

PACS: 74.20.-z, 74.25.Bt, 74.72.-h, 64.60.Ak

А.Н. Артемов

## СЛОИСТЫЙ СВЕРХПРОВОДНИК КАК СИСТЕМА КУЛОНОВСКИХ ЧАСТИЦ ДВУХ ТИПОВ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины  
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина  
E-mail: artemov@kinetic.ac.donetsk.ua

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2008 года

*Термодинамические свойства слоистых сверхпроводников (СП) с джозефсоновской связью анализируются в рамках модели Лоуренса–Дониака в лондонском приближении. Показано, что в таком приближении эти СП можно рассматривать как систему классических безмассовых кулоновских частиц двух типов, взаимодействующих друг с другом. Большая статсумма системы анализируется методом ренормализационной группы (РГ) в реальном пространстве. Показано, что в такой системе отсутствует фазовый переход Березинского–Костерлица–Таулесса (БКТ).*

**Ключевые слова:** слоистый сверхпроводник, модель Лоуренса–Дониака,  $2D$ -вихрь, джозефсоновская связь, фазовый переход

### 1. Введение

Поведение системы вихрей связанных слоистых СП представляет одну из самых сложных и интересных проблем термодинамики квазидвумерных систем. Оно демонстрирует размерный кроссовер и другие особенности низкоразмерных систем, которые постоянно находятся в сфере интересов статистической физики.

Слоистые СП без джозефсоновской связи представляют собой двумерную ( $2D$ ) систему. В качестве тепловых возбуждений в них могут возникать магнитные  $2D$ -вихри, связанные в нейтральные пары. Они являются топологическими возбуждениями системы, взаимодействующими друг с другом по  $2D$ -закону Кулона, согласно которому энергия взаимодействия логарифмически зависит от расстояния между частицами. В газе таких вихрей наблюдается фазовый переход БКТ [1,2], являющийся как бы «визитной карточкой»  $2D$ -систем. Существование перехода обусловлено неустойчивостью системы  $2D$ -вихрей относительно диссоциации нейтральных пар в газ свободных вихрей, которая возникает при температуре перехода в результате конкуренции конфигурационной энергии системы вихрей и ее энтропии. Такие системы довольно просты, и их свойства изучены достаточно хорошо [3].

При наличии джозефсоновской связи слоистые СП уже нельзя рассматривать как  $2D$ -системы. Простейшими тепловыми возбуждениями в них являются пары  $2D$ -вихрей, магнитный поток которых замкнут двумя джозефсоновскими вихрями. Энергия взаимодействия  $2D$ -вихрей в этом случае логарифмически зависит от расстояния при малом размере пары и асимптотически линейно – при большом [4]. Эти системы гораздо более трудны для исследования, и их свойства изучены в значительно меньшей степени.

Одним из подходов к исследованию таких систем явилось изучение свойств систем классических безмассовых частиц (вихрей), энергия взаимодействия которых состоит из суммы логарифмического и линейного слагаемых [5–8]. В этом подходе линейное натяжение джозефсоновских вихрей учитывается только как часть энергии взаимодействия  $2D$ -вихрей. Однако для корректного изучения проблемы необходимо рассматривать джозефсоновскую подсистему в качестве независимого субъекта термодинамических процессов, обладающего своими конфигурационной энергией, собственной энергией и энтропией и взаимодействующего с подсистемой  $2D$ -вихрей.

Другой подход состоит в исследовании свойств трехмерной анизотропной XY-модели. Было показано [9–11], что в ней могут существовать возбуждения такого же типа, как в слоистых СП с джозефсоновской связью. Эта модель изучалась численно методом Монте-Карло [10,12] и аналитически [13,14]. Результаты исследований показали, что в модели происходит переход типа БКТ при температуре  $T_c$ , более высокой, чем температура  $T_{KT}$  перехода в планарной модели, и связь между слоями исчезает при той же температуре.

Пирсон и Воллс рассмотрели модель, названную ими моделью XY-слоев с лоуренс-дониаковским типом связи между слоями [15]. Она представляет собой  $2D$ -модель sine-Gordon в каждом слое с дополнительным слагаемым в виде косинуса от разности фаз в соседних слоях. Эта модель не следует из модели Лоуренса–Дониака [16], однако она, по-видимому, правильно ухватывает свойства связанных систем. Анализируя поведение модели, авторы разложили дополнительный косинус до квадратичного слагаемого и применили метод РГ в импульсном пространстве. Не обнаружив неподвижной точки, они делают предположение о существовании такой точки в той области фазового пространства, в которой пертурбативная РГ становится неприменимой.

Попытка решить ту же проблему, которая обсуждается в данной статье, предпринята в работе [17]. Авторы основывают свой подход на одномерной модели sine-Gordon и используют ее связь с моделью  $2D$ -кулоновского газа. Статсумма модели представлена в виде функционального интеграла по двум некоммутирующим переменным. Анализируется поведение модели методом РГ. Построенные преобразования РГ не имеют неподвижной точки. Тем не менее авторы делают вывод о существовании в модели фазового перехода второго рода, температура которого зависит от энергии кора вихря.

В представленной работе предложен подход к проблеме, в котором модель Лоуренса–Дониака [16] в лондоновском пределе преобразована в систему классических кулоновских частиц двух типов. Статсумма этой системы анализируется методом РГ в реальном пространстве. Полученные преобразования РГ не имеют неподвижной точки и, следовательно, рассматриваемая система не подвержена фазовому переходу второго рода.

## 2. Модель Лоуренса–Дониака в лондоновском приближении

Модель Лоуренса–Дониака [16] (см. также обзор [18]) представляет собой модель Гинзбурга–Ландау, адаптированную к слоистым СП. В настоящее время эта модель слишком сложна для непосредственного анализа, поэтому мы максимально упростим ее. Прежде всего ограничимся лондоновским приближением, т.е. будем рассматривать только флуктуации фазы параметра порядка, а модуль примем за константу, не зависящую от координат. Следующее приближение состоит в том, что мы исключим магнитное взаимодействие токов, протекающих в слоях. Оно сводится к пренебрежению вклада векторного потенциала в термодинамику модели.

Статсумма упрощенной таким образом модели может быть записана в виде

$$Z = \int D\theta \exp \left\{ -\frac{1}{2J} \sum_n \int d\mathbf{r} \frac{(\nabla\theta_n)^2}{2\pi} + 2y_f \sum_n \frac{d\mathbf{r}}{\tau^2} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n) \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $\theta_n$  – фаза параметра порядка в слое  $n$ ;  $J = 4\pi^2 \Lambda T / \phi_0^2$  (где  $\Lambda = 2\lambda^2 / s$ ,  $\lambda$  – лондоновская глубина проникновения,  $s$  – период слоистой структуры,  $T$  – температура,  $\phi_0$  – квант потока);  $\tau$  – минимальная длина модели, по порядку величины равная длине когерентности СП. В статистической механике введенная здесь величина  $y_f$  называется активностью (фугитивностью) системы. В модели (1) она пропорциональна плотности критического тока джозефсоновской связи.

Эта модель описывает термодинамику джозефсоновской подсистемы слоистых СП. Она (с учетом магнитного взаимодействия) анализировалась в работе [19]. Автор работы показал, что в системе происходит фазовый переход типа БКТ при температуре

$$T_f = \frac{\phi_0^2}{2\pi^2 \Lambda(T_f)}. \quad (2)$$

Нас интересует более сложная проблема изучения термодинамики джозефсоновской подсистемы, взаимодействующей с подсистемой  $2D$ -вихрей. С целью построения соответствующей модели преобразуем (1) следующим образом. Возьмем экспоненту с косинусоидальным членом, соответствующую одному слою  $n$ , и разложим ее в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \exp\left\{2y_f \int \frac{d\mathbf{r}}{\tau^2} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n)\right\} &= \exp\left\{y_f \int \frac{d\mathbf{r}}{\tau^2} e^{i(\theta_{n+1}\theta_n)}\right\} \exp\left\{y_f \int \frac{d\mathbf{r}}{\tau^2} e^{-i(\theta_{n+1}\theta_n)}\right\} = \\ &= \sum_{M_{n+}} \frac{1}{M_{n+}!} \left(y_f \int \frac{d\mathbf{r}}{\tau^2} e^{i(\theta_{n+1}\theta_n)}\right)^{M_{n+}} \sum_{M_{n-}} \frac{1}{M_{n-}!} \left(y_f \int \frac{d\mathbf{r}}{\tau^2} e^{-i(\theta_{n+1}\theta_n)}\right)^{M_{n-}} = \\ &= \sum_{M_{n\pm}} \frac{1}{M_{n+}!} \frac{1}{M_{n-}!} \left(y_f \int \frac{d\mathbf{r}_{\alpha_n}}{\tau^2}\right)^{M_{n+}+M_{n-}} \exp\left\{i \sum_{\alpha_n}^{M_{n+}+M_{n-}} \sigma_{\alpha_n} (\theta_{n+1}(\mathbf{r}_{\alpha_n}) - \theta_n(\mathbf{r}_{\alpha_n}))\right\}. \end{aligned}$$

При переходе от второй строки к третьей степени заменены произведениями, произведение экспонент – экспонентой от суммы, сумма распространена на все слагаемые, а знак слагаемого учитывается величиной  $\sigma_{\alpha_n} = \pm 1$ . Далее произведем замену переменной интегрирования  $\theta \Rightarrow \sqrt{J}\theta$  и введем «заряд»  $q_{\alpha_n} = \sigma_{\alpha_n} \sqrt{J}$ . После этого выражение (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Z &= \prod_n \left[ \sum_{M_n} \frac{1}{(M_n!)^2} \left(y_f \int \frac{d\mathbf{r}_{\alpha_n}}{\tau^2}\right)^{2M_n} \right] \times \\ &\times \int D\theta \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_n \int d\mathbf{r} \frac{(\nabla\theta_n)^2}{2\pi} + i \sum_n \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} (\theta_{n+1}(\mathbf{r}_{\alpha_n}) - \theta_n(\mathbf{r}_{\alpha_n}))\right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Полученное выражение имеет вид статсуммы системы кулоновских частиц, являющихся источниками поля  $\theta$  и взаимодействующих с ним. Эти частицы будем называть флюксонными и подробнее обсудим их далее. В статсумму (3) включены только нейтральные состояния с равным числом частиц с противоположными знаками в каждом слое  $M_{n+} = M_{n-}$ . Заряженные состояния имеют очень большую энергию и дают пренебрежимо малый вклад в термодинамику системы.

Введем в систему  $2D$ -вихри. В лондоновском приближении они рассматриваются как топологические дефекты фазы параметра порядка, задаваемые условием (с учетом сделанной замены переменной)

$$[\nabla, \nabla\theta_n(r)] = 2\pi\hat{z}p_{j_n}\delta(r - r_{j_n}), \quad (\nabla, \nabla\theta_n(r)) = 0, \quad (4)$$

где введен топологический заряд вихря  $p_{j_n} = \pm 1/\sqrt{J}$ ,  $\hat{z}$  – единичный вектор в направлении оси  $z$ . Простые вычисления на основе (3) и (4) позволяют найти равновесные значения энергии взаимодействия двух вихрей и фазу, связанную с одним вихрем:

$$\theta_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j_n}) = p_{j_n} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j_n}) = p_{j_n} \arctg \frac{y - y_{j_n}}{x - x_{j_n}}. \quad (5)$$

Теперь можно записать статсумму системы, включающей подсистемы джо-зефсоновскую (3) и  $2D$ -вихрей:

$$Z = \prod_n \left[ \sum_{M_n} \frac{1}{(M_n!)^2} \left( y_f \int \frac{d\mathbf{r}_{\alpha_n}}{\tau^2} \right)^{2M_n} \sum_{N_n} \frac{1}{(N_n!)^2} \left( y_v \int \frac{d\mathbf{r}_{j_n}}{\tau^2} \right)^{2N_n} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_n \sum_{i_n \neq j_n} p_{i_n} p_{j_n} \ln \frac{|\mathbf{r}_{i_n} - \mathbf{r}_{j_n}|}{\tau} \right\} \int D\theta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \int d\mathbf{r} \frac{(\nabla\theta_n)^2}{2\pi} + \right.$$

$$\left. + i \sum_n \sum_{\alpha_n} q_{\alpha_n} \left( \theta_{n+1}(r_{\alpha_n}) + \sum_{j_{n+1}} p_{j_{n+1}} w(r_{\alpha_n} - r_{j_{n+1}}) - \theta_n(r_{\alpha_n}) - \sum_{j_n} p_{j_n} w(r_{\alpha_n} - r_{j_n}) \right) \right\}.$$

Здесь  $y_v$  – активность подсистемы  $2D$ -вихрей, греческие индексы помечают величины, характеризующие джозефсоновскую подсистему, а латинские – подсистему  $2D$ -вихрей. В полученном выражении, по сравнению с (3), добавлена собственно статсумма подсистемы  $2D$ -вихрей и, кроме того, к фазам, обусловленным джозефсоновским взаимодействием, добавились фазы, источниками которых являются  $2D$ -вихри.

Последний шаг – вычисление интеграла по полю  $\theta$ . Оно выполняется элементарно, поскольку действие квадратично по  $\theta$ , а градиентный член диагонализуется в импульсном представлении. В результате получаем искомую статсумму системы классических безмассовых частиц двух типов

$$Z = \prod_n \left[ \sum_{M_n} \frac{y_f^{2M_n}}{(M_n!)^2} \prod_{\alpha_n} \left( \int_{D_{\alpha_n}} \frac{d\mathbf{r}_{\alpha_n}}{\tau^2} \right)^{2M_n} \sum_{N_n} \frac{y_v^{2N_n}}{(N_n!)^2} \prod_{j_n} \left( \int_{D_{j_n}} \frac{d\mathbf{r}_{j_n}}{\tau^2} \right)^{2N_n} \right] \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{i_n \neq j_n} p_{i_n} p_{j_n} v(|\mathbf{r}_{i_n} - \mathbf{r}_{j_n}|) - \frac{1}{2} \sum_{n,n'} \sum_{\alpha_n \neq \beta_{n'}} q_{\alpha_n} q_{\beta_{n'}} u_{n,n'}(|\mathbf{r}_{\alpha_n} - \mathbf{r}_{\beta_{n'}}|) + \right. \quad (6)$$

$$\left. + i \sum_{n,n'} \sum_{\alpha_n, j_{n'}} q_{\alpha_n} p_{j_{n'}} w_{n,n'}(\mathbf{r}_{\alpha_n} - \mathbf{r}_{j_{n'}}) \right\},$$

где

$$v(|\mathbf{r}_{i_n} - \mathbf{r}_{j_n}|) = -\ln \frac{|\mathbf{r}_{i_n} - \mathbf{r}_{j_n}|}{\tau}, \quad p_{j_n} = \pm \frac{1}{\sqrt{J}}$$

– соответственно потенциал взаимодействия и заряд  $2D$ -вихрей в слое  $n$ ;

$$u_{n,n'}(|\mathbf{r}_{\alpha_n} - \mathbf{r}_{\beta_{n'}}|) = -\ln \frac{|\mathbf{r}_{\alpha_n} - \mathbf{r}_{\beta_{n'}}|}{\tau} (2\delta_{n,n'} - \delta_{n+1,n'} - \delta_{n-1,n'}), \quad q_{\alpha_n} = \pm \sqrt{J}$$

– потенциал взаимодействия и заряд флюксонов в слоях  $n$  и  $n'$ ;

$$w_{n,n'}(r_{\alpha_n} - r_{j_{n'}}) = \text{arctg} \frac{y_{\alpha_n} - y_{j_{n'}}}{x_{\alpha_n} - x_{j_{n'}}} (\delta_{n+1,n'} - \delta_{n,n'})$$

– «потенциал» взаимодействия флюксонных частиц и  $2D$ -вихрей в слоях  $n$  и  $n'$ . Здесь также указаны области интегрирования по координатам частиц  $D_{\alpha_n}$  и  $D_{j_n}$ , которые представляют собой всю площадь слоя, за исключением дисков радиуса  $\tau$  вокруг частиц.

Таким образом, мы свели модель Лоуренса–Дониака к системе кулоновских частиц двух видов.  $2D$ -вихри представляют собой топологические дефекты, заданные условиями (4), и их можно рассматривать как  $2D$ -кулоновский газ.

Флюксонные частицы представляют собой диполи, полюса которых находятся в соседних слоях. Их можно рассматривать как отрезки токовых линий, соединяющих два слоя. Взаимодействие этих частиц сводится к кулоновскому взаимодействию полюсов, расположенных в одном слое. Эти частицы также являются топологическими дефектами, определяемыми условиями

$$[\nabla, \nabla \theta_n(r)] = 0, \quad (\nabla, \nabla \theta_{n'}(r - r_{\alpha_n})) = 2\pi q_{\alpha_n} \delta(r - r_{\alpha_n})(\delta_{n+1, n'} - \delta_{n, n'}).$$

Необычным в таком подходе оказывается «потенциал» взаимодействия частиц разных типов. Он не является потенциальной функцией, поскольку не зависит от расстояния между частицами. Это просто угол наклона радиус-вектора, соединяющего положения двух частиц.

### 3. Уравнения РГ

Анализ поведения модели выполнен методом РГ в реальном пространстве. Ввиду громоздкости промежуточных выражений мы не можем привести подробный вывод уравнений РГ. Однако подробное и ясное описание этого метода для анализа модели  $2D$ -кулоновского газа имеется в работах Костерлица [20] и Пирсона [21]. Мы использовали тот же подход с довольно очевидными отличиями, обусловленными различием моделей. Поэтому отметим только ключевые моменты, связанные с особенностями нашей модели.

Первым шагом в построении РГ является интегрирование статсуммы (6) по мелкомасштабным состояниям. В нашем случае это выполняется следующим образом. Рассматриваем две частицы, находящиеся на расстоянии друг от друга в интервале от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$ , и находим влияние всех возможных состояний этих частиц на взаимодействие остальных. В отличие от  $2D$ -кулоновского газа здесь возможны два варианта таких пар. Это топологически нейтральные пары  $2D$ -вихрей и такие же пары флюксонных частиц. Интегрирование по состояниям других пар ведет к появлению заряженных состояний системы, вклад которых в статсумму пренебрежимо мал. В соответствии с этим разобьем интегрирование в (6) по координатам на части

$$\begin{aligned} & \prod_{\alpha_n} \left( \int_{D_{\alpha_n}} \mathbf{dr}_{\alpha_n} \right) \prod_{i_n} \left( \int_{D_{j_n}} \mathbf{dr}_{i_n} \right) = \\ & = \prod_{\alpha_n} \left( \int_{D'_{\alpha_n}} \mathbf{dr}_{\alpha_n} \right) \left[ \prod_{i_n} \left( \int_{D'_{j_n}} \mathbf{dr}_{i_n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j_n \neq k_n} \prod_{i_n \neq j_n, k_n} \left( \int_{D'_{i_n}} \mathbf{dr}_{i_n} \right) \int_{D''_{j_n}} \mathbf{dr}_{j_n} \int_{\delta_{k_n}(j_n)} \mathbf{dr}_{k_n} \right] + \\ & + \prod_{i_n} \left( \int_{D'_{i_n}} \mathbf{dr}_{i_n} \right) \left[ \prod_{\alpha_n} \left( \int_{D'_{\alpha_n}} \mathbf{dr}_{\alpha_n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\beta_n \neq \gamma_n} \prod_{\alpha_n \neq \beta_n, \gamma_n} \left( \int_{D'_{\alpha_n}} \mathbf{dr}_{\alpha_n} \right) \int_{D''_{\beta_n}} \mathbf{dr}_{\beta_n} \int_{\delta_{\gamma_n}(\beta_n)} \mathbf{dr}_{\gamma_n} \right] + \\ & + O(d\tau^2). \end{aligned}$$

Здесь пределы интегрирования  $D'_{\alpha_n}$  и  $D'_{j_n}$  представляют собой всю площадь слоя, за исключением дисков радиуса  $\tau + d\tau$  вокруг частиц. В выписанных отдельно интегралах  $\delta_{k_n}(j_n)$  и  $\delta_{\gamma_n}(\beta_n)$  – это кольца шириной  $d\tau$  вокруг дисков радиуса  $\tau$  около частиц  $j_n$  и  $\beta_n$  соответственно,  $D''_{j_n}$  и  $D''_{\beta_n}$  означают интегрирование по всем возможным состояниям частиц  $j_n$  и  $\beta_n$ . Вычисление этих интегралов дает вклад мелкомасштабных структур в статсумму.

Вычисления продемонстрируем на примере интеграла по координатам  $\mathbf{r}_{j_n}$  и  $\mathbf{r}_{k_n}$   $2D$ -вихрей. Для этого выделим часть выражения статсуммы, содержащую энергию взаимодействия всех частиц с вихрями  $j_n$  и  $k_n$ :

$$\begin{aligned} & \int_{D''_{j_n}} \mathbf{dr}_{j_n} \int_{\delta_{k_n}(j_n)} \mathbf{dr}_{k_n} \exp \left\{ - \sum_{i_n} p_{i_n} \left[ p_{j_n} v(r_{j_n i_n}) + p_{k_n} v(r_{k_n i_n}) \right] + \right. \\ & \left. + i \sum_{n'} \sum_{\alpha_{n'}} q_{\alpha_{n'}} \left[ p_{j_n} w(\mathbf{r}_{j_n \alpha_{n'}}) + p_{i_n} w(\mathbf{r}_{k_n \alpha_{n'}}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Далее необходимо учесть, что  $p_{k_n} = -p_{j_n}$  и  $\mathbf{r}_{k_n} = \mathbf{r}_{j_n} + \boldsymbol{\tau}$ . В результате, выпиная явно выражения для потенциалов, получаем

$$\begin{aligned} & \tau d\tau \int_{D''_{j_n}} \mathbf{dr}_{j_n} \int_0^{2\pi} d\theta \exp \left\{ - p_{j_n} \sum_{i_n} p_{i_n} \frac{1}{2} \ln \frac{(\mathbf{r}_{i_n} + \boldsymbol{\tau})^2}{r_{j_n i_n}^2} - \right. \\ & \left. - p_{j_n} \sum_{n'} \sum_{\alpha_{n'}} q_{\alpha_{n'}} \operatorname{arctg} \frac{[\mathbf{r}_{j_n \alpha_{n'}} \cdot \boldsymbol{\tau}]_z}{r_{j_n \alpha_{n'}}^2} (\delta_{n+1, n'} - \delta_{n, n'}) \right\}. \end{aligned}$$

Предположив, что концентрация частиц в системе мала, можно полагать, что вероятность нахождения третьей частицы в близкой окрестности пары  $j_n$ - $k_n$  невелика. Следовательно, мы можем разложить полученное выражение

в ряд по малому параметру  $\tau/r$  (где  $r$  – расстояние до третьей частицы) и выполнить интегрирование по угловой переменной, что дает нам

$$2\pi\tau d\tau \int_{D_{j_n}^*} d\mathbf{r}_{j_n} \left[ 1 + \frac{(p\tau)^2}{4} \sum_{k_n \neq l_n} p_{k_n} p_{l_n} \left( \frac{(\mathbf{r}_{j_n k_n}, \mathbf{r}_{j_n l_n})}{r_{j_n k_n}^2 r_{j_n l_n}^2} - \frac{1}{r_{j_n k_n}^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{(p\tau)^2}{4} \sum_{n'} \sum_{\alpha_n \neq \beta_{n'}} q_{\alpha_n} q_{\beta_{n'}} \left( \frac{(\mathbf{r}_{j_n \alpha_n}, \mathbf{r}_{j_n \beta_{n'}})}{r_{j_n \alpha_n}^2 r_{j_n \beta_{n'}}^2} - \frac{1}{r_{j_n \alpha_n}^2} \right) (2\delta_{n,n'} - \delta_{n+1,n'} - \delta_{n-1,n'}) + \right. \\ \left. + i \frac{(p\tau)^2}{4} \sum_{n'} \sum_{k_n, \alpha_{n'}} p_{k_n} q_{\alpha_{n'}} \frac{[\mathbf{r}_{j_n \alpha_n}, \mathbf{r}_{j_n k_n}]_z}{r_{j_n \alpha_n}^2 r_{j_n k_n}^2} (\delta_{n+1,n'} - \delta_{n,n'}) \right].$$

В этом выражении первое слагаемое после единицы перенормирует взаимодействие  $2D$ -вихрей, второе – взаимодействие флуксонных частиц. Интегралы, появляющиеся здесь, те же, что и в работах [20,21], и приводят к таким же выражениям.

Последнее слагаемое должно перенормировать взаимодействие  $2D$ -вихрей и флуксонных частиц. Однако в результате интегрирования по угловой переменной оно тождественно обращается в нуль. Этот результат важен для построения РГ. Он показывает, что произведение затравочных зарядов  $2D$ -вихрей и флуксонных частиц  $p_{j_n} q_{\alpha_{n'}} = \pm 1$  остается неизменным и после перенормировки. Это означает, что в действительности перенормируются не заряды частиц, а величина  $J$ .

Расчет влияния флуксонных частиц на перенормировку гамильтониана мало отличается от описанного выше. Основной отличительной особенностью такой перенормировки является появление взаимодействия частиц, находящихся в разных слоях, которого не было в исходном гамильтониане. В этой работе мы не будем принимать во внимание появление новых слагаемых и ограничимся перенормировкой только параметров затравочного гамильтониана (6).

После вычисления оставшихся интегралов получим вклад в перенормировку статсуммы, обусловленный взаимодействием с парой  $2D$ -вихрей:

$$2\pi\tau d\tau \left[ A - \frac{2\pi\tau^2 p^2}{4} \sum_{\substack{k_n \neq l_n \\ k_n, l_n \neq i_n, j_n}}^{2(N_n-1)} p_{k_n} p_{l_n} \ln \frac{r_{k_n l_n}}{\tau} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi\tau^2 p^2}{4} \sum_{n'} \sum_{\alpha_n \neq \beta_{n'}} q_{\alpha_n} q_{\beta_{n'}} \ln \frac{r_{\alpha_n \beta_{n'}}}{\tau} (2\delta_{n,n'} - \delta_{n+1,n'} - \delta_{n-1,n'}) \right],$$

и аналогичным образом найденный вклад флуксонных частиц



$$2\pi\tau d\tau \left[ A - \frac{2\pi\tau^2 q^2}{2} \sum_{n'} \sum_{\substack{\gamma_n \neq \delta_{n'} \\ \gamma_n, \delta_{n'} \neq \alpha_n, \beta_n}}^{2(M_n-1)} q_{\gamma_n} q_{\delta_{n'}} \ln \frac{r_{\gamma_n \delta_{n'}}}{\tau} (2\delta_{n,n'} - \delta_{n+1,n'} - \delta_{n-1,n'}) + \right. \\ \left. + \frac{2\pi\tau^2 q^2}{2} \sum_{i_n \neq j_n} p_{i_n} q_{j_n} \ln \frac{r_{i_n j_n}}{\tau} \right].$$

Теперь, действуя в соответствии с [20,21], эти вклады нужно подставить в перенормированную статсумму, включив первое выражение в состояние с числом частиц  $N_n - 1$ ,  $M_n$  и второе – в состояние с числом частиц  $N_n$ ,  $M_n - 1$ , переобозначив  $N_n - 1$  ( $M_n - 1$ ) на  $N_n$  ( $M_n$ ). Подняв эти малые добавки в показатель экспоненты, найдем перенормировку зарядов частиц за счет взаимодействия

$$Z = \prod_n \exp \left\{ 2\pi (y_v^2 + y_f^2) \tau d\tau A \right\} \sum_{N_n, M_n} \frac{y_v^{2N_n}}{(N_n!)^2} \frac{y_f^{2M_n}}{(M_n!)^2} \left( \int d\mathbf{r}_{j_n} \right)^{2N_n} \left( \int d\mathbf{r}_{\alpha_n} \right)^{2M_n} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{i_n \neq j_n} p_{i_n} p_{j_n} \left[ -\left( 1 - (2\pi y_v \tau^2)^2 \frac{p^2}{2} \frac{d\tau}{\tau} + (2\pi y_f \tau^2)^2 q^2 \frac{d\tau}{\tau} \right) v(r_{i_n j_n}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{n, n'} \sum_{\alpha_n \neq \beta_{n'}} q_{\alpha_n} q_{\beta_{n'}} \left[ -\left( 1 - (2\pi y_f \tau^2)^2 q^2 \frac{d\tau}{\tau} + (2\pi y_v \tau^2)^2 \frac{p^2}{2} \frac{d\tau}{\tau} \right) u_{nn'}(r_{\alpha_n \beta_{n'}}) \right] + \right. \\ \left. + i \sum_{n, n'} \sum_{\alpha_n, j_{n'}} q_{\alpha_n} p_{j_n} w_{nn'}(\mathbf{r}_{\alpha_n j_{n'}}) \right\}.$$

Вторым шагом в построении уравнений РГ является изменение масштаба пространственных переменных таким образом, чтобы пределы интегрирования стали такими же, как в исходной статсумме. Для этого перейдем к новой пространственной переменной  $r' = r/(1 + d\tau/\tau)$ :

$$Z = \prod_n \sum_{N_n, M_n} \left[ y_v \left( 1 + \frac{d\tau}{\tau} \left( 2 - \frac{p^2}{2} \right) \right) \right]^{2N_n} \times \\ \times \frac{1}{(N_n!)^2} \left[ y_f \left( 1 + \frac{d\tau}{\tau} (2 - q^2) \right) \right]^{2M_n} \frac{1}{(M_n!)^2} \left( \int_{D_{j_n}} d\mathbf{r}_{j_n} \right)^{2N_n} \left( \int_{D_{\alpha_n}} d\mathbf{r}_{\alpha_n} \right)^{2M_n} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{i_n \neq j_n} p_{i_n} p_{j_n} \left[ -\left( 1 - (2\pi y_v \tau^2)^2 \frac{p^2}{2} \frac{d\tau}{\tau} + (2\pi y_f \tau^2)^2 q^2 \frac{d\tau}{\tau} \right) v(r_{i_n j_n}) \right] - \right.$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n,n'} \sum_{\alpha_n \neq \beta_{n'}} q_{\alpha_n} q_{\beta_{n'}} \left[ - \left( 1 - (2\pi y_f \tau^2)^2 q^2 \frac{d\tau}{\tau} + (2\pi y_v \tau^2)^2 \frac{p^2}{2} \frac{d\tau}{\tau} \right) u_{nn'}(r_{\alpha_n \beta_{n'}}) + \right. \\ \left. + i \sum_{n,n'} \sum_{\alpha_n, j_{n'}} q_{\alpha_n} p_{j_{n'}} w_{nn'}(\mathbf{r}_{\alpha_n j_{n'}}) \right].$$

Теперь видно, что это выражение имеет такой же вид, как исходная статсумма (6), за исключением того, что параметры гамильтониана перенормированы:

$$(p^2)' = p^2 \left( 1 - (2\pi y_v \tau^2)^2 \frac{p^2}{2} \frac{d\tau}{\tau} + (2\pi y_f \tau^2)^2 q^2 \frac{d\tau}{\tau} \right), \quad (7)$$

$$(q^2)' = q^2 \left( 1 - (2\pi y_f \tau^2)^2 q^2 \frac{d\tau}{\tau} + (2\pi y_v \tau^2)^2 \frac{p^2}{2} \frac{d\tau}{\tau} \right), \quad (8)$$

$$y'_v = y_v \left( 1 + \frac{d\tau}{\tau} \left( 2 - \frac{p^2}{2} \right) \right),$$

$$y'_f = y_f \left( 1 + \frac{d\tau}{\tau} (2 - q^2) \right).$$

Чтобы получить уравнения РГ в нужной нам дифференциальной форме, вспомним, что заряды  $p$  и  $q$  связаны с величиной  $J$  (6), и введем новые переменные  $t = \ln \tau$ ,  $y'_v = 2\pi y_v \tau^2$  и  $y'_f = 2\pi y_f \tau^2$ . В результате получаем (штрихи опущены)

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} y_v^2 - J^2 y_f^2, \quad (9)$$

$$\frac{dy_v}{dt} = \left( 2 - \frac{1}{2J} \right) y_v, \quad (10)$$

$$\frac{dy_f}{dt} = (2 - J) y_f. \quad (11)$$

В этой системе содержатся три уравнения, поскольку, как легко убедиться, уравнения (7) и (8) приводят к одинаковым уравнениям для  $J$ . Система (9)–(11) исследуется в следующих разделах.

#### 4. Поведение системы несвязанных подсистем $2D$ -вихрей и флюксоновых частиц

Поведение связанной системы  $2D$ -вихрей и флюксоновых частиц довольно сложное. В нем можно увидеть особенности, обусловленные влиянием как

одной, так и другой подсистем. Чтобы понять, к каким следствиям для всей системы приводит система уравнений РГ (9)–(11), удобно сравнить фазовые портреты связанной системы и независимых подсистем. Ввиду сказанного приведем минимально необходимое количество сведений о поведении подсистем  $2D$ -вихрей и флюксонных частиц.

Обе системы являются двумерными, и поведение их хорошо исследовано (см., напр., (19)). Уравнения РГ для них получаются из системы (9)–(11), если положить  $y_f = 0$  для подсистемы  $2D$ -вихрей:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}y_v^2, \quad \frac{dy_v}{dt} = \left(2 - \frac{1}{2J}\right)y_v \quad (12)$$

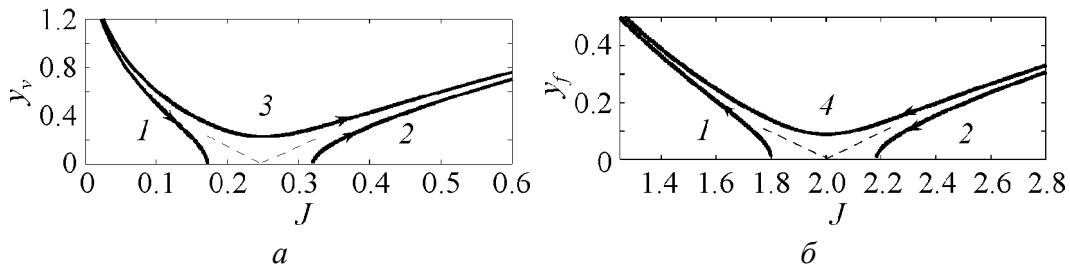
и  $y_v = 0$  – для подсистемы флюксонных частиц (или джозефсоновской):

$$\frac{dJ}{dt} = -J^2y_f^2, \quad \frac{dy_f}{dt} = (2 - J)y_f. \quad (13)$$

Фазовые портреты уравнений (12) и (13) показаны на рис. 1. Основной особенностью этих портретов является наличие неподвижных точек седлового типа:  $J = 1/4, y_v = 0$  для  $2D$ -вихрей и  $J = 2, y_f = 0$  для флюксонных частиц. Более того, данные фазовые портреты содержат не просто неподвижные точки, а линии неподвижных точек, определяемые условиями  $y_v = 0$  и  $y_f = 0$ . Это значит, что в рассматриваемых системах происходят фазовые переходы второго рода типа БКТ при температурах

$$T_{KTv} = \frac{\phi_0^2}{16\pi^2\Lambda(T_{KTv})} \quad \text{и} \quad T_{Ktf} = \frac{\phi_0^2}{2\pi^2\Lambda(T_{Ktf})},$$

причем всегда  $T_{KTv} < T_{Ktf}$ .



**Рис. 1.** Фазовые портреты систем  $2D$ -вихрей (а) и флюксонных частиц (б). Штриховыми линиями показаны сепаратрисы вблизи неподвижных точек седлового типа

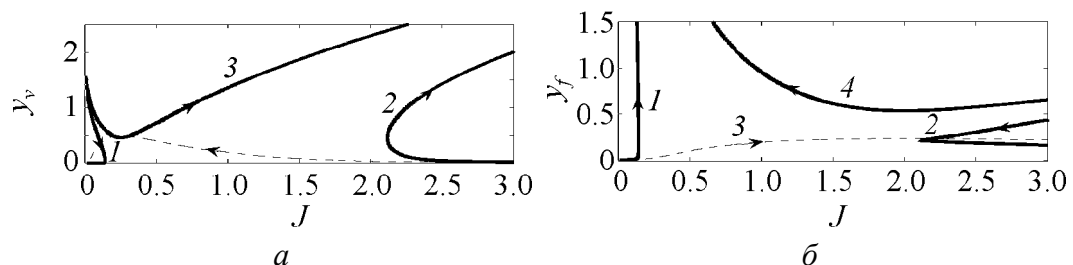
Другой важной особенностью фазовых портретов на рис. 1 является направление движения систем вдоль фазовых траекторий. Видно, что системы движутся в противоположных направлениях. Данное обстоятельство обусловлено знаком правой части первых уравнений (12) и (13). На языке концентраций частиц эта особенность проявляется так. При температурах ниже фазового перехода  $T < T_{KTv}$  ( $J < 1/4$ ) концентрация  $2D$ -вихрей равна нулю,

а при  $T > T_{KTv}$  ( $J > 1/4$ ) появляется ненулевая концентрация свободных вихрей. В случае флюксоновых частиц ситуация иная. При  $T > T_{KTf}$  ( $J > 2$ ) свободные частицы отсутствуют, а при  $T < T_{KTf}$  ( $J < 2$ ) в системе присутствует конечная концентрация частиц. Обратим внимание также на следующее обстоятельство. Поскольку активность системы флюксоновых частиц  $y_f$  пропорциональна критической плотности тока джозефсоновской связи (см. (1)), в точке перехода  $T = T_{KTf}$  связь между плоскостями исчезает.

### 5. Поведение системы связанных подсистем 2D-вихрей и флюксоновых частиц

Основываясь на понимании поведения независимых подсистем 2D-вихрей и флюксоновых частиц, постараемся разобраться в свойствах системы вихрей слоистого СП с джозефсоновской связью между слоями.

Фазовые траектории уравнений РГ (9)–(11) такой системы являются трехмерными кривыми. Они показаны на рис. 2 как проекции на плоскости  $J$ – $y_v$  и  $J$ – $y_f$ . По сравнению с рис. 1 видны следующие качественные отличия. Во-первых, в системе уравнений (9)–(11) нет неподвижной точки. В соответствии с представлениями о свойствах РГ это означает отсутствие в рассматриваемой термодинамической системе фазового перехода второго рода. Второй важной особенностью является то, что при движении вдоль некоторых траекторий система изменяет направление движения (знак изменения  $J$ ). Это связано с тем обстоятельством, что правая часть уравнения (9) не является знакоопределенной.



**Рис. 2.** Проекция трехмерных фазовых кривых системы уравнений РГ (9)–(11). Одинаковыми цифрами помечены проекции одной линии. Штриховыми линиями показаны проекции траекторий системы, которым нет аналогов среди траекторий независимых систем (12) и (13) на рис. 1

Вместе с тем, несмотря на значительное различие фазовых пространств систем (две фазовые переменные и три), в поведении траекторий можно увидеть некоторые аналогии. Так, проекция траектории 1 на рис. 2,а при малых масштабных временах  $t$  (до поворота траектории) качественно ведет себя, как кривая 1 на рис. 1,а, а при больших  $t$  (после поворота) – как траектория 1 на рис. 1,б. Проекция 2 на рис. 2,б до поворота ведет себя подобно траектории 2 на рис. 1,б, а после поворота проекция 2 этой траектории на рис.

2,а) похожа на траекторию 2 на рис. 1,а). Кроме того, видно, что проекция 3 (рис. 2,а) подобна кривой 3 (рис. 1,а), а проекция 4 (рис. 2,б) – кривой 4 (рис. 1,б). Такое подобие в поведении фазовых траекторий РГ этих систем позволяет выдвинуть предположение, что и поведение самих систем в чем-то подобно.

Более определенные выводы относительно свойств исследуемой системы можно сделать на основании следующих соображений. Кроме формы траекторий и направления движения системы вдоль них, поведение системы характеризуется скоростью движения на различных участках траектории. При наличии неподвижных точек, как в предыдущем разделе, скорость системы при приближении к этим точкам асимптотически стремится к нулю, и система не может за конечное время дойти до них. В рассматриваемом случае уравнения РГ не имеют неподвижных точек, однако есть точки поворота траекторий. При приближении к таким точкам скорость движения системы уменьшается, а после их прохождения опять возрастает. Чем ближе точки поворота траекторий, расположенных справа и слева на фазовом портрете системы, сходятся друг к другу, тем меньше скорость системы в этих точках. Существует единственная точка, в окрестности которой скорость системы является наименьшей. Если эта «медленная» точка достаточно глубока, то в эксперименте поведение такой системы будет неотличимо от фазового перехода второго рода. Системы без неподвижных точек исследовал Зумбах [20]. Он назвал эту ситуацию «фазовым переходом почти второго рода».

На наш взгляд, наиболее вероятной причиной такого поведения термодинамической системы может быть существование двух корреляционных длин (КД), связанных с двумя подсистемами:  $2D$ -вихрей и флуксонных частиц. Поскольку эти подсистемы движутся вдоль своих траекторий в противоположных направлениях, их КД возрастают при разных направлениях изменения температуры. КД системы  $2D$ -вихрей  $\delta_v$  минимальна в окрестности фазового перехода в СП-состояние и стремится к бесконечности при приближении к  $T = T_{KTv}$  сверху. Для системы флуксонных частиц КД  $\delta_f$  минимальна вблизи нулевой температуры и растет до бесконечности при приближении к  $T = T_{KTf}$  снизу. КД связанной системы обусловлена обеими системами и будет связана с частными КД соотношением  $\delta^{-2} = \delta_v^{-2} + \delta_f^{-2}$ . Понятно, что такая длина никогда не будет стремиться к бесконечности. Она достигнет своей наибольшей величины в некоторой «медленной» точке  $J = J_s$  и будет уменьшаться при отклонении температуры от этой точки как вверх, так и вниз. Методом простого численного перебора траекторий можно установить приближенное значение этого параметра  $J_s \approx 0.7$ , что позволяет оценить температуру «фазового перехода почти второго рода»

$$T_s \approx 0.7 \frac{\phi_0^2}{4\pi^2 \Lambda(T_s)}$$

Такое объяснение поведения системы является, в какой-то мере, умоглядным и нуждается в дальнейшей верификации, например в рамках приближения среднего поля. Это будет предметом предстоящих исследований.

1. В.Л. Березинский, ЖЭТФ **76**, 1144 (1971).
2. J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless, J. Phys. **C6**, 1181 (1973).
3. P. Minnhagen, Rev. Mod. Phys. **59**, 1001 (1987).
4. M.V. Feigel'man, V.B. Geshkenbein, A.I. Larkin, Physica **C167**, 177 (1990).
5. K.H. Fisher, Physica **C210**, 179 (1993).
6. S.W. Pierson, Phys. Rev. Lett. **73**, 2496 (1994).
7. M. Friesen, Phys. Rev. **B51**, 632 (1994).
8. А.Н. Артемов, А.Ю. Мартынович, ЖЭТФ **109**, 265 (1996).
9. V. Cataudella, P. Minnhagen, Physica **C166**, 442 (1990).
10. P. Minnhagen, P. Olsson, Phys. Rev. **B44**, 4503 (1991).
11. M.-S. Choi, S.-L. Lee, Phys. Rev. **B51**, 6680 (1995).
12. G.M. Wysin, A.R. Bishop, F.G. Mertens, Phys. Rev. **B39**, 11840 (1989).
13. A.S.T. Pires, A.R. Pereira, M.E. Gouvêa, Phys. Rev. **B49**, 9663 (1994).
14. H.J. Jensen, P. Minnhagen, Phys. Rev. Lett. **66**, 1630 (1991).
15. S.W. Pierson, O.T. Valls, Phys. Rev. **B45**, 13076 (1992).
16. W.E. Lawrence, S. Doniach, in: Proc. of the 12th International Conference on Low-Temperature Physics, Kyoto, 1970, E. Kanda (ed.), Keigaku, Tokyo (1970), p. 361.
17. L. Benfatto, C. Castellani, T. Giamarchi, Phys. Rev. Lett. **98**, 117008 (2007).
18. E.H. Brandt, Rep. Prog. Phys. **58**, 1465 (1995).
19. B. Horowitz, Phys. Rev. Lett. **67**, 378 (1990).
20. J.V. Kosterlitz, J. Phys. **C7**, 1046 (1974).
21. S.W. Pierson, Phil. Mag. **B76**, 715 (1997).
22. G. Zumbach, Phys. Rev. Lett. **71**, 2421 (1993).

А.М. Артемов

## ШАРУВАТИЙ НАДПРОВІДНИК ЯК СИСТЕМА КУЛОНІВСЬКИХ ЧАСТОК ДВОХ ТИПІВ

Термодинамічні властивості шаруватих надпровідників з джозефсонівським зв'язком аналізуються в рамках моделі Лоуренса–Доніака у лондонівському наближенні. Показано, що в такому наближенні ці надпровідники можна розглядати як систему класичних безмасових часток двох типів, взаємодіючих між собою. Велика статсума системи аналізується за методом ренормалізаційної групи у реальному просторі. Показано, що у такій системі відсутній фазовий перехід Березинського–Костерліца–Таулеса.

**Ключові слова:** шаруватий надпровідник, модель Лоуренса–Доніака, 2D-вихор, джозефсонівський зв'язок, фазовий перехід

*A.N. Artemov*

## LAYERED SUPERCONDUCTOR AS A SYSTEM OF COULOMB PARTICLES OF TWO TYPES

Thermodynamic properties of layered superconductors (LS) with Josephson coupling are analysed in framework of the Lawrence–Doniach model in the London approximation. It is shown that in this approximation the LS can be considered as a system of classical massless Coulomb particles of two types interacting with each other. The grand partition function of the system is analysed by means of real space renormalization group (RG) approach. It is shown that in such a system the Berezinskii–Kosterlitz–Thouless phase transition is absent.

**Keywords:** layered superconductor, Lawrence-Doniach model,  $2D$ -vortex, Josephson coupling, phase transition

**Fig. 1.** Phase portraits of the  $2D$ -vortex (*a*) and fluxon particle (*b*) system. The dashed lines show separatrices near stationary saddle points

**Fig. 2.** Projections of three-dimensional phase curves of the system of RG equations (9)–(11). The same numbers mark projections of one line. The dashed lines show projections of system trajectories having no analogues among trajectories of independent systems (12) and (13) of Fig. 1