

PACS: 41.20.Jb

И.Р. Венгеров

## ДИФFUЗИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины  
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина

Статья поступила в редакцию 16 мая 2008 года

*Для неоднородных в пространстве (с зависящими от координат  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ) и во времени ( $\varepsilon = \varepsilon(t)$ ,  $\mu = \mu(t)$ ,  $\sigma = \sigma(t$ )) одномерных электромагнитных полей получены диффузионные и телеграфные уравнения, ранее известные только для однородных сред. Выведены уравнения полей для случаев нелинейности и слабой нелокальности (квазилокальности) систем.*

### 1. Введение

Исторически сложившаяся парадигма теории электромагнитных полей в сплошных средах является, фактически, таковой для электромагнитных волн [1–3]. В сложных системах (композитах, гетероструктурах, непрерывно- и слоисто-неоднородных) с отличной от нуля проводимостью электромагнитные поля (ЭМП) должны описываться следующими из уравнений Максвелла диффузионными (при пренебрежении током смещения по сравнению с током проводимости) или телеграфными уравнениями (при учете обеих проводимостей) [4,5]. Моделей этого типа мало, для неоднородных, нестационарных, нелинейных и квазилокальных (слабонелокальных) систем они отсутствуют.

В последнее время все большую роль начинают играть неоднородные твердотельные структуры, которые, в частности, могут быть созданы с помощью высоких давлений. Адекватное описание процессов распространения ЭМП в таких сложных системах заключается в построении и исследовании математических моделей – краевых задач для диффузионных и телеграфных уравнений для полей  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ .

В настоящей работе на основе уравнений Максвелла выводятся одномерные уравнения для  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  в неоднородных (пространственно и во времени – нестационарных), нелинейных и квазилокальных системах.

### 2. Пространственно-неоднородные системы

Система уравнений Максвелла и уравнений состояния в отсутствие сторонних токов и зарядов имеет вид (в гауссовой системе) [5]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \quad (3)$$

В (1)–(3) использованы общепринятые обозначения. В одномерном случае, когда  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, t)$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$ ,  $\partial_y = \partial_z = 0$ , эти уравнения можно записать в виде

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\sigma E_y + \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H_y)}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{4\pi}{c}\sigma E_z + \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H_z)}{\partial t}. \quad (5)$$

Рассмотрим непрерывно-неоднородные системы, для которых  $\varepsilon = \varepsilon(x)$ ,  $\mu = \mu(x)$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  – дифференцируемые функции. Исключая из (4), (5)  $H_y$  и  $H_z$ , находим:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\right)\frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\varepsilon(x)\mu(x)}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}\right)\frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) для  $E_y$  и  $E_z$  идентичные, «расщепленные» и содержат «конвективные» члены  $\sim \partial E_i/\partial x$  ( $i = y, z$ ). В отличие от них уравнения для  $H_y$  и  $H_z$  не «расщепляются»: в уравнения для  $H_y$  входят члены  $(4\pi d\sigma/cdx)E_z$  и  $(d\varepsilon/cdx)\partial E_z/\partial t$ , а в уравнения для  $H_z$  – аналогичные члены с  $E_y$ . Поэтому при решении конкретных задач целесообразно исходить из (6), (7), а  $H_y$  и  $H_z$  находить из вторых уравнений (4), (5).

В случае слоисто-неоднородных систем, когда  $\varepsilon(x)$ ,  $\mu(x)$ ,  $\sigma(x)$  – кусочно-постоянные функции, уравнения (6), (7) радикально упрощаются (члены с  $d\mu/\mu dx$  выпадают) и переходят в телеграфные уравнения с постоянными коэффициентами.

### 3. Нестационарные системы

Пусть  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ ,  $\mu = \mu(t)$  – непрерывные, дважды дифференцируемые по  $t$  функции времени, а  $\sigma = \sigma(t)$  – однократно (по крайней мере) дифференцируемая. Учитывая это в (4), (5), дифференцируя первое из уравнений (4) по  $x$  и исключая  $E_y$  с помощью второго уравнения (5), получаем:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \Psi_0(t)H_z + \Psi_1(t)\frac{\partial H_z}{\partial t} + \Psi_2(t)\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (8)$$

где

$$\Psi_0(t) = \frac{4\pi\sigma(t)\dot{\mu}(t)}{c^2} + \frac{\dot{\varepsilon}(t)\dot{\mu}(t)}{c^2} + \frac{\varepsilon(t)\ddot{\mu}(t)}{c^2},$$

$$\Psi_1(t) = \frac{4\pi\sigma(t)\mu(t)}{c^2} + 2\frac{\varepsilon(t)\dot{\mu}(t)}{c^2} + \frac{\mu(t)\dot{\varepsilon}(t)}{c^2}, \quad \Psi_2(t) = \frac{\varepsilon(t)\mu(t)}{c^2}, \quad (9)$$

а точка над функцией обозначает дифференцирование ее по  $t$ . Уравнение для  $H_y$ , имеет такой же вид, а для  $E_y, E_z$  аналогичным образом из (4), (5) находим:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \phi_0(t)E_i + \phi_1(t)\frac{\partial E_i}{\partial t} + \phi_2(t)\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2}, \quad i = y, z, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= \frac{4\pi}{c^2}(\mu(t)\dot{\sigma}(t) + \sigma(t)\dot{\mu}(t)) + \frac{\dot{\varepsilon}(t)\dot{\mu}(t)}{c^2} + \frac{\mu(t)\ddot{\varepsilon}(t)}{c^2}, \\ \phi_1(t) &= \frac{4\pi}{c^2}\mu(t)\sigma(t) + 2\frac{\mu(t)\dot{\varepsilon}(t)}{c^2} + \frac{\varepsilon(t)\dot{\mu}(t)}{c^2}, \quad \phi_2(t) = \Psi_2(t) = \frac{\varepsilon(t)\mu(t)}{c^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (8) и (10) при постоянных параметрах ( $\varepsilon, \mu, \sigma = \text{const}$ ) также переходят в «канонические» телеграфные уравнения, становящиеся, в свою очередь, диффузионными при элиминации тока смещения (что формализуется условием  $\varepsilon = 0$ ).

#### 4. Нелинейные системы

В сильных полях  $\varepsilon = \varepsilon(|\mathbf{E}|)$ ,  $\mu = \mu(|\mathbf{H}|)$ ,  $\sigma = \sigma(|\mathbf{E}|)$  и система уравнений Максвелла становится нелинейной [5,6]. Случай одновременной зависимости всех параметров от величин полей ведет к весьма сложным, трудно реализуемым даже численно, моделям, поэтому ограничимся рассмотрением хорошо проводящей среды, током смещения в которой можно пренебречь.

Рассмотрим случаи: 1)  $\sigma = \text{const}$ ,  $\mu = \mu(|\mathbf{H}|)$ ; 2)  $\sigma = \sigma(|\mathbf{E}|)$ ,  $\mu = \text{const}$ . В первом случае из (4), (5) получаем:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} F_\mu(|\mathbf{H}|, H_i) \frac{\partial H_i}{\partial t}, \quad F_\mu(|\mathbf{H}|, H_i) = \mu(|\mathbf{H}|) + \frac{d\mu}{d|\mathbf{H}|} \frac{\partial |\mathbf{H}|}{\partial H_i} H_i, \quad (12)$$

где  $i = y, z$ . Для  $E_i$  ( $i = y, z$ ) уравнения более сложны, чем (12), потому что для их определения целесообразен подход, рекомендованный для нахождения  $H_i$  в неоднородных системах.

Во втором случае аналогично получаем:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \frac{4\pi\mu}{c^2} F_\sigma(|\mathbf{E}|, E_i) \frac{\partial E_i}{\partial t}, \quad F_\sigma(|\mathbf{E}|, E_i) = \sigma(|\mathbf{E}|) + \frac{d\sigma}{d|\mathbf{E}|} \frac{\partial |\mathbf{E}|}{\partial E_i} E_i, \quad (13)$$

где  $i = y, z$ . Здесь, напротив, более просты уравнения для  $E_i$  (13), а компоненты  $\mathbf{H}$  лучше находить из уравнений (4), (5).

#### 5. Квазилокальные (слабонелокальные) системы

Нелокальные модели ЭМП в сегнетоэлектриках, ферромагнетиках, сверхпроводниках рекомендуется строить на основе линейных уравнений Максвелла и нелокальных (содержащих интегральные операторы) уравне-

ний состояния [7]. Рассмотрим, полагая  $\mu = \text{const}$  и следуя [7], случай пространственной нелокальности закона Ома и временной – связи  $\mathbf{D}$  с  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{j}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_j(|x-x'|) \mathbf{E}(x', t) dx', \quad \mathbf{D}(x, t) = \int_0^t K_D(t-t') \mathbf{E}(x, t') dt'. \quad (14)$$

Здесь  $K_j, K_D$  – ядра интегральных операторов, определяемых микроскопической теорией или экспериментом. В последнем случае гораздо легче найти первые моменты ядер – постоянные параметры, определяющие связи (14) приближенно. Если считать обычные, локальные соотношения первым приближением в (14), то во втором приближении эти уравнения дают:

$$j_i(x, t) = \sigma_0 E_i(x, t) + \sigma_2 \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2}, \quad i = y, z, \quad \sigma_0, \sigma_2 = \text{const}, \quad (15)$$

$$D_i(x, t) = \varepsilon_0 E_i(x, t) + \varepsilon_1 \frac{\partial E_i}{\partial t}, \quad i = y, z, \quad \varepsilon_0, \varepsilon_1 = \text{const}. \quad (16)$$

Здесь  $\varepsilon_0, \sigma_0$  – нулевые,  $\varepsilon_1$  – первый,  $\sigma_2$  – второй моменты ядер  $K_j$  и  $K_D$ .

Подставляя (15), (16) в (4), (5) и исключая описанным ранее способом компоненты электрического поля, для компонент магнитного находим:

$$\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma_0\mu}{c^2} \frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0\mu}{c_2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma_2\mu}{c_2} \frac{\partial^3 H_i}{\partial t \partial x^2} + \frac{\varepsilon_1\mu}{c_2} \frac{\partial^3 H_i}{\partial t^3}, \quad (17)$$

где  $i = y, z$ . Уравнения для  $E_y, E_z$  совпадают с (17), которое описывает слабую нелокальность (квазилокальное второе приближение). При элиминации нелокальности ( $\varepsilon_1 = \sigma_2 = 0$ ) (17) переходит в «каноническое» телеграфное уравнение.

## 6. Выводы

К настоящему моменту нет моделей диффузионного (неволнового) распространения электромагнитных полей в сложных твердотельных системах. Их построение и исследование возможно на основе краевых задач для уравнений диффузии и телеграфных уравнений. Эти уравнения для неоднородных, нестационарных, нелинейных и слабонелокальных (квазилокальных) систем получены в настоящей работе. Построенные нами соотношения в предельных случаях переходят в известные из литературы уравнения.

1. В.М. Дуков, Электродинамика. (История и методология макроскопической электродинамики), Высшая школа, Москва (1975).
2. Г.А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных полей, Изд-во АН СССР, Москва–Ленинград (1948).
3. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, Вып. 6. Электродинамика, Мир, Москва (1966).

4. *В.Г. Левич*, Курс теоретической физики, Т. 1, Наука, Москва (1969).
5. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц*, Электродинамика сплошных сред, Наука, Москва (1982).
6. *Л.А. Бессонов*, Теоретические основы электродинамики. Электромагнитное поле, Высшая школа, Москва (1986).
7. *А.А. Власов*, Макроскопическая электродинамика, Гостехтеориздат, Москва (1955).

*I.R. Vengerov*

#### DIFFUSION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN NONUNIFORM SOLIDS

Diffusion and telegraph equations known till now solely for homogeneous media have been derived for space- ( $\epsilon$ -,  $\mu$ -,  $\sigma$ -dependent) and time- ( $\epsilon = \epsilon(t)$ ,  $\mu = \mu(t)$ ,  $\sigma = \sigma(t)$ ) non-uniform one-dimensional electromagnetic fields. Field equations have been also obtained for nonlinear systems and those of low nonlocality