

PACS: 62.20.Dc, 76.60.-k

Э.П. Фельдман, Т.А. Василенко, Н.А. Калугина

## ИСТЕЧЕНИЕ МЕТАНА ИЗ УГЛЯ В ЗАМКНУТЫЙ РЕЗЕРВУАР: РОЛЬ ЯВЛЕНИЙ ДИФФУЗИИ И ФИЛЬТРАЦИИ

Институт физики горных процессов НАН Украины  
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина

Статья поступила в редакцию 4 апреля 2006 года

*Рассмотрен процесс истечения метана из угля в замкнутый резервуар. Показана роль явлений диффузии и фильтрации в этом процессе. В рамках предлагаемой модели дан асимптотический анализ решения поставленной задачи. Получено выражение для времени достижения опасной концентрации метана в замкнутом объеме в зависимости от параметров системы ископаемый уголь–метан.*

### 1. Введение

В природных условиях ископаемый уголь может содержать значительное количество газа метана. Так, некоторые сорта углей Донецкого бассейна содержат до  $40 \text{ m}^3$  метана в расчете на одну тонну угля. В нетронутых метаносных угольных пластах метан распределен равномерно – его давление в системе сообщающихся трещин, пор и каналов одинаково вдоль всего пласта. Метан находится в равновесии, которое может быть нарушено под действием геологических или техногенных факторов.

При отработке угля пласт вскрывается, давление вблизи выработки резко снижается, и метан начинает вытекать из пласта в выработку. Это явление достаточно хорошо изучено как экспериментально, так и теоретически.

Если отторгнутые от массива куски угля поместить в замкнутый резервуар, то истечение метана из этих кусков будет продолжаться до тех пор, пока давление метана в резервуаре не сравняется с его давлением в трещиноватопористой системе угля. На практике замкнутыми резервуарами являются шахтные бункеры. Кроме того, закрытыми сосудами могут считаться крытые железнодорожные вагоны и трюмы грузовых судов.

При проведении сорбционных исследований также используют закрытые вакуумированные емкости, куда помещают изучаемые образцы угля [1].

Лабораторные и шахтные эксперименты, разработка теоретических моделей преследуют цель дать ответ на три основных вопроса: 1) какова плотность (и давление) метана в резервуаре при равновесии? 2) за какое время

устанавливается равновесие? 3) если в резервуаре был воздух, то за какое время достигается взрывоопасная концентрация метана?

Эти вопросы изучались различными методами и разными авторами. В частности, в нашей работе [2] была детально изучена модель, которая базируется на предположении о ведущей роли диффузии при выходе метана из угля. Между тем хорошо известно, что роль фильтрации метана по системе открытых пор и каналов также может быть определяющей. В [3] нами проанализирован механизм совместного действия диффузии и фильтрации на процесс истечения метана. Однако здесь речь идет об истечении в свободное пространство.

В предлагаемой работе изучено истечение метана из угля в замкнутый резервуар в условиях совместного протекания двух физических явлений – фильтрации и диффузии.

## 2. Описание модели и основные соотношения

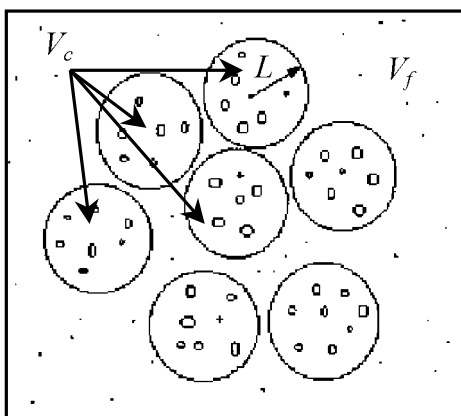
Как и в [3], предполагаем, что уголь состоит из блоков, «погруженных» в систему открытых (т.е. сообщающихся с внешней средой) пор, трещин и каналов. Такая система называется фильтрационным объемом. Метан в этом объеме находится в свободном газообразном состоянии и характеризуется плотностью  $\rho$  ( $\text{m}^{-3}$ ), зависящей в неравновесном состоянии как от координат, так и от времени. Можно с равным правом характеризовать метан в фильтрационном объеме его давлением, связанным с плотностью соотношением  $P = \rho T$  ( $T$  – температура в энергетических единицах, газ считается идеальным).

Внутри блока располагаются закрытые поры, не сообщающиеся каналами с его поверхностью. В этих порах метан также находится в газообразном состоянии. Суммарный объем закрытых пор в расчете на единицу объема угля (закрытая пористость) обозначается буквой  $\gamma$ . В тело блока метан входит по молекулярно, образуя твердый раствор с концентрацией  $c$  ( $\text{m}^{-3}$ ), зависящей при отсутствии равновесия от координат и времени.

Уголь, находящийся в сосуде, состоит из отдельных кусков (гранул), отличающихся друг от друга размером. Очевидно, что время выхода метана из отдельной гранулы зависит от ее размера. Поэтому в общем случае характерное время выхода метана из всей его массы зависит от распределения гранул по размерам. В нашей модели мы ради упрощения считаем, что все куски угля являются шарами одинакового радиуса  $L$ . Кроме того, предполагаем, что все блоки представляют собой шары одинакового радиуса  $R$ . Конечно, размер блока  $R$  всегда много меньше  $L$ .

Суммарный объем, занимаемый гранулами угля, обозначим  $V_c$ , а объем оставшейся части сосуда –  $V_f$  (рис. 1).

Предполагается, что в начальный момент (момент загрузки угля в сосуд) плотность метана в фильтрационном объеме равна  $\rho_0$  и газ равномерно распределен по объему каждой из гранул. Концентрация же сорбированного метана в твердом растворе подчиняется закону Генри



**Рис. 1.** Схематическое изображение угольного вещества, находящегося в замкнутом объеме

гранулы снижается, благодаря чему стартует процесс диффузионного массопереноса сорбированного метана из блока в фильтративный объем. Происходит фильтрация газа с одновременной подпиткой фильтративного объема метаном, растворенным в блоках.

Нам предстоит решить уравнение диффузии метана в блоке, а результаты этого решения включить в уравнение, описывающее фильтрацию метана из гранул.

Массоперенос в каждом отдельном блоке описывается уравнением диффузии в сферических координатах

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D_{\text{eff}} \left[ \frac{\partial c^2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right], \quad (2)$$

где эффективный коэффициент диффузии  $D_{\text{eff}} = \frac{D}{1 - \gamma + \frac{\gamma}{v}}$  ( $D$  – коэффициент

твердотельной диффузии метана в угле) учитывает наличие в блоке закрытых пор [4].

В уравнении (2)  $r$  – расстояние от центра блока до данного места,  $0 \leq r \leq R$ . При  $r = 0$  концентрация должна быть конечной, а на границе блока должен выполняться закон Генри, т.е. концентрация метана на границе блока должна быть пропорциональна плотности газа в примыкающем к данному блоку участке фильтративного объема. Ввиду малости радиуса блока по сравнению с радиусом гранулы можно ввести сферическую координату  $x$  блока в целом. Эта координата означает расстояние от блока до центра гранулы, т.е. местоположение блока в грануле. Плотность газа в фильтративном объеме гранулы описывается функцией  $\rho(x,t)$ , удовлетворяющей уравнению фильтрации (уравнение Дарси). В рассматриваемом сферически-симметричном случае функция  $\rho(x,t)$  для кнудсеновского течения газа (более подробно об этом см. в [3]) имеет вид

$$c_0 = v\rho_0, \quad (1)$$

где  $v$  – растворимость метана (см. подробнее обсуждение этой величины в [4]).

Заметим сразу же, что  $\rho_0$  обычно намного меньше плотности метана в нетронутым пласте, поскольку весьма заметная доля метана выходит из угля во время его перемещения от забоя к резервуару.

Согласно нашей модели [3] истечение метана происходит следующим образом. Сначала газ из фильтративного объема устремляется из гранулы в не занятый углем объем  $V_f$ , давление газа внутри

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma_0 \rho(x, t) + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) c(x, t) \right] = D_f \left[ \frac{\partial \rho^2(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (3)$$

Здесь  $\gamma_0$  – открытая пористость,  $D_f$  – коэффициент фильтрации,  $c(x, t)$  означает среднюю концентрацию метана в блоке с координатой  $x$  в момент времени  $t$ :

$$c(x, t) = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 c(r, t) dr. \quad (4)$$

Применяя процедуру интегрирования (4) к уравнению (2), получим

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \frac{3}{R} D_{\text{eff}} \left. \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (5)$$

В правой части уравнения (5) фигурирует градиент концентрации вблизи поверхности блока. Сама же концентрация на поверхности последнего связана с плотностью газа в окружении блока, как уже отмечалось, законом Генри:

$$c(R, t) = v \rho(x, t). \quad (6)$$

Через соотношения (5) и (6) осуществляется «связка» задач фильтрации и диффузии. На границе угольной гранулы, т.е. при  $x = L$ , выполняется требование

$$\rho(L, t) = n(t), \quad (7)$$

где  $n(t)$  – плотность газа в свободной от угля части сосуда. Именно эта величина представляет основной интерес. Средние по грануле плотность и концентрация вводятся по аналогии с (4):

$$\bar{c}(t) = \frac{3}{L^3} \int_0^L x^2 c(x, t) dx; \quad \bar{\rho}(t) = \frac{3}{L^3} \int_0^L x^2 \rho(x, t) dx. \quad (8)$$

Эти средние одновременно являются средними по всему массиву угля ввиду одинаковости всех гранул.

Соответствующее формулам (8) усреднение уравнения фильтрации (3) дает

$$\frac{d}{dt} \left[ \gamma_0 \bar{\rho}(t) + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) \bar{c}(t) \right] = \frac{3}{L} D_f \left. \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L}. \quad (9)$$

Связь между  $\bar{\rho}(t)$ ,  $\bar{c}(t)$  и  $n(t)$  определяется уравнением материального баланса:

$$n(t) V_f + \left[ \gamma_0 \bar{\rho}(t) + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) \bar{c}(t) \right] V_c = \left[ \gamma_0 \rho_0 + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) c_0 \right] V_c. \quad (10)$$

При записи (10) мы предположили, что в начальный момент газ в свободном объеме отсутствует, т.е.  $n(0) = 0$ .

Начальные условия к уравнениям (2) и (3) таковы:

$$c(r, 0) = c_0 = \nu \rho_0; \quad \rho(x, 0) = \rho_0; \quad c(x, 0) = c_0. \quad (11)$$

Итак, нами сформулирована система уравнений (2), (3), а также начальные и граничные условия к ним. Далее мы попытаемся найти решение этой системы.

### 3. Нахождение трансформант Лапласа концентрации и плотности метана

Сформулированная задача решается методом преобразования Лапласа по времени всех неизвестных величин:

$$c(r, p) = \int_0^{\infty} c(r, t) e^{-pt} dt; \quad c(x, p) = \int_0^{\infty} c(x, t) e^{-pt} dt; \quad \rho(x, p) = \int_0^{\infty} \rho(x, t) e^{-pt} dt; \quad (12)$$

$$\bar{c}(p) = \int_0^{\infty} \bar{c}(t) e^{-pt} dt; \quad \bar{\rho}(p) = \int_0^{\infty} \bar{\rho}(t) e^{-pt} dt; \quad \bar{n}(p) = \int_0^{\infty} \bar{n}(t) e^{-pt} dt.$$

Применяя преобразования Лапласа к уравнению (2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для величины  $c(r, p)$ :

$$-c_0 + pc(r, p) = D_{\text{eff}} \left[ \frac{d^2 c(r, p)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dc(r, p)}{dr} \right]. \quad (13)$$

Решение этого уравнения, конечное при  $r = 0$ , выражается в элементарных функциях:

$$c(r, p) = \frac{c_0}{p} + A(p) \frac{\text{sh} \tilde{r}}{\tilde{r}}; \quad \tilde{r} \equiv r \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}}. \quad (14)$$

Граничное условие (6) дает

$$\frac{c_0}{p} + A(p) \frac{\text{sh} \left( R \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}} \right)}{R \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}}} = \nu \rho(x, p). \quad (15)$$

Применение преобразования Лапласа к равенству (5) с учетом конкретного вида  $c(r, p)$  из (14) приводит к еще одному соотношению, содержащему константу интегрирования  $A(p)$ :

$$c(x, p) - \frac{c_0}{p} = \frac{3A(p)}{\left( R \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}} \right)^3} \left[ R \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}} \text{ch} \left( R \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}} \right) - \text{sh} \left( R \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}} \right) \right]. \quad (16)$$

Равенства (14) и (16), отражающие граничные условия на поверхности блока, позволяют путем исключения  $A(p)$  получить важное соотношение между  $c(x,p)$  и  $\rho(x,p)$ :

$$\frac{c_0}{p} - c(x, p) = F(z) \left( \frac{c_0}{p} - v\rho(x, p) \right), \quad F(z) = \frac{3}{z} \left( \operatorname{cth} z - \frac{1}{z} \right). \quad (17)$$

В (17) введено обозначение  $z \equiv R \sqrt{\frac{p}{D_{\text{eff}}}}$ .

Применение преобразования Лапласа к уравнению Дарси (3) с учетом связи (17) позволяет получить для величины  $\rho(x,p)$  обыкновенное дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (13):

$$\rho(x, p) - \frac{\rho_0}{p} = \frac{D_f}{\phi(p)} \left[ \frac{d^2 \rho(x, p)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\rho(x, p)}{dx} \right],$$

$$\phi(p) \equiv p \left[ \gamma_0 + v(1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) F(z) \right]. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет тот же вид, что и (13). Поэтому можно сразу выписать подходящее решение:

$$\rho(x, p) - \frac{\rho_0}{p} = B(p) \frac{\operatorname{sh} \left( x \sqrt{\frac{\phi(p)}{D_f}} \right)}{x \sqrt{\frac{\phi(p)}{D_f}}}. \quad (19)$$

Константа  $B(p)$  определяется из граничного условия (7), согласно которому  $\rho(L, t) = n(t)$ , так что

$$n(p) - \frac{\rho_0}{p} = B(p) \frac{\operatorname{sh} y}{y}, \quad y \equiv L \sqrt{\frac{\phi(p)}{D_f}}. \quad (20)$$

Далее преобразуем по Лапласу уравнение (9):

$$-\gamma_0 \left( \frac{\rho_0}{p} - \bar{\rho}(p) \right) - (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) \left( \frac{c_0}{p} - \bar{c}(p) \right) = \frac{3}{pL} D_f \left. \frac{\partial \rho(x, p)}{\partial x} \right|_{x=L}. \quad (21)$$

Преобразование (21) с учетом (19) и (20) приводит к промежуточному соотношению

$$\gamma_0 \left( \frac{\rho_0}{p} - \bar{\rho}(p) \right) + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) \left( \frac{c_0}{p} - \bar{c}(p) \right) = \frac{\phi(p)}{p} F(y) \left( \frac{\rho_0}{p} - n(p) \right). \quad (22)$$

Так как (17) справедливо для любого  $x$ , оно справедливо и для средних значений концентрации и плотности:

$$\frac{c_0}{p} - \bar{c}(p) = vF(z) \left( \frac{\rho_0}{p} - \bar{\rho}(p) \right). \quad (23)$$

Если учесть (23), то (22) превращается в компактное соотношение

$$\frac{\rho_0}{p} - \bar{\rho}(p) = F(y) \left( \frac{\rho_0}{p} - \bar{n}(p) \right). \quad (24)$$

Осталось использовать лапласовский образ уравнения (10) материального баланса

$$gn(p) = \gamma_0 \left( \frac{\rho_0}{p} - \bar{\rho}(p) \right) + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) \left( \frac{c_0}{p} - \bar{c}(p) \right), \quad (25)$$

где введено обозначение  $g = \frac{V_f}{V_c}$  для отношения свободного объема к объему, занимаемому углем.

Задача, в принципе, решена, поскольку из системы трех уравнений (23)–(25) можно получить лапласовские образы трех искомых функций  $\bar{\rho}(p)$ ,  $\bar{c}(p)$  и  $n(p)$  и затем путем обратного преобразования Лапласа получить временные зависимости  $\bar{\rho}(t)$ ,  $\bar{c}(t)$  и  $n(t)$ .

#### 4. Решение задачи в интегральном виде и его асимптотический анализ

Прежде чем записывать решение в виде обратного преобразования Лапласа, условимся измерять время в единицах  $\frac{R^2}{D_{\text{eff}}}$ . Тогда параметр преобразования Лапласа станет безразмерной величиной, и мы по-прежнему будем обозначать его буквой  $p$ .

Введем обозначения

$$z = \sqrt{p}; \quad Y \equiv a \sqrt{p \left[ \gamma_0 + v(1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) F(z) \right]}; \quad a \equiv \frac{L}{R} \sqrt{\frac{D_{\text{eff}}}{D_f}}. \quad (26)$$

Напомним, что

$$F(z) = \frac{3}{z} \left( \text{cth } z - \frac{1}{z} \right), \quad (27)$$

Из (23)–(25) находим

$$\frac{\rho_0}{p} - \bar{\rho}(p) = \frac{gF(Y)}{g + \left[ \gamma_0 + v(1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) F(z) \right] F(Y)} \frac{\rho_0}{p}, \quad (28)$$

$$\frac{c_0}{p} - \bar{c}(p) = \frac{gF(Y)F(z)}{g + \left[ \gamma_0 + v(1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) F(z) \right] F(Y)} \frac{c_0}{p}, \quad (29)$$

$$n(p) = \frac{1}{g} \left[ \gamma_0 \left( \frac{\rho_0}{p} - \bar{\rho}(p) \right) + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) \left( \frac{c_0}{p} - \bar{c}(p) \right) \right]. \quad (30)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к формулам (28)–(30), приходим к следующему результату:

$$\rho_0 - \bar{\rho}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{gF(Y)}{g + \left[ \gamma_0 + v(1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) F(z) \right] F(Y)} \frac{\rho_0}{p} e^{pt} dp, \quad (31)$$

$$c_0 - \bar{c}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{gF(Y)F(z)}{g + \left[ \gamma_0 + v(1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) F(z) \right] F(Y)} \frac{c_0}{p} e^{pt} dp, \quad (32)$$

$$n(p) = \frac{1}{g} \left[ \gamma_0 (\rho_0 - \bar{\rho}(t)) + (1 - \gamma_0) \left( 1 - \gamma + \frac{\gamma}{v} \right) (c_0 - \bar{c}(t)) \right]. \quad (33)$$

Интегрирование в (31) и (32) производится в комплексной плоскости по вертикальной прямой с абсциссой  $\sigma > 0$ .

Формулы (31)–(33) представляют решение поставленной задачи в форме интегралов, которые в общем случае не выражаются через известные табулированные функции. Поэтому далее даем асимптотический анализ соотношений (31)–(33), на основе чего и делаем определенные выводы.

Если речь идет о выходе метана в открытое пространство, когда  $V_f \rightarrow \infty$  (т.е.  $g \rightarrow \infty$ ), то формулы значительно упрощаются:

$$\rho_0 - \bar{\rho}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\rho_0 F(Y)}{p} e^{pt} dp, \quad (31')$$

$$c_0 - \bar{c}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{c_0 F(Y)F(z)}{p} e^{pt} dp, \quad (32')$$

$$n(t) = 0. \quad (33')$$

Формула (33') совершенно очевидна, поскольку плотность газа в случае забираемого им бесконечного объема равна нулю.

Асимптотический анализ имеет смысл проводить отдельно для случаев  $a \gg 1$  (время фильтрации  $\frac{L^2}{D_f}$  много больше времени диффузии  $\frac{R^2}{D_{\text{eff}}}$ ) и

$a \ll 1$  (время фильтрации много меньше времени диффузии). Проводя этот анализ, будем считать  $g > 1$ . Дело в том, что при  $g \gg 1$  изменение давления метана в сосуде практически не ощутимо (ср. с формулой (33')), а при  $g \ll 1$  давление скачет внезапно, что также плохо поддается измерению.



*Случай 1 ( $a \gg 1$ )*

Сначала рассмотрим малые, по сравнению с диффузионными ( $t \ll 1$ ), времена. В этом случае основной вклад в интегралы (31) и (32) вносят большие  $p$  ( $p \gg 1$ ). Функции  $F(z)$  и  $F(Y)$  можно заменить их асимптотическими выражениями при больших значениях аргументов. Согласно (27) с учетом (26)

$$F(z) \approx \frac{3}{\sqrt{p}}, \quad F(Y) \approx \frac{3}{a\sqrt{\gamma_0 p}}. \quad (34)$$

Мы учли, что при  $p \gg 1$   $Y = a\sqrt{\gamma_0 p} \gg 1$ .

При учете вклада только больших  $p$  в соответствии с (34) наши интегралы сильно упрощаются:

$$\rho_0 - \bar{\rho}(t) \approx \frac{3\rho_0}{2\pi i a \sqrt{\gamma_0}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{3/2}} dp, \quad (35)$$

$$c_0 - \bar{c}(t) \approx \frac{3c_0}{2\pi i a \sqrt{\gamma_0}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2} dp. \quad (36)$$

Если теперь в (35) и (36) перейти к интегрированию по  $x = pt$ , то в итоге получим

$$\rho_0 - \bar{\rho}(t) \approx \frac{\alpha\rho_0}{a\sqrt{\gamma_0}} \sqrt{t}, \quad (37)$$

$$c_0 - \bar{c}(t) \approx \frac{3\alpha c_0}{a\sqrt{\gamma_0}} t, \quad (38)$$

где  $\alpha$  – вещественная константа порядка единицы.

Формулы (37) и (38) показывают, что на временах  $t \ll 1$  метан из блоков выходит намного медленнее, чем из фильтрационного объема. Можно сказать, что на этом временном интервале можно говорить о «быстром» метане (корневая зависимость от времени) и «медленном» (линейная зависимость от времени). Давление в свободном объеме согласно (33) возрастает по корневому закону. К концу данного этапа при  $t \sim 1$  из угля выйдет весьма незначительная доля метана ( $\sim 1/a\sqrt{\gamma_0}$ ).

На промежуточных временах, когда  $1 \ll t \ll a^2$ , основной вклад в интегралы дают  $p$ , лежащие в интервале  $\frac{1}{a^2} \ll p \ll 1$ . Теперь для  $F(z)$  необходимо взять асимптотику малых  $z$ , так что  $F(z) \approx 1$ . Для  $F(Y)$  следует сохранить асимптотику больших  $Y$ , так что  $F(Y) \approx \frac{3}{a\sqrt{\gamma_0 p}}$ . Интегралы вычисляются по аналогии с предыдущими расчетами. Получим

$$\rho_0 - \bar{\rho}(t) \approx \frac{\alpha \rho_0}{a \sqrt{\gamma_0 + \nu(1 - \gamma_0) \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\nu}\right)}} \sqrt{t}, \quad (39)$$

$$c_0 - \bar{c}(t) \approx \frac{\alpha c_0}{a \sqrt{\gamma_0 + \nu(1 - \gamma_0) \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\nu}\right)}} \sqrt{t}. \quad (40)$$

Мы видим, что на данном этапе метан выходит как из фильтрационного объема, так и из блоков по корневому закону. Однако скорость его выхода несколько уменьшается за счет коэффициента, стоящего в знаменателе формул (39) и (40). К концу данного этапа, когда  $t \sim a^2$ , из угля выходит около половины содержащегося в нем метана.

Переходим к рассмотрению больших ( $t \gg a^2$ ) времен. Поскольку теперь основной вклад в интегралы (31) и (32) будут вносить  $p \sim 1 \ll \frac{1}{a^2}$ , для  $F(z)$  работает асимптотика малых  $z$ , когда можно положить  $F(z) = 1$ . При таком предположении формулы (31) и (32) одинаковы, так что можно ограничиться рассмотрением лишь одной из них, например (31).

Введем вместо  $p$  новую переменную интегрирования  $u$  согласно формуле

$$u \equiv a^2 p \left[ \gamma_0 + \nu(1 - \gamma_0) \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\nu}\right) \right] \quad (41)$$

и перенормируем время

$$\tau \equiv \frac{t}{a^2 \left[ \gamma_0 + \nu(1 - \gamma_0) \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\nu}\right) \right]}. \quad (42)$$

Тогда формула (31) трансформируется к виду

$$\rho_0 - \bar{\rho}(\tau) = \frac{g \rho_0}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(\sqrt{u}) e^{u\tau}}{\left[ g + \gamma_e F(\sqrt{u}) \right] u} du, \quad (43)$$

где  $\gamma_e \equiv \gamma_0 + \nu(1 - \gamma_0) \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{\nu}\right)$ . (43a)

Интеграл (43) преобразуем в ряд с помощью теоремы вычетов. Для этого заметим, что подынтегральная функция в (43) однозначна, и все ее полюсы располагаются на отрицательной вещественной полуоси. Полюс в точке  $u = 0$  соответствует состоянию равновесия.

Графическое решение уравнения  $g + \gamma_e F(\sqrt{u}) = 0$  устанавливает следующее распределение полюсов подынтегральной функции:

$$u_0 = 0; \quad u_k = -\pi^2(k + \beta_k)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < \beta_k < \frac{1}{2}. \quad (44)$$

Определяя вычеты в этих полюсах по известным формулам теории функций комплексного переменного, приходим к такому результату:

$$\bar{\rho}(\tau) = \rho_e + 6\rho_0 g^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2(k+\beta_k)^2 \tau}}{g^2 \pi^2 (k + \beta_k)^2 + 9\gamma_e(g + \gamma_e)}. \quad (45)$$

Здесь

$$\rho_e = \frac{\rho_0 \gamma_e}{g + \gamma_e} \quad (46)$$

– равновесное значение плотности метана в фильтрационном объеме. Аналогичные (45) и (46) асимптотические формулы справедливы и для  $\bar{c}(\tau)$ .

Видно, что для больших  $\tau$ , когда  $\tau \gg \frac{1}{\pi^2(1+\beta_1)^2}$ , все члены ряда (45) экспоненциально малы и, следовательно, формула (45) трансформируется к виду

$$\bar{\rho}(\tau) \approx \rho_e + \frac{6\rho_0 g^2 e^{-\pi^2(1+\beta_1)^2 \tau}}{g^2 \pi^2 (1 + \beta_1)^2 + 9\gamma_e(g + \gamma_e)}. \quad (47)$$

Таким образом, на больших временах, когда реальное размерное время

$$t > \frac{L^2 \gamma_e}{D_f \pi^2 (1 + \beta_1)^2}, \quad (48)$$

приближение к равновесию происходит по экспоненциальному закону. Характерное время выхода метана из угля определяется фильтрацией ( $L^2/D_f$  в формуле (48)).

Можно показать, что величина  $\beta_1$  растет от нуля до приблизительно 1/2 с уменьшением  $g$  от бесконечности до  $g \sim 1$ . Следовательно, с уменьшением доли свободного объема в сосуде время выхода сокращается на несколько десятков процентов. Величина  $\gamma_e$ , входящая в формулу (48) и зависящая от растворимости и пористости, по порядку равна единице; поэтому темп выхода метана из угля слабо зависит от указанных параметров. Можно лишь отметить, что при обычной растворимости  $v \approx 10^{-2} - 10^{-1}$  [4] время выхода линейно возрастает с ростом закрытой пористости.

В пределе  $t \rightarrow \infty$  достигается равновесное состояние, при котором

$$\rho_0 - \rho_e = \frac{\rho_0 g}{g + \gamma_e}; \quad c_0 - c_e = \frac{c_0 g}{g + \gamma_e}, \quad (49)$$

и согласно (33)

$$n_e = \frac{\rho_0 \gamma_e}{g + \gamma_e}. \quad (50)$$

На рис. 2 представлен график зависимости концентрации метана в свободном объеме от времени для случая  $a \gg 1$ . График получен на основе формул (33), (37)–(40) и (47) с учетом (42).

Очевидно (и формулы (49) и (50) это подтверждают), что в случае открытого пространства ( $g \rightarrow \infty$ ) весь метан выходит из угля. Если уголь заполняет почти весь сосуд ( $g \ll 1$ ), то

$$\rho_0 - \rho_e \approx \rho_0 \frac{g}{\gamma_e}, \quad c_0 - c_e \approx c_0 \frac{g}{\gamma_e}, \quad n_e \approx \rho_0 \left(1 - \frac{g}{\gamma_e}\right), \quad (51)$$

т.е. из угля выходит весьма малая доля метана, пропорциональная  $g$ .

Согласно формулам (39), (40) и (33) концентрация метана в резервуаре к моменту  $t$  достигнет значения

$$n(t) \approx \rho_0 \frac{\alpha \sqrt{\gamma_e}}{ga} \sqrt{t}. \quad (52)$$

Сопоставляя  $n(t)$  с равновесным значением  $n_e$  из (50), мы приходим к следующей оценке характерного времени выхода метана в замкнутый сосуд (результат представляем в размерном виде):

$$t_r \approx \frac{g^2 \gamma_e}{\alpha^2 (g + \gamma_e)^2} \frac{L^2}{D_f}. \quad (53)$$

При больших  $g$  ( $g \gg \gamma_e$ ) результат, с точностью до несущественного множителя, совпадает с (48). В обратном предельном случае малого свободного объема

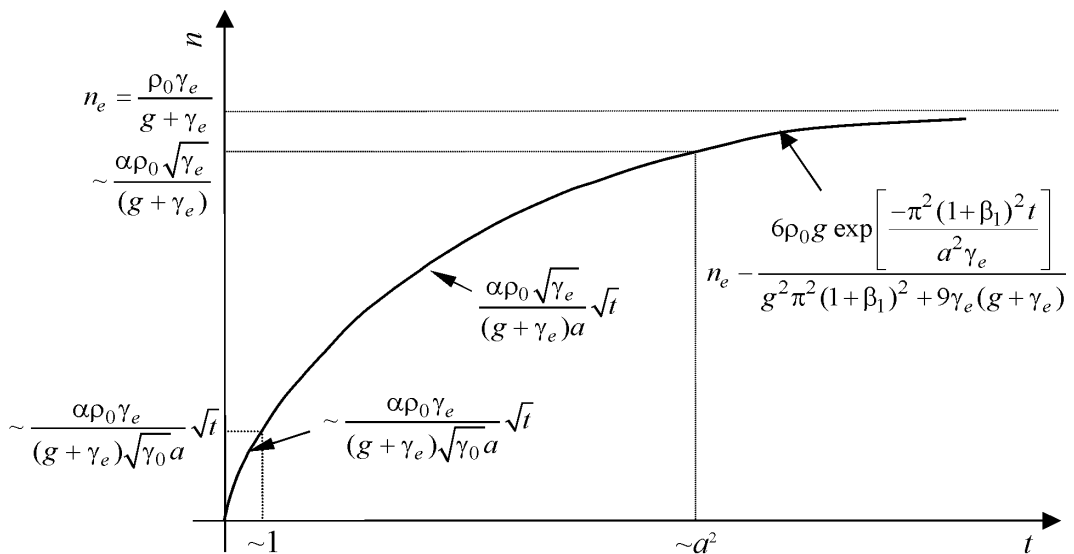


Рис. 2. Зависимость концентрации метана в свободном объеме от времени для случая  $a \gg 1$

$$t_r \approx \frac{g^2}{\alpha^2 \gamma_e} \frac{L^2}{D_f}, \quad (54)$$

т.е. время выхода убывает по квадратичному закону по мере уменьшения свободного объема.

Напомним, что мы рассматриваем случай  $a \gg 1$ , т.е.  $\frac{L^2}{D_f} \gg \frac{R^2}{D_{\text{eff}}}$ , поэто-

му приведенные оценки времен справедливы лишь при выполнении данного условия.

**Случай 2 ( $a \ll 1$ )**

Начнем с рассмотрения предельно малых времен, когда  $t \ll a^2 \gamma_0$ . При таком условии основной вклад в интегралы (31) и (32) вносят  $p \gg \frac{1}{a^2 \gamma_0}$  (и

автоматически  $p \gg 1$ ), а функции  $F(z)$  и  $F(Y)$  можно заменить их асимптотиками при больших значениях аргумента:

$$F(z) \approx \frac{3}{\sqrt{p}}, \quad F(Y) \approx \frac{3}{a\sqrt{p\gamma_0}}.$$

Теперь, если повторим соответствующие рассуждения предыдущего пункта (т.е. случая  $a \gg 1$ ), то получим те же результаты (37) и (38). Однако эти результаты справедливы теперь лишь при предельно малых временах  $t \ll a^2 \gamma_0$ , тогда как в предыдущем случае они были справедливы при  $t \ll 1$ . К концу начального этапа, когда  $t \sim a^2 \gamma_0$ , из фильтрационного объема выходит  $\sim 50\%$  метана, а из блоков – малая доля, порядка  $a\sqrt{\gamma_0}$ . В этом случае метан совершенно четко подразделяется на «быстрый», содержащийся в фильтрационном объеме и выходящий из него почти полностью за малые времена  $\sim L^2/D_f$ , и «медленный», выходящий из блоков за диффузионные времена  $R^2/D_{\text{eff}}$ , на порядки превышающие времена фильтрации.

Таким образом, в ситуации  $a \ll 1$  на промежуточных и больших временах имеет смысл следить только за истечением метана из блоков.

На временах  $t \gg a^2 \gamma_0$  основной вклад в интеграл (32) дают  $p \ll \frac{1}{a^2 \gamma_0}$ ,

поэтому  $Y \ll 1$ . В таком случае функцию  $F(Y)$  можно положить равной единице. Следовательно, на этих временах имеем асимптотическое равенство

$$c_0 - \bar{c}(t) = \frac{gc_0}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(z)}{g + \gamma_0 + v(1-\gamma_0) \left(1 - \gamma + \frac{\gamma}{v}\right) F(z)} \frac{e^{pt}}{p} dp. \quad (55)$$

Если к тому же  $t \ll 1$ , то подобно тому, как это было сделано ранее, можно заменить  $F(z)$  ее асимптотикой:  $F(z) \approx \frac{3}{\sqrt{p}}$ . В итоге приходим к формуле

$$c_0 - \bar{c}(t) = \frac{\alpha g c_0}{g + \gamma_0} \sqrt{t}, \quad (56)$$

которая отличается от (40) в основном отсутствием параметра  $a$ . Это, в свою очередь, означает, что характерное время выхода метана из блоков порядка единицы, т.е. в размерном виде порядка  $\frac{R^2}{D_{\text{eff}}}$ .

На больших временах, когда  $t \gg 1$ , удобнее всего использовать представление интеграла в форме ряда. Каждый член такого ряда пропорционален вычету подынтегральной функции в ее определенном полюсе.

Мы не станем выписывать здесь соответствующую формулу, поскольку она аналогична формуле (45). Основное отличие состоит в том, что теперь вместо связи (42) имеет место связь  $\tau = t$  и, следовательно, характерное время убывания экспоненты – это характерное время выхода метана из блоков

$$t_r > \frac{R^2}{D_{\text{eff}} \pi^2 (1 + \beta_1)^2}. \quad (57)$$

Таким образом, в случае  $a \ll 1$  как на промежуточном, так и на заключительном этапах время выхода метана из угля по порядку совпадает с диффузионным временем (57). Это утверждение справедливо для любого соотношения  $\frac{V_f}{V_c} \equiv g$ . Исключение составляет лишь случай  $g \ll \gamma_e$ , когда время выхода мало ( $\sim g^2$ ). Однако на практике последний случай почти не встречается.

На рис. 3 приведен схематический график зависимости времени выхода метана из угля от отношения свободного объема к занятому.

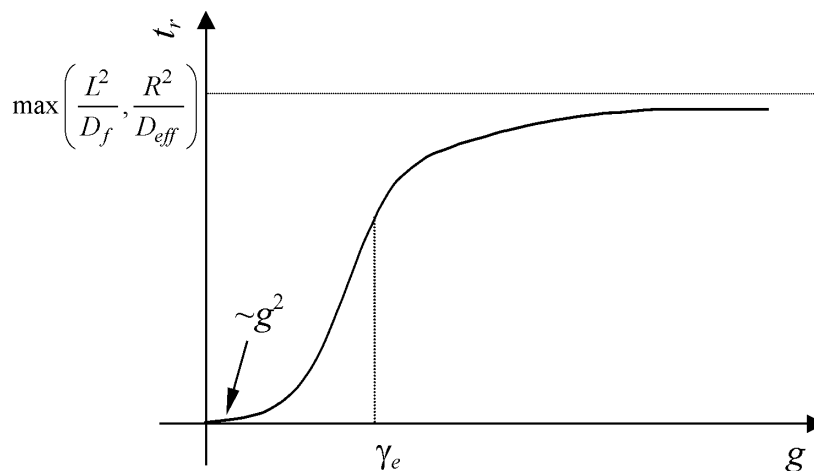


Рис. 3. Зависимость времени выхода метана из угля от параметра  $g$

## 5. Выводы

Рассмотрим практические аспекты задачи.

Формула (50) определяет равновесную концентрацию метана в закрытой емкости. Величина  $\gamma_e$  согласно определению (43а) и в соответствии с имеющимися данными по открытой и закрытой пористости, а также растворимости (см. [1,4]) колеблется в пределах 0.1–1. Величина отношения свободного и занятого объемов  $g$  на практике превосходит единицу. Произведение  $\rho_0\gamma_e$  есть не что иное, как начальная газоносность угля. Она составляет некоторую долю от природной газоносности, поскольку отторгнутый от массива уголь не сразу попадает в бункер или другую емкость. На пути от забоя к бункеру из угля может выйти более половины содержащегося в нем метана.

Природная метаноносность углей Донецкого бассейна колеблется в пределах 3–40 м<sup>3</sup> на тонну угля. Если принять начальную газоносность  $\rho_0\gamma_e \sim 1$  м<sup>3</sup> на кубический метр угля, то в пересчете на давление это составит 10<sup>5</sup> Па, т.е. одну атмосферу. В то же время известно [5], что взрывоопасная концентрация метана в воздухе соответствует 3% от атмосферного давления. Иными словами, обычно равновесная концентрация намного превышает взрывоопасную. В таком случае особый интерес представляет время достижения взрывоопасной концентрации, которая, как указывалось, равна 0.03 $n_0$  ( $n_0$  – число Лoshмидта). Приравнивая правую часть формулы (52) критической концентрации, получим следующую оценку времени достижения взрывоопасной концентрации (в размерных единицах):

$$t_* \sim \frac{(0.03)^2 n_0^2 g^2 L^2}{\alpha^2 \gamma_e \rho_0^2 D_f}, \quad \text{если } \frac{L^2}{D_f} \gg \frac{R^2}{D_{\text{eff}}} \quad (58)$$

и

$$t_* \sim \frac{(0.03)^2 n_0^2 g^2 R^2}{\alpha^2 \gamma_e \rho_0^2 D_{\text{eff}}}, \quad \text{если } \frac{R^2}{D_{\text{eff}}} \gg \frac{L^2}{D_f}. \quad (59)$$

Таким образом, время достижения критической концентрации обратно пропорционально квадрату метаноносности и прямо пропорционально квадрату отношения свободного и занятого объемов. Оно также пропорционально большему из времен фильтрации и диффузии.

1. А.Д. Алексеев, В.В. Синолицкий, Т.А. Василенко и др., ФТПРПИ № 2, 99 (1992).
2. Т.А. Василенко, Т.Н. Мельник, Э.П. Фельдман, ФТВД 9, № 1, 91 (1999).
3. А.Д. Алексеев, Э.П. Фельдман, Т.А. Василенко, А.Н. Молчанов, Н.А. Калугина, ФТВД 14, № 3, 107 (2004).
4. A.D. Alexeev, E.P. Feldman, T.A. Vasilenko, Fuel 79, 939 (2000).
5. Правила безопасности в угольных и сланцевых шахтах, Недра, Москва (1986).

*E.P. Feldman, T.A. Vasilenko, N.A. Kalugina*

## METHANE EMANATION FROM COAL TO A CLOSED RESERVOIR: THE ROLE OF DIFFUSION AND FILTRATION

A process of methane emanation from coal to a closed reservoir has been considered. The role of diffusion and filtration in the process has been shown. Within the model under consideration the formulated problem has been asymptotically analysed. An expression has been obtained for the time of obtaining a dangerous concentration of methane in a closed volume as a function of parameters of the fossil coal-methane system.

**Fig. 1.** Schematic showing of coal substance in a closed volume

**Fig. 2.** Dependence of methane concentration in a free volume on time for  $a \gg 1$

**Fig. 3.** Dependence of the time of methane emanation from coal on parameter  $g$