq_2$	3 – параметры a , b и c	Гиперболическая омбилика
$U = q_1^3 - 3q_1q_2^2 + a(q_1^2 + q_2^2) - bq_1 - cq_2$	3 – параметры a , b и c	Эллиптическая омбилика
$U = q_1^2q_2 + q_2^4 + aq_1^2 + bq_2^2 - cq_1 - dq_2$	4 – параметры a , b , c и d	Параболическая омбилика

ет при катастрофе отвечает чёрному шуму. Однако при малых частотах чёрный шум характеризуется бесконечной энергией, а природные катастрофы при всех частотах имеют конечную энергию. Это связано с конечным временем протекания катастрофических изменений. Относительная стабилизация скачкообразных явлений связана также и с самоорганизацией динамической системы, т.е. с возникновением нового распределения её элементов. Этот процесс приводит к рассеиванию избытков вещества, энергии и информации, а, следовательно, к адаптации системы к новым условиям существования. Оценки возможных последствий тех или иных катастроф, основанные на использовании степенных законов, не учитывают наличие стабилизационных процессов, поэтому являются приближительными. В частности, такая угроза как глобальное потепление на планете Земля возникла при анализе ограниченного временного ряда без учёта возможной самоорганизации водной и воздушной сред планеты. Кроме того, ограниченность временных корреляций не позволяет установить вид тенденций, возникающих при рассмотрении *возможного* катастрофического явления.

Природные объекты имеют топологическую размерность D_E и фрактальную размерность D . Эти величины для линейных фракталов связаны с показателем Херста равенством

$$\boxed{D + H - D_E = 1}. \quad (12.1)$$

Для плоских кривых, топологическая размерность которых равна $D_E=1$, равенство (12.1) переходит в соотношение (10.20) (см. пункт 10.2, стр. 172). Для плоских фрактальных объектов ($D_E=2$) равенство (12.1) имеет вид

$$\boxed{D+H-D_E=2}, \quad (12.2)$$

которое является полным аналогом связи Эйлера (см. пункт 6.3, формулу (6.20), стр. 116). Для большинства фрактальных сигналов (кривые различных шумов) природных объектов разность

$$\boxed{D-D_E=0,2}, \quad (12.3)$$

поэтому показатель Херста изменяется в пределах от 0,8 для плоских линий до 1,8 для пространственных кривых. Значение 0,8 хорошо совпадает с показателем степени в законе Херста (см. пункт 10.2, формулу (10.27), стр. 174) для природных сигналов.

Двумерные, плоские фракталы возникают при топографическом построении образования гор, поверхности разлома и т.д. Исследования поверхности разлома показали её самоаффинность. Если залить поверхность разлома некоторого материала другим веществом, затем производить послойные шлифовку и подсчёт площадей “островов” S_o исходного материала и их периметров P_o , то между этими величинами проявляется связь, которая показана на рис. 12.1. Она носит самоподобный характер, так как описывается

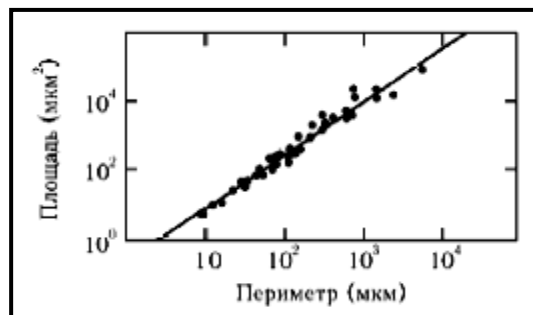


Рис. 12.1. Фрактальная связь между площадями и периметрами “островов” на поверхности разлома.

степенным законом с дробным показателем степени: $S_o \sim P_o^{1,56}$, а размерность Хаусдорфа-Безиковича для периметра равна 1,28. Следовательно, фрактальная размерность такой поверхности разлома равна 2,28. Она характерна для несглаженных гор, для которых вертикальный профиль имеет вид сигнала, наблюдаемый для чёрных шумов. Аналогичная зависимость установлена между площадью дождевых областей и периметрами образующих области грозových

облаков. Фрактальная размерность периметра дождевого облака составляет 1,35. Полученные данные говорят об отсутствии естественных масштабов в указанных и других природных явлениях.

Другим примером плоской фрактальной фигуры может служить поверхность после воздействия на неё интенсивных энергетических потоков (например, обшивка космического корабля или атомного котла). Описание и анализ шероховатостей таких поверхностей профильным методом весьма затруднительно. Для фрактальных поверхностей неприемлемы представления о периодическом чередовании евклидовых “выступов” и “впадин”, которые возникли при анализе процесса резания металлов. Эта проблема актуальна в связи с развитием нанотехнологий, для которых шероховатость является одной из основных характеристик, тем более, что толщина нанослоя сопоставима с длиной свободного пробега электрона. Поверхности таких объектов представляют собой совокупность фрактальных кластеров, распределение которых по поверхности образца подчиняется степенному закону. Адекватность теоретического описания таких поверхностей реальным геометрическим структурам достигается использованием мультифракталов.

Исследование реальных систем привело не только к развитию фрактальной геометрии, но к изменению математического аппарата для анализа бесконечно малых величин: интенсивно развивается дробное интегро-дифференциальное исчисление. В силу того, что “хвостатые” распределения не сходятся асимптотически к закону ошибок Гаусса, то они описывают аномальное случайное блуждание частиц. Аномальность связана с проявлением персистентности и эрдитарности реальных систем. В настоящее время дробное (вернее, нецелое) исчисление применяется для исследования и моделирования самых разнообразных процессов в случайных и фрактальных средах (например, углеродные наноконпозиты, структурированные токопроводящие полимеры и пористые материалы).

Современные теоретические модели зачастую не учитывают нарастание отклика системы на внешний раздражитель; эрдитарность и тенденциозность (анти- или персистентность) внутренних процессов; диссипацию вещества, энергии и информации; возникновение неустойчивостей различного рода и их эволюцию; корреляционную связь между явлениями во времени и пространстве. Указанные недостатки являются всего лишь продолжением досто-

инств классических моделей. Их устранение позволит существенно расширить границы познания окружающего мира, самих себя и человечества в целом.

12.1. Фрактальные пейзажи

Нам следовало бы стремиться познавать факты, а не мнения, и находить место этим фактам в системе наших мнений.

Георг Кристоф Лихтенберг

Сходство фрактальных фигур с природными объектами (рис. 12.2, 12.3) даёт возможность их использования для создания моде-

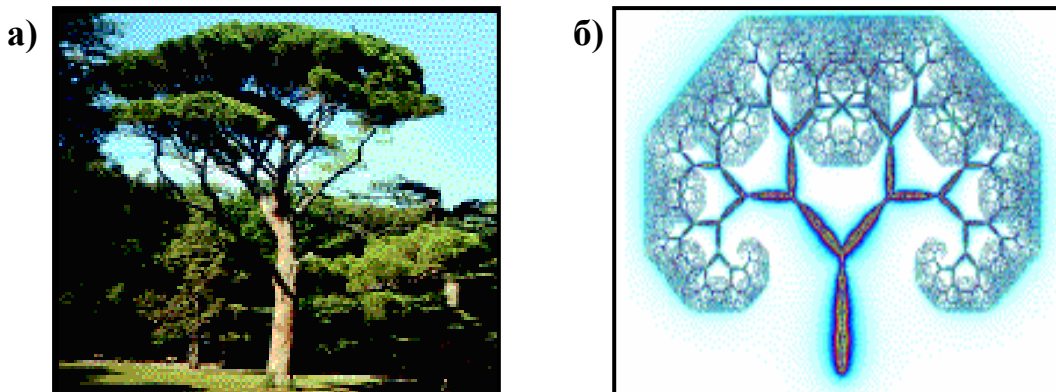


Рис. 12.2. Крымская сосна (а) и дерево Мандельброта (б).

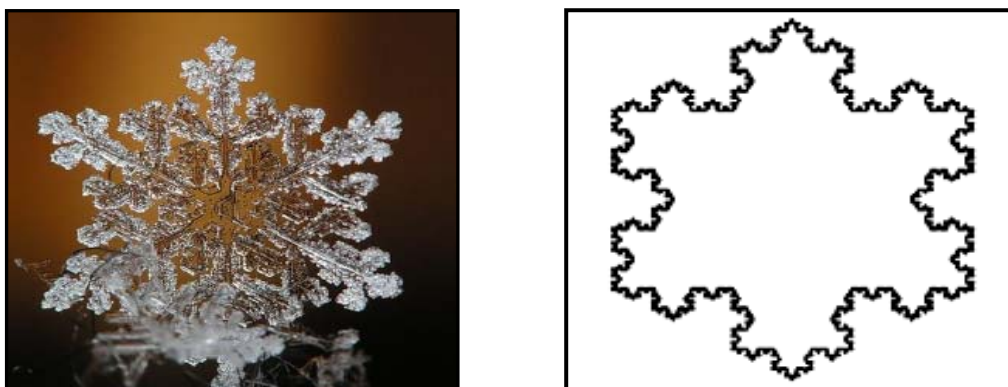


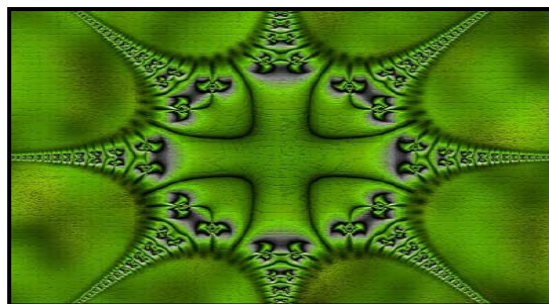
Рис. 12.3. Реальная (а) снежинка и её фрактальный аналог Коха (б).

лей слабо отличающихся от своих оригиналов. Использование методов построения, использующих разные числовые системы и генеалогические коды, приводит как к геометрическим образам, подобным природным, так и к совершенно фантастическим изображениям (рис. 12.4). Столь широкое разнообразие форм и их возможных расцветок открывает новые перспективы в художественном творчестве и применении фракталов для создания необычных сценических образов.

Ещё более сложной задачей является отображение реальных, например, горных ландшафтов (рис.12.5), что связано с изменением их вида при учёте временного фактора. Созерцание природных



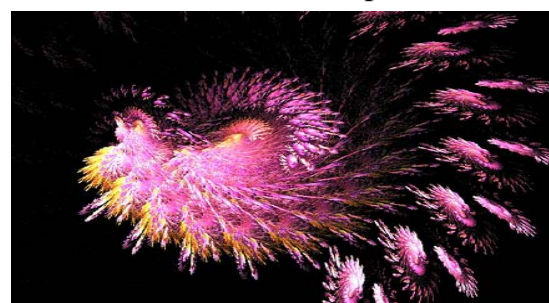
“Сигаретный дым”



“Мальтийский крест”



“Паутина”



“Жар-птица”



“Многомерность”



“Ход времени”

Рис. 12.4. Разнообразные фрактальные фигуры: от подобных природным объектам до самых фантастических.

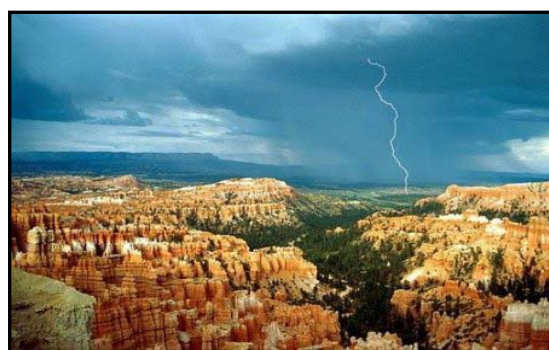


Рис. 12.5. Горные ландшафты с разным временем старения.

пейзажей, кроме того, ограничено дальностью наблюдения (L_{\max}) и разрешающей способностью оптического прибора (L_{\min}). Для простого моделирования рельефа местности обычно используют синусоидальную функцию вида

$$f(x) = C(k) \sin(k \cdot x), \quad (12.4)$$

с последующим её параллельным переносом (см. Главу 1, рис. 1.4, стр. 11). В формуле (12.4) волновой вектор k определяет пространственную “частоту” изменения сигнала и его амплитуды $C(k)$. Он лежит в пределах от $k_{\min} = 2\pi/L_{\max}$ до $k_{\max} = 2\pi/L_{\min}$. Для построения вертикального сечения фрактальной поверхности выбирают дискретный ряд частот, определяемый по итерационной формуле

$$k_{i+1} = k_i^\alpha - k_0^{\alpha^i} \quad (i=1,2,\dots). \quad (12.5)$$

В формуле (12.5) величина $k_0 > k_{\min}$, а параметр α изменяется в диапазоне от 0,7 до 1,4. Результатом построения является кривая, аналог которой показан на рис. 10.4б (см. пункт 10.3, стр. 175). Параллельный перенос этого профиля порождает горный ландшафт. Если “затопить” некоторые впадины и рассматривать полученную картину под некоторым углом, то возникает иллюзорная картина неправильной географической карты. Её неправильность связана с отсутствием перспективы и учёта кривизны поверхности (наблюдается обрезанность пейзажа вблизи горизонта).

Для построения горной гряды можно поступить иначе: построить профиль горного ландшафта с помощью равенств (12.4) и (12.5), повернуть его под определённым углом и выполнить перпендикулярно к линии поворота аналогичное построение с параллельным переносом однородного профиля $g(y) = k^{-\lambda} g(k \cdot y)$, но с частотами которые определяются по формуле

$$k_{i+1} = b^\beta k_i \quad (i=1,2,\dots). \quad (12.6)$$

Скейлинговый коэффициент b , степень подобия β и степень однородности λ подбираются так, чтобы при фиксированном значении x высоты функций $f(x)$ и $g(y)$ совпадали. Полученная по данной процедуре гряда показана на рис. 12.6. Такой подход позволяет создать более реалистичную картину при наличии перспективы. Процедура “затопления” некоторых впадин между горными грядами, расположенных в различных местах дисплея, приводит к карте, показанной на рис. 12.7. Оживление фрактального пейзажа де-

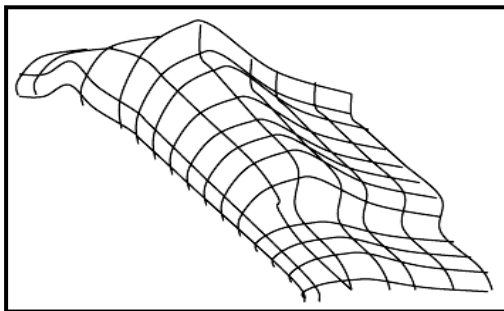


Рис. 12.6. Горный ландшафт с вертикальным и поперечными профилями.

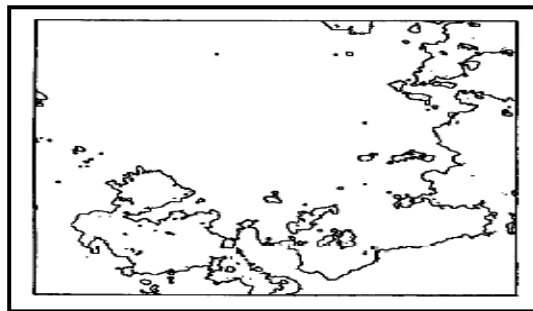


Рис. 12.7. Географическая карта псевдопланетарного участка.

ревьями, кустарниками, травами и жилыми строениями приводит к его практической неотличимости от реальной картины.

Иной алгоритм построения кривых поверхностей был предложен Фоссом. Согласно этому методу, на плоской поверхности в случайно выбранной точке проводится процедура усреднения значений случайных чисел, расположенных в ближайших узлах квадратной сетки со стороной равной единице. После каждого цикла усреднения случайный генератор удваивает число случайных точек, что приводит к наслаиванию одной фрактальной поверхности на другую. Эта процедура необходима для сглаживания резких неровностей при построении ландшафта по методу Фосса. Поверхности, получаемые по методу Фосса, называются *поверхностями случайного сложения*. Отметим, что граничные точки экрана преобразуются по другому закону, чем внутренние точки, поэтому их фрактальная размерность отличается от размерности Хаусдорфа-Безиковича для внутренних областей. Следовательно, надо различать *локальную* и *глобальную* фрактальные размерности. Поэтому и восприятие фрактальной поверхности зависит от аппаратных возможностей их графического представления.

Построенные пейзажи не дают никакой информации о процессах, приводящих к тому или иному виду ландшафта, но определяют достаточно простые алгоритмические способы их отображения. Послойное строительство ландшафта позволяет видоизменять рельеф в нужном направлении до достижения более высокой степени реалистичности. Кроме того, представленные методы служат простым геометрическим инструментом для описания неевклидовых и фрактальных поверхностей. Приведенные методы могут использоваться для описания распределений различных физических параметров (давления, температуры, концентрации) по таким по-

верхностям. Указанный подход объединяет построение ландшафта с возможностью анализа полученных экспериментальных данных.

12.2. Статистика высоты волн

Настоящий философ не должен позволить ни ослепить себя частями Вселенной, где блещет порядок, ни поколебать себя частями, в которых он этого не находит.

Мопертюи

Большая часть планеты Земля покрыто водой. Изменение погодных условий вызывает перемещение воздушных масс. Потoki воздуха, в свою очередь, порождают поверхностные волны на водных просторах (рис.12.8). Чем быстрее и направленнее происходит



Рис. 12.8. *Виды волн в зависимости от скорости воздушного потока.*

движение воздушного потока, тем выше скорость перемещения и высота волны. Кроме того, высота волны также обусловлена интерференционным процессом.

Знание условий формирования волн, в особенности штормовых, их направлений распространения и энергетических характеристик является очень важным для любой деятельности на водоёмах каких бы размеров они ни были. Поэтому наблюдение за волнами и их характеристиками проводится во всех прибрежных государствах мира.

В качестве высоты волны принимается расстояние между её самой высокой и самой низкой точками при пересечении установ-

ленного уровня спокойной воды. Характерная волна имеет высоту h_s , вычисляемую как среднее значение высот $1/3$ крупных волн, зарегистрированных за семнадцатиминутное наблюдение. Отметим, что максимальная высота волны составляет $h_{\max} = 1,8h_s$. Статистический анализ полученных данных показывает фрактальность сигнала $h_s(t)$. График этого сигнала подобен тому, который был получен при изучении случайных блужданий частицы Броуна (см. рис. 4.1 на стр. 67).

Применение R/σ_τ -анализа Херста к сигналу $h_s(t)$ приводит к значению показателя $H = 0,87 \pm 0,01$. Согласно классификации, приведенной в пункте 10.3 (стр. 176-177), такое значение показателя H отвечает склерозному персистентному аттрактору. Это означает, что статистика волн существенно отличается от закона ошибок (закона Гаусса). Исследование высоты волн в течение года (рис. 12.9)

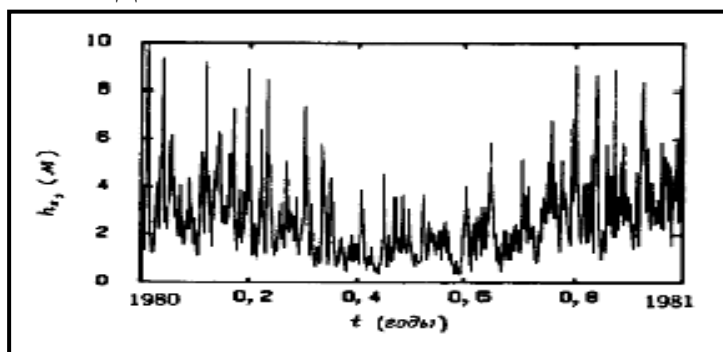


Рис. 12.9. Высота волн в течение одного года.

показывает присутствие периодической составляющей, связанной с сезонными вариациями. R/σ_τ -анализ этих данных приведен на рис. 12.10.

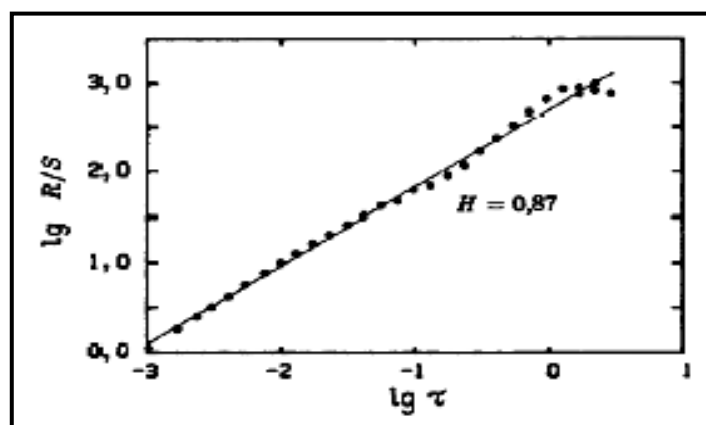


Рис. 12.10. Высота волн в течение одного года.

Для исключения периодических колебаний пока нет принятых правил. Федер с сотр. внесли поправки на наличие осцилляций

в сезонных наблюдениях за высотой волн и обнаружили существование двух областей с разными свойствами (рис. 12.11). Первая из

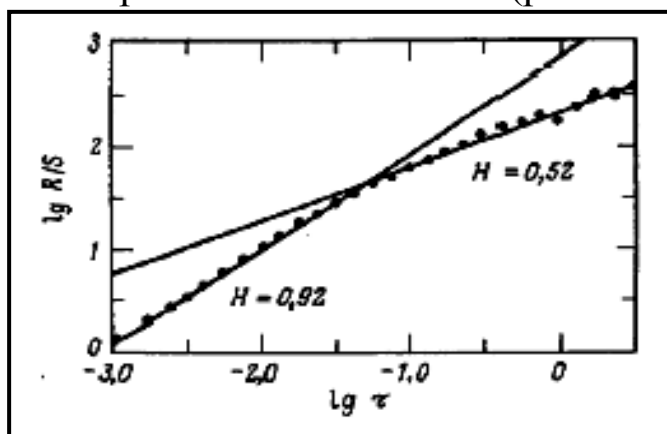


Рис. 12.11. R / σ_{τ} -анализ высоты волн с коррекцией на сезонные периодические колебания.

этих областей характеризуется персистентным аттрактором с усиливающейся памятью ($H=0,92\pm 0,02$), а другая – практически полным отсутствием корреляционной связи ($H=0,52\pm 0,02$), т.е. независимостью сечений исследуемого сигнала. Полученные данные позволяют прогнозировать волны максимальной высоты, что особенно важно для безопасного судоходства и проживания людей на побережьях океанов и морей.

12.3. Фрактальная геометрия облаков и рек

Дороги не те знания, которые отлагаются в мозгу, как жир;
дороги те, которые превращаются в умственные мышцы.

Г. Спенсер

Плоские проекции природных объектов могут быть охарактеризованы отношением их периметров к их площадям. Вначале вычислим отношение периметров к площадям евклидовых фигур таких, как окружность, квадрат и равносторонний треугольник:

– окружность: $P_o = 2\pi R$, $S_o = \pi R^2$, $\nu = \frac{P_o}{\sqrt{S_o}} = 2\sqrt{\pi}$;

– квадрат: $P_o = 4L$, $S_o = L^2$, $\nu = \frac{P_o}{\sqrt{S_o}} = 4$;

– равносторонний треугольник: $P_o = 3L$, $S_o = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}$, $\nu = \frac{P_o}{\sqrt{S_o}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

Из этих равенств видно, что отношение периметра к площади фигуры есть величина постоянная, не зависящая от линейного масштаба фигуры. Если выбрать произвольную плоскую фигуру, например, изображённый на рис. 7.2 (стр. 121) “остров”, то длину его

береговой линии $P_o(\delta)$ и площадь $S_o(\delta)$ можно оценить с помощью квадратных ячеек с линейным размером δ . Согласно Б. Мандельброту, для фрактальных плоских фигур величина

$$v_D(\delta) = \frac{(P_o(\delta))^{1/D}}{\sqrt{S_o(\delta)}} \sim \delta^{\frac{1-D}{D}} \quad (12.7)$$

не зависит от линейных размеров “острова”, но определяется размером эталона δ . В качестве примера рассмотрим “остров” Коха, который генерируется из квадрата со стороной a и изображён на рис. 12.12. При преобразованиях квадрата, выполняемых при пост-

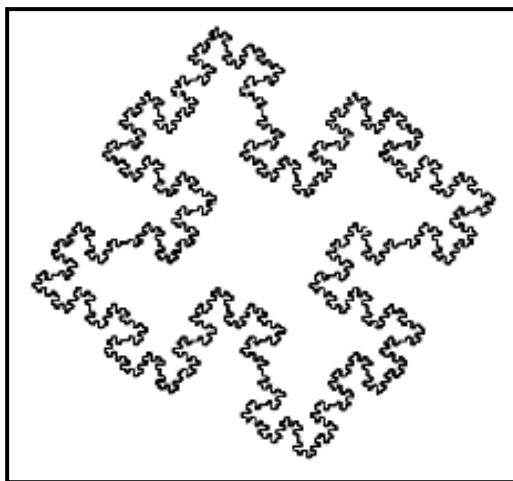


Рис. 12.12. Триадный “остров” Коха.

роении “острова” Коха, его площадь не изменяется, т.е. $S_o(\delta) = a^2$. Периметр кривой Коха n -го порядка определяется формулой

$$L_n = 4 \cdot 8^n \cdot (1/4)^n \cdot a \quad (12.8)$$

и равен длине береговой линии “острова”, измеренной с помощью эталона $\delta = (1/4)^n \cdot a = (1/4)^n \cdot \sqrt{S_o(\delta)}$. Следовательно, порядок линии определяется соотношением

$$n = \frac{\ln(\delta / \sqrt{S_o(\delta)})}{\ln(1/4)}, \quad (12.9)$$

а периметр “острова” –

$$P_o(\delta) = 4 \cdot \delta^{1-D} \cdot S_o^{D/2}. \quad (12.10)$$

В этой формуле размерность Хаусдорфа-Безиковича равна $D=3/2$. Исследование зависимости площади дождевых зон от периметров грозных облаков (рис. 12.13) показало: они подчиняются соотношению (12.7), причём эта зависимость имеет вид, аналогичный графику для поверхности разлома, показанному на рис. 12.1.

Фрактальная размерность облаков, полученная после обработки экспериментальных данных, равна $D=1,35 \pm 0,05$. Сложность тео-

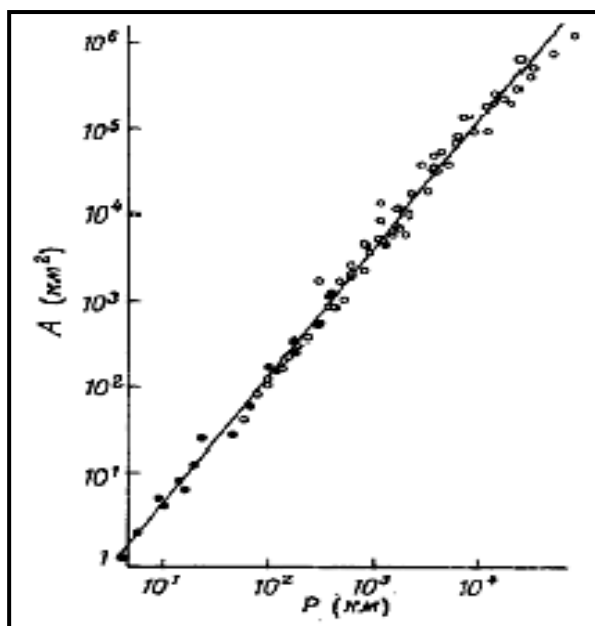


Рис. 12.13. Связь между периметром и площадью облака.

ретического моделирования формы облака заключается в том, что его очертания постоянно изменяются, сохраняя при этом фрактальную структуру, которая не зависит от размеров облака, высоты его расположения, массы и других характеристик. Хентшелем и Прокаччей была предложена модель относительной турбулентной диффузии, согласно которой фрактальная размерность облака должна находиться в интервале $1,37 < D < 1,41$. С учётом погрешности определения этой величины по данным рис. 12.13, ранее найденное значение фрактальной размерности облаков попадает в интервал Хентшеля-Прокаччи. Помимо модели Хентшеля-Прокаччи были предложены иные теоретические модели, по которым облака являются мультифрактальными образованиями.

Если для облаков связь между периметром и площадью определяется равенством (12.10), то для рек связь между их длиной, измеренной вдоль самого протяжённого рукава, и площадью их бассейна, включающего все притоки, описывается приближённым равенством Хэка

$$L(\delta) = 1,4 \cdot S_0^{D/2}, \quad D = 1,2. \quad (12.11)$$

Однако более поздними исследованиями было установлено, что зависимость Хэка не является универсальной, на неё оказывают влияние геологические и топографические особенности местности, по которой протекает река. Если русло реки проходит по песчанику, то коэффициент 1,4 испытывает вариации в интервале от 1,0 до 2,5. Кроме того, у реки существуют довольно протяжённые участки, на

которых в реку не впадает ни один приток. Это приводит к более быстрому росту её длины и нарушению равенства (12.11).

Согласно Хортону, для отыскания правильного соотношения, характеризующего фрактальность рек, надо измерять длины основного русла и его притоков, разбивать эту выборочную совокупность на группы и рассчитывать показатель длины, как отношение средней длины рек одной группы к средней длине рек из соседней группы. Тогда средняя длина группы, состоящей из притоков с наименьшей длиной L_0 , позволяет определить длины всех остальных групп при помощи i -го показателя длины. Аналогичные расчёты проводятся с количеством притоков, которые попали в i -ую группу, что позволяет вычислить i -ый коэффициент ветвления и наименьшую площадь бассейна S_0 . Для бассейна порядка s , который характеризуется показателем длины k_L и коэффициентом ветвления k_b , формула (12.11) заменяется на равенство

$$L = L_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^{D_s}, \quad (12.12)$$

где фрактальная размерность реки определяется формулой

$$D_s = \frac{\ln k_L}{\ln k_b}. \quad (12.13)$$

При аппроксимации равенства (12.13) степенным законом Хортон получил значение $D_s = 1,3$, которое близко к ранее установленному значению $D = 1,22$.

Модель Хортон, устанавливающая связь между показателем длины и коэффициентом ветвления может быть принята в качестве нулевого приближения при теоретическом описании транспортных путей с ветвлениями (железно- и автодорожных магистралей, кровеносной системы биоорганизмов, дыхательной системы, трубопроводов и т.п.). Кроме того, её можно использовать в рекурсивных процедурах построения ветвящихся явлений и процессов.

Рассмотренные примеры демонстрируют необходимость разработки новых методов и приёмов математического анализа фрактальных объектов и их функционирования. Одним из претендентов на эту роль выступает дробное (не целое) исчисление, которое позволяет описывать явления в пористых средах, аномальное случайное блуждание и т.п. Оно возникает при рассмотрении физических явлений со степенными законами распределения.

12.4. Эредитарность, дальноедействие и степенные законы

Малейшее движение отзывается во всей природе. Единственный камень способен произвести изменения в целом мире... Так что в мире нет ничего несущественного.

Б. Паскаль

Присутствие в сигнале, который излучается системой, пространственных и временных корреляций свидетельствует о дальнедействующем и эредитарном характере процессов, протекающих в системе. Следствием дальнедействия является установление ближнего и дальнего порядков в хаотической, случайной среде. Размер областей упорядочения (жидкости и кристаллы) зависит от величины корреляционной длины. Наличие эредитарности проявляется в эффектах памяти (среды с памятью), явлениях гистерезиса, механической усталости металлов, запаздывании электромагнитных и других волн, дипольных моментах атомов и молекул, наведенных пролетающими в их окрестности заряженными частицами.

При описании, например, броуновского движения Эйнштейн предположил, что смещения частицы Броуна статистически независимы (*марковский процесс*) во времени, т.е. отсутствует влияние предыстории на сиюминутное положение частицы. Ранее было показано (см. пункт 10.3, стр.176), что броуновское движение обладает нулевым значением временной корреляционной функции, если её смещения описываются нормальной случайной величиной, которая распределена по закону Гаусса. Именно применение закона Гаусса обеспечило Эйнштейну независимость смещений, хотя это предположение и выглядит сомнительным.

Дальнедействующие силы постоянно видоизменяют распределение атомов среды, в которой перемещается броуновский “бродяга”. Совместное действие пространственно-временных корреляционных сил является причиной случайных блужданий броуновской частицы. Кроме того, нельзя считать время соударения между частицей и атомами достаточно малой величиной. Если бы это было так, то последующее смещение игнорировало бы законы сохранения импульса и энергии, которые учитывают значения динамических характеристик *до* и *после* столкновения. Этот факт говорит о корреляционной связи между скоростями частицы в предыдущий и настоящий моменты времени. Согласно молекулярно-кинетической теории, скорость атомов (молекул) среды определяется температурой. Случайные флуктуации температуры, которые воз-

никают в произвольной точке среды, приводят к тому, что локальная температура отличается от температуры среды. Это явление вызывает флуктуации скорости частицы. В зависимости от персистентности среды флуктуации могут нарастать, или спадать. Таким образом, движение частицы не только испытывает случайные изменения, но и вносит возмущения в среду, которые из-за дальнего действия и персистентности среды могут оказывать существенное влияние на дальнейшие перемещения самой частицы. Другими словами, среда выступает в роли накопителя информации, которая используется для регулирования движения броуновского “бродяги”. Такой подход не требует обязательного использования закона Гаусса. В этом случае динамическая система характеризуется наличием обратной связи между частицей и средой (саморегуляция), накоплением и использованием информации, дальнедействием и эредитарностью. Моделирование случайных блужданий броуновской частицы с учётом перечисленных явлений назовём *синергетическим* (*синергетика* (лат.) – энергия совместного действия).

Первым, кто обратил внимание на возникновение эредитарности, был Пикар (1907). Его идеи были развиты Вольтерра, который сформулировал общие положения явлений *линейной* наследственности (системы с нелинейной эредитарностью будут рассмотрены позже):

1) принцип линейности. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка, которая формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y'_0 \end{cases} \quad (12.14)$$

Вводя обозначение $y''(x) = \varphi(x)$, получим

$$y'(x) = y'_0 + \int_0^x \varphi(s) ds \quad \text{И} \quad y(x) = y_0 + \int_0^x y'(\xi) d\xi. \quad (12.15)$$

Отсюда находим, что

$$y(x) = y_0 + x y'_0 + \int_0^x \int_0^\xi \varphi(s) ds d\xi. \quad (12.16)$$

Изменив порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$y(x) = y_0 + x y'_0 + \int_0^x (x-s) \varphi(s) ds. \quad (12.17)$$

Подставляя найденные выражения для искомой функции и её

производных в условии задачи Коши, найдём *интегральное уравнение Вольтерра второго рода*:

$$\varphi(x) - \int_0^x Q(x; s) \varphi(s) ds = \tilde{f}(x), \quad (12.18)$$

где $Q(x; s) = -[a(x) + (x-s)b(x)]$ и $\tilde{f}(x) = f(x) - [a(x) + xb(x)]y_0' + b(x)y_0$. Уравнение Вольтерра показывает, что вторая производная искомой функции зависит от начальных условий. Это означает, что решение задачи Коши также будет зависеть от начальных условий или предыстории исследуемого процесса. Используя δ -функцию Дирака, которая определяется формулой $\delta(x-s) = \begin{cases} 0, & x \neq s \\ 1, & x = s \end{cases}$ (неэрмитарное слабое), перепишем равенство (12.18) в виде

$$\int_0^x \tilde{Q}(x; s) \varphi(s) ds = \tilde{f}(x), \quad (12.19)$$

где ядро уравнения $\tilde{Q}(x; s) = \delta(x-s) - Q(x; s)$ определяет эволюцию второй производной решения задачи Коши. Формулу (12.19) Вольтерра распространил и на отрицательную полуось времени, т.е.

$$\int_{-\infty}^t \tilde{Q}(t; \tau) \varphi(\tau) d\tau = \tilde{f}(t). \quad (12.20)$$

Интегральное уравнение (12.20) удовлетворяет принципу детерминизма, так как интегрирование в (12.20) ведётся только по предшествующим моментам времени.

2) принцип затухания. Этот принцип сводится к требованию
$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tilde{Q}(t; \tau) = 0. \quad (12.21)$$

3) принцип инвариантности. Ядро уравнения (12.20) должно удовлетворять соотношениям

$$\tilde{Q}(t; \tau) = \tilde{Q}(t-a; \tau-a) = \tilde{Q}(t-\tau; 0) = \tilde{\Phi}(t-\tau). \quad (12.22)$$

Наличие корреляционного времени τ_k (см. пункт 10.1, формулу (10.14), стр. 171) говорит о существовании *ограниченной* эрмитарности: по истечении промежутка времени τ_k стирается информация о событиях, которые происходили ранее. Другими словами, динамическая система утрачивает память о начальных условиях, что соответствует её переходу в область детерминированного хаоса.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания материального тела массой m на пружине с коэффициентом упругос-

ти k под действием внешней побуждающей силы $F(t)$ при отсутствии сопротивления среды. Колебания описываются уравнением (см. также пункт 2.5, стр. 39-41)

$$m \ddot{x} + k x = F(t). \quad (12.23)$$

При выводе этого уравнения завуалировано была введена гипотеза о корреляционной независимости воздействий возвращающей силы в различные моменты времени и её мгновенном действии на колеблющееся тело. При таком подходе игнорируются эффекты, связанные с тем, что пружина растягивается только до определённого уровня, а затем начинает сжиматься. Накопленную информацию о своём состоянии пружина использует для возврата тела в исходное положение. Следовательно, и в этом примере пренебрежение состоянием пружины и её памятью приводит к одностороннему восприятию вынужденных колебаний.

При синергетическом подходе уравнение (12.23) надо заметить на интегро-дифференциальное уравнение вида

$$m \ddot{x} + k \int_{-\infty}^t \tilde{\Phi}(t-\tau) x(\tau) d\tau = F(t), \quad (12.24)$$

где $\tilde{\Phi}(t-\tau) = \delta(t-\tau) - \Phi(t-\tau)$. Если система не обладает “памятью” о предыдущих состояниях, то функция $\Phi(t-\tau) = 0$, а уравнение (12.24) переходит в уравнение (12.23). Возвращающая сила определяется по классической формуле, но с помощью вариационной производной

$$F(x) = -\frac{\delta U(x)}{\delta x} = -k \int_{-\infty}^t \tilde{\Phi}(t-\tau) x(\tau) d\tau. \quad (12.25)$$

Выделив незредитарную часть $\delta(t-\tau)$ в функции памяти $\tilde{\Phi}(t-\tau)$ и умножив уравнение (12.24) на скорость \dot{x} , перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{m \dot{x}^2(t)}{2} + \frac{k x^2(t)}{2} - k x(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) x(\tau) d\tau \right] + \\ + k x^2(t) \Phi(0) + k x(t) \int_{-\infty}^t \dot{\Phi}(t-\tau) x(\tau) d\tau = F \frac{dx(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (12.26)$$

Выражение в квадратных скобках уравнения (12.26) представляет собой полную энергию системы E_h , которая равна сумме кинетической энергии $K = \frac{m \dot{x}^2(t)}{2}$ и потенциальной энергии эредитарной системы $U = \frac{k x^2(t)}{2} - k x(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) x(\tau) d\tau$. Вводя обозначения для скорости

изменения диссипативной функции

$$\frac{\delta W(t)}{dt} = - \left\{ kx^2(t)\Phi(0) + kx(t) \int_{-\infty}^t \dot{\Phi}(t-\tau)x(\tau)d\tau \right\} \quad (12.27)$$

(значок δ указывает на то, что функция диссипации $W(t)$ не является полным дифференциалом), работы внешней силы $dA(t) = F(t)dx(t)$ и умножая уравнение (12.26) на dt , приходим к уравнению

$$dE_h(t) - \delta W(t) = dA(t). \quad (12.28)$$

Из формулы (12.28) следует, что учёт эрдитарности системы тождественен введению в рассмотрение сил сопротивления, а полная энергия системы расходуется на выполнение работы против внешних сил и диссипацию (рассеивание) энергии. Последнее замечание находится в полной гармонии с термодинамическим подходом, если система состоит из ансамбля тождественных осцилляторов.

При классическом подходе к описанию вынужденных колебаний (см. также пункт 2.5, стр. 39-41) решение содержит экспоненту, однако большинство физических и других явлений описываются степенными законами (см. пункт 1.2, стр. 18) – “штандартами” самоподобия или самоаффинности. В таблице 12.2 приведен малый перечень физических явлений и процессов, которые описываются степенными законами. Будем называть *стандартной степенной функцией* соотношение, которое задаётся равенством

$$\Phi_\mu(t > 0) = \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, \quad (12.29)$$

где $\Gamma(\mu) = \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция (см. рис. 12.14), которая при целых значениях аргумента $\mu = n$ равна факториалу числа n , т.е.

$$\Gamma(n+1) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \Gamma(0) = 0! = 1. \quad (12.30)$$

Распространённость степенных законов тесно связана с их свойствами:

- 1) *самоподобие* или *однородность* $\Phi_\mu(\lambda t) = \lambda^{\mu-1} \Phi_\mu(t)$;
- 2) функции $\Phi_\mu(t)$ образуют полугруппу, т.е. их свёртка

$$\Phi_\mu * \Phi_\nu(t) = \int_0^t \Phi_\mu(t-\tau)\Phi_\nu(\tau)d\tau = \Phi_{\mu+\nu}(t);$$

- 3) для значений аргумента $\mu = \dots, -3, -2, -1, 0 = -n$ функции $\Phi_\mu(t)$ определяются через δ -функцию Дирака и её производные:

Таблица 12.2.

Физические явления и их степенные законы.

Явление или процесс	Степенной закон
Лейденская банка	Падение напряжения: $\Delta u(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \approx 1$
Ограниченная диффузией агрегация	Концентрация кластеров: $n(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha = 1$
Конденсатор с диэлектрическим заполнением	Составляющая тока: $I_d(t) \sim (t - t_0)^\alpha$, $\alpha \in (-1; 0)$
Деформация вязкоупругих материалов	Деформация: $\sigma(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$
Релаксация полимеров	Число полимеров, вовлечённых в движение: $n(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in (1/2; 1)$
Люминесценция	Ток затухания: $I(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in (1/2; 2]$
Турбулентность	Скорость изотропного турбулентного движения: $v(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha = 5/7$
Звуковые волны	Коэффициент поглощения: $\gamma(\omega) \sim \omega^\alpha$, $\alpha \in [0; 2]$
Аномальная кинетика экситонов	Коэффициент скорости аннигиляции: $k(t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in [0; 1)$
Распределение случайных величин	Плотность Леви-Смирнова: $f(x) \sim x^{-\alpha}$, $\alpha = 3/2$
Излучение фотонов наночастицей	Закон распределения: $P(T_{on} > t) \sim t^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$

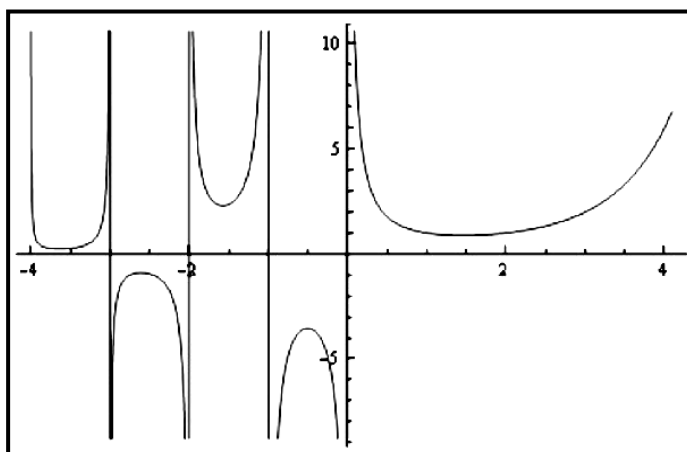


Рис. 12.14. График гамма-функции действительного аргумента.

$$\Phi_{-n}(t) = (-1)^n \delta^{(n)}(t);$$

4) функции $\Phi_\mu(t)$ являются оригиналами преобразования Меллина

$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} p^{-\mu} e^{pt} dp \quad (\operatorname{Re} p > \alpha),$$

от степенных функций $p^{-\mu}$ комплексной переменной $p = x + iy$, α — ограничитель роста экспоненты в преобразовании Лапласа;

- 5) для нахождения Фурье-трансформант $\Phi_\mu(k)$ функций $\Phi_\mu(t)$ достаточно переменную преобразования Лапласа p заменить на комплексную переменную преобразования Фурье $(-ik)$, тогда $\Phi_\mu(k) = (-ik)^{-\mu}$;
- 6) стандартные степенные функции не обладают трансляционной симметрией, т.е. $\Phi_\mu(t+\tau) \neq \text{const} \cdot \Phi_\mu(t)$;
- 7) имеет особенность при $t=0$; при приближении аргумента к нулю ($t \rightarrow 0$) быстро убывает;
- 8) при увеличении аргумента ($t \rightarrow \infty$) убывает достаточно медленно (“длинный” или “тяжёлый хвост”).

Графики некоторых функций $\Phi_\mu(t)$ показаны на рис. 12.15.

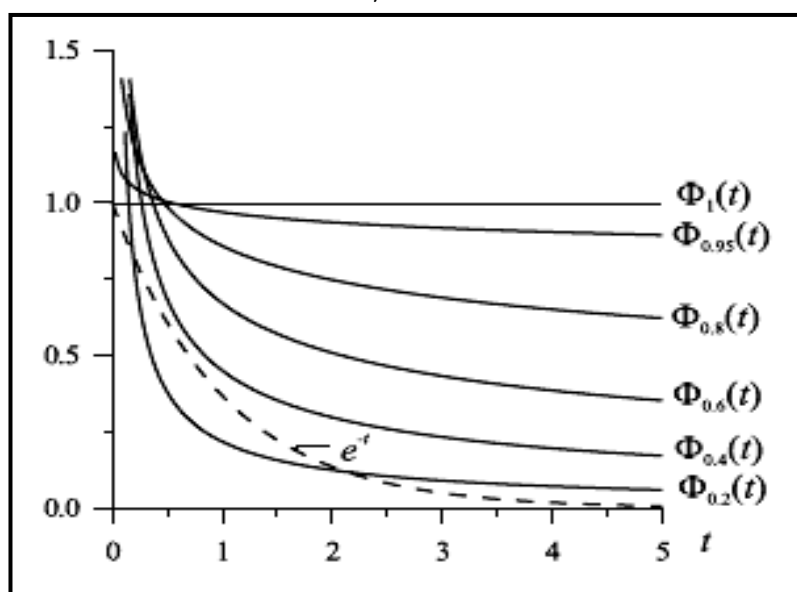


Рис. 12.15. Графики ряда наследственных функций.

Отсутствие или наличие эрдитарности у системы, состояние которой описывается функцией $f(t)$, определяется следующим условием: если скорость изменения функции $\frac{df(t)}{dt}$ в момент времени t пропорциональна значению функции $f(t)$ в тот же момент времени t , то система неэрдитарна; в противном случае — система обладает памятью. Например, если $f(t) = e^{-t}$, то система неэрдитарна, а если $f(t) = t^\mu$, то поведение системы определяется её наследственностью.

Степенные законы широко представлены не только в теоретической физике (законы Ньютона, Кулона, теория полюсов Редже в физике элементарных частиц и т.п.), но и в математике. В частности, они используются в дробном (нецелом) исчислении.

12.5. “Хвостатые” распределения

Мало знать, надо и применять. Мало хотеть, надо и делать.
И. В. Гёте

Хаотичность ансамбля динамических систем, согласно теории Больцмана, характеризуется *энтропией*, которая определяется посредством функции распределения $f(x; \dot{x}; t)$:

$$S(f) = - \int f \ln f dV, \quad (12.31)$$

где $dV = dx d\dot{x}$ – элемент фазового объёма. Из этого определения энтропии следует, что она сохраняется с течением времени. Постоянство энтропии следует из уравнения Лиувилля $\frac{df}{dt} = 0$, определяющего неизменность фазового объёма, занятого ансамблем частиц в фазовом пространстве:

$$\frac{dS(f)}{dt} = - \int (1 + \ln f) \frac{df}{dt} dV = 0. \quad (12.32)$$

Установить точный вид функции распределения для ансамбля не представляется возможным. Это связано со свойством *перемешиваемости* для динамических систем. Оно возникает из-за подвижности взаимодействующих частиц. В этой связи приходится вводить ограничения на вид функции распределения $f(x; \dot{x}; t)$, например, в виде её огрубления. Однако при огрублении определения функции распределения $f(x; \dot{x}; t)$, например, в виде $p = \frac{1}{\delta V} \int f dV$ (δV – область огрубления), ситуация изменяется. Функция распределения p теперь зависит от времени, следовательно, и новая энтропия $S(p) = - \int p \ln p dV$ также будет функцией времени.

Плотность распределения p для непрерывной случайной величины x удовлетворяет условию нормировки. В одномерном случае оно имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1. \quad (12.33)$$

Дифференциальная функция распределения $p(x)$ применяется для нахождения числовых характеристик таких, как математическое ожидание m (наиболее вероятное значение x_0 , которое может принять случайная величина x), дисперсия \mathcal{D} и среднее квадратическое отклонение $\sigma^2 = \mathcal{D}$ (параметры рассеивания значений x_i случайной величины x относительно математического ожидания):

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \quad (12.34)$$

$$D = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 p(x) dx. \quad (12.35)$$

Выполнение условий (12.33)-(12.35) приводит к тому, что уравнение $\delta S(p)=0$ имеет решение, которое представляет собой нормальный закон распределения (закон ошибок, закон Гаусса)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (12.36)$$

Святая вера математиков в центральную теорему теории вероятностей, а физиков – в стационарность энтропии Больцмана, привела к тому, что распределения с бесконечными значениями начального (12.34) и центрального (12.35) моментов оказались вне их исследований. Бесконечные значения моментов означают, что плотность вероятности $p(x)$ недостаточно быстро убывает на бесконечности (“длинный” или “тяжёлый хвост”). Принципиальных возражений против использования “хвостатых” распределений с бесконечными моментами нет, хотя среди научных данных есть явления, для которых они непригодны. Использование атаквистических распределений $g(x)$ возможно при отказе от условий (12.34) и (12.35) и замене их на равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \ln[p(x)] dx = \text{const} = c. \quad (12.37)$$

Тогда условие стационарности энтропии $\delta S=0$ при учёте соотношений (12.33) и (12.37), а также метода неопределённых коэффициентов Лагранжа, приводит к решению $p(x) = g(x)$. Следовательно, любое распределение с плотностью вероятности $g(x)$ удовлетворяет условию стационарности энтропии Больцмана-Гиббса.

Другой способ получения распределений, которые отличаются от закона Гаусса и имеют “тяжёлые хвосты”, был предложен Цаллисом. Он использовал *обобщённую энтропию* вида

$$S(p(x); q) = \frac{1 - \sum_{i=1}^N p_i^q(x)}{q-1}, \quad (12.38)$$

где q – показатель “деформации” вероятности. Энтропия Цаллиса связана с энтропией Реньи (см. пункт 1.4, формулу (1.11), стр. 27) соотношением

$$S_q = \frac{\ln[1 - (q-1)S(p(x); q)]}{q-1}. \quad (12.39)$$

Математический формализм, который основан на использовании обобщённой энтропии, сохраняет в термодинамической теории неизменными преобразования Лежандра, теорему Эренфеста, уравнение фон Неймана и теорему взаимности Онзагера для любого вещественного числа q . Для случая непрерывных случайных величин энтропию Цаллиса представим в виде

$$S(p(x); q) = \frac{1}{q-1} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma p(x)]^q d\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right]. \quad (12.40)$$

Используя условие стационарности энтропии, условия (12.33) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 [p(x)]^q dx = \sigma^{3-q}, \quad (12.41)$$

метод неопределённых коэффициентов Лагранжа

$$\delta S(p(x); q) = \delta \left\{ \frac{1}{q-1} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma p(x)]^q d\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right] + \mu \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \right] + \nu \left[\sigma^{3-q} - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 [p(x)]^q dx \right] \right\} = 0,$$

получим следующий класс распределений

$$p(x; q) = \frac{A(q)}{[1 + \beta(q-1)x^2]^{\frac{1}{q-1}}}, \quad q \in (1; 3), \quad x \in R, \quad (12.42)$$

и

$$\begin{cases} p(x; q) = \frac{A(q)}{[1 + \beta(q-1)x^2]^{\frac{1}{q-1}}}, & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta(1-q)}} \\ p(x; q) = 0, & |x| > \frac{1}{\sqrt{\beta(1-q)}} \end{cases}, \quad q \in (-\infty; 1). \quad (12.43)$$

При значении параметров распределения $q=2$, $A(2)=\frac{1}{\pi}$ и $\beta=1$ формула (12.42) переходит в известное *распределение Коши*, называемое в электродинамике Максвелла естественной формой спектральной линии Лоренца. Такой же вид имеет формула Брейта-Вигнера, которая описывает сечение ядерных реакций вблизи резонансов. Распределение Коши обладает следующими свойствами:

- 1) математическое ожидание существует в смысле главного значения несобственного интеграла (12.34);
- 2) дисперсия бесконечна;

- 3) среднее арифметическое значение суммы случайных величин с распределениями Коши распределяется также по закону Коши (возрастание числа слагаемых не изменяет “статистическую погрешность” среднего арифметического значения).

В дальнейшем был открыт целый ряд устойчивых атавистических распределений: Хольцмарк – изучение влияния электрического поля окружающих атом соседей на его излучение (распределением Хольцмарка описываются флуктуации гравитационного поля случайно распределённых в пространстве звёзд (Чандрасекар и Нейман)); Монин – диффузия частиц в турбулентной среде; Лифшиц – флуктуации температуры в подверженной ядерным излучениям среде; Добрушин – распространение и детектирование радиоволн и др. Для исследования фрактальных процессов в настоящее время используется дробное (нецелое) исчисление.

12.6. Элементы дробного исчисления

Большинство голосов не есть неопровержимое свидетельство в пользу истин, нелегко поддающихся открытию, по той причине, что на такие истины натолкнётся скорее отдельный человек, чем целый народ.

Рене Декарт

Многократное интегрирование функции $f(x)$ задаётся формулой

$$\phi_n(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1. \quad (12.44)$$

Коши получил формулу, которая позволяет заменить многократное интегрирование вычислением одного интеграла:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy. \quad (12.45)$$

Производя замену целого аргумента n на нецелую (в том числе и дробную) переменную μ с учётом (12.30), получим обобщение формулы (12.45) на случай нецелого интегрирования:

$$\phi_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-y)^{\mu-1} f(y) dy. \quad (12.46)$$

С гамма-функцией тесно связана пси-функция, которая определяется равенством

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx}. \quad (12.47)$$

График этой функции показан на рис.12.16. Пси-функция обладает

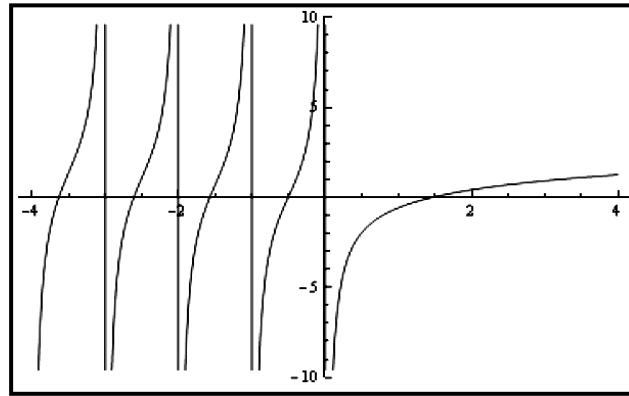


Рис. 12.16. График пси-функции.

следующим свойством $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$, которое часто используется в дробном исчислении. Использование гамма- и пси-функций позволяет обобщить обыкновенную производную на нецелый порядок производной.

Введём в рассмотрение оператор *обыкновенной целой* производной порядка n в виде $D_t^n \equiv \frac{d^n}{dt^n}$. Действие этого оператора на непрерывно дифференцируемую функцию $f(t)$ приводит к n -ой производной функции (нулевая производная равна самой функции):

$$D_t^0 f(t) = f(t); D_t^1 f(t) = f^{(1)}(t); D_t^2 f(t) = f^{(2)}(t); \dots; D_t^n f(t) = f^{(n)}(t). \quad (12.48)$$

Производные целого порядка обладают следующими свойствами:

– *однородность* $D_t^n f(\lambda t + \eta) = \lambda^n f^{(n)}(\lambda t + \eta); \quad (12.49)$

– *линейность* $D_t^n \sum_{i=1}^N C_i f_i(t) = \sum_{i=1}^N C_i f_i^{(n)}(t); \quad (12.50)$

– *полугрупповое свойство* $D_t^m D_t^n f(t) = f^{(m+n)}(t) = D_t^{m+n} f(t); \quad (12.51)$

– *коммутативность* $D_t^m D_t^n f(t) = D_t^n D_t^m f(t). \quad (12.52)$

При дифференцировании применяется стандартный набор правил дифференцирования, одним из которых является взятие производной от произведения двух функций:

$$D_t^n [f(t) \cdot g(t)] = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(i)}(t) g^{(n-i)}(t), \quad (12.53)$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ – число сочетаний из n элементов по i элементов.

Рассмотрим целые производные от элементарных функций и их обобщения по Коши:

- *степенная функция* $f(t) = t^k$ (k – целое число)
 $D_t f(t) = k t^{k-1}; D_t^2 f(t) = k(k-1)t^{k-2}; D_t^3 f(t) = k(k-1)(k-2)t^{k-3}; \dots;$

$$D_t^n f(t) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)t^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!}t^{k-n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)}t^{k-n}. \quad (12.54)$$

Отметим, что

$$D_t^n t^k = \begin{cases} k!, & n = k \\ 0, & n > k \end{cases}. \quad (12.55)$$

Все операторы D_t^n имеют “постоянные” функции вида

$$C_n(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i. \quad (12.56)$$

Степенные функции с отрицательным показателем степени используются при исследовании асимптотического ($t \rightarrow \infty$) поведения других функций. n -ая производная функции равна

$$D_t^n t^{-k} = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} t^{-(k+n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)} t^{-(k+n)}. \quad (12.57)$$

Следовательно, нецелая производная порядка β от степенной функции $f(t) = t^\alpha$ с вещественным показателем степени α имеет вид

$$D_t^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} t^{\alpha-\beta}, & \alpha \geq 0 \\ (-1)^\beta \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} t^{-(\alpha+\beta)}, & \alpha < 0 \end{cases}. \quad (12.58)$$

На рис. 12.17 изображены графики нецелых производных от константы ($\alpha = 0$) при пошаговом изменении их порядка.

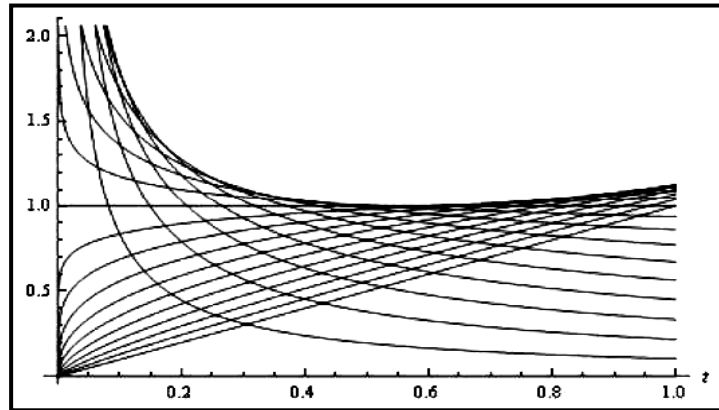


Рис. 12.17. Дробные производные от 1 при изменении β от -1 до 1 с шагом $0,1$.

- экспоненциальная функция $f(t) = e^{\alpha t}$ (α – вещественное число)
 $D_t f(t) = \alpha e^{\alpha t}$; $D_t^2 f(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}$; $D_t^3 f(t) = \alpha^3 e^{\alpha t}$; ...; $D_t^n f(t) = \alpha^n e^{\alpha t}$. (12.59)

Следовательно, нецелая производная порядка β от экспоненциальной функции $f(t) = e^{\alpha t}$ имеет вид

$$D_t^\beta f(t) = \alpha^\beta e^{\alpha t}. \quad (12.60)$$

Если порядок дробной производной меньше нуля ($\beta < 0$), то нецелая производная от экспоненциальной функции будет функцией комплексного переменного.

- логарифмическая функция $f(t) = \log_a t$ ($a > 0, a \neq 1$)

$$D_t f(t) = \frac{1}{t \ln a}; \quad D_t^2 f(t) = -\frac{1}{t^2 \ln a}; \quad D_t^3 f(t) = \frac{1 \cdot 2}{t^3 \ln a}; \quad D_t^4 f(t) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{t^4 \ln a}; \dots;$$

$$D_t^n f(t) = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{t^n \ln a}. \quad (12.61)$$

Следовательно, нецелая производная порядка β от логарифмической функции $f(t) = \log_a t$ имеет вид

$$D_t^\beta f(t) = (-1)^{\beta-1} \Gamma(\beta) \frac{1}{t^\beta \ln a}. \quad (12.62)$$

- синусоида $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

$$D_t f(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi) = \omega \sin(\omega t + \varphi + \pi/2); \quad D_t^2 f(t) = \omega^2 \sin(\omega t + \varphi + 2\pi/2);$$

$$D_t^3 f(t) = \omega^3 \sin(\omega t + \varphi + 3\pi/2); \quad D_t^4 f(t) = \omega^4 \sin(\omega t + \varphi + 4\pi/2); \dots;$$

$$D_t^n f(t) = \omega^n \sin(\omega t + \varphi + n\pi/2). \quad (12.63)$$

Следовательно, нецелая производная порядка β от синусоиды $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ имеет вид

$$D_t^\beta f(t) = \omega^\beta \sin(\omega t + \varphi + \beta\pi/2). \quad (12.64)$$

Полученные результаты показывают, что применение оператора дифференцирования $D_t \equiv \frac{d}{dt}$ к непрерывно дифференцируемой функции $f(t)$ и её производным приводит к последовательности вида

$$f^{(0)}(t) = f(t), \quad f^{(1)}(t), \quad f^{(2)}(t), \dots, \quad f^{(n)}(t), \dots \quad (12.65)$$

Следовательно, действие оператора D_t сводится к увеличению на единицу порядка производной, т.е. D_t является оператором трансляции на единицу для порядка производной. Возникает вопрос: “А нельзя ли перемещать порядок производной не вправо, а влево по оси порядков производных?” Оказывается не только можно, но и нужно.

Рассмотрим производные с целым, но отрицательным показателем порядка. Для этого вычислим первую производную от функции (12.44), записав её в виде

$$\phi_n(x) = \int_a^x \phi_{n-1}(x_n) dx_n, \quad (12.66)$$

тогда

$$D_x \phi_n(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \phi_{n-1}(x_n) dx_n = \phi_{n-1}(x) . \quad (12.67)$$

Заменив порядок производной n на $-n$, можно записать равенство

$$D_{a,x}^{-n} \phi(x) = \phi^{(-n)}(x) = I_{a,x}^{-n} \phi(x) , \quad (12.68)$$

где оператор $D_{a,x}^{-n} = I_{a,x}^{-n}$ представляет собой n -кратное интегрирование функции $\phi(x)$, которое с учётом формулы Коши (12.46) можно представить в виде

$$D_{a,x}^{-n} = I_{a,x}^{-n} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^x (x-y)^{-n-1} \dots dy , \quad (12.69)$$

а для нецелого исчисления –

$$D_{a,x}^{-\beta} = I_{a,x}^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_a^x (x-y)^{-\beta-1} \dots dy . \quad (12.70)$$

Производная (12.70) называется *дробной производной Римана-Лиувилля* отрицательного порядка $\beta > 0$. Заметим, что операторы $D_t^{\beta > 0}$ и $D_t^{\beta < 0}$ не коммутируют, т.е.

$$D_t^{\beta > 0} \cdot D_t^{\beta < 0} \neq D_t^{\beta < 0} \cdot D_t^{\beta > 0} .$$

Оператор D_t^β с вещественным порядком производной называется *дифференциалом*.

Распространение определения дробной производной Римана-Лиувилля на положительные значения порядка производной приводит к формулам для *левостороннего* ($[\beta]$ и $\{\beta\}$ – целая и дробная части числа β , соответственно)

$$\mathbf{D}_{a,x}^\beta = D_{a,x}^{[\beta]+1} I_{a,x}^{1-\{\beta\}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_a^x (x-\xi)^{-\beta-1} \dots d\xi, & \beta < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\{\beta\})} D_x^{[\beta]+1} \int_a^x (x-\xi)^{-\{\beta\}} \dots d\xi, & \beta \geq 0 \end{cases} \quad (12.70)$$

и *правостороннего*

$$\mathbf{D}_{x,b}^\beta = D_{x,b}^{[\beta]+1} I_{x,b}^{1-\{\beta\}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_x^b (\xi-x)^{-\beta-1} \dots d\xi, & \beta < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\{\beta\})} (-D_x)^{[\beta]+1} \int_x^b (\xi-x)^{-\{\beta\}} \dots d\xi, & \beta \geq 0 \end{cases} \quad (12.71)$$

дифференциалов.

Отметим, что интегральные производные Римана-Лиувилля от степенных функций с отрицательными показателями степени не существуют. Кроме того, они не имеют нулевых функций, которые

обращают интеграл в нуль при любых значениях аргумента.

Разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора содержит целые производные от функции любого порядка. Ряд Тейлора позволяет восстановить функцию в области её определения по счётному множеству её производных. Ещё большую информацию несут производные с вещественным порядком производных. Одним из обобщений ряда Тейлора является его представление в виде

$$f(x+\xi) = c \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{D_{a,x}^{ci+\beta} f(x)}{\Gamma(ci+\beta+1)} \xi^{ci+\beta}, \quad c \in (0; 1]. \quad (12.72)$$

При $c=0$, $\beta=0$ с учётом равенства $\frac{1}{\Gamma(i+1)} = 0$ ($i = \dots, -3, -2, -1$) формула (12.72) превращается в стандартный ряд Тейлора. Существуют и другие представления ряда Тейлора с использованием дробного исчисления. Применяя ряд Тейлора к определению дробной производной, получим

$$\mathbf{D}_{a,x}^{\beta} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{\Gamma(i+n\beta+1)} (x-a)^{i-\beta} + \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\xi)}{(x-\xi)^{\beta-n+1}} d\xi, \quad (12.73)$$

здесь $n = [\beta] + 1$. Дробная производная от степенной функции $\Phi_{\mu}(x-a)$ определяется по формуле

$$\mathbf{D}_{x,b}^{\beta} \Phi_{\mu}(x-a) = \frac{(x-a)^{\mu-\beta-1}}{\Gamma(\mu-\beta)}. \quad (12.74)$$

Если $\mu = \beta - \nu$ и $\nu \in [0; \beta)$, то $\mathbf{D}_{x,b}^{\beta} \Phi_{\beta-\nu}(x-a) = 0$. Дробное исчисление назовём *континуальным дифференцированием*.

Помимо дробной производной Римана-Лиувилля используется также нецелая производная Капуто, которая задаётся оператором

$$\mathfrak{D}_{a,x}^{\beta} = I_{a,x}^{n-\beta} D_x^n, \quad (12.75)$$

и производная Маршо

$$\mathfrak{D}_{a,x}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left\{ \beta \int_a^x \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-\xi)^{\beta+1}} d\xi + \frac{f(x)}{(x-a)^{\beta}} \right\}. \quad (12.76)$$

Дробные производные для аналитических функций $f(z)$ комплексного аргумента $z = x + iy$ получают путём обобщения интегральной формулы Коши на случай комплексных показателей порядка производной:

$$D_{\mathcal{L}}^{\kappa} = I_{\mathcal{L}}^{\kappa} = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\kappa+1}} d\zeta. \quad (12.77)$$

Глава 13. Самоподобие физических явлений и процессов

Мы должны стремиться не к тому, чтобы каждый нас понял,
а к тому, чтобы нас нельзя было не понять.

Вергилий

Весь изложенный материал убедительно доказывает, что физика, как наука, исследует самоподобные или самоаффинные объекты и протекающие в них явления. Ещё одним из успехов физики подобия является теория ренорм-группы. Её применение позволило объяснить целую палитру фактов самой разной природы: от фазовых переходов и низкотемпературных процессов до структурных образований в магнитных и неупорядоченных средах; от возникновения динамического хаоса до самоорганизации.

Весьма часто наблюдается картина, когда совершенно разные системы демонстрируют тождественное поведение в критической области. Оно характеризуется одинаковым дробным показателем степени (*критическим индексом*) в связи, которая устанавливается между физическими величинами. Как было показано в Главе 12 физическое подобие связано пространственно-временными корреляциями, возникающими в динамических системах. Влияние прошлого на настоящее, состояния системы в целом на происходящее в локальной точке, взаимное тестирование пары система-среда с помощью вещества, энергии и информации порождают странные аттракторы, репеллеры и слиперы возникающих в системе эволюционных путей (тенденций). Персистентность или антиперсистентность процессов, протекающих в системе, производят отбор приемлемых состояний, которые способствуют стационарному существованию системы или её переводу на качественно новый уровень бытия (самоорганизация). Фрактальная геометрия природы является “зеркалом” всех перечисленных факторов, обеспечивающих жизнеспособность динамической системы. Зачастую протекающие процессы стохастичны, но эта случайность порождает причинно-следственные изменения: из хаоса рождается порядок. А в силу принципа перемешиваемости при определённых значениях управляющих параметров в детерминированной системе возникают хаотические движения.

Одним из способов описания случайного процесса является использование модели Маркова. В этой модели настоящее состояние процесса зависит от конечного числа предшествующих временных моментов (*временная корреляция*). Порядок марковского

процесса определяется ограниченным количеством предшествующих прошлых состояний (*корреляционное время*), которые влияют на протекание процесса в настоящем.

Рассмотрим марковский процесс первого порядка (рис. 13.1):

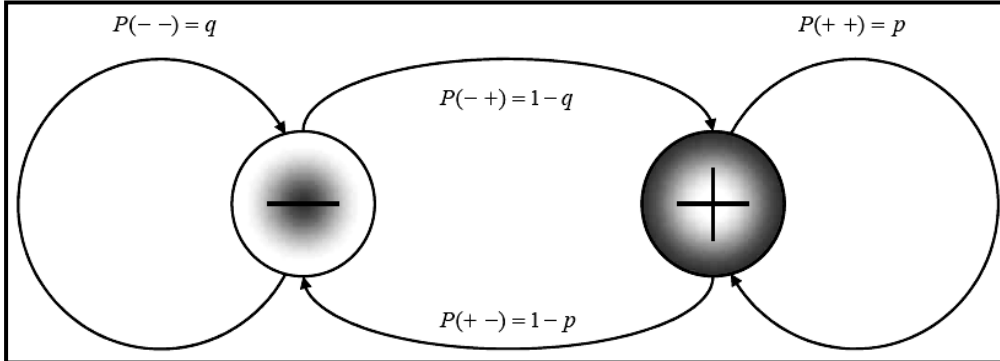


Рис. 13.1. Схема протекания марковского процесса первого порядка

на настоящий момент протекания процесса влияет только его ближайшее прошлое. Представленная схема отражает все двухуровневые системы. Источник, помеченный знаком “+”, порождает нечто с вероятностью p , и подаёт сигнал в виде +1, если нечто поглощается источником (на рис. 13.1 это действие источника показано направленной частью окружности из состояния “+” в “+”). Если источник выдаёт сигнал -1, то нечто перетекает в сток (из “+” в “-”) с вероятностью $q = 1 - p$. Сток, помеченный знаком “-”, поглощает нечто с вероятностью $q = 1 - p$, сигнализируя об этом появлением -1 (из “-” в “-”). Если сигнализатор стока показывает +1, то нечто возвращается в источник с вероятностью $p = 1 - q$.

Энтропия марковской системы с двумя уровнями при $p = q$ определяется формулой Шеннона

$$S_M = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p). \quad (13.1)$$

Эта энтропия совпадает с вероятностью марковского процесса нулевого порядка с двухуровневым источником: нечто порождается и поглощается источником (система без памяти). При $p = q = 1/2$ источник ведёт себя как автомат, выполняющий подбрасывание монеты. Случайность появления сигналов +1 и -1 приводит к последовательности знаков “+” и “-”, в которой они встречаются поровну. Пусть в результате проведения эксперимента была получена последовательность

+++--+-+--+++++---+-+----+---+---++.

Вычеркнем каждый второй символ

+~~+~~+~~/~~-~~/~~-~~/~~-~~/~~+~~/~~-~~/~~-~~/~~+~~/~~+~~/~~-~~/~~+~~/~~+~~/~~-~~/~~+~~/~~-~~/~~-~~/~~+~~/~~.

получим последовательность

+ + - - - + - - + + - + + - + - - +,

в которой символы “+” и “-” встречаются с той же вероятностью $p=q=1/2$, что и в исходной последовательности. Это говорит о том, что даже после выбрасывания половины полученных данных усечённая последовательность *подобна* исходному ряду. При $p \neq 1/2$ самоподобие нарушается. Уберём произвольным образом в исходной последовательности шесть знаков “+” (теперь вероятность обнаружить “+” в последовательности равна $p=12/18=2/3 > 0,5$) и повторим процедуру вычёркивания каждого второго знака, получим

~~+~~ ~~-~~ ~~+~~ ~~+~~ ~~+~~ ~~+~~ ~~-~~ ~~-~~ ~~+~~ ~~+~~ ~~-~~ ~~+~~ ~~-~~ ~~+~~ ~~-~~ ~~-~~ ~~+~~ ~~+~~ ~~-~~ ~~+~~,

т.е. последовательность принимает вид

+ - + + + - - + - - - - + - .

Вероятность обнаружить знак “+” в наудачу выбранном месте последовательности равна $p=6/15=2/5 < 0,5$. Так как вероятность изменилась, то прошлое коррелирует с настоящим, т.е. влияет на него.

Рассмотренный пример показывает, что при значениях $p > 0,5$ вероятность появления знака “+” после “+” выше, чем вероятность появления знака “-”. При $p < 0,5$ наблюдается противоположная картина: возникает череда из противоположных знаков. Это свидетельствует об ослаблении корреляции между символами последовательности. Корреляция между символами s_n и s_{n+m} , которые расположены на местах n и $n+m$, определяется по формуле

$$K_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s_n s_{n+m} \right). \quad (13.2)$$

Марковский источник первого порядка стационарный и эргодический, поэтому (13.2) можно заменить усреднением по ансамблям (--) , (- +) , (+ -) и (+ +) (разность между вероятностями вытекания из источника и возврата в него и вероятностями аналогичных процессов для стока):

$$K_1 = (2p - 2q) / 2 = p - (1 - p) = 2p - 1. \quad (13.3)$$

Из формулы (13.3) видно, что при $p = 1/2$ корреляционная связь между элементами отсутствует. Если $p < 1/2$, то $K_1 < 0$ – система антиперсистентна: происходит достаточно частая смена символов. При выполнении обратного неравенства для вероятности ($p > 1/2$) корреляция положительна, появляется череда из знаков “+”. Длина этих “очереди” (из символов “+”) определяется корреляционным

временем.

В силу того, что в марковском процессе первого порядка настоящее определяется предшествующим прошлым, то корреляция K_m связана с K_1 простым соотношением

$$K_m = (K_1)^m = (2p-1)^m. \quad (13.4)$$

Введём в рассмотрение новый параметр α , который определяется при $p \geq 1/2$ из равенства

$$e^{-\alpha} = 2p-1, \quad (13.5)$$

тогда величина K_m будет равна

$$K_m = e^{-\alpha m}. \quad (13.6)$$

Коэффициент корреляции для усечённой последовательности символов равен квадрату величины (13.6). Удваивание параметра α приводит к тому, что новая вероятность обнаружения символа “+” $p_{(1/2)}$ после усечения наполовину последовательности будет связана со старой вероятностью p соотношением

$$2p_{(1/2)} - 1 = (2p-1)^2. \quad (13.7)$$

Подставив в (13.7) значение $p=2/5$, найдём $p_{(1/2)} = 0,52$. После повторного вычёркивания каждого второго символа получим

$$2p_{(1/4)} - 1 = (2p_{(1/2)} - 1)^2 \Rightarrow p_{(1/4)} = 0,5008. \quad (13.8)$$

Следовательно, процедура двукратного уменьшения числа символов в каждой последовательности приводит к уменьшению корреляции в расположении символов. Последовательность вероятностей $p_{(1/2^n)}$ быстро сходится к значению 0,5 при увеличении номера усечения n ($n \rightarrow \infty$). Процесс усечения последовательности символов соответствует умножению параметра α на коэффициент подобия k . Это приводит к тому, что усечённая последовательность становится асимптотически подобной исходной последовательности. Величина $1/(k\alpha)$ определяет корреляционную длину для перенормировки исходной последовательности или момент возникновения самоподобия.

В физике теория перенормировок известна под названием ренорм-группы Вильсона (некоторые примеры приведены в пункте 1.2, стр. 21-23). Применение теории Вильсона позволило выделить *классы универсальности* при использовании степенных законов с критическими индексами. Вид класса универсальности зависит от фрактальной размерности пространства и числа степеней свободы

параметра порядка. Убежденность физиков в правильности теории перенормировок была основана на исследовании точно решаемых моделей (например, модели Изинга). В настоящее время интерес к теории перенормировок значительно уменьшился по целому ряду причин: так и остались невыясненными вопросы о сходимости ренормализационных рядов, о различии критических индексов фазовых переходов для иерархических решёток с одинаковыми связностями и фрактальными размерностями и др. Однако идея перенормировки остаётся по-прежнему актуальной.

13.1. Модель Изинга и теорема Янга-Ли

Если вы можете решить задачу, это – упражнение; в противном случае, это – проблема.

Ричард Белламан

Пусть спиновая решётка находится в магнитном поле с напряжённостью H . Спин s_i , расположенный в узле i , может принимать значения $+1$ (спин вверх \uparrow) или -1 (спин вниз \downarrow). Он взаимодействует только с ближайшими соседями (обозначим их $\{i, j\}$) и с магнитным полем. Обозначим через J энергию обменного взаимодействия, тогда энергия спиновой системы, состоящей из N элементов, равна

$$E = J \sum_{\{i,j\}} s_i s_j + H \sum_i s_i. \quad (13.9)$$

Положительные значения J соответствуют ферромагнитному взаимодействию, а $J < 0$ – антиферромагнитному. Используя статистику Больцмана, запишем *статистическую сумму* по конфигурациям спинов $[s_i]$ в виде

$$Z_N(T, H) = \sum_{[s_i]} \exp(-\beta E) = \sum_{[s_i]} \exp\left(-K \sum_{\{i,j\}} s_i s_j - L \sum_i s_i\right), \quad (13.10)$$

здесь $\beta = (k_B T)^{-1}$, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град – постоянная Больцмана, T – температура по абсолютной шкале Кельвина, $K = \beta J$, $L = \beta H$.

Удельная свободная энергия в расчёте на один узел равна

$$f(T, H) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N, \quad (13.11)$$

где $f_N = \frac{\ln Z_N}{\beta N}$. Комплексные нули статистической суммы (13.10) определяют особенности функции (13.11) и отвечают за появление фазовых переходов, согласно теории Янга-Ли. В термодинамическом пределе ($N \rightarrow \infty$) таких нулей становится бесконечно много и они располагаются вблизи действительной оси.

При фиксированном значении K статистическая сумма зависит только от параметра L . Вводя комплексную переменную $z = e^{2L}$, перепишем (13.10) в виде

$$Z_N(T, H) = z^{-N/2} \sum_{n=0}^N a_n(K) z^n = z^{-N/2} P_N(z), \quad (13.12)$$

где $P_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n(K) z^n$ — полином степени N с вещественными положительными коэффициентами $a_n(K)$. Янг и Ли доказали, что для ферромагнетика ($K > 0$) нули полинома $P_N(z)$ любого порядка N лежат на единичной окружности. Для действительных значений температуры T это означает, что нули полинома $P_N(z)$ лежат на мнимой оси внешнего магнитного поля H . При температурах ниже критической температуры T_c магнитного фазового перехода в термодинамическом пределе нули образуют последовательность, которая сходится к точке $H = 0$. Этот результат не зависит ни от типа решётки, ни от пространственной размерности модели. Поэтому рассмотрим одно- и двумерную решётки Изинга при $H = 0$.

13.2. Одно- и двумерная модели Изинга при отсутствии внешнего магнитного поля

Взрослея, мы становимся серьёзнее, и это, позволю себе заметить, первый шаг к тому, чтобы поглупеть.

Джозеф Аддисон

Рассмотрим одномерную решётку Изинга (цепочка со свободными концами) при отсутствии внешнего магнитного поля. Вводя новую переменную $x = e^{-2K}$, перепишем формулу (13.10) в виде

$$Z_{N(chain)}(T, H) = 2x^{-(N-1)/2} (x+1)^{N-1}. \quad (13.13)$$

Функция (13.13) имеет нуль $x = -1$ порядка $N-1$. При отождествлении $N+1$ -ого звена цепочки с её первым звеном получим окружность, для которой формула (13.13) имеет иной вид

$$Z_{N(circle)}(T, H) = x^{-N/2} [(x+1)^N + (x-1)^N]. \quad (13.14)$$

Эта функция имеет N нулей на мнимой оси при

$$x_k = i \operatorname{ctg} \left(\frac{(2k+1)\pi}{2N} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1), \quad (13.15)$$

что разительно отличается от количества нулей для цепочки. Эта формула указывает на наличие особенности в точке $T = 0$. Сделав замену $x = is$, получим для плотности корней (в термодинамическом пределе) следующее выражение

$$\boxed{v(s) = \frac{1}{N} \frac{dk}{ds} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}}. \quad (13.16)$$

Формула (13.16) описывает распределение Коши. Полученные результаты указывают на отсутствие фазовых переходов в одномерной цепочке.

Исследования Онзагера двумерной решётки Изинга показали, что статистическую сумму можно записать в виде

$$Z_N(T) = \prod_{p=1}^m \prod_{l=1}^{n/2} \left[ch(2K_1) ch(2K_2) - \cos\left(\frac{2\pi p}{m}\right) sh(2K_1) - \cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right) sh(2K_2) \right], \quad (13.17)$$

где $K_i = \beta J_i$, J_i – постоянная взаимодействия вдоль оси i , $N = m \cdot n$. В анизотропном случае $J_1 \neq J_2$ нули функции (13.17) находятся внутри конической области, остриё которой упирается в действительную ось. Иными словами, последовательность комплексных нулей статистической суммы сходится к действительной точке фазового перехода.

При термодинамическом описании возможных состояний N -частичной системы перенормировка состоит в том, чтобы уменьшить число степеней свободы с N до $N_1 < N$ с изменением интенсивных характеристик системы. Нахождение вида зависимости между значениями температуры до (T) и после (T_1) перенормировки, т.е. вида функции

$$T_1 = f(T), \quad (13.18)$$

является основной задачей ренорм-группового подхода. Выполнение равенства (13.18) должно приводить к равенству статистических сумм до и после перенормировки с точностью до несущественного множителя k :

$$Z_{N_1}(T_1) = k Z_N(T). \quad (13.19)$$

Критическая точка фазового перехода T_c является неподвижной точкой преобразования нормировки (13.18). Ей соответствует особенность функции преобразования $f(T)$. Наличие особенности порождает скачкообразное поведение некоторых термодинамических характеристик системы.

В силу того, что термодинамическое описание состояния вещества проще описывается статистической суммой $Z_{N_1}(T_1)$, то вначале находят нули этой функции, а затем по формуле (13.18) восстанавливают нули функции $Z_N(T)$. Используя описанную методику $N-2$ раза, можно прийти к двухчастичной статистической сумме

$Z_2(T)$. Движение в обратную сторону приводит к вычислению нулей всех термодинамических потенциалов, вплоть до термодинамического предела ($N \rightarrow \infty$). Таким образом, нули потенциала $Z_2(T)$ являются прообразами нулей вышележащих уровней. Для свободной цепочки

$$Z_{2(chain)}(T, H) = 2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}, \quad (13.20)$$

а для кольца –

$$Z_{2(circle)}(T, H) = 2 \frac{x^2+1}{x}. \quad (13.21)$$

Исследованиями Янга и Ли было установлено, что множество нулей исходной статистической суммы тождественно множеству Жюлиа (см. пункт 5.2, стр. 89) преобразования перенормировки. Следовательно, любая ренорм-процедура состоит в отыскании всех точек, которые являются пересечением множества Жюлиа с вещественной осью. В качестве примера рассмотрим одномерную цепочку Изинга, которая состоит из спинов, направленных либо вверх (\uparrow), либо вниз (\downarrow). Эта модель идентична марковскому процессу первого порядка. Перенормировка исходной статистической суммы производится путём проведения суммирования спинов через один (вычёркивание каждого второго символа в марковском процессе). Статистическая сумма одномерной цепочки из N спинов s_i имеет вид

$$\begin{aligned} Z_N(x) &= \sum_{s_i (i=2k+1)} \sum_{s_i (i=2k)} x^{[(s_1 s_2 + s_2 s_3) + (s_3 s_4 + s_4 s_5) + \dots] / 2} = \\ &= \sum_{s_i (i=2k+1)} \left(x^{(s_1+s_3)/2} + x^{-(s_1+s_3)/2} \right) \left(x^{(s_3+s_5)/2} + x^{-(s_3+s_5)/2} \right) \dots = \\ &= \sum_{s_i (i=2k+1)} \left(\sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} \right)} (x')^{s_1 s_3 / 2} \right) \left(\sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} \right)} x^{s_3 s_5 / 2} \right) \dots = k Z_{N/2}(x'), \quad (13.22) \end{aligned}$$

где $k = \left[\sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} \right)} \right]^{N/2}$, а преобразование перенормировки имеет вид

$$x' = f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right). \quad (13.23)$$

Формула (13.21) с помощью замены $z = \frac{x+1}{x-1}$ сводится к преобразованию Жюлиа: $z' = z^2$.

Ноль статистической суммы (13.20) попадает в сверхустойчивую неподвижную точку $x_0 = -1$ преобразования (13.23). Если ите-

рациональный процесс начинается с этой точки, то на ней он и заканчивается, так как точка $x_0 = -1$ является слипером. Статистическая сумма (13.21) обращается в нуль в точках $x_{1,2} = \mp i$ ($i^2 = -1$, i – мнимая единица), которые принадлежат множеству Жюлиа.

13.3. Иерархическая решётка со спинами Поттса

Гениален тот, кто открывает принципы.
М. Колесников

Рассмотрим иерархическую решётку, построение структуры которой выполняется согласно рекуррентной процедуре (см. пункт 1.2, рис. 1.15а, стр. 22). На n -ом итерационном шаге построения решётка имеет 4^{n-1} связей. На следующем этапе каждая связь заменяется двумя новыми узлами и четырьмя связями новой решётки.

Поттс обобщил модель Изинга и предположил, что в каждом узле решётки находится *спин Поттса*, который может принимать не 2, а q состояний: $s_i = 1; 2; \dots; q$. Взаимодействие спина Поттса с ближайшими соседями происходит только тогда, когда их состояния совпадают. Энергия спиновой конфигурации $[s_i]$ определяется формулой

$$E_{[s_i]} = \sum_{\{i, j\}} E_{i, j}, \quad (13.24)$$

где $E_{i, j} = \begin{cases} -J, & s_i = s_j \\ 0, & s_i \neq s_j \end{cases} = -J \delta(s_i - s_j)$. Статистическая сумма на n -ой стадии

построения представляет собой полином порядка 4^{n-1} относительно аргумента $x = e^{\beta J}$. Возврат с n -го уровня на один нижележащий уровень выполняется суммированием по состояниям $2 \cdot 4^{n-2}$ спинов, возникших на n -ом шаге построения иерархической решётки, т.е.

$$Z_{(n)}(x) = k Z_{(n-1)}(x'). \quad (13.25)$$

Преобразование вида (13.18) определяется равенством

$$x' = \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2, \quad (13.26)$$

а коэффициент пропорциональности

$$k = (2x + q - 2)^{2 \cdot 4^{n-2}}. \quad (13.27)$$

Каждый нуль функции $Z_{(n-1)}$ соответствует четырём нулям функции $Z_{(n)}$. Для первого итерационного шага построения иерархической решётки статистическая сумма равна

$$Z_{(1)}(x) = q(x + q - 1). \quad (13.28)$$

Итерационный поиск корней статистической суммы $Z_{(n)}$ следует начинать с единственного нуля функции (13.28) $x=1-q$. При увеличении номера итерации до бесконечности получим все корни статистической суммы, неограниченно приближающиеся к множеству Жюлиа преобразования (13.26). Это преобразование имеет 2 сверхпритягивающие неподвижные точки $x=1$ ($T=\infty$ – полный беспорядок) и $x=\infty$ ($T=0$ – идеальный порядок при $J>0$). Кроме этих точек есть ещё четыре: $x_\infty=(2-q)/2$, $x_{0\mp}=\mp\sqrt{1-q}$ и $x_q=1-q$. Указанные точки определяют вид фазовой границы между пара- и ферромагнитными состояниями.

Точка x_∞ – бесконечно удалённая притягивающая точка. Если начать итерационную процедуру с этой точки, то все точки окажутся на бесконечности. Обе точки $x_{0\mp}=\mp\sqrt{1-q}$ в процессе построения решётки стремятся к нулю. Таким образом, необходимо проследить за итерационными траекториями нуля и точки $x_q=1-q$, которые взаимно дополняют друг друга. В связи с последним замечанием достаточно проследить за траекторией точки $x=0$. Если эта точка принадлежит пара- или ферромагнитной фазе, то дополнительных фаз (аттракторов) не возникает. В случае, когда точка $x=0$ является слипером и не притягивается ни к пара-, ни к ферромагнитному аттрактору, то по теореме Фату возможно появление одной или двух дополнительных фаз. Их появление связано с тем, что точка $x=0$ не принадлежит множеству Жюлиа преобразования (13.26).

13.4. Переход Андерсона

Ты никогда не будешь знать достаточно, если не будешь знать больше, чем достаточно.

Уильям Блейк

Мультифрактальный анализ используется при исследовании явлений и процессов в неупорядоченных средах, в частности, *эффекта Андерсона* (переход металл-диэлектрик). Пусть квантовая частица массой m движется в поле случайного потенциала $U(\mathbf{r})$. Для стационарного случая уравнение Шрёдингера имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r})+U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r}). \quad (13.29)$$

($\hbar=h/(2\pi)=1,055\cdot 10^{-34}$ Дж·с – приведенная постоянная Планка). В зависимости от величины энергии E и степени беспорядка решения

уравнения (13.29) образуют два класса поведения квантовой частицы: *локализацию* и *блуждание по среде*.

Локализованные состояния характеризуются волновой функцией, которая быстро убывает с ростом расстояния от местоположения частицы \mathbf{r}_0 :

$$|\psi(\mathbf{r})| \sim \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{\xi}\right). \quad (13.30)$$

где ξ – *радиус локализации* (в диэлектрике, а в металле эта величина называется корреляционной длиной). Делокализованное состояние распределено по всему объёму образца. В качестве примера такого состояния можно привести распространение монохроматической, плоской волны с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ (\mathbf{k} – волновой вектор):

$$\psi(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (13.31)$$

В энергетическом пространстве локализованные и делокализованные состояния отделяются друг от друга изоэнергетической поверхностью $E = E_c$. Величина E_c называется *порогом подвижности*. На этой границе радиус локализации обращается в бесконечность, так как он обратно пропорционален модулю разности между энергией частицы и порогом подвижности в степени ν (ν – критический индекс радиуса локализации):

$$\xi \sim |E - E_c|^{-\nu}. \quad (13.32)$$

Переход состояния квантовой частицы из одной области в другую называется *квантовым переходом Андерсона*.

На границе между областями локализации и блужданий по всему объёму фазы волновая функция частицы имеет мультифрактальную структуру. Пороговая энергия E_c определяется для бесконечного образца. Следовательно, для системы с конечным линейным размером L переход будет “размытым” и будет происходить в узкой полосе ($E_c - \delta E; E_c + \delta E$). Размер полосы определяется неравенствами

$$\xi \gg L \text{ и } |\delta E| \ll L^{-1/\nu}. \quad (13.33)$$

Так как квадрат модуля волновой функции определяет плотность вероятности, то моменты M_1 и M_2 равны

$$M_1 = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^D\mathbf{r} = 1 \quad (13.34)$$

и

$$M_2 = \int |\psi(\mathbf{r})|^4 d^D\mathbf{r}, \quad (13.35)$$

соответственно. В формулах (13.34) и (13.35) интегрирование ведётся по всему объёму образца, который расположен в пространстве с размерностью D . Для локализованного состояния огибающая волновой функции определяется формулой

$$|\psi(\mathbf{r})| \approx \xi^{-D/2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{\xi}\right). \quad (13.36)$$

Следовательно,

$$M_2 \sim \xi^{-D} \quad (13.37)$$

и не зависит от размера образца L . В случае плоской волны

$$\psi(\mathbf{r}) \approx L^{-D/2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (13.38)$$

а второй момент зависит от размера L по степенному закону

$$M_2 \sim L^{-D}. \quad (13.39)$$

Последнее равенство говорит о том, что волновая функция заполняет весь объём образца.

Численные эксперименты показали, что в точке перехода Андерсона квадрат модуля волновой функции состоит из чередующихся редких всплесков с большой амплитудой. Каждый вейвлет (“wavelet” (англ.) – всплеск, маленькая волна) сопровождается окружением из мелких волн. Каждый большой всплеск с “челядью” из более мелких волн образует фрактальную структуру со своей размерностью Хаусдорфа-Безиковича. Совокупность всех вейвлетов с их окружениями образуют мультифрактальный объект.

Фрактальные размерности моментов более высокого порядка в случае нелокализованных состояний оцениваются по формуле (см. пункт 7.1, формулу 7.5, стр.123)

$$M_q = \int |\psi(\mathbf{r})|^{2q} d^D \mathbf{r} \sim L^{-(q-1)D(q)} = L^{-\tau(q)}, \quad (13.40)$$

Волновая функция отлична от нуля практически во всех точках D -мерного пространства, поэтому $D(0)=D$. Остальные размерности удовлетворяют неравенствам

$$D(0) = D > D(1) > D(2) > \dots > D(\infty) \neq 0. \quad (13.41)$$

Нахождение спектра размерностей осуществляется так же, как было показано в Главе 7 (стр. 120-135). Применение *метода перевала* вблизи максимума α_0 функции спектра размерностей $f(\alpha)$ приводит к тому, что распределение вероятностей нахождения частицы в ячейке с номером i ($p_i \sim L^{-\alpha_i}$) имеет вид *лог-нормального распределения*, которому ещё подчиняется, например, проводимость:

$$P(p) \sim \exp\left[-\lambda \ln L [(\ln p / \ln L) + \alpha_0]^2\right]. \quad (13.42)$$

Глава 14. Клеточные автоматы

Всегда, прежде чем может быть возведено что-то новое, должен быть поколеблен авторитет существующего.

Стефан Цвейг

Клеточные автоматы широко используются для аналогового моделирования физических явлений и процессов. Они состоят из набора ячеек, которые образуют регулярную решётку. Состояние ячейки определяется одним числом или набором чисел (вектор, тензор и т.д.). Числа могут быть целыми, вещественными, комплексными или гиперкомплексными. Состояния ячеек изменяются синхронно через дискретные промежутки времени. Изменения выполняются по локальным правилам и могут зависеть от состояний соседних ячеек. Правила стационарны, т.е. не меняются с течением времени. С физической точки зрения правила определяют локальные взаимодействия между ячейками, т.е. описывают поведение динамической системы.

Итерационный процесс преобразования клеточного автомата сводится к определению состояний ячеек в текущий момент времени в зависимости от состояний близлежащих соседей и их самих. Если *новое состояние* ячейки зависит от её состояния в текущий и предыдущие моменты времени, то клеточный автомат эргодичен, т.е. обладает памятью. Множество соседних клеток, которые влияют на изменение состояния выбранной ячейки, называется её *окрестностью*. Задание вида окрестности осуществляется путём ведения дискретного метрического пространства.

Любая вычислительная система состоит из 2 частей: архитектурной (набор выполняемых операций) и строительной (набор постоянных и переменных данных). Первая часть фиксирована и активна, а другая – изменчива и пассивна. Отличие клеточных автоматов от классической вычислительной схемы состоит в том, что обе части состоят из подобных элементов. Такой подход приводит к саморазвитию, самосовершенствованию и построению аналогичных себе структур. Другой отличительной чертой клеточных автоматов является локальность и схожесть правил, по которым происходит эволюция системы. Кроме того, дискретность используемых переменных позволяет исследовать новый класс – недифференцируемые функции. Уменьшение размера ячейки приводит к снижению дискретных свойств клеточных автоматов, однако полностью они не исчезают (это может произойти только при нулевом разме-

ре клетки, но тогда клеточный автомат прекращает своё существование). Итак, основными свойствами клеточных автоматов являются:

- 1) конечность размеров ячеек и их возможных состояний;
- 2) локальность вероятностных правил эволюции состояний (новое состояние клетки определяется ближайшим окружением и, при необходимости, её предыдущим состоянием);
- 3) самоподобие всех клеток, за исключением, может быть, граничных клеток (при необходимости краевые эффекты подавляются за счёт введения циклических условий);
- 4) синхронность изменений состояний всех ячеек клеточного автомата.

Клеточные автоматы разделяются на причинно-следственные и стохастические, однородные и неоднородные, на подвижные и неподвижные, абстрактные и реальные. В детерминированных автоматах состояние ячейки в последующий момент времени однозначно определяется предыдущим состоянием клетки и её окрестности. Для вероятностных автоматов характерно определение состояния ячеек осуществляется по стохастическим правилам. В однородных автоматах правила изменения состояний для всех клеток одинаковы, а в неоднородных – нет. В подвижных клеточных автоматах ячейка может перемещаться по решётке, а в неподвижных – её местоположение неизменно. Абстрактные автоматы отражают развитие произвольных изменений, а реальные – природные преобразования. На рис.14.1 показаны сфотографированная и смоделированная клеточным автоматом турбулентная дорожка.

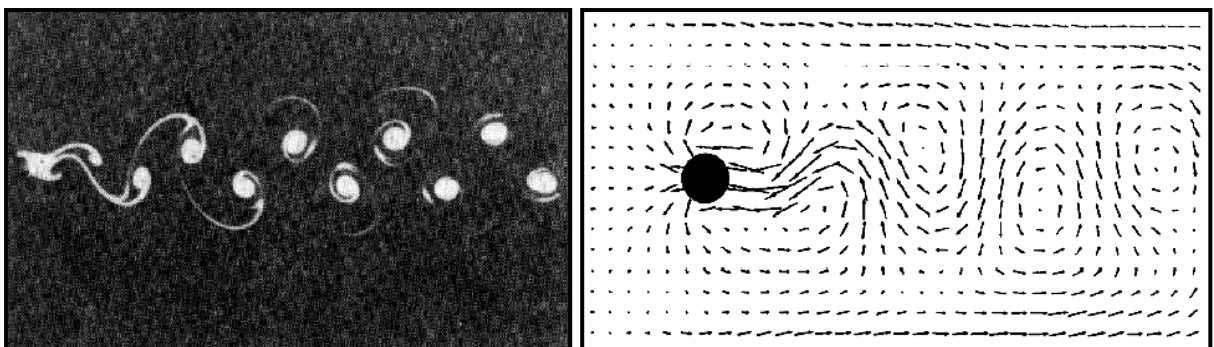


Рис. 14.1. *Дорожка Кармана при обтекании жидкостью цилиндра.*

В силу того, что клеточные автоматы используют итерационную процедуру и фиксированные правила построения, то их реализация должна приводить к созданию фрактальных объектов, как это было продемонстрировано в предыдущих Главах.

14.1. Игры “Жизнь”, “Аква-Тор” и другие

Некоторые ценят книги по их объёму, точно написаны они для упражнения рук, а не ума.

Грасиан-и-Моралес Бальтасар

Игра “Жизнь” была придумана английским математиком Дж. Конвеем в 1970 году и впервые опубликована в рубрике “*Математические игры*” журнала *Scientific American*. При компьютерной реализации игры используют поверхность тора, которая разделена на клетки. Каждая клетка, как и спин в модели Изинга, может находиться в двух состояниях: живая (“1”) или мёртвая (“0”). Окрестность клетки состоит из восьми соседей. Распределение живых клеток до начала игры задаётся произвольным образом и определяет первое поколение. Правила игры состоят в следующем:

- если мёртвая клетка соседствует с *тремя* живыми ячейками, то она становится живой;
- если живая клетка имеет *ровно троих* живых соседей, то она остаётся живой;
- если живых соседей *меньше* (одиночество) или *больше* (перенаселённость) *трёх*, то живая клетка умирает.

Первоначальное распределение живых клеток игрок определяет либо самостоятельно, либо с помощью генератора псевдослучайных чисел. Программа игры может последовательно просматривать все ячейки и определять изменения состояний каждой клетки, но это очень медленный алгоритм. Быстрый алгоритм на каждом итерационном шаге определяет списки клеток, чьи состояния будут изменены на следующем этапе эволюции. Каждое вновь возникающее распределение задаёт будущую конфигурацию, но восстановить по ней прошлое состояние клеточного автомата невозможно. С этой точки зрения клеточный автомат демонстрирует необратимость происходящих событий. В процессе эволюционного развития произвольного вида конфигурации приобретают свойства симметрии, сохраняют его и приумножают его виды.

Возникающие в игре Конвея структуры можно разделить на классы:

- *устойчивые* (не изменяются при переходе от одного поколения к другому);
- *периодические* (их состояние повторяется через несколько поколений);

- *двигающиеся* (фигура повторяется при изменении её местоположения);
- *ружья* (состояние повторяется с появлением новых фигур);
- *паровозы* (двигающиеся фигуры, которые оставляют за собой следы из устойчивых или периодических фигур);
- *пожиратели* (могут пережить столкновения с некоторыми двигающимися фигурами).

В качестве примеров на рис. 14.2 и 14.3 показаны устойчивые и периодические фигуры, соответственно.

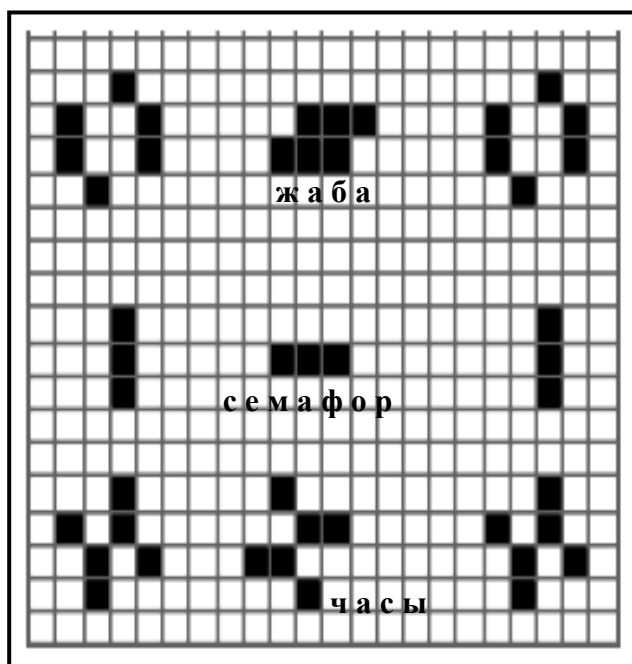
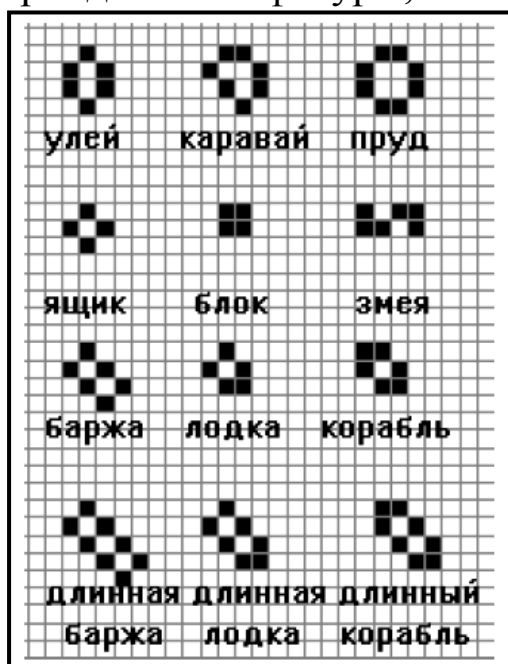


Рис. 14.2. Устойчивые фигуры.

Рис. 14.3. Периодические структуры.

Ценность модельной игры Конвея (см. также Приложение Б) для физической теории состоит в следующем:

- демонстрация самоорганизации случайного распределения;
- возникновение множества типов упорядоченности (устойчивых, периодических, подвижных и т.п.);
- реализация отбора жизнеспособных состояний;
- первостепенная важность правил отбора, а не внутреннего и внешнего устройств эволюционной площадки, хотя они тоже оказывают краткосрочное влияние на динамику развития системы;
- необратимость эволюционных преобразований;
- появление фрактальных объектов;
- универсальность вычислительных возможностей и их развитие (накопление и переработка информации).

Эволюция биосистемы “хищник”–“жертва” описывается моделью Ферхюльста (см. Главу 4, пункт 4.4, стр. 72). Реализация этой модели с помощью клеточных автоматов осуществляется на торе (рис. 14.4), который получается путём замыкания противо-

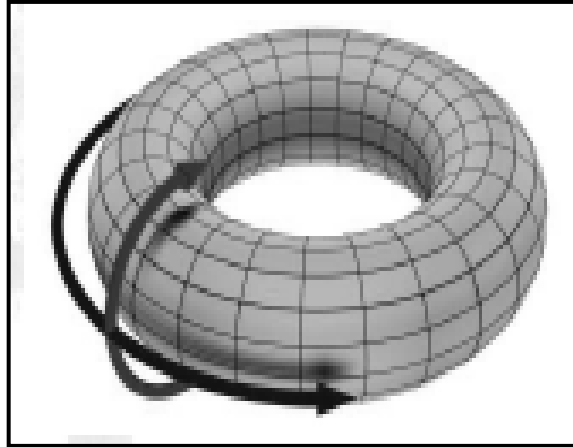


Рис. 14.4. Игра “хищник”–“жертва” на торе.

ложных сторон экрана дисплея (например, игра “Аква-Тор”: акулы и рыбы). “Жертвы” имеют неограниченный запас пищи, а “хищники” питаются “жертвами”.

Правила игры заключаются в следующем:

- “жертва” и “хищник” могут случайно перемещаться в любую незанятую ячейку, которая имеет общую границу с ячейкой особи;
- особь может периодически оставлять в покидаемой ячейке потомство (период воспроизводства является *параметром игры*);
- особь живёт ограниченное время (также *параметр игры*);
- “хищник”, который в течение определённого времени (*параметр игры*) не встречает “жертву”, погибает;
- “хищник” поедает “жертву”, если “жертва” оказывается в соседней ячейке, при этом он перемещается на её место.

Помимо указанных игр изучен целый ряд других сценариев развития популяций, подчиняющихся различным правилам. В частности, правила, по которым выбранная клетка меняет своё состояние при условии “жизнедеятельности” хотя бы *одного из восьми* ближайших соседей, приводят к возникновению фрактальной фигуры. Этот самоподобный объект показан на рис. 14.5. Пусть состояние клеточного автомата задаётся следующими правилами:

- при определении состояния центральной клетки учитывается состояние не только восьми ближайших соседей, но и состояние самой центральной клетки;
- если “мертвы” не более четырёх клеток, то центральная клетка

“умирает” или остаётся “мертвой”;

– если “мертвы” более четырёх клеток с учётом центральной клетки, то центральная клетка “оживает” или остаётся “живой”.

Реализация указанного закона приводит к возникновению конфигураций, которые весьма похоже отображают распределение спинов в модели Изинга (рис.14.6). Возникающие структуры однород-

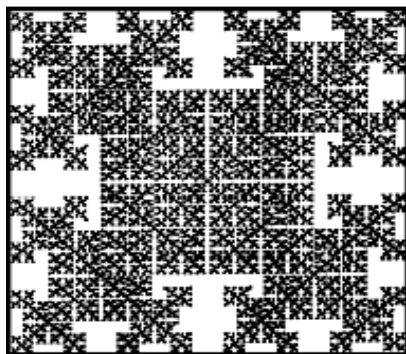


Рис. 14.5. Фрактальная “снежинка”, возникающая по правилу “одна из восьми”.

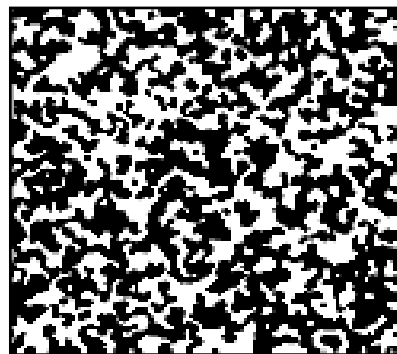


Рис. 14.6. Распределение “живых” и “мёртвых” клеток.

ны, но не фрактальны. Самоподобие в “спиновых” системах происходит при критическом значении управляющего параметра (например, энергии) и нарушении симметрии.

Рассмотренные примеры демонстрируют клеточные автоматы с детерминированным, предопределённым поведением. Если отказаться от задания состояний соседних клеток в качестве входных переменных для следующего итерационного шага, то получим клеточный автомат “без памяти”. Однако переобозначение переменных всё-таки указывает на наличие простейшей “памяти”, которая обеспечивает самовоспроизводство. В частности, такой двумерный клеточный автомат позволяет построить “салфетку” Серпинского (см. рис. 2.10, пункт 2.4, стр. 36). При задании вероятностей тех или иных процессов в клеточном автомате его поведение изменяется случайным образом. Это позволяет моделировать случайные блуждания частицы (например, диффузию с дрейфом).

Таким образом, клеточные автоматы являются аналоговыми моделями (“с памятью” или без неё, стохастическими или детерминированными) реальных явлений и процессов. Они позволяют выявить качественные стороны изучаемого объекта и определить существенные характеристики систем различной природы, в том числе и биосистем. Поэтому изучим влияние случайной информации на формирование биоструктур.

14.2. Влияние случайной информации и фрактальности на формирование биосообществ

Чем больше вы скажете, тем меньше люди запомнят.

Франсуа Фенелон

Биологическим популяциям присущи все свойства нелинейных динамических систем: фрактальность структуры и протекающих процессов, детерминированный хаос, самоорганизация и другие характеристики. Например, для популяции муравьёв хаос наблюдается в спонтанной активности рабочих муравьёв, фрактальные колонии возникают в брачный период, самоорганизация возникает при обустройстве гнёзд. Целый ряд сайтов всемирной паутины (см., например, <http://www.esd.ornl.gov/programs/COMPMECH> и др.) посвящены моделированию поведения биосистем. Предложенные модели учитывают самые разные аспекты развития, как индивидуальных особей, так и популяций в целом.

Важнейшей характеристикой биологических популяций является их возможность накапливать, перерабатывать, сохранять и передавать *информацию*. В этой связи рассмотрим процесс случайного распространения и сохранения *информации*. Клеточный автомат зададим правилами:

- клетка может находиться в одном из трёх состояний;
- при получении новой *информации* клетка окрашивается в чёрный цвет;
- по истечении определённого времени новость устаревает, но сохраняется клеткой, которая окрашивается в серый цвет;
- клетка, которая не получила новость или забыла об имеющейся *информации*, приобретает белый цвет.

Распространение *информации* задаётся правилами:

- все клетки, за исключением одной чёрной клетки с новостной информацией, имеют белый цвет;
- клетка остаётся белой (отсутствие *информации*) или перекрашивается в чёрный цвет при получении нового сообщения;
- белая клетка меняет цвет (усвоение *информации*) при выполнении условия $p \cdot m > 1$, где p определяет вероятность принятия новости, а m – количество “проинформированных” соседей;
- чёрная клетка принимает серый цвет (сохранение *информации*), если её окружение состоит из клеток с чёрным или серым цветом;

– серая клетка окрашивается в белый цвет (*информация* утрачивает свою актуальность и забывается), если вокруг неё расположены клетки с чёрным или серым цветом.

По истечении достаточно большого числа итераций распределение новостей принимает колоколообразный вид (рис. 14.7а), характерный для динамики реальных информационных процессов (рис. 14.7б). Такая форма кривой соответствует диффузии инфор-

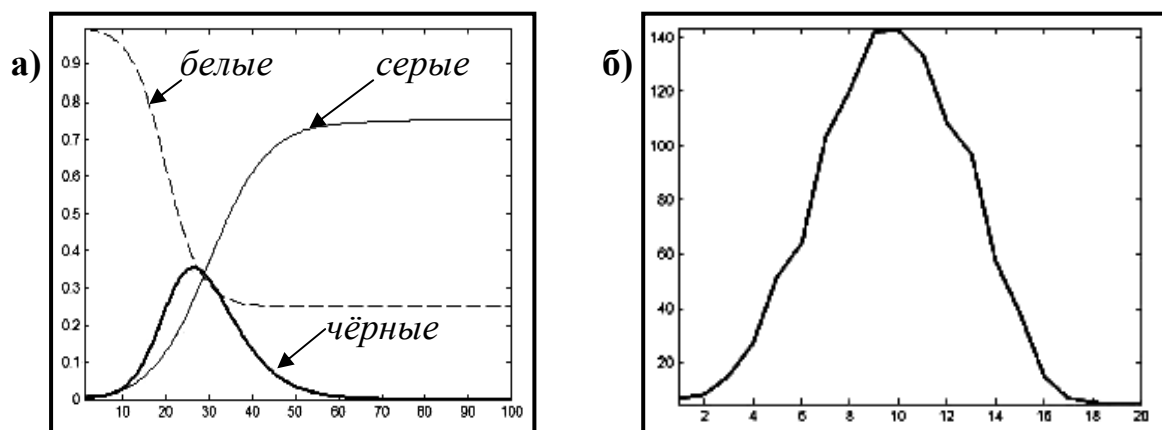


Рис. 14.7. Распространение новой информации в модельной (а) и реальной среде (б).

мации в заданной среде. По аналогичному сценарию происходит распределение вещества, энергии и энтропии в пространстве.

Формирование градиентных потоков различной природы порождает как индивидуальное существование особей или их объединение в сообщество на некоторой площади (ареал обитания), так и фрактальность строения биологических популяций. Распределение биосистем по *ареалам обитания* носит случайный, равномерный или агрегированный характер. Тип распределения определяется отношением дисперсии к среднему расстоянию между особями. Подавляющая часть биологических видов предпочитает агрегированное состояние. Степень агрегированности особей исследуемого вида примерно одинакова при различных масштабах области обитания. Это позволяет представить биологический вид в виде случайного (мульти-)фрактала. Диапазон существования фрактального биосообщества определяется средней площадью, занимаемой индивидуумом (нижняя масштабная граница), и размером ареала обитания (верхнее скейлинговое ограничение). Адекватность фрактальной модели пространственного распределения видов наблюдается только на определённых масштабах (ограниченное самоподобие), вне которых модель приводит к значительным неточнос-

тям. До масштаба в 20 метров виды распределяются случайным образом, после чего возникает фрактальная структура, которая определяется доминирующим в ареале обитания видом. Остальные виды распределяются случайно или агрегировано, что подтверждается моделированием на клеточных автоматах.

14.3. Фрактальность клеточных автоматов

Понимая подсознательное, мы освобождаем себя от его власти.
Карл Густав Юнг

Задание генеалогического кода в виде правил, по которым работает клеточный автомат, приводит к возникновению фрактальных объектов. Компьютерное программирование правил осуществляется с использованием булевой алгебры (двоичное исчисление: состояния компьютерных ячеек 0 и 1). Запись целых чисел в двоичном исчислении имеет вид:

Десятичная: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...
Двоичная: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...

Суммируя цифры в двоичном коде получим последовательность чисел вида $A(n) = 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, \dots$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Эта последовательность чисел получается при использовании итерационной процедуры, состоящей в том, что ко всем числам предыдущей последовательности прибавляется единица и возникшая подпоследовательность записывается справа от предыдущей последовательности: $A_1(n) = 0, A_2(n) = 01, A_3(n) = 0112, A_4(n) = 01121223, A_5(n) = 0112122312232334, \dots$

Указанное правило построения последовательности $A(n)$ приводит к удвоению членов каждой последующей последовательности, т.е. число членов последовательности с каждым итерационным шагом растёт по экспоненциальному закону. Если удалить из последовательности цифры, стоящие на нечётных местах, то получим ту же самую последовательность $A(n)$, но с удвоенным аргументом:

$A(n) = 0, \cancel{1}, 1, \cancel{2}, 1, \cancel{2}, 2, \cancel{3}, 1, \cancel{2}, 2, \cancel{3}, 2, \cancel{3}, 3, \cancel{4}, \dots$
 $A(2n) = 0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, \dots$

Таким образом, последовательность $A(n)$ самоподобна и обладает свойством $A(2n) = A(n)$. Рассмотрим последовательность

$$B(n) = 2^{A(n)} = 1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, \dots$$

Эта последовательность самоподобна не только по индексу её членов, но и по их величине, она обладает свойством

$$B(n + 2^i) = 2B(n), \quad 0 \leq n < 2^i.$$

Числа $B(n)$ получают с помощью клеточного автомата, который вычисляет биномиальные коэффициенты $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ (см. также треугольник Паскаля на стр. 36).

Предположим, что одномерный клеточный автомат состоит из ячеек, в каждой из которых записаны нули за исключением одной ячейки, в которой хранится единица. Эволюция клеточной системы происходит по схеме: суммируются значения в выбранной ячейке и в ячейке слева от неё; происходит перезаписывание значения ячейки справа от исходной ячейки. Последовательность состояний автомата имеет вид:

...0001000...; ...0001100...; ...0001210...; ...0001331...; ...00014641...

Приведенный пример клеточного автомата является простейшим компьютером, вычисляющим биномиальные коэффициенты.

Определим количество нечётных коэффициентов при заданном n для всех i из интервала от 0 до n .

$$\boxed{n=0}: C_0^0 = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1 (0!=1) - \textcircled{1}$$

$$\boxed{n=1}: C_1^0 = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1; C_1^1 = \frac{1!}{1!(1-1)!} = 1 - \textcircled{2}$$

$$\boxed{n=2}: C_2^0 = \frac{2!}{0!(2-0)!} = 1; C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2; C_2^2 = \frac{2!}{0!(2-2)!} = 1 - \textcircled{2}$$

$$\boxed{n=3}: C_3^0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1; C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3; C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3; C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = 1 - \textcircled{4}$$

$$\boxed{n=4}: C_4^0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1; C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4; C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6; C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4;$$

$$C_4^4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1 - \textcircled{2} \dots$$

Последовательности, очень похожие на $B(n)$, возникают при исследовании целого ряда химических реакций, например, в процессах каталитического окисления. Если построить треугольник Паскаля в двоичном исчислении (см. стр. 36), то полученная картина соответствует “салфетке” Серпинского. Это означает, что в основе самоподобия ряда целых чисел и процессов окисления лежит один и тот же фрактал. Следовательно, каталитическое окисление происходит по тем же правилам, что и работа одномерного клеточного автомата, который вычисляет биномиальные коэффициенты. Скорость химической реакции в дискретные моменты времени $t=n$ описывается последовательностью $B(n)$. Рассмотренные примеры указывают на *фрактальность* клеточных автоматов.

14.4. Самоорганизация и компьютерное моделирование

Я сделал лучшую свою работу тогда, когда я забыл свою точку зрения. Чем меньше я делаю из себя, тем больше меня есть.

Лао-Цзы

Теория самоорганизации в открытых, нелинейных, диссипативных системах возникла в результате объединения следующих научных направлений:

- исследование *необратимых процессов* с помощью методов статистической физики и линейной теории Онзагера;
- построение *теории открытых систем*, которые находятся в стационарном состоянии и сохраняют устойчивость в определённом диапазоне внешних воздействий;
- выяснение условий *возникновения из хаоса самоорганизующихся, упорядочивающихся структур*;
- качественный и количественный анализ *нелинейных динамических систем* (бифуркации, фракталы, катастрофы, солитоны и др.);
- применение фрактальной геометрии, дробного дифференцирования и компьютерного моделирования при решении физических и других задач.

Новая наука имеет разные названия: теория о самоорганизации, *синергетика*, теория открытых систем, теория диссипативных структур, термодинамика необратимых процессов, теория нелинейных динамических систем. *Синергетика* – это наука об общих закономерностях возникновения, существования, устойчивости и эволюции самоорганизующихся диссипативных структур, возникающих в разных по природе открытых системах при протекании необратимых процессов. До появления *синергетики* классическая физика занималась изучением поведения *изолированных, закрытых* и *открытых* систем, состояние которых находилось в малой окрестности положения равновесия. В этой области природные законы описываются линейными зависимостями между внутренними параметрами системы (например, *связь между потоком и термодинамическими силами в теории Онзагера*), диапазон применения которых достаточно широк. Однако в настоящее время зачастую приходится иметь дело с явлениями и процессами, которые связаны с возникновением качественно нового поведения диссипативной системы. В этой связи были разработаны нелинейные модели, которые позволяют не только выявить общие закономер-

ности хаотической самоорганизации, но и охватить более широкий круг проблем: от физических до социально-экономических.

Синергетика возникла на стыке наук, она применяет методы и приёмы исследования, одинаково приложимые к различным системам вне зависимости от их природного уровня. Отличие синергетики от других наук состоит в том, что она изучает не статику, не равновесное или стационарное состояния системы (как, например, *термодинамика* и *теория информации*), а её поведение вдали от таких состояний. Она изучает не алгоритмы и механические атрибуты, которые определяют правильное функционирование системы (как, например, *кибернетика*), а устанавливает принципы самоорганизации и эволюционных преобразований, приводящих к длительному, безотказному существованию системы. Синергетика учитывает флуктуации в точках ветвления (*бифуркации*) в отличие от *теории динамических систем*. В целом, синергетика занимается изучением *стохастических (вероятностных)* систем с зависящими от времени управляющими параметрами. Изменяя управляющие параметры, можно менять поведение системы неожиданным образом, причём предугадать, как поведёт себя система до проведения эксперимента невозможно, что связано с неполнотой *информации* о составных частях диссипативной системы. Неопределённость и непредсказуемость поведения составляющих диссипативной системы, наличие *резонансных* явлений приводит к необходимости введения понятия *информации (энтропии)*. Недостаток информации приводит к отказу от индивидуального описания “*частич*”, переходу к разным усреднениям при исследовании свойств системы в целом (например, *ансамбли подсистем, временное усреднение* и т.п.), неизбежным квантовым флуктуациям и зависимости эволюции некоторых систем от начальных или граничных условий.

В окрестности точки бифуркации достаточно малое внешнее воздействие может привести к значительным последствиям, которые невозможно предвидеть. В этой области возникают корреляции в состояниях месторасположения и скоростях движения компонентов динамической системы. Корреляции наблюдаются на макроскопических масштабах в течение продолжительного времени. *Кооперативное* поведение частиц приводит к возникновению из хаоса упорядоченных областей, которые самоорганизуются и эво-

люционируют. Возникающая нелинейность в поведении системы приводит к появлению обратных связей и связанных с ними возможностями управления свойствами и характеристиками системы.

Синергетическими системами, в которых возникает самоорганизация, являются ячейки Бенара (см. пункт 4.6, стр. 79), периодические химические реакции Белоусова-Жаботинского, биологическая система хищник-жертва и другие. В эксперименте Бенара при критическом градиенте температуры слой жидкости с верхней свободной границей разбивается на совокупность шестиугольных ячеек. Внутри ячеек жидкость поднимается вверх, а стекает по их стенкам. Аналогичная картина наблюдается при высыхании озёр, образовании колоний бактерий и других процессах. Отметим, что причиной кинетического перехода системы в целом на иной организационный уровень является хаотизация движений компонентов (аттракторы Лоренца, Рёсслера и др., см. пункт 4.6, стр. 79-85).

Сложность аналитического исследования процессов в нелинейных системах вынуждает учёных к применению компьютерного моделирования. Моделирование (*модель* происходит от латинского слова *modus*, которое переводится как *копия* или *образ*) сводится к выделению основных свойств реальной системы. Отсечение качеств, которые слабо влияют на поведение системы, позволяет описать частные и общие характеристики на основе идеализированного представления об устройстве и структуре исследуемого объекта.

Численный эксперимент, проводимый на персональном компьютере, позволяет проверить соответствие модели реальным явлениям и предсказать возможные изменения в поведении объекта при изменении управляющих параметров. Модель позволяет выявить не только свойства оригинала, но и установить закономерности его взаимодействия с внешней средой. Если модель адекватна оригиналу, то она используется для сохранения информации об аналогичных системах в свёрнутом виде (*математический код*) и совершенствования представлений о таких структурах. Предлагаемые модели могут отображать различные характерные черты, поэтому, чем ближе модель к реальности, тем больше свойств различных систем она описывает. При ознакомлении с ранее существующими моделями выделяют их положительные и отрицательные стороны.

Набор моделей, отображающих различные стороны материального мира, определяет уровень научного знания о среде обитания. Модели разделяют на *вещественные* (натурные, физические и др.) и *идеальные* (наглядные, математические и др.). Натурные модели используются для исследования процессов и явлений в реальных условиях. Физические модели воспроизводят свойства оригиналов на макетах и в экспериментальных установках. Наглядные модели отображают изменения системы в виде таблиц, графиков, схем и т.п. материалов. Математические модели используют аналоговые, структурные, геометрические и другие образы исследуемого явления или процесса.

Иную классификацию моделей можно предложить, если исходить из схемы “воздействие среды – реакция системы” (*чёрный ящик с неизвестным строением*). В данном случае моделируется матрица перехода от заданного вектора воздействий к вектору отклика. Модели разделяют на линейные и нелинейные, однородные и неоднородные, устойчивые и неустойчивые и т.п.

Наивысшей абстрагированностью от конкретного содержания того или иного объекта исследования обладают только математические модели, которые и получили наиболее широкое распространение при научных исследованиях. Использование ЭВМ позволяет существенно ускорить сопоставление предлагаемых моделей с реальными системами, а также проводить независимый компьютерный эксперимент для проверки гипотез и теоретических предсказаний. Конечной целью математического моделирования является отображение реальности с заданной степенью точности и надёжности получаемых результатов. Математические модели используют *имитационный* и *аналитический* подходы. Имитационное моделирование базируется на описании реальности с помощью функциональных зависимостей, которые связывают параметры внешних раздражителей с изменениями характеристик состояния системы (например, равновесная термодинамика или электродинамика). Аналитическое копирование использует уравнения различной математической природы, аппроксимацию и интерполяцию, оптимизационные и вариационные принципы, стохастическую и детерминизм.

Смена количественного исследования (аналитический метод) качественным подходом (имитационный уровень) показывает на-

личие критического значения управляющего параметра, при котором наблюдается возникновение новой структурной модели: аналитические формулы и выражения заменяются набором алгоритмов имитации установленных переходов, преобразований, ветвлений и т.п. *Аналитическое моделирование* даёт возможность прогноза поведения реальной системы в течение длительного промежутка времени в определённом диапазоне числовых значений параметров состояния. *Имитационная модель* отображает информацию о системе только в заданные промежутки времени при фиксированных параметрах состояния.

Неотъемлемой частью моделирования является программное обеспечение и возможность его обновления при усовершенствовании модели. Естественно, что основными преимуществами программной среды являются простота ввода исходных данных с их последующей корректировкой без внесения изменений в само программное обеспечение; *визуализация* (отображение на дисплее компьютера) объектов и процессов. Такими универсальными программами являются *Mathcad*, *MathLab*, *Maple*, *SolidWorks*, *AutoCAD Designer* и другие.

Проведение компьютерного эксперимента обеспечивает контроль за всеми характеристиками объекта, явления или процесса. Другими преимуществами компьютерного эксперимента являются:

- дешевизна;
- безопасность, функциональность и технологичность;
- контролируемая стохастичность;
- возможность проведения опасных и практически неосуществимых экспериментов (например, сценарии планетарных катастроф, эволюционный процесс при тех или иных физико-химических условиях);
- проверка теоретических моделей без проведения экспериментов.

Создание компьютерных моделей природных явлений и процессов позволяет понять причины возникновения динамического хаоса, фрактальности реальных объектов, условия зарождения и развития самоорганизующихся систем, кинетический характер фазовых превращений в открытых диссипативных структурах и многие другие характеристики реального мира.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Avnir D. The fractal approach to heterogeneous chemistry / D. Avnir – London: John Wiley, 1989. – 345 pp.
2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: теория и примеры применения / Н.М. Астафьева // Успехи физических наук. – 1996. – Т.166, № 11. – С. 1135-1170.
3. Barnsley M.F. Superfractals / M.F. Barnsley – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 464 pp.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы / С.И. Баскаков – М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
5. Bensimon D. Viscous flows in two dimensions / D. Bensimon, L.P. Kadanoff, S. Liang, B. Shraiman, C. Tang // Rev. Mod. Phys. – 1986. – V.58. – PP. 977-999.
6. Берже М. Геометрия / М. Берже – М.: Мир, 1984. – Т.1. – 560 с.; Т.2. – 368 с.
7. Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль – М.: Мир, 1991. – 368 с.
8. Божокин С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 128 с.
9. Burrough P.A. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data / P.A. Burrough // Nature. – 1981. – V.294. – PP. 240-242.
10. Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В.В. Васильев, Л.А. Симак – Киев: НАН Украины, 2008. – 256 с.
11. Встовский Г.В. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов / Г.В. Встовский, А.Г. Колмаков, И.Ж. Бунин – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 116 с.
12. Гелашвили Д.Б. Степенной закон и принцип самоподобия в описании видовой структуры сообществ / Д.Б. Гелашвили, Д.И. Иудин, Г.С. Розенберг, В.Н. Якимов, Г.В. Шурганова // Поволжский экологический журнал, 2004. – №3. – с. 227-245.
13. de Gennes P.G. Lois générales pour l’injection d’un fluide dans un milieu poreux aléatoire / P.G. de Gennes, E. Guyon // J. Mec. – 1978. – V.17. – PP. 403-432.
14. Gray A. Modern differential geometry of curves and surfaces / A.

Gray – CRC Press, 1997. – 1056 pp.

15. Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике. Ч.1 / Х. Гулд, Я. Тобочник – М.: Мир, 1990. – 349 с.

16. DeGregoria A.J. Saffman-Taylor finger width at low interfacial tension / A.J. DeGregoria, L.W. Schwartz // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – V.58. – PP. 1742-1744.

17. Дубровин Б.А. Современная геометрия. Методы и приложения / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко – М.: Наука, 1979. – 760 с.

18. Дьедонне Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне – М.: Мир, 1964. – 432 с.

19. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике / В.П. Дьяконов – М.: Солон-Р, 2002. – 448 с.

20. Jensen M.H. Global universality at the onset of chaos: Results of a forced Rayleigh-Benard experiment / M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia, J. Stavans // *Phys. Rev. Lett.* – 1985. – V.55. – PP. 2798-2801.

21. Jensen M.H. Effect of gravity on the Saffman-Taylor meniscus: Theory and experiment / M.H. Jensen // *Phys.* – 1987. – A35. – PP. 2221-2227.

22. Зосимов В.В. Фракталы в волновых процессах / В.В. Зосимов, Л.М. Лямшев // *Успехи физических наук.* – 1995. – Т.165, № 4. – С. 361-401.

23. Иванова В.С. Синергетика и фракталы в материаловедении / В.С. Иванова, А.С. Баланкин – М.: Наука, 1994. – 214 с.

24. Козлов Г.В. Синергетика и фрактальный анализ сетчатых полимеров / Г.В. Козлов, В.У. Новиков – М.: Классика, 1998. – 112 с.

25. Короленко П.В. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования / П.В. Короленко, М.С. Маганова, А.В. Меснянкин // *Учебное пособие.* – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, НИИЯФ им. Д.В. Скобельцина, 2004. – 82 с.

26. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. Кроновер – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

27. Ландэ Д.В. Основы моделирования и оценки электронных информационных потоков / Д.В. Ландэ, В.Н. Фурашев, С.М. Брайчевский, А.Н. Григорьев – Киев: Инжиниринг, 2006. – 176 с.

28. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным

указателем / А.В. Летников // Матем. Сб. – 1868. – Т.3, вып.1. – С. 1-68.

29. Летников А.В. Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем / А.В. Летников // Матем. Сб. – 1868. – Т.3, вып.1. – С. 85-112.

30. Логунов М.Ю. Перемешивание и ляпуновские показатели хаотических систем / М.Ю. Логунов, О.Я. Бутковский // Журнал технической физики. – 2008. – Т.78, вып. 8. – С. 1-8.

31. Makarov N.G. On the distortion of boundary sets under conformal mapping / N.G. Makarov // Proc. London Math. Soc. – 1985. – V.51. – PP. 369-384.

32. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

33. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов // Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1999. – 140 с.

34. Murat M. Viscous fingering and diffusion-limited aggregates near percolation / M. Murat, A. Aharony // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V.57. – PP. 1875-1878.

35. Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов / Дж. Нейман – М.: Мир, 1971. – 382 с.

36. Новиков В.У. Фрактальный анализ макромолекул / В.У. Новиков, Г.В. Козлов // Успехи химии. – 2000. – Т.69, № 4. – С. 378-399.

37. Oxaal U. Viscous fingering on percolation clusters / U. Oxaal, M. Murat, F. Boger, A. Aharony, J. Feder, T. Jossang // Nature – 1987. – V.329. – PP. 32-37.

38. Олемской А.И. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды / А.И. Олемской, А.Я. Флат // Успехи физических наук. – 1993. – Т.163, № 12. – С. 1-50.

39. Olsen L. A multifractal formalism / L. Olsen // Advances in mathematics. – 1995. – V.116. – PP. 82-195.

40. Петерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / Дж. Петерсон – М.: Мир, 1984. – 263 с.

41. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов / Ю.М. Плотинский – М.: Логос, 2001. – 296 с.

42. Постников М.М. Аналитическая геометрия / М.М. Постников – М.: Наука, 1979. – 336 с.

43. Пригожин И.М. От существующего к возникающему / И.М.

Пригожин – М.: Наука, 1977. – 325 с.

44. Рехвиашвили С.Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики / С.Ш. Рехвиашвили // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т.30, вып. 2. – С. 33-37.

45. Рехвиашвили С.Ш. Нестационарная электропроводность полимеров в модели с дробным интегродифференцированием / С.Ш. Рехвиашвили // Физика твёрдого тела. – 2007. – Т.49, вып.8. – С. 1522-1526.

46. Riedi R.H. Conditional and relative multifractal spectra / R.H. Riedi, I. Scheuring // Fractals. – 1997. – V.5, №1. – PP. 153-168.

47. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

48. Saffman P.G. The penetration of a fluid into a medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid / P.G. Saffman, G.I. Taylor // Proc. R. Soc. Lond. – 1958. – V.245. – PP. 312-329.

49. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров / Б.М. Смирнов – М.: Наука, 1991. – 133 с.

50. Столиц Э. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения / Э. Столиц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин – М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. – 272 с.

51. Терехов С.В. Введение в синергетику / С.В. Терехов – Донецк: “Цифровая типография”, 2009. – 187 с.

52. Терехов С.В. Генерация алгебр пространств Евклида и специальной теории относительности / С.В. Терехов // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2005. – вип.1. – с. 163-174.

53. Терехов С.В. Кватернионный аспект теории поля и вещества / С.В. Терехов // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки, 2008. – вип.2. – с. 162-170.

54. Терехов С.В. Моделирование тепловых и кинетических свойств реальных систем / С.В. Терехов – Донецк: “Вебер” (Донецкое отделение), 2007. – 306 с.

55. Тоффоли Т. Машины клеточных автоматов / Т. Тоффоли, Н. Марголюс – М.: Мир, 1991. – 278 с.

56. West J.B. Physics of Fractal Operators / J.B. West, M. Bologna, P. Grigolini – Springer: Verlag, 2003. – 354 pp.

57. Wilkinson D. Invasion percolation: A new from of percolation the-

ory/ D. Wilkinson, J.F. Willemsen // J. Phys. – 1983. – A16. – PP. 3365-3376.

58. Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин – Ульяновск: “Артишок”, 2008. – 512 с.

59. Falconer K. The geometry of fractal sets / K. Falconer – Cambridge Tracts in Mathematics, 85, Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1985. – 162 pp.

60. Федер Е. Фракталы / Е. Федер – М.: Мир, 1991. – 248 с.

61. Hentschel H.G.E. Relative diffusion in turbulent media: The fractal dimension of clouds / H.G.E. Hentschel, I. Procaccia // Phys. Rev. – 1984. – A29. – PP. 1461-1470.

62. Homsy G.M. Viscous fingering in porous media / G.M. Homsy // Ann. Rev. Fluid. Mech. – 1987. – V.19. – PP. 271-311.

63. Horton R.E. Erosional development of streams and their drainage basins; hydrophysical approach to quantitative morphology / R.E. Horton // Geol. Soc. Am. Bull. – 1945. – V.56. – PP. 275-370.

64. Chandler R. Capillary displacement and percolation in porous media / R. Chandler, J. Koplik, K. Lerman, J.F. Willemsen // J. Fluid. Mech. – 1982. – V.119. – PP. 249-267.

65. Chuoke R.L. The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media / R.L. Chuoke, P. van Meurs, C. van der Poel // Trans. Metall. Soc. of AIME – 1959. – V.216. – PP. 188-194.

66. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 528 с.

67. Шустер Г. Детерминированный хаос / Г. Шустер – М.: Мир, 1988. – 240 с.

68. <http://www.eclectasy.com/Ftactal Explorer/index.html>

69. <http://optics.npi.msu.su>

70. <http://is.ifmo.ru>

71. <http://www.esd.ornl.gov/programs/COMPMECH;>

72. <http://weasel.cnrs.humboldt.edu/~simsys/trout.html;>

73. <http://oak.ucc.nau.edu/pb1/vitae/software/puma.htm;>

74. <http://lutra.tamu.edu/dms/dms.htm;>

75. <http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/termite.html;>

76. <http://www.sciencemag.org/feature/data/deutschman/index.htm>

Зависимость порядка оси от параметра подобия

| m | Интервал
[$-2m+1$; $2m+1$] | n | $\frac{1-n}{2m} = \cos\varphi$ | φ | Ось
k |
|---------------|----------------------------------|-----|--------------------------------|-----------|---------------|
| $\frac{1}{2}$ | [0; 2] | 0 | 1 | $0(2\pi)$ | 1 |
| | | 1 | 0 | $\pi/2$ | 4 |
| | | 2 | -1 | π | 2 |
| 1 | [-1; 3] | -1 | 1 | $0(2\pi)$ | 1 |
| | | 0 | 1/2 | $\pi/3$ | 6 |
| | | 1 | 0 | $\pi/2$ | 4 |
| | | 2 | -1/2 | $2\pi/3$ | 3 |
| | | 3 | -1 | π | 2 |
| $\frac{3}{2}$ | [-2; 4] | -2 | 1 | $0(2\pi)$ | 1 |
| | | -1 | 2/3 | | $\approx 7,5$ |
| | | 0 | 1/3 | | $\approx 5,1$ |
| | | 1 | 0 | $\pi/2$ | 4 |
| | | 2 | -1/3 | | $\approx 3,3$ |
| | | 3 | -2/3 | | $\approx 2,7$ |
| | | 4 | -1 | π | 2 |
| 2 | [-3; 5] | -3 | 1 | $0(2\pi)$ | 1 |
| | | -2 | 3/4 | | $\approx 8,7$ |
| | | -1 | 1/2 | $\pi/3$ | 6 |
| | | 0 | 1/4 | | $\approx 4,8$ |
| | | 1 | 0 | $\pi/2$ | 4 |
| | | 2 | -1/4 | | $\approx 3,4$ |
| | | 3 | -1/2 | $2\pi/3$ | 3 |
| | | 4 | -3/4 | | $\approx 2,6$ |
| | | 5 | -1 | π | 2 |
| $\frac{5}{2}$ | [-4; 6] | -4 | 1 | $0(2\pi)$ | 1 |
| | | -3 | 4/5 | | $\approx 9,8$ |
| | | -2 | 3/5 | | $\approx 6,8$ |
| | | -1 | 2/5 | | $\approx 5,4$ |
| | | 0 | 1/5 | | $\approx 4,6$ |
| | | 1 | 0 | $\pi/2$ | 4 |
| | | 2 | -1/5 | | $\approx 3,5$ |
| | | 3 | -2/5 | | $\approx 3,2$ |
| | | 4 | -3/5 | | $\approx 2,8$ |
| | | 5 | -4/5 | | $\approx 2,5$ |
| | | 6 | -1 | π | 2 |

| m | Интервал
[$-2m+1; 2m+1$] | n | $\frac{1-n}{2m} = \cos\varphi$ | φ | Ось
k |
|---------------|-------------------------------|-------|--------------------------------|-----------|----------------|
| 3 | [-5; 7] | -5 | 1 | $0(2\pi)$ | <u>1</u> |
| | | -4 | 5/6 | | $\approx 10,7$ |
| | | -3 | 2/3 | | $\approx 7,5$ |
| | | -2 | 1/2 | $\pi/3$ | <u>6</u> |
| | | -1 | 1/3 | | $\approx 5,1$ |
| | | 0 | 1/6 | | $\approx 4,5$ |
| | | 1 | 0 | $\pi/2$ | <u>4</u> |
| | | 2 | -1/6 | | $\approx 3,6$ |
| | | 3 | -1/3 | | $\approx 3,3$ |
| | | 4 | -1/2 | $2\pi/3$ | <u>3</u> |
| | | 5 | -2/3 | | $\approx 2,7$ |
| | | 6 | -5/6 | | $\approx 2,5$ |
| | | 7 | -1 | π | <u>2</u> |
| $\frac{7}{2}$ | [-6; 8] | -6 | 1 | $0(2\pi)$ | <u>1</u> |
| | | -5 | 6/7 | | $\approx 11,6$ |
| | | -4 | 5/7 | | $\approx 8,1$ |
| | | -3 | 4/7 | | $\approx 6,5$ |
| | | -2 | 3/7 | | $\approx 5,6$ |
| | | -1 | 2/7 | | $\approx 4,9$ |
| | | 0 | 1/7 | | $\approx 4,4$ |
| | | 1 | 0 | $\pi/2$ | <u>4</u> |
| | | 2 | -1/7 | | $\approx 3,7$ |
| | | 3 | -2/7 | | $\approx 3,4$ |
| | | 4 | -3/7 | | $\approx 3,1$ |
| | | 5 | -4/7 | | $\approx 2,9$ |
| | | 6 | -5/7 | | $\approx 2,7$ |
| 7 | -8/7 | | $\approx 2,4$ | | |
| 8 | -1 | π | <u>2</u> | | |

Игра “Жизнь”(по А.А. Шалыто и Л.А. Наумову (<http://is.ifmo.ru>))*Листинг 1. Одномерный клеточный автомат*

```

#include "stdafx.h"
#include "stdio.h"

// Количество клеток
const int count=61;

// Функция, обеспечивающая заворачивание структуры
// клеточного автомата в тор для избежания краевых
// эффектов
inline int TorIt(int x)
{
    if (x<0) return x+count; else return x*count;
}

// Функция поведения клетки
int f(int y1,int y2, int y3)
{
    return y1|y2|y3;
}

// Главная функция приложения
int main(int argc, char* argv[])
{
    // Массив для хранения текущих состояний клеток
    int y[count];

    // Массив для хранения новых состояний клеток
    int y1[count];

    // Переменная, используемая при обработке нажатия кнопок
    // <ENTER> и <q>
    char c;

    // Начальное заполнение массива клеток
    for (int i=0; i<count; i++)
    {
        y[i]=0;
    }
    y[30]=1;

    // Итерации автомата
    for (;;)
    {
        // Визуализация
        for (i=0; i<count; i++)
            printf("%d",y[i]);

        // Вычисление новых состояний клеток
        for (i=0; i<count; i++)
        {
            y1[i]=f(y[TorIt(i-1)],y[TorIt(i)],y[TorIt(i+1)]);
        }

        // Перенос новых состояний в массив текущих состояний
        for (i=0; i<count; i++)
            y[i]=y1[i];

        // Обработка нажатия кнопок <ENTER> и <q>
        c=getchar();
        if (c=='q') return 0;
    }

    return 0;
}

```

Листинг 2. Двумерный клеточный автомат

```

#include "stdafx.h"
#include "stdio.h"

// Количество клеток
const int count=23;

// Функция, обеспечивающая заворачивание структуры
// клеточного автомата в тор для избежания краевых
// эффектов
inline int TorIt(int x)
{
    if (x<0) return x+count; else return x*count;
}

// Функция поведения клетки
// U - Верх; UR - Верх-Право; R - Право; DR - Низ-Право;
// D - Низ; DL - Низ-Лево; L - Лево; UL - Верх-Лево
int f(int y, int yU, int yUR, int yR, int yDR, int yD, int yDL, int
yL, int yUL)
{
    // Вычисление количества живых соседей
    int i=yU+yUR+yR+yDR+yD+yDL+yL+yUL;

    // Мертвая клетка оживет, если у нее имеется 3 живых соседа
    if (y==0 && i==3) return 1;

    // Живая клетка останется живой, если у нее имеется 2 или 3
    // живых соседа
    if (y==1 && (i==2 || i==3)) return 1;

    // В остальных случаях клетка будет мертвой
    return 0;
}

// Главная функция приложения
int main(int argc, char* argv[])
{
    // Массив для хранения текущих состояний клеток
    int y[count][count];

    // Массив для хранения новых состояний клеток
    int y1[count][count];

    // Переменная, используемая при обработке нажатия кнопок
    // <ENTER> и <q>
    char c;

    // Счетчик итераций
    long iter=0;

    // Начальное заполнение массива клеток
    for (int i=0; i<count; i++) for (int j=0; j<count; j++)
    {
        y[i][j]=0;
    }
    y[11][11]=1;
    y[10][11]=1;
    y[ 9][11]=1;
    y[11][12]=1;
    y[10][13]=1;
}

```

```
// Итерации автомата
for (;;)
{
    // Визуализация
    for (i=0; i<count; i++)
    {
        for (int j=0; j<count; j++)    printf("%d",y[i][j]);
        printf("\n");
    }
    printf("#%d",iter);

    // Вычисление новых состояний клеток
    for (i=0; i<count; i++) for (int j=0; j<count; j++)
    {
        y1[i][j]=f(y[TorIt(i)][TorIt(j)],
        y[TorIt(i-1)][TorIt(j)],y[TorIt(i-1)][TorIt(j+1)],
        y[TorIt(i)][TorIt(j+1)],y[TorIt(i+1)][TorIt(j+1)],
        y[TorIt(i+1)][TorIt(j)],y[TorIt(i+1)][TorIt(j-1)],
        y[TorIt(i)][TorIt(j-1)],y[TorIt(i-1)][TorIt(j-1)]);
    }

    // Перенос новых состояний в массив текущих состояний
    for (i=0; i<count; i++) for (int j=0; j<count; j++)
        y[i][j]=y1[i][j];

    // Обработка нажатия кнопок <ENTER> и <q>
    c=getchar();
    if (c=='q') return 0;

    iter++;
}
return 0;
}
```

Автор: Терехов Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры “Нанозифика”
Донецкого национального университета

Монография: Фракталы и физика подобия,
255 с., с ил. (на русском языке)

Підписано до друку 19.01.2011 р. Формат 60x84 1/16
Ум. друк. арк. 11,63. Друк лазерний. Зам. № 244. Накл. 350 прим.

Надруковано в ТОВ «Цифрова типографія»
Адреса: м. Донецьк, вул. Челюскінців, 291а, тел. (062) 388-07-31; 388-07-30